

GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE
15ème Colloque Annuel – Paris – 1980

COMPORTEMENTS RHEOLOGIQUES
ET STRUCTURE DES MATERIAUX

RHEOLOGICAL BEHAVIOUR
AND STRUCTURE OF MATERIALS

textes réunis par
Christian HUET et André ZAOUÏ

préface de Jean MANDEL

EDITIONS
ANCIENS ENPC

CAHIERS DU GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE
numéro spécial – octobre 1981
15ème Colloque Annuel du Groupe Français de Rhéologie
Paris – 3-4-5 décembre 1980

COMPORTEMENTS RHEOLOGIQUES ET STRUCTURE DES MATERIAUX

RHEOLOGICAL BEHAVIOUR AND STRUCTURE OF MATERIALS

textes réunis par

Christian HUET

Directeur du Centre d'Enseignement et de Recherches
en Matériaux de Construction
de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
Président du Groupe Français de Rhéologie

et

André ZAOUÏ

Professeur à l'Université de Paris-Nord
Vice-Président du Groupe Français de Rhéologie

préface de

Jean MANDEL

Président-fondateur et Membre d'Honneur
du Groupe Français de Rhéologie

EDITIONS
ANCIENS ENPC

TABLE DES MATIERES

CONTENTS

PREFACE	7
J. MANDEL	
AVANT-PROPOS	9
C. HUET	
1ère SESSION	
PROPRIETES LINEAIRES DES MILIEUX ALEATOIRES : LA THEORIE SYSTEMATIQUE – LINEAR PROPERTIES OF RANDOM MEDIA - THE SYSTEMATIC THEORY	15
E. KRÖNER	
REPRESENTATION PAR LES LOIS DE FARRIS DU COMPORTEMENT VISCO-ELASTIQUE NON LINEAIRE D'UN MATERIAU CHARGE – REPRESENTATION BY FARRIS' LAWS OF THE NON LINEAR VISCOELASTIC BEHAVIOR OF A FILLED MATERIAL	41
C. MARTIN, P. RACIMOR, M. LE ROY, M. QUIDOT	
PROPRIETES VISCOELASTIQUES, STRUCTURE ET ACTION DES COMPOSITES ABRASIFS – VISCOELASTIC PROPERTIES, STRUCTURE AND ACTION OF ABRASIVE COMPOSITES	57
T. MATHIA, C. FAYOLLE	
COMPORTEMENT MECANIQUE ET STRUCTURE DES ROCHES – MECHANICAL BEHAVIOUR AND STRUCTURE OF ROCKS	73
R. HOUPERT, F. HOMAND-ETIENNE	
2ème SESSION	
METHODES D'HOMOGENEISATION EN MECANIQUE DES SOLIDES – HOMOGENIZATION METHODS IN THE MECHANICS OF SOLIDS	87
P.-M. SUQUET	

Toute reproduction, même partielle, de cet ouvrage est interdite.
Une copie ou une reproduction par quelque procédé que ce soit,
photographie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, consti-
tue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars
1957 sur la protection des droits d'auteur.

ouvrage paru en novembre 1981 © 1981

Association Amicale des Ingénieurs
Anciens Elèves de l'E.N.P.C.
28 rue des Saints-Pères
75007 Paris
Tél. 260 34 13 et 260 14 80

ISBN 2-85978-034-3

L'ETAT FLOCCULENT DES PATES DE CIMENT AVANT PRISE ET SES CONSEQUENCES SUR LE COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE – THE FLOCCULENT STATE OF CEMENT PASTES BEFORE SETTING AND ITS CONSEQUENCES ON RHEOLOGICAL BEHAVIOUR C. LEGRAND	129
COMPORTEMENTS RHEOLOGIQUES CARACTERISTIQUES DES BETONS FRAIS – TYPICAL RHEOLOGICAL BEHAVIOURS OF FRESH CONCRETE J.M. RIGO	137
COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DE REVETEMENTS DE PROTECTION A BASE DE BITUME OXYDE – RHEOLOGICAL BEHAVIOUR OF PROTECTIVE COATINGS BASED ON OXIDIZED BITUMEN A. PAPO, V. GARZITTO, F. STURZI	149
ETIRAGE A CHAUD ET A FROID DE MELANGES DE POLYETHYLENE HAUTE DENSITE ET DE POLYPROPYLENE ISOTACTIQUE – COLD AND HOT DRAWING OF HIGH DENSITY POLYETHYLENE-ISOTACTIC POLYPROPYLENE BLENDS R. GRECO, MA RONG TANG, S. CIMMINO, G. RAGOSTA	159

3ème SESSION

METHODES SELF-CONSISTENTES EN MECANIQUE DES SOLIDES HETEROGENES – SELF-CONSISTENT SCHEMES FOR HETEROGENEOUS SOLID MECHANICS M. BERVEILLER, A. ZAQUI	175
SUR L'EQUILIBRE ET LE FLUAGE PROGRESSIF D'UN MILIEU HETEROPLASTIQUE ISOTROPE SOU MIS A UN CHARGEMENT PROPORTIONNEL LENTEMENT CROISSANT – ON THE STABILITY AND PROGRESSIVE CREEP OF AN HETEROPLASTIC ISOTROPIC MEDIUM, SUBMITTED TO A PROPORTIONAL LOAD WHICH INCREASES SLOWLY R. MAZET	201

RHEOLOGIE DES MATERIAUX SUPERPLASTIQUES – RHEOLOGY OF SUPERPLASTIC MATERIALS M. SUERY, B. BAUDELET	211
INFLUENCE DU DURCISSEMENT INTRACRISTALLIN ET DES INTERFACES SUR LA PLASTICITE A FROID DES METAUX PURS – THE INFLUENCE OF INTRACRYSTALLINE HARDENING AND INTERFACES ON PURE METALS PLASTIC BEHAVIOUR C. REY, P. FRANCIOSI	219

4ème SESSION

REMARQUES SUR LA PROCEDURE D'ASSIMILATION D'UN MATERIAU HETEROGENE A UN MILIEU CONTINU EQUIVALENT – REMARKS ON ASSIMILATION OF A HETEROGENEOUS MATERIAL TO A CONTINUOUS MEDIUM C. HUET	231
ETUDE DE L'ENDOMMAGEMENT DANS LES MATERIAUX COMPOSITES UNIDIRECTIONNELS – A STUDY OF DAMAGE IN UNIDIRECTIONAL COMPOSITE MATERIALS H. AYTAC, J. RENARD, G. VERCHERY	247
INTERACTION ENTRE L'ECROUISSAGE ET L'ENDOMMAGEMENT EN FATIGUE PLASTIQUE – INTERACTION BETWEEN STRAIN-HARDENING AND DAMAGE DURING PLASTIC FATIGUE G. CORDIER, K. DANG VAN	265

5ème SESSION

STRUCTURE ET COMPORTEMENT DES MATERIAUX GRANULAIRES – STRUCTURAL ANALYSIS AND BEHAVIOUR OF GRANULAR MEDIA B. CAMBOU	275
---	-----

MODELE RHEOLOGIQUE D'UN SABLE SOU MIS A DIVERS TRAJETS DE CHARGE – A RHEOLOGICAL MODEL FOR SAND UNDER VARIOUS LOAD PATHS M.P. LUONG, B. LORET	295
COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE ET REARRANGEMENT DES GRAINS D'UN MATERIAU PULVERULENT – RHEOLOGICAL BEHAVIOUR AND ROTATION OF THE GRAINS OF A GRANULAR MEDIUM J.C. ROBINET, H. DI BENEDETTO, A. SMADI	307
DISTRIBUTION DES EFFORTS SUR LES PARTICULES D'UN MILIEU GRANULAIRE SOU MIS A UN CHAMP ISOTROPE – DISTRIBUTION OF THE CONTACT FORCES BETWEEN THE PARTICLES OF A GRANULAR MEDIUM UNDER ISOTROPIC PRESSURE J.C. FAUGERAS, R. GOURVES	321
COMPORTEMENT MECANIQUE DES MILIEUX GRANULAIRES EN LIAISON AVEC LEUR STRUCTURE – MECHANICAL BEHAVIOUR OF GRANULAR MEDIA IN RELATION WITH THEIR STRUCTURE F. DARVE, S. LABIANEH	329
LISTE DES AUTEURS – LIST OF AUTHORS	342

PREFACE

J. MANDEL

Que le comportement des matériaux soit lié à leur structure est bien évident. Moins évident est le degré de finesse auquel il convient d'examiner celle-ci pour obtenir des résultats utilisables à notre échelle. Certes les mouvements d'une montagne ne sont pas sans relation avec la nature des atomes qui la constituent, mais la connaissance des couches qui la composent, des failles qui les traversent, est plus directement importante. Mais restons-en à l'échantillon essayé au laboratoire. De l'atome à la molécule, de la molécule à la fibre, puis au textile - ou de l'atome au cristal avec ses défauts puis au polycristal (le métal, la roche), que d'étapes à franchir ! Or, on le verra, le changement d'échelle est toujours un problème difficile. Pour le rhéologue ou l'ingénieur soucieux de l'application, une bonne règle paraît donc être de se placer au niveau le plus élevé auquel apparaissent les fluctuations des propriétés globales ou macroscopiques.

Le passage à l'échelle macroscopique peut alors être obtenu par différents types d'approche. L'approche déterministe est possible lorsque la structure est périodique, comme le montre P. Suquet pour différentes classes de matériaux. Deux méthodes sont exposées : la méthode des moyennes et celle des développements asymptotiques.

L'approche statistique s'impose lorsque la structure est aléatoire. Elle est décrite par E. Kröner. Pour un matériau élastique hétérogène il est possible d'obtenir formellement les modules effectifs du milieu homogène équivalent lorsque les corrélations de tous ordres entre les modules élastiques aux différents points du milieu sont supposées connues -et des bornes inférieures ou supérieures lorsque l'information statistique est limitée aux corrélations d'ordre $\leq n$. Les formules deviennent explicites pour les milieux dits statistiquement désordonnés. Il se trouve que le désordre parfait conduit (en élasticité) aux mêmes résultats que le schéma dit self-consistant.

Ce dernier schéma qui constitue une approche statistique simplifiée, est utilisé par M. Berveiller et A. Zaoui pour décrire le comportement élastoplastique d'un matériau biphasé et notamment d'une matrice renfermant des inclusions, soit isolées, soit disposées par paires.

Toujours dans la même ligne d'idées, C. Huet souligne que les propriétés d'un ensemble ne s'obtiennent pas en prenant simplement les valeurs moyennes de celles des constituants. Les fluctuations de celles-ci font apparaître des termes irréductibles (qui en fait correspondent à des propriétés nouvelles). L'exemple des contraintes de Reynolds en fluide turbulent est bien connu. De même il n'est pas toujours sûr que le comportement d'un agrégat hétérogène puisse être identifié à celui d'un matériau homogène dit équivalent. C'est bien exact cependant pour un milieu périodique dont la période spatiale tend vers zéro et pour un milieu aléatoire statistiquement homogène au sens de E. Kröner - en négligeant dans les deux cas une mince couche limite qui borde la surface de l'éprouvette.

Si j'ai insisté sur ces différents traitements du problème du changement d'échelle, c'est parce qu'ils m'ont paru être un des apports remarquables du Colloque. Mais bien d'autres thèmes méritent aussi de retenir l'attention du lecteur par leur nouveauté ou les développements récents qu'ils ont reçus. Ainsi par exemple de l'endommagement et du comportement des milieux granulaires, qui ont fait l'objet d'une dizaine de communications.

La variété des sujets abordés dans ce livre est trop grande pour que nous les citions tous. Il est agréable de relever que des chercheurs venus d'horizons très divers : biologistes, chimistes, géologues, physiciens, mécaniciens ont apporté leur contribution, pour l'enrichissement de tous. Qu'ils en soient remerciés ! Grâce à eux ce volume constitue un document de base pour les recherches futures en Rhéologie.

AVANT-PROPOS

C. HUET

Président du Groupe Français de Rhéologie

Comportements rhéologiques et structure des matériaux, tel est le thème choisi par le Groupe Français de Rhéologie pour son 15^e Colloque annuel, qui s'est tenu à PARIS du 3 au 5 décembre 1980.

Ce n'est pas la première fois que le Groupe se penche sur ce thème, puisque trois Colloques annuels lui furent consacrés dans les cinq premières années du Groupe :

- 1^{er} : Rhéologie des systèmes à deux phases (1965);
- 4^e : Rhéologie en relation avec la structure (1968),
- 5^e : Comportement mécanique des matériaux composites (1969).

Cela faisait cependant onze ans qu'il n'y avait pas eu de Colloque du Groupe organisé sur ce sujet. Pourtant, durant cette période, les progrès ont été considérables, tant par l'élargissement de l'éventail des matériaux dont l'étude a été abordée, par les progrès effectués au niveau des moyens d'observation et d'identification des structures, par ceux des moyens de calcul et des capacités de modélisation de comportements complexes, que par l'exploitation des résultats obtenus dans certains domaines des mathématiques et de la physique.

L'importance du nombre de communications reçues à ce Colloque, et qui a conduit à en porter la durée à deux journées et demi, démontre l'intérêt soulevé par ce thème.

Cet intérêt est au moins double. En effet, le thème vise tout d'abord à la compréhension des phénomènes si divers et si complexes que le rhéologue est habitué à observer sur le plan expérimental.

Mais à partir de là, il vise surtout à orienter vers une meilleure modélisation qui permettra d'exploiter dans les dimensionnements de pièces ou d'ouvrages les lois de comportement ainsi reconstituées, de prévoir des phénomènes nouveaux pouvant apparaître éventuellement dans des conditions particulières, de se rendre capable d'évaluer a priori le comportement d'un matériau à partir d'informations fournies sur sa constitution et sa configuration internes, et enfin de se rendre capable de modifier le comportement dans le sens désiré par action sur les paramètres de constitution et de configuration.

Tout ceci fait de ce thème un élément d'une importance primordiale du point de vue des applications industrielles, et ses implications techniques et économiques sont considérables.

Le Colloque a été organisé en cinq sessions d'une demi-journée. Les travaux étaient dirigés par cinq Présidents de séance qui disposaient de toute l'autorité nécessaire puisqu'ils étaient tous anciens Présidents du Groupe (dont ils formaient, circonstance remarquable, un échantillon exhaustif).

Le Colloque a réuni plus d'une centaine de participants, qui ont bénéficié de vingt communications particulières et de trois conférences générales, et nous

remercions l'École de Physique et Chimie Industrielle pour sa généreuse hospitalité.

Une vingt unième communication particulière, préparé par nos collègues napolitains, R. GRECO, MA RONG TANG, S. CIMMINO et G. RAGOSTA, n'a pu faire l'objet de communication orale du fait de la catastrophe naturelle qui avait durement frappé leur ville et leur région très peu de temps avant la tenue du Colloque (et quelques semaines après que cette ville ait accueilli le huitième congrès International de Rhéologie, où s'étaient trouvés réunis plus de 600 Rhéologues). L'ensemble des participants et des organisateurs s'est montré unanime à leur témoigner sa sympathie et celle du Groupe. Nous sommes heureux de publier dans le présent ouvrage le texte de leur communication, qu'ils ont bien voulu rédiger dans cette intention malgré les difficultés de la situation, ce dont nous les remercions chaleureusement.

Nos remerciements vont également aux autres auteurs de communications et, à tous les participants à ce Colloque. Nous remercions particulièrement les auteurs des trois conférences générales, MM. KRÖNER, SUQUET, ZAOUÏ et BERVEILLER. Nous remercions, en outre, tout spécialement le Professeur EKKEHART KRÖNER, dont les nombreux et importants travaux sur la théorie des milieux hétérogènes font autorité, d'avoir accepté l'invitation du Groupe.

Bien que de caractère national, ce Colloque s'est trouvé honoré de la participation de représentants de divers pays voisins, et notamment de l'Allemagne, de la Belgique, de l'Italie et du Portugal.

Nous devons encore remercier les membres du bureau et du Conseil du Groupe qui ont participé à la préparation de ce Colloque, et tout particulièrement notre Vice-Président, le Professeur André ZAOUÏ, qui en a été l'organisateur et la cheville ouvrière, tant dans l'établissement du programme, les contacts avec les auteurs et les participants, que dans la collecte des manuscrits.

A ce sujet nous nous félicitons de ce que la quasi-totalité des auteurs de communications aient pu nous faire parvenir un texte en vue de la présente publication des comptes-rendus du Colloque.

Il était de tradition que ces comptes-rendus fassent chaque année l'objet d'un numéro des Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, qui paraissent régulièrement depuis 1965, qui contiennent les textes de toutes les conférences prononcées devant le Groupe, et qui sont adressés à tous les membres du Groupe auxquels ils se trouvent réservés.

Il nous a semblé souhaitable de chercher à élargir la diffusion de ces comptes-rendus, qui bien souvent suscitent encore l'intérêt plusieurs années après leur parution comme l'indiquent les demandes qui nous parviennent.

C'est pourquoi nous remercions vivement le Département Edition de l'Association des Anciens Elèves de l'École Nationale des Ponts et Chaussées qui, conformément à la vocation de promotion de la technique et de la science françaises qu'elle s'est donnée dans divers domaines depuis plusieurs années, a accepté de prendre en charge l'édition des présents comptes-rendus, sous la forme du présent ouvrage qui devrait se révéler utile à l'ensemble de la collectivité scientifique et technique.

Enfin, nous invitons le lecteur, désireux de mieux connaître le Groupe ou de participer à son activité, à prendre connaissance de la documentation succincte et des informations pratiques qu'il trouvera à ce sujet dans le présent volume.

SESSION 1

La session est ouverte sous la présidence de

J. MANDEL

Ancien Président du Groupe Français de Rhéologie

Sont intervenus MM. :

E. KRÖNER

C. MARTIN, P. RACIMOR, M. LE ROY et M. QUIDOT

T. MATHIA et C. FAYOLLE

R. HOUPERT et F. HOMAND-ETIENNE

LINEAR PROPERTIES OF RANDOM MEDIA - THE SYSTEMATIC THEORY

PROPRIETES LINEAIRES DES MILIEUX ALEATOIRES : LA THEORIE SYSTEMATIQUE

E. KRÖNER

Institut für Theoretische und Angewandte Physik der Universität Stuttgart
und Max-Planck-Institut für Metallforschung - Stuttgart - RFA

ABSTRACT

The present stage of the systematic theory of the linear properties theory of media with random constitution is discussed. Illustrations are mostly given with respect to elasticity. "Systematic theory" means that the statistical information on the constitution is given in terms of correlation functions of increasing order. Ways of obtaining these functions from experiment or model calculations are discussed. Precise expectation values of effective material parameters can, at least formally, be calculated, if the statistical information is *complete*. Otherwise upper and lower bounds of various orders can be obtained. The classes of statistically decoupled and statistically disordered materials are introduced. These lead to a reduction of complexity. Explicit results on such materials are reported. The theory is extended to situations in which the external sources too are randomly distributed. A formal solution is given to the problem of calculating the mean physical field (e.g. stress or displacement) as well as the correlations between the physical field on the one hand and the sources and material parameters on the other. Suitably interpreted, this solution also applies to dynamic situations.

RESUME

On discute l'état actuel de la théorie systématique des propriétés linéaires des milieux de constitution aléatoire. La plupart des illustrations concernent l'élasticité. Le terme de «théorie systématique» signifie que l'information statistique sur la constitution est donnée sous forme de fonctions de corrélation d'ordre croissant. On discute la façon d'obtenir ces fonctions à partir de l'expérience ou de calculs issus de modèles. Des valeurs précises d'espérance mathématique de paramètres matériels effectifs peuvent, au moins formellement, être calculées si l'information statistique est *complète*. Autrement, on peut obtenir des bornes supérieures et inférieures d'ordres variés. On introduit les classes de matériaux statistiquement découplés et statistiquement désordonnés, ce qui conduit à une réduction de complexité. On rapporte des résultats explicites pour de tels matériaux. La théorie est étendue aux situations dans lesquelles les sollicitations extérieures sont, elles aussi, distribuées de manière aléatoire. On donne une solution formelle au problème du calcul de champ physique moyen (par exemple, champ de contraintes ou de déplacement) ainsi que les corrélations entre le champ physique d'une part et les sollicitations et paramètres matériels d'autre part. Interprétée convenablement, cette solution s'applique également à des situations dynamiques.

1. INTRODUCTION

The notion of the material continuum concerns one of those idealizations which are very useful for the quantitative description of the properties and the behaviour of actual materials in all possible physical situations. Here we are interested in materials in which the local physical properties vary on a microscale in a more or less random fashion. It will be stated more precisely in section 2 what we understand by "more or less random". For the moment it suffices to demand that the methods of statistical physics are applicable.

Examples of materials of the here considered type are above all polycrystals and disordered composites. These materials are distinguished by the existence of certain domains through which the parameters describing the properties are homogeneously distributed. For the simplicity of our presentation we shall restrict ourselves to materials with such a domain structure. It is emphasized, however, that most of the results are valid also in situations in which the material parameters vary (microscopically) continuously through the medium. As has been shown by Stamm /1/, the methods to be described below are even applicable to (disordered) alloys, atomic solutions and amorphous metals.

Certain physical properties require a rather complex description even in a materially uniform medium. These are above all the nonlinear and the irreversible properties such as plasticity and ferromagnetism. Linear properties are simpler treated due to the then valid principle of superposition of solutions. This principle allows us to construct quite general solutions by means of the powerful method of Green functions. These functions represent the relevant field at position \underline{r} produced by a source concentrated in a point \underline{r}' . In elasticity theory, for instance, this source is a point force, and the Green function, here tensor valued, is sometimes called the Kelvin-Somigliana-tensor /2/, if the medium is infinite, local (see below), homogeneous and isotropic. This function has the form /2/

$$S_{ij}(\underline{r}, \underline{r}') = S_{ij}(\underline{r} - \underline{r}') = \frac{1}{8\pi\mu(3\kappa + 4\mu)} [(3\kappa + 4\mu)\delta_{ij} + (3\kappa + \mu)e_i e_j] \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (1)$$

where κ and μ are compression and shear modulus and $e_i \equiv (x_i - x'_i) / |x_i - x'_i|$ is the unit vector pointing from point \underline{r}' with cartesian coordinates x'_i to point \underline{r} with cartesian coordinates x_i .

The theory described below uses widely the formalism of Green functions and insofar seems to be restricted to linear properties. There are cases, however, in which nonlinear problems can be treated by the iterative solution of a related linear problem, and then also these problems can be solved by means of Green functions. In other cases it might be possible to dissolve the nonlinear problem in to a sequence of different linear ones. To some extent, this is the case in the theory of plasticity when the stress-strain path is taken in incremental steps. In the interest of simplicity we shall not discuss further these complications but limit ourselves to linear material properties which can be specified by tensors which are spatially constant in the mentioned domains. Examples of such properties are elasticity, viscosity, thermal and electric conductivity, magnetic and electric susceptibility and thermal expansion. For illustration we use mainly elasticity.

A material property is called local when the response at point \underline{r} depends only on the action at the same point. This is, for instance, the case with the common Hooke's law of elasticity which relates the stress $\underline{\sigma}$ at \underline{r} to the strain $\underline{\epsilon}$ at the same point \underline{r} so that

$$\sigma_{ij}(\underline{r}) = C_{ijkl}(\underline{r}) \epsilon_{kl}(\underline{r}) \quad (2)$$

A nonlocal material property has the characteristics that the response at point \underline{r} depends also on the action at other - often at all other - points, say \underline{r}' , of the medium. The corresponding linear constitutive law of elasticity theory has the form

$$\sigma_{ij}(\underline{r}) = \int_V C_{ijkl}(\underline{r}, \underline{r}') \epsilon_{kl}(\underline{r}') dV' \quad (3)$$

where the integration extends over the volume V of the continuum. Obviously, (2) is a special case of (3) which reduces to (2) for $C_{ijkl}(\underline{r}, \underline{r}') = C_{ijkl}(\underline{r}) \delta(\underline{r}, \underline{r}')$. Integrals like in (3) which are of the convolution type occur frequently in this theory. To have a simple notation we use the common convolution symbol $*$ and write (3), which includes (2) as

$$\underline{\sigma} = \underline{C} * \underline{\epsilon} \quad (4)$$

In (4) \underline{C} plays the role of an integral operator with kernel $C_{ijkl}(\underline{r}, \underline{r}')$. This operator will be called the elastic operator.

Since the range of nonlocality of condensed matter is often of the order of a few atomic distances - it is much larger for instance in polymeric matter - we shall assume that the material parameters of the domains are of local nature. We shall see, however, that even in this case the global response, which often can be described by an effective property operator, say $\underline{C}^{\text{eff}}$, can be nonlocal. $\underline{C}^{\text{eff}}$ is the operator which relates the ensemble average stress $\langle \underline{\sigma} \rangle$ and $\langle \underline{\epsilon} \rangle$ according to

$$\langle \underline{\sigma} \rangle = \underline{C}^{\text{eff}} * \langle \underline{\epsilon} \rangle \quad (5)$$

The meaning of ensemble averaging is discussed in section 2.

Global nonlocality means that the kernel of $\underline{C}^{\text{eff}}$ is not of the delta type. As we shall see, a nonlocal situation arises when the distribution over the specimen of the material parameters is correlated over finite distances. It is not a difficult problem to construct actual materials with this property. Their special characteristics consist in the occurrence of a boundary layer with special properties. Such materials may even be useful for particular applications. Whereas many of our resulting formulae apply to nonlocal materials as well we shall not emphasize this further but concentrate on the more frequently occurring class of materials which behave local also on the macroscale.

In section 5 we shall discuss the results of the systematic theory of the effective properties of random media. These results are better given in form of operator equations than of tensor equations in space representation because the latter must be written with many subscripts and arguments which obscure the physical content of the equations. In actual calculations the transition to the more explicit tensor equations is easily performed.

Eqs. (1) - (5) were discussed on the example of the property elasticity. More generally, eqs. (4) and (5) can be interpreted as describing any linear material property. Such a property will often be represented by a tensor of rank different from 4. Clearly eqs. (2) and (3) which explain the meaning of eq. (4) have to be reinterpreted and adapted to the physical situation. This, however, is so evident that it will not be discussed here.

In the following we shall consider only those material operators that are positive (or negative) definite and self-adjoint. At least all properties listed above have such operators.

After these introductory remarks we can state one of the

basic problems of the theory of random media. It consists in the prediction of effective material parameters, given the suitable statistical information about the microstructure of the material. This, however, is just one aim. Other quantities, too, are of considerable interest, for instance the physical fields and those quantities which concern the fluctuations rather than the mean fields. We shall come back to this question in section 9.

The knowledge of the effective material parameters allows us to solve macroproblems, for instance boundary problems of random elastic media, as if they were homogeneous media.

The organization of this article is as follows: in section 2 we discuss the ergodic hypothesis which forms the indispensable basis of any statistical theory. Section 3 contains in particular an introduction of the notion of correlation function as the fundamental tool of providing statistical information in a systematic fashion. It is emphasized that correlation functions are physical quantities which are accessible to experimental determination. If the statistical information is given in a form other than by correlation functions then their calculation from the available information is desirable. This is discussed in section 4. Section 5 on the systematic theory reports the relevant results without giving explicit derivations. Brief additions are given in the appendix. How bounds for effective material parameters are obtained is shown in section 6. In sections 7 and 8 we introduce special classes of random media which can be treated more easily than the general random medium. These are the classes of statistically decoupled media and of statistically disordered media, both classified in grades measuring the degree of decoupling and disordering in terms of correlation functions. In these sections we also report on numerical results obtained for these media. In the concluding section 9 we comment briefly on extensions of the theory which allow us to include sources which are correlated with the distribution of the material parameters and also to calculate fluctuations of all sorts.

2. THE ERGODIC PROBLEM

The theory presented here deals with materials of a "more or less random" structure. More concretely, we demand that the stochastic nature of the constitution of the medium is well pronounced so that the methods of statistical physics are applicable. As usual in this field, the final equations describe ensembles of physical systems rather than single systems, and the predictions made from these equations occur in the form of expectations. These describe what is expected if the measurement of interest is performed on a system selected at random among those of the ensemble. The ensemble is defined as a collection of very many systems which are prepared identically from a macroscopic point of view, which on the other hand differ in the microscopic details of their constitution. In particular, all those quantities which are not random, i.e. not statistically fluctuating, are identical for all members of the ensemble. In the present article, these quantities are above all the shape of the medium and the sources producing the fields which describe the state of the body. In elasticity theory these sources are e.g. the volume and surface densities of the external forces acting on the system. In section 9 we shall indicate how the theory can be extended if also the sources vary in a stochastic manner.

An example of a measurement of interest is that of the stress tensor $\underline{\sigma}$ at a point \underline{r} which in each system is at a identical position. The ensemble average of all measured stress tensors at \underline{r} is denoted by $\langle \underline{\sigma}(\underline{r}) \rangle$ and defined by

$$\langle \underline{\sigma}(\underline{r}) \rangle = \frac{1}{N} \sum \underline{\sigma}(\underline{r}) \quad (6)$$

where the summation extends over all systems, N in number, of the ensemble. It is the fundamental requirement of the statistical continuum theories employed here that ensemble averages like $\langle \underline{\sigma}(\underline{r}) \rangle$ are smooth functions of position, although e.g. $\underline{\sigma}(\underline{r})$ is fluctuating and may even be discontinuous.

It is shown in texts on statistical continuum theories, for instance in that of Beran /3/, that, roughly speaking, this requirement is satisfied if a so-called ergodic hypothesis applies. In our case this hypothesis states that the above described ensemble average is equal to the volume average of the same quantity (here $\underline{\sigma}(\underline{r})$) taken over a neighborhood of the point \underline{r} in any one of the systems of the ensemble. The neighborhood must be large enough to ensure that averaging is not only meaningful but also independent of the shape and size of this neighborhood. It must, on the other hand, be small enough so that it can be considered infinitesimal from a macroscopic point of view. Statistical physics teaches us that these requirements demand that the constitution of the medium is "sufficiently stochastic".

The existence of smooth functions like $\langle \underline{\sigma}(\underline{r}) \rangle$ implies that these can be differentiated and integrated in the ordinary manner. It is shown furthermore in the mentioned texts that differentiation and integration commute with the described ensemble or volume averaging. It is these consequences of the ergodic hypothesis that are required in the quantitative development of the theory.

In the numerous texts on the ergodic problem it is argued that the hypothesis does not strictly represent most statistical situations of physical interest. It is then explained that very often a weaker version, sometimes called quasi-ergodic, of the ergodic hypothesis applies which also guarantees the above described properties of the averaged functions. The present development is based on this minimum requirement which plays the role of a fundamental postulate in the theory considered here.

3. THE CONCEPT OF CORRELATION FUNCTION

We deal here with a situation in which the operator \underline{C} of the material parameters, in our illustration the elastic operator, is randomly distributed over the continuum. This means that we consider the parameters constituting \underline{C} as the basic random variables of the theory. Of course, any function or functional of \underline{C} is a random function or functional. As always in statistics we are interested in expectations of random functions or functionals. The calculation of these expectations requires some statistical information. We call a certain information statistically complete with respect to the considered expectation if it permits its precise calculation. Often the available information is incomplete. Then the considered expectation cannot be calculated precisely. However, also incomplete information may be useful because it sets bound to the wanted expectation. This will be explained in section 6.

A systematic way of providing statistical information proceeds in terms of probability densities of increasing order $n(=1,2,\dots,\infty)$. Here n refers to the number of points at which simultaneous measurements are performed. The 1-point probability $P_1(C_1)$, $C_1 \equiv C(r_1)$, is defined by saying that $P_1(C_1)dC_1$ is the probability of finding at r_1 a material parameter C_1 in the range dC_1 around C_1 . The 2-point probability density $P_2(C_1, C_2)$ is defined by saying that $P_2(C_1, C_2)dC_1dC_2$ is the joint probability of finding at r_1 a parameter C in the range dC_1 around C_1 and at r_2 a parameter C in the range dC_2 around C_2 . Analogous definitions are easily given for the probability densities of higher order. If $P_2dC_1dC_2$ is integrated over the full range of C_2 , then the result gives the probability that no matter where C_2 lies, C_1 is in dC_1 around C_1 . Thus $P_1 = \int P_2dC_2$. More general: all probability densities of order $<n$ can be derived from P_n , the n -point or n th order probability density, by integrations. The full set of probability densities contains the full statistical information. This information is comprised by $P_{n \rightarrow \infty}$, dense which is equivalent to the probability density functional $P[C(r)]$. Although it is possible, on this basis, to develop the theory in the language of functional analysis, we shall not do this but rather use the approach with correlation functions. For a material parameter C which can be a scalar, but also a tensor, these functions are defined by

$$K_1 = \langle C_1 \rangle = \int C_1 P_1(C_1) dC_1$$

$$K_2 = \langle C_1 C_2 \rangle = \iint C_1 C_2 P(C_1, C_2) dC_1 dC_2$$

$$K_3 = \langle C_1 C_2 C_3 \rangle = \iiint C_1 C_2 C_3 P(C_1, C_2, C_3) dC_1 dC_2 dC_3$$

etc., where the integrations extend over the range of values of C . The functions $K_n (n = 1, 2, \dots, \infty)$ are called n -point correlation function. It is also possible to form correlation operators K_n by replacing the material parameters C in eqs. (7) - (9) by the pertaining operators \underline{C} .

Observe that all correlation functions are expectations of random functions, namely those of $C_1, C_1 C_2, C_1 C_2 C_3$ etc... We see for instance, that the statistical information contained in the 1-point density P_1 suffices to calculate the expectation $\langle C_1 \rangle$ but not to calculate $\langle C_1 C_2 \rangle$, the 2-point correlation function.

It is explained in textbooks on probability and statistics that the information contained in the full (infinite) set of correlation functions equals that of the corresponding set of probability densities, whereas the finite set of all correlation functions up to finite order, contains less information than the corresponding set of probability densities. For instance, the 1-point correlation function K_1 is by definition equal to the average $\langle C_1 \rangle$ of the random variable whereas the 1-point probability density P_1 permits us to calculate beside the first moment $\langle C_1 \rangle$ also the higher moments $\langle C_1 C \rangle = \int C_1 C P_1 dC_1$, $\langle C_1 C_1 C \rangle = \int C_1 C_1 C P_1 dC_1$ etc... As explained in section 5 this result has the consequence that the infinite set $[P_n]$ or $[K_n]$ is needed in order to calculate \underline{C}^{eff} precisely. If only finite sets, up to order n say, are available or can be carried through the needed mathematics, then only bounds for \underline{C}^{eff} can be established. The optimum bounds calculable with the incomplete information are closer given P_n than given K_n , because compared to K_n , P_n contains additional information. This observation can be used to define somewhat different sets of optimum bounds for effective material parameters.

At first sight, it looks as if correlation function is a very abstract notion. This, however, is not true. Thanks to the ergodic hypothesis it is possible to measure out directly these functions. We explain this for the 2-point correlation function in the case of a 2-dimensional cell structure. Assume that the material parameters are distributed at random over the initially empty cells of the structure shown in fig. 1.

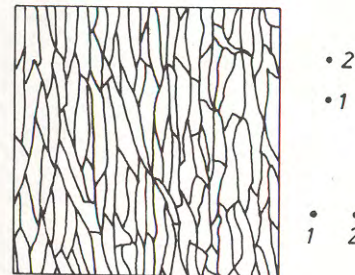


Figure 1 2-dimensional cell structure with aligned lengthy cells. -1 and 2 : Test points for measuring 2-point correlation function $\langle C_1 C_2 \rangle$.

It is easy to imagine some electronic scanning device with two feelers which are able to measure directly or indirectly the values of some material parameters at two points, say 1 and 2, in the cell pattern. Keeping the relative position of the two points fixed the measured values are multiplied and summed up during the scanning procedure and then divided by the number of scanning steps (cf. eq. (6)). The resulting number is the value of the correlation function for this particular relative position of the points 1 and 2. In our example, two test points separated vertically as shown above in fig. 1 will for most of the time fall within one cell; thus the summation will give a result close to $\langle C_1^2 \rangle$. If the two test points are separated horizontally as shown in fig. 1 below, then the two points will almost always be in different cells so that the result of the summation will be close to $\langle C_1 \rangle^2$ which is smaller than $\langle C_1^2 \rangle$. Thus the so measured correlation function reflects the anisotropy of the cell arrangement. It is, in particular, a measure of the average cell diameter in all possible directions through the specimen.

As to the measurement itself: in some cases, for instance if the medium is a 2-phase composite, the feelers can themselves distinguish which phase they touch and then know the pertaining parameter. This means that the measurement is rather direct. In other cases, for instance if the structure of fig. 1 is a polycrystal, the feeler should be constructed such that they can detect the lattice orientation. The value of the parameters can then be found from some table or calculation. In this case, the construction of the correlation function is more indirect.

If instead of two feelers three, four or, in general n feelers are used then similar measurements can be made and in this manner higher order correlation functions can be determined experimentally. These functions contain increasingly more information about the structure. 3-point correlation functions, for instance, allow us to distinguish between structures with in average lengthy cells from those with in average compact cells even if the structure is statistically isotropic. In this case, the lengthy cells are not aligned as in fig. 1 but their axes are distributed at random over the various directions in the space.

This discussion was given for 2-dimensional structures. In three dimensions, a measurement of the type described above is perhaps not possible at the present time. However, often one has to do with materials which are statistically isotropic or possess a known anisotropy. In such cases the 2- and 3-point correlation functions measured on a cross section of the specimen contain also the corresponding 3-dimensional information. The same does not apply to the correlation functions of order higher than three because more than three points in arbitrary positions do not lie on a common plane. For this reason, a 4-point correlation function in three dimensions allows us to distinguish 3-dimensional media in which the cell boundaries are essentially plane from those in which they are curved. Fortunately, the higher order correlation functions, which are rather complex, do not often contribute much to the effective material parameters.

4. CALCULATION OF CORRELATION FUNCTIONS FROM OTHER STATISTICAL INFORMATION

Often the statistical information is given in a form other than that of correlation functions which occur in the final equations of the systematic theory. The results reported below can be used also in such cases provided one succeeds in calculating the correlation functions from the known statistical information. In general, this is a rather tedious task, and seldom one finds the correlation functions in analytic form. The number of existing results is rather limited. Many of them have recently been reported by Jeulin /4/ who also gives the relevant references. In particular, this author explains the so-called Scheme Boolean or Scheme Boolean-Poissonian introduced by Matheron /5/. This scheme is appropriate to treat 2-phase composites, in particular those of the matrix-inclusion type. The inclusions may also be pores. One starts with filling the empty continuum with points which are distributed according to the Poisson scheme. This scheme is chosen because it represents a rather high disorder and obeys a relatively simple statistics. In fact, one can write down immediately the probability, say P_n , to find n points in a volume V :

$$P_n = \frac{(\rho V)^n}{n!} e^{-\rho V} \quad (10)$$

Here ρ is the prescribable (macro) number density of the points. An example of a 2-dimensional Poisson inclusion structure is shown in fig. 2a. Here inclusions are drawn with the Poisson points as centers. The inclusions may or may not be of the same form. It can be deduced from the work of Jeulin that for a moderate volume percentage of inclusions of a simple shape, e.g. of spheres, one can give the 2- and 3-point correlation functions in analytical form. The effects which are neglected are the possible mutual touching or interpenetration of inclusions plus a small correlation effect between neighboring inclusions.

In another important model which is especially appropriate for the description of polycrystals the Poisson points are used to construct a polygonal (2-dimensional case) or polyhedral (3-dimensional case) cell structure, like that shown in fig. 2b for the 2-dimensional case. Each cell contains those points which are closer to one Poisson point than to all other Poisson points. All points having two or more nearest Poisson points lie in the straight (or plane) cell walls of the polygons (polyhedra) which are named after Poisson or Voronoi. The 2- and 3-point functions of such structures have been calculated numerically by S. Benk /6/ who used them for the calculation of bounds for effective conductivities. These results will be reported in section 7.

The problem of calculating correlation functions from statistical information given in a form other than that of correlation functions belongs to the regime of stereology. The results of this branch of science are numerous and are to a very small extent only exploited for the present purpose. Work in this field is highly desirable.

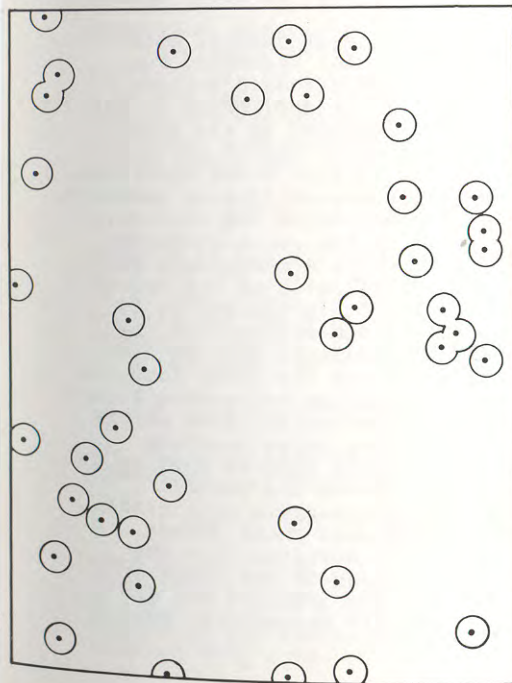


Figure 2a

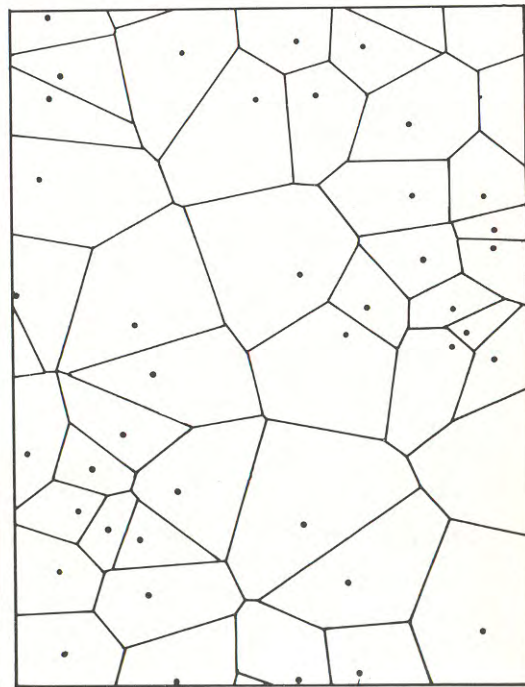


Figure 2b

2-dimensional Poisson point distribution, used for the construction of (a) a matrix-inclusion structure, (b) a cell structure.

5. THE SYSTEMATIC THEORY

This section contains a survey on the formal results of the systematic theory and some discussion of it. We renounce the description of the mathematical details and refer the reader to a recent survey article of the present author. This article also contains a number of relevant references. Some especially important formulae are comprised in the appendix of this report.

The basic idea of the systematic theory of effective material parameters is the following: solve the complex actual problem by the iterative solution of a much simpler comparison problem. The prerequisite for this method is, of course, that the iterative solution of the simple problem converges towards the solution of the actual problem. The convergence problem has recently been treated by Gambin and Kröner /8/ for the case of elasticity. These authors find that by a suitable choice of the comparison problem convergence can always be achieved provided the elastic moduli are nowhere zero (case of pores) nor infinite (case of rigid domains, e.g. inclusions). The systematic theory as presented below is therefore not valid for these limiting cases. Investigations on the required modification of the systematic theory are desirable. It seems that perhaps a completely different approach will be necessary.

The random medium considered here is a special case of the general heterogeneous medium. Rieder /9/ has discussed how problems of such media can be solved by the iterative solution of simple comparison problems. In particular, he used comparison media with homogeneous structure. In Rieder's theory, the method of solution of the simple problem is rather arbitrary. One may, in fact, think of anyone of the approved methods.

Although random media do belong to the class of general heterogeneous media, they have nevertheless very special features. For this reason it is not yet clear whether all the standard methods developed in theories like elasticity theory are applicable to our present problem. So far the systematic theory defined as the theory which incorporates the statistical information in form of correlation functions of increasing order always works with Green functions. The extension to other methods is a desirable aim of further research.

If the random medium is statistically homogeneous and isotropic and also macroscopically local (macrolocal) in the sense discussed in section 1 then it is most appropriate to choose a comparison medium which is homogeneous, isotropic and local. Let \underline{C} be the operator which comprises the material parameters of this medium. It is obvious that the effective parameters of a random medium with the above described properties do not depend on the shape and the size of the medium. For this reason it suffices to use the Green function of the infinite comparison medium, for instance the Kelvin-Somigliana function, given by eq. (1), for the case of elasticity. This particular choice does not at all mean that we cannot solve problems of finite random media because the resulting \underline{C}^{eff} applies just as well to these media. This is a pleasant feature of the theory.

Strictly speaking, a finite medium with a structure of finite domains or cells is not statistically homogeneous. There rather exists a boundary layer in which the situation deviates from that in the bulk. This layer, however, has a thickness of the order of the mean domain diameter. It is possible to take into account the effect of the boundary layer by means of certain correctors. Here,

however, we consider these correctors as completely negligible so that they can be omitted. This is commonly done in statistical physics if the number of statistical objects is very large, almost infinite (key-word: thermodynamic limit). In the case of a finite body it means that the domain or cell diameters are extremely small on the macroscopic scale.

In the space of the operators \underline{C} let us now define a modified elastic Green function (or Green operator) \underline{G} by its kernel

$$G_{ijkl}(r, r') = \partial_j \partial_i S_{ik}(r, r') |_{(ij)(kl)} \quad (11)$$

where ∂_j and ∂_i denote differentiation with respect to the coordinates x_j and x_i respectively and (ij) and (kl) indicate symmetrization in the respective subscripts. \underline{G} is also known as the (self-adjoint) strain Green operator where the term "strain" refers to the fact that this operator gives the (compatible) strain field $\underline{\Sigma}$ due to a stress field $\underline{\sigma}$ produced by external forces: $\underline{\Sigma} = \underline{G} * \underline{\sigma}$. It is an additional result of the derivation of this equation (see appendix) that a pure incompatible, i.e. residual or eigen stress field is eliminated by the operation with \underline{G} . The strain Green operator can be adapted to Dirichlet or Neumann or mixed boundary conditions. The term "modified" refers to the result that, unlike true Green functions, \underline{G} does not possess an inverse but rather obeys the (integral) equation

$$\underline{G} * \underline{C} * \underline{G} = \underline{G} \quad (12)$$

(appendix) where shortening by \underline{G} is not permitted.

In elastic media, S_{ik} will often be the Kelvin-Somigliana function of the comparison medium with elastic operator \underline{C} . Let \underline{C} be the local, randomly distributed elastic operator of the actual medium. It was shown in the systematic theory, first by Eimer /10/ and then, independently, by Zeller and Dederichs /11/ that \underline{C}^{eff} can be expressed by \underline{G} , \underline{C} and \underline{I} as

$$\underline{C}^{eff} = \langle \underline{C} (\underline{I} + \underline{G} \delta \underline{C})^{-1} \rangle = \langle (\underline{I} + \underline{G} \delta \underline{C})^{-1} \rangle^{-1} \quad (13)$$

where \underline{G} is the strain Green operator of the comparison medium, $\delta \underline{C} \equiv \underline{C} - \underline{C}$ and \underline{I} is the unit operator of the operator space considered here. The kernel of \underline{I} has the form $\delta(r, r') (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) / 2$. In (13) the operator $(\underline{I} + \underline{G} \delta \underline{C})^{-1}$ is explained by the corresponding geometric series. If this series is inserted in (13) one obtains with the deviation $C' \equiv C - \underline{C}$

$$\underline{C}^{eff} = \underline{C} + \langle \delta \underline{C} \rangle - \langle \underline{C}' * \underline{G} * \underline{C}' \rangle + \langle \underline{C}' * \underline{G} * \delta \underline{C} * \underline{G} * \underline{C}' \rangle + \dots \quad (14)$$

The explicit form of the omitted terms is given in ref. /12/. Inserting $\delta \underline{C} = \underline{C} - \underline{C}$ in (14) leads to

$$\underline{C}^{eff} = \langle \underline{C} \rangle - \langle \underline{C}' * \underline{G} * \underline{C}' \rangle + \langle \underline{C}' * \underline{G} * \underline{C}' * \underline{G} * \underline{C}' \rangle + \dots \quad (15)$$

Here we have used $\langle \underline{C} \rangle = \underline{C}$ (the ensemble average of a nonrandom function is equal to the function itself). In (15), $\underline{C}' \equiv \underline{C} - \underline{C}$ and \underline{C} are nonrandom and, therefore, are not concerned by the averaging. In the case of microlocal elasticity, the term $\langle \underline{C}' * \underline{G} * \underline{C}' \rangle$ has the more explicit form

$$\int \int \langle C'_{ijkl}(\underline{r}_1) \delta(\underline{r}_1, \underline{r}_2) \overset{\circ}{H}_{klmn}(\underline{r}_2, \underline{r}_3) C'_{mnpq}(\underline{r}_3) \delta(\underline{r}_3, \underline{r}_4) \rangle dV_2 dV_3$$

$$= \langle C'_{ijkl}(\underline{r}_1) \overset{\circ}{H}_{klmn}(\underline{r}_1, \underline{r}_4) C'_{mnpq}(\underline{r}_4) \rangle$$

$$= \overset{\circ}{H}_{klmn}(\underline{r}_1, \underline{r}_4) \langle C'_{ijkl}(\underline{r}_1) C'_{mnpq}(\underline{r}_4) \rangle$$

If the random medium is also macrolocal, then the kernel of C_{ijkl}^{eff} is $C_{ijkl}^{eff} \delta(\underline{r}_1, \underline{r}_4)$ where C_{ijkl}^{eff} are the effective elastic moduli. They can be calculated by means of the identity

$$C_{ijkl}^{eff} = \int C_{ijkl}^{eff} \delta(\underline{r}_1, \underline{r}_4) dV_4$$

In the statistically homogeneous medium considered here the effective elastic moduli do not depend on the position.

In view of eq. (17) the 2nd order contribution to C_{ijkl}^{eff} is obtained by integration over \underline{r}_4 (which we change to \underline{r}_2) and is

$$\overset{\circ}{H}_{klmn}^{(2)}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) \langle C'_{ijkl}(\underline{r}_1) C'_{mnpq}(\underline{r}_2) \rangle dV_2$$

We have added the symbol (2) on H in order to indicate the 2nd order of the contribution.

In a similar fashion we can write the contribution of the 3rd order term as

$$\int \int \overset{\circ}{H}_{klmnpqrs}^{(3)}(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3) \langle C'_{ijkl}(\underline{r}_1) C'_{mnpq}(\underline{r}_2) C'_{rsuv}(\underline{r}_3) \rangle dV_2 dV_3$$

with $\overset{\circ}{H}_{klmnpqrs}^{(3)}(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3) = G_{klmn}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) G_{pqrs}(\underline{r}_2, \underline{r}_3)$. The important feature of the expressions (18) and (19) is that they contain the 2- and 3-point correlation functions of the deviations $C'_{ijkl}(\underline{r})$ of the microscopic elastic parameters $C_{ijkl}(\underline{r})$. For the higher order terms, omitted in eq. (14), similar expressions can be derived which contain the correlation functions of $C'_{ijkl}(\underline{r})$ in increasing order. In analogy to the notation K_n for the correlation functions discussed in section 3 we call the correlation functions appearing here

Because of $\underline{C}' = \underline{C} - \langle \underline{C} \rangle$ the following statement can be made: the average $\langle \underline{C} \rangle$ plus the set of correlation functions $K_n'(n \geq 1)$ of the deviations carry the same statistical information as the set $K_n(n \geq 1)$ of the correlation functions of the material parameters themselves. It is obvious that every single correlation function K_n' or K_n contributes to the value of \underline{C}^{eff} . Thus \underline{C}^{eff} can be calculated precisely only if all correlation functions up to infinite order are known and if the integrations involved in (14) can be performed. A special case in which this is possible will be discussed in section 8.

Eqs. (13) and (14) are (formal) solutions of the basic integral equation of the theory of random media, namely

$$\underline{G} = \overset{\circ}{G} - \overset{\circ}{G} * \delta \underline{C} * \underline{G}$$

which is derived in the appendix. \underline{G} is the strain Green function of the actual random medium and is subject to the same boundary condition type as $\overset{\circ}{G}$. Eq. (20) has the formal structure of the Lippmann-Schwinger equation often used in quantum mechanical scattering theory.

Under the assumption, introduced in section 2, that the sources producing the fields are not correlated with the distribution of the material parameters it is derived in the appendix that

$$\langle \underline{G} \rangle * \underline{C}^{eff} * \langle \underline{G} \rangle = \langle \underline{G} \rangle \quad (21)$$

Comparing this with eq. (12) shows that $\langle \underline{G} \rangle$ is the Green operator of the effective medium. Eq. (21) is obtained if \underline{C}^{eff} is defined by eq. (5). With this definition (21) does not apply if sources and material parameters are correlated. Since also this situation deserves attention it is preferable to give (21) the status of a definition of \underline{C}^{eff} and consider (5) as an equation derived from the theory under the mentioned assumption. The reason for the preference is that \underline{C}^{eff} defined by (21) contains only material properties whereas \underline{C}^{eff} defined by (5) contains in addition contributions of the sources in case these are correlated with the material parameters.

A further result worthwhile mentioning is that

$$S_{ijkl}^{eff} = \int \langle G_{ijkl}^{(N)}(\underline{r}, \underline{r}') \rangle dV' \quad , \quad \underline{S}^{eff} \equiv (\underline{C}^{eff})^{-1} \quad (22)$$

where the symbol (N) indicates that the strain Green function adapted to the Neumann boundary conditions is to be taken. Eq. (14) can easily be derived also from this equation if $\underline{G}^{(N)}$ is calculated from the Lippmann-Schwinger equation (20) in which \underline{G} and $\overset{\circ}{G}$ are adapted to the Neumann conditions.

It can be derived from the properties of the material operators, namely to be definite and self-adjoint, that the basic equations (12), (13), (14), (20) and (21) remain valid if each \underline{C} is replaced by its inverse \underline{S} and \underline{G} by the (modified) stress Green function

$$\underline{D} = \underline{C} - \underline{C} * \underline{G} * \underline{C} \quad (23)$$

Instead of (22) one obtains

$$C_{ijkl}^{eff} = \int \langle D_{ijkl}^{(D)}(\underline{r}, \underline{r}') \rangle dV' \quad (24)$$

where the symbol (D) indicates that \underline{D} is formed with the displacement Green function S_{ij} adapted to the Dirichlet boundary conditions. (22) and (24) are the only equations reported here in which it is not allowed to take for S_{ik} the Kelvin-Somigliana function. One may take, however, the Green function adapted to the boundary conditions of a sphere with a radius going to infinity.

Also eq. (24) can be used to calculate \underline{C}^{eff} . It is even true in the case of periodic structures if the averages are understood as volume averages taken over the basic cell. This has recently been shown by the present author /13/ in a comparison of the present theory with the so-called homogenization theory developed for the treatment of periodic structures. The just mentioned result implies a certain unification of the theories of effective media with periodic and random constitution. It seems that the two theories can be brought into a formally identical form if the stress Green function appearing in (24) is taken from the corresponding Lippmann-Schwinger equation in the two cases. Details of this have not yet been worked out.

6. BOUNDS FOR EFFECTIVE MATERIAL PARAMETERS

Equations for bounds of effective material parameters are greatly important because in most cases of practical importance the available statistical information is rather incomplete. The normal situation is that the correlation functions of lower order are easier available. One is therefore interested in a theory which allows us to establish bounds of effective parameters if the statistical information is given in terms of correlation functions up to some order n , say. Of course, it is desirable to have the optimum, i.e. most narrow bounds calculable under the given information.

As usual, the calculation of such bounds is done by means of an inequality which finally results from the 2nd law of thermodynamics. In the present case we need the properties of \underline{C} , namely to be definite and self-adjoint. The details of the theory are given in refs. /14/ and /12/. Here we quote first of all two relevant bound theorems, namely that of Dederichs and Zeller /14/ which states that an upper bound is obtained if the series (14) is truncated after any term of odd order. This statement applies just as well to the series for S which is obtained from (14) by the procedure described above. Since $\underline{C}_{\text{eff}}(\underline{g}_{\text{eff}})^{-1}$, upper bound of $\underline{g}_{\text{eff}}$ implies lower bound of $\underline{C}_{\text{eff}}$ so that the theorem provides us with upper and lower bounds of increasing odd order n ($n = 1, 3, 5, \dots$). In particular, one obtains the well-known bounds of Voigt and Reuss as the 1st order bounds of the systematic theory. As shown by Hill /15/ these bounds are optimum in the above described sense.

Whereas these results apply independent of the particular choice of \underline{C} and also independent of the question if the series (14) converges or not, the freedom of \underline{C} is restricted in the bound theorem of the present author /12/. This theorem refers to the bounds of even order.

Let $\underline{C}^{(+0)}$ be the upper bound of 0th order where $\underline{C}^{(+0)}$ is the smallest operator which is not smaller than the largest microscopic operator \underline{C} . Let furthermore $\underline{C}^{(-0)}$ be the largest operator which is not larger than the smallest \underline{C} . Here the magnitude of operators is referred to its quadratic forms. We say that an operator \underline{A} whose quadratic form exceeds that of an operator \underline{B} is larger than \underline{B} . For details see ref /12/. The fact that $\underline{C}^{(+0)}$ and $\underline{C}^{(-0)}$ are bounds is related to the observation that the average of a function always lies between its extrema. $\underline{C}^{(+0)}$ and $\underline{C}^{(-0)}$ are in a way optimum bounds because all quantities of the form $\underline{C}^{(+0)} + \underline{A}$ and $\underline{C}^{(-0)} - \underline{A}$ ($A > 0$) are also bounds, but with larger separation.

The theorem for the bounds of even order states that these are obtained if the series in (14) is truncated after any term of even order provided that $\underline{C} > \underline{C}^{(+0)}$. The case of interest is, of course, $\underline{C} = \underline{C}^{(+0)}$. A similar statement can be made with reference to the S -series where S has to be taken as $S^{(+0)} = (\underline{C}^{(-0)})^{-1}$. Therefore, upper and lower bounds of even order, too, are obtained. Whereas the bounds of 0th and 1st order are optimum within the systematics of correlation functions this is not the case for the bounds of higher order. It was shown by Beran and Molyneux /16/ how optimum bounds can be obtained by means of the mentioned variational principle. One uses the series (14) up to the term of n th order, multiplies each term by a multiplier which is then optimized by making the resulting variation integral a minimum.

7. RANDOM MEDIA WHICH ARE STATISTICALLY DECOUPLED OF GRADE n . EXPLICIT RESULTS.

A stochastic medium of the type considered in this article can be thought to be built up in two steps: Firstly, a purely geometric, also called "empty", structure is produced and secondly, this structure is "filled" with the corresponding material, i.e. \underline{C} is distributed over the domains. This procedure means that the statistics of the material property is split into two parts which, in general, are coupled together.

We introduce the statistically decoupled medium by the requirement that the two statistics are decoupled in the sense that the distribution of material parameters over the empty domain structure is done in an uncorrelated fashion. By this assumption we exclude situations in which for instance lengthy domains are harder than compact domains. This even must not occur in average. We furthermore exclude situations in which the parameters in different domains are correlated because also this would imply some coupling between the empty domain statistics and the distribution of the material parameters over the domains.

The statistically decoupled medium is here introduced with reference to certain correlations. If the decoupling concerns all correlations up to infinite order the medium will be called perfectly decoupled. If it refers only to all correlation functions up to order n it will be called decoupled of grade n .

The important simplification of the theory of decoupled media as compared with the general random medium consists in the fact that the correlation functions of \underline{C} factorize into a part which contains only moments of the material parameters and a function describing the topology of the domain structure. As an example we give the 2- and 3-point correlation functions. For the decoupled medium we have /6/

$$K_2'(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = \langle C'^2 \rangle w_2(\underline{r}_1, \underline{r}_2) \quad (25)$$

$$K_3'(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3) = \langle C'^3 \rangle w_3(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3) \quad (26)$$

where w_2 and w_3 are respectively the 2- and 3-point coincidence probabilities, i.e. the probabilities that two points lying at \underline{r}_1 and \underline{r}_2 or three points lying at \underline{r}_1 , \underline{r}_2 and \underline{r}_3 are in one and the same cell. If the medium is statistically homogeneous and isotropic then w_2 and w_3 depend only on the distances between the points.

$\langle C'^2 \rangle$ and $\langle C'^3 \rangle$ can easily be calculated if the 1-point probability density P_1 is known, which is the case if we know the volume percentages of the various phases present in the medium. The so-obtained $\langle C'^2 \rangle$ and $\langle C'^3 \rangle$ can be taken outside of the averages in eqs. (18) and (19). This means a considerable simplification of the resulting integrals.

We now report on some explicit results concerning the effective electrical conductivities of mixtures of two isotropic phases with conductivities $\sigma' = 0.1$, $\sigma'' = 1.0$, taken in arbitrary units. Let v' and v'' the respective volume percentages.

Fig. 3 shows by dashed curves the upper and lower bounds of 3rd order of a 2-dimensional Poisson structure. These bounds were calculated with the correlation functions (25) and (26) from the optimum 3rd order bounds obtained with the procedure of Beran

and molyneux as described in section 6. Details can be found in ref. /6/. For comparison, fig. 3 contains also the 3rd order bounds of the (2-dimensional) medium which is disordered of grad 3 as explained in section 8. Disordered of grade 3 means that up to order 3 there is, roughly speaking, no principle of order in the correlation functions. Such a medium is somewhat more disordered than the Poisson medium which contains the order principle that the cell boundaries are straight lines. The result that the two sorts of bounds of the effective conductivities are, nevertheless, close together stems from the fact that the shape and size distribution in the Poisson cell is very irregular.

For small concentrations of one of the constituents the Poisson structure is of the matrix-inclusion type shown in fig. 4. The corresponding perfectly disordered structure is similar, except that the inclusion shapes and sizes are even more irregular. The curves in fig. 3 do not show any indication that at a certain concentration one of the phases starts to penetrate the whole medium along certain paths. This concentration is the percolation limit. Apparently, the expected, perhaps small, anomaly is not contained in the first three correlation functions. Further investigation on this point is desirable.

8. RANDOM MEDIA WHICH ARE STATISTICALLY DISORDERED OF GRADE n. EXPLICIT RESULTS.

In this section we introduce a subclass of the class of statistically decoupled media. To this subclass we refer as statistically disordered media. The medium is called disordered of grade n if all correlation functions up to order n possess the disorder property. If all correlation functions up to infinite order have this property then the medium is perfectly disordered.

The disorder property means that in addition to those properties which classify a medium as decoupled, also the topological structure, i.e. the empty domain structure, is uncorrelated, namely in the sense that the grain shapes and sizes are completely irregular and that there is no correlation in the grain shapes and sizes from one domain to the others except that the domains have to fill the space. The additional simplification achieved by the disorder assumption consists in the following: under the condition of graded or perfect disorder only the local part $\underline{\underline{G}}_0$ of the Green operator $\underline{\underline{G}}$ contributes to $\underline{\underline{C}}^{eff}$ in eqs. (13) and (14). The basis of this result is the observation that the Green operator G of the homogeneous, isotropic or anisotropic, local medium can be decomposed as $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{G}}_0 + \underline{\underline{G}}_P$ where $\underline{\underline{G}}_0$ and $\underline{\underline{G}}_P$ are local and nonlocal operators with kernel $E_{ijkl} \delta(\underline{r}, \underline{r}')$ and $F_{ijkl}/(|\underline{r}, \underline{r}'|)^3$ where the E_{ijke} are constants and the F_{ijkl} depend on the angles only. It has been shown by the present writer /17/ that the shape of the correlation functions can be restricted by assumptions of the form

$$\langle \underline{\underline{C}}_1^{*} * (\underline{\underline{F}} * \underline{\underline{C}}_1)^P \rangle = 0 \quad (\text{all positive integers } p < n) \quad (27)$$

where $\underline{\underline{F}}$ is to be formed with $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}^{eff}$.

It was proposed to use (27) as quantitative definition of a medium which is statistically disordered of grade n as introduced more qualitatively above. The assumption (27) is admissible in the sense that such media can in fact exist or, otherwise stated, non inconsistency arises by the assumption (27). This result is nontrivial.

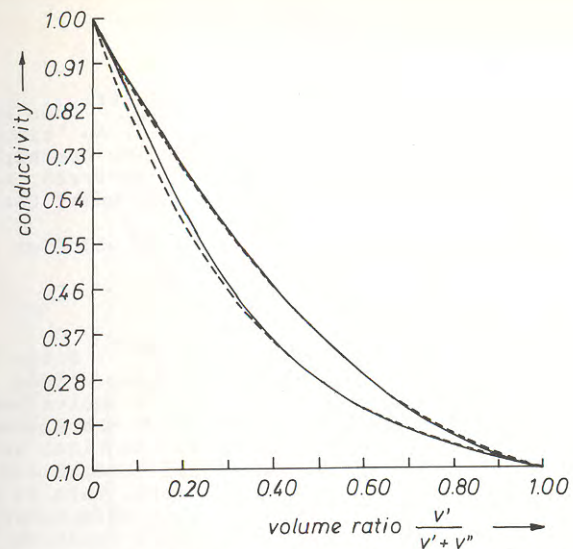


Figure 3 Optimum 3rd order bounds for effective conductivities of 2-dimensional Poisson structure (dashed lines) and 2-dimensional perfectly disordered structure (full lines). 2-phase composite with conductivities $\sigma' = 0.1$, $\sigma'' = 0.2$ (arbitrary units). Abscissa: volume ratio of 1st phase.

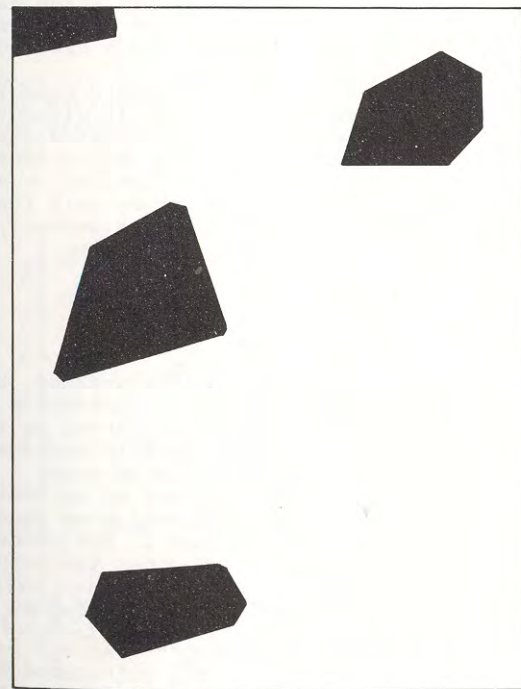


Figure 4 2-dimensional Poisson structure with small concentration (0.1) of 2nd phase. Obtained from empty cell structure of fig. 2b by random distribution of the two phases.

The validity of (27) does not yet imply that \underline{C}^{eff} does not depend on \underline{F} . Rather an extra proof for this is needed. An "almost proof" was given in ref /17/. The final proof is due to Eberhardt /18/ and Gairola /19/ to whose work the reader is referred. An important feature of this result is that it applies only under the condition $\underline{C} = \underline{C}^{eff}$.

Using these results we can write the basic solution (13) in the form valid for perfectly disordered media :

$$\underline{C}^{eff} = \langle \underline{C}(\underline{I} + \underline{E} * \underline{\delta C})^{-1} \rangle \langle (\underline{I} + \underline{E} * \underline{\delta C})^{-1} \rangle^{-1} \quad (28)$$

Here \underline{E} and $\underline{\delta C}$ are to be calculated with $\underline{C} = \underline{C}^{eff}$. Since the operator \underline{E} is essentially a delta function, all integrations involved are trivial and can be performed in the series equivalent to (28) (cf. eq. (14)). If this is done and the result transformed back to the closed form we see that this form is identical with (28) if there the operators are interpreted as local tensors and the convolutions as ordinary (tensor) multiplications. This is so because eq. (28) contains only local quantities. With this interpretation eq. (28) is much more explicit than the formal equation (13). It is not completely explicit in the sense that the wanted quantity \underline{C}^{eff} , interpreted as a tensor, occurs now on both sides of the equation.

It is perhaps surprising that eq. (28) has occurred in the literature long before the development of the systematic statistical theory. In fact, (28) gives the tensor of the so-called self-consistent material parameters and is in its shape close to the result of Walpole /20/ and of Kröner /21/. So we have found that the so-called self-consistent material parameters are those of the perfectly disordered medium.

Since eq. (28) interpreted as an algebraic tensor equation does not contain any operator one may work with it without going to the corresponding series. Most convenient is to calculate \underline{C}^{eff} with an iterative procedure. For the first step we replace \underline{C}^{eff} on the right hand side of (28) by either one of the 0th order bounds $\underline{C}^{(\pm 0)}$ or one of the 1st order bounds $\underline{C}^{(\pm 1)}$. Let us call the resulting left hand side $\underline{C}^{(\pm 2)}$ and $\underline{C}^{(\pm 3)}$ respectively. More general, we can write down a recurrence formula

$$\begin{aligned} C^{(\pm n)} &= \langle \underline{C}^{(\pm n-2)} \underline{A}^{(\pm n-2)} \rangle \langle \underline{A}^{(\pm n-2)} \rangle^{-1} \\ \underline{A}^{(\pm n-2)} &= (\underline{I} + \underline{E}^{(\pm n-2)} \underline{\delta C}^{(\pm n-2)})^{-1} \end{aligned} \quad (29)$$

Convergence of the iteration procedure assumed, both $C^{(+n)}$ and $C^{(-n)}$ converge towards the C^{eff} of the perfectly disordered medium. $C^{(\pm n)}$ are bounds which can be interpreted as bounds for the medium which is disordered of grade n . This is best seen from eq. (14). Consider for instance a disordered medium of grade 3. For such a medium $\langle \underline{C}' * \underline{E}' * \underline{C}' * \underline{E}' * \underline{C}' * \underline{E}' * \underline{C}' \rangle$ may be zero or not. It follows that due to the lack of this information no bounds can be established which are of order higher than 3. Let us now insert $\underline{C} = \langle \underline{C} \rangle = C^{(+1)}$ in eq. (14). Up to 3rd order the result is

$$\underline{C}^{eff} = \langle \underline{C} \rangle - \langle \underline{C}' * \underline{E} * \underline{C}' \rangle + \langle \underline{C}' * \underline{E} * \underline{C}' * \underline{E} * \underline{C}' \rangle \quad (30)$$

Obviously, the difference between \underline{C}^{eff} and $\langle \underline{C} \rangle$ is of order C'^2 , and of the same order is, of course, the difference between $\langle \underline{C} \rangle$, the Green operator taken with C^{eff} and the operator taken with $\underline{C} = \langle \underline{C} \rangle$. Therefore, up to terms of order C'^4 , eq. (30) is equal to

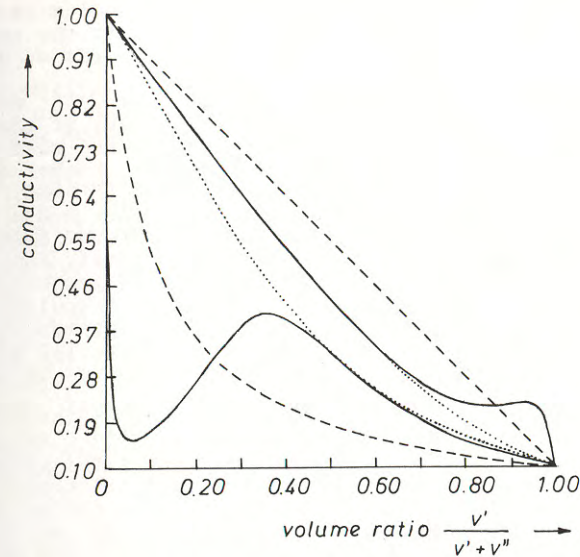


Figure 5 Non-optimum (full lines) and optimum (pointed lines) 3rd order bounds for effective conductivities of 3-dimensional perfectly disordered structures. Dashed lines : 1st order bounds of Voigt and Reuss.

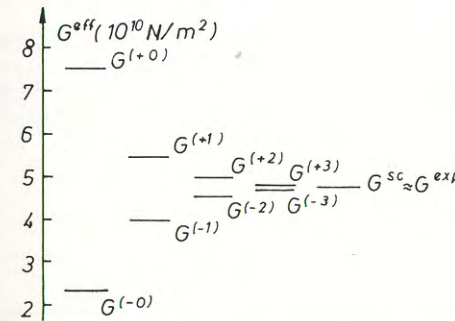


Figure 6 Calculated optimum bounds for effective shear modulus of 3-dimensional perfectly disordered polycrystalline aggregates of copper. Single crystal moduli and G^{exp} (4.83) taken from Ledbetter /23/.

$$\underline{C}^{\text{eff}} = \langle \underline{C} \rangle - \langle \underline{C}' * \underline{P} * \underline{C}' \rangle + \langle \underline{C}' * \underline{P} * \underline{C}' * \underline{P} * \underline{C}' \rangle \quad (31)$$

Up to the same order, (31) coincides with $C^{(+3)}$ calculated from eq. (29). Let us similarly calculate the terms up to 5th order of eq. (14) by setting $\underline{C} = C^{(+3)}$. Assuming that the medium is disordered of grade 5 we can omit all terms with \underline{P} and see that the result agrees with $C^{(+5)}$ calculated from (29) except for terms of order 6 in C' .

In view of Dederich and Zeller's bound theorem $C^{(+3)}$ must be an upper bound, correct at least in 3rd order. However, if the series involved converge uniformly which we expect to be the case except for media with pores or rigid inclusions, then the higher order contributions do not disturb the bound property of $C^{(+n)}$ and, similarly, $C^{(-n)}$ so that it is proved that $C^{(\pm n)}$ are bounds for media which are disordered of grade n . It is likely but not yet proved that they are even optimum bounds under the given information namely that the medium is disordered of grade n and that the 1-point probability density is known *. The latter is needed in order to calculate the averages occurring in eq. (31). The reason for this optimum is that (29) contains all moments of the distribution of the material parameters which means that the available information (see above) is completely utilized.

Fig. 5 taken from ref. / 6/ shows the bounds $C^{(\pm 1)}$ of Voigt and Reuss, the non-optimum bounds of 3rd order, say $C^{(\pm 3)}$, discussed in section 6 and the just introduced bounds $C^{(\pm 3)}$ for the conductivities of a three-dimensional perfectly disordered macro-isotropic 2-phase composite, again with $\sigma' = 0.1$ and $\sigma'' = 1$. The interesting result of this calculation is that for small concentrations of one of the phases one of the non-optimum 3rd order bounds lies outside of the 1st order bounds of Voigt and Reuss. This is a consequence of the fact, that the discussed s-series diverges if the low-conducting phase occurs in low concentration whereas the 6-series diverges if the high-conducting phase occurs in low concentration. We see, on the other hand, that the bounds $C^{(\pm 3)}$ lie everywhere within the 1st order bounds and are considerably narrowed compared with these, although the difference between the conductivities of the two phases is remarkable (factor of 10), which means a relatively slow convergence of the series.

Gairola and Kröner /22/ have recently derived a more explicit form of eq. (28) for the case of a macro-isotropic polycrystalline aggregate of cubic crystallites. Since the compression modulus of a medium with cubic symmetry is an invariant, only the effective shear modulus is to be calculated. The authors find

$$G = \frac{\alpha_2 G^2 + \beta_2 G + \gamma}{G^2 + \alpha_1 G + \beta_1} \quad (32)$$

* The optimum property of the bounds $C^{(\pm 3)}$ is certain for macro-isotropic aggregates of cubic crystallites for which $C^{(\pm 3)}$ coincides with the bounds optimized by the procedure of Beran and Molyneux. This, however, can be accidental.

where

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (45\kappa + 24\mu + 36\nu)/40, & \alpha_2 &= (3\mu + 2\nu)/5, & \gamma &= 3\kappa\mu\nu/4 \\ \beta_1 &= 3(2\mu + 3\nu)/20, & \beta_2 &= 3(6\kappa\nu + 9\kappa\mu + 20\mu\nu)/40 \\ \kappa &= (C_{11} + 2C_{12})/3, & \mu &= C_{44}, & \nu &= (C_{11} - C_{12})/2 \end{aligned} \quad (33)$$

Eq. (32) with (33) can be programmed on a pocket computer. Starting with $G = \infty$ and $G = 0$ on the right hand side of (32) we obtain the Voigt and Reuss moduli

$$G^{(+1)} = (3\mu + 2\nu)/5, \quad G^{(-1)} = 5\mu\nu/(2\mu + 3\nu) \quad (34)$$

Using then these on the right hand side of (32) we obtain $G^{(+3)}$ and $G^{(-3)}$ etc...

On the other hand starting with $G = G^{(+0)} = \mu$ and $G = G^{(-0)} = \nu$ we obtain $G^{(+2)}$ and $G^{(-2)}$ which turn out to be the bounds of Hashin and Shtrikman. With their help we then come to $C^{(\pm 4)}$ etc... In fig. we show the various bounds obtained in this manner. For these calculations we used values of the crystallite elastic moduli which were provided by Ledbetter /23/ namely (all values in 10^{11} N/m²) $C_{11} = 1.6840$, $C_{12} = 1.2140$, $C_{44} = 0.7539$. In this example the ratio $G^{(+0)}/G^{(-0)} = \mu/\nu$ is of the order 3.

As a last result on graded disordered media we mention that Wawra, Koch and Kröner /23/ have examined more than 60 measured shear moduli of macro-isotropic aggregates of cubic crystallites. Although only measurements on specimens with a high degree of disorder were considered, the authors find that the measured effective moduli lie from close to the upper bound of 3rd order to close to the lower bound of 3rd order. Since the experiments were rather accurate, this result means that it is very difficult to prepare polycrystalline aggregates which are disordered of a degree higher than 3. One is then inclined to assume that the inclusion of correlation functions of order > 3 is seldomly necessary.

9. CONCLUSION

In the preceding part of this article we have presented the systematic theory of random media with linear properties as far as one is interested in effective material tensors. Their knowledge permits us to solve boundary value problems for these media provided the external sources acting on the body are not correlated to the distribution of material parameters. This requirement is a serious restriction because it excludes more or less the dynamic situation. Let us illustrate this on the example of elasticity theory. The propagation of sound waves, for instance, occurs under the action of the inertia forces which are clearly correlated with the elastic moduli and also have the status of external forces within our systematic theory. It is this result which makes the dynamic problem of random media much more complex than the static problem. Beside this, there are other important examples of external sources that are correlated with the material parameters. We mention composites in which the various phases have different mass density and which are subject to gravity.

Let us first state the problem in a rather general language. Assume that we have the a priori knowledge on the statistical distribution of material parameters (operator \underline{C}) and external source field f , say. The complete statistical information can be comprised into the probability density functional $P[\underline{C}, f]$ which in the most general case, namely when the statistics refers also to the time scale, is a spacetime functional. If $P[\underline{C}, f]$ is decomposed into correlation functions then three types of these functions occur: those

which refer to \underline{C} or f only and mixed functions combining \underline{C} and f . The three infinite sets of the correlation functions carry an information that is equivalent to that of $P[C, f]$.

Let u be the field of interest which is produced by the sources in the random medium. The problem is now stated as follows. Given $P[C, f]$, calculate the (space-time) functional $P[u, C, f]$. This functional contains the complete information on the response to the sources of the random medium. The theory discussed so far covers a very small part of this task, since it allows us only to calculate $\langle u \rangle$, the average of the field. Let us show on hand of the static part of the theory how the complete response of the body can be found in a formal manner. The dynamic theory is, at least in principle, not more difficult than the extended static theory now to be considered. Since the deterministic problem of the actual heterogeneous material is linear its solution can always be represented in the form

$$u = \underline{K} \otimes f \quad (35)$$

where the Green operator \underline{K} obeys the Lippmann-Schwinger equation.

In (35) the symbol \otimes denotes a generalized convolution which may contain a surface integral. This occurs for instance, if u is the displacement field, \underline{K} the displacement Green function and f represents external volume and surface forces. The Lippmann-Schwinger equation permits a solution in terms of \underline{K} , the Green function of the comparison medium :

$$\underline{K} = (\underline{I} + \underline{K} \otimes \delta \underline{C})^{-1} \otimes \underline{K} \quad (36)$$

We can assume that \underline{K} is available.

With (36) the solution (35) becomes

$$u = (\underline{I} + \underline{K} \otimes \delta \underline{C})^{-1} \otimes \underline{K} \otimes f \quad (37)$$

The general problem is solved if we can write down any correlation function, mixed or not mixed, of the quantities u , \underline{C} and f .

Consider e.g. the correlation function (in operator form) $\langle u \otimes \underline{C} \otimes f \rangle$. With (37) this is equal to

$$\langle [(\underline{I} + \underline{K} \otimes \delta \underline{C})^{-1} \otimes \underline{K} \otimes f] \otimes \underline{C} \otimes f \rangle \quad (38)$$

If here the formal geometric series is inserted we see that (38) is an expression in terms of the three sets of correlation functions, namely those of \underline{C} and f alone and those with C and f mixed. The fact that corresponding expressions are easily written down for all (mixed or not mixed) correlation functions involving u means that the stated problem is completely solved by means of the solution (37) of the Lippmann-Schwinger equation of the general heterogeneous medium. Examples for important quantities which in this way are obtained are beside the mean field $\langle u(1) \rangle$ the 2-point correlation function $\langle u(1) u(2) \rangle$ with the special case $\langle u(1) f(1) \rangle$, the variance of u , and the mixed function $\langle u(1) f(2) \rangle$ with the special case $\langle u(1) f(1) \rangle$ which tells us how the field is correlated with the source.

The here given solution is again formal rather than explicit. The endeavour should now go in the direction of obtaining explicit results - for instance in the case of perfectly disordered materials.

REFERENCES

1. D. Stamm, Kontinuumstheorie der Spinwellen in amorphen Ferromagnetika, Dissertation, Faculty of Physics, University of Stuttgart, 1981.
2. L. Solomon, Elasticité Linéaire, Masson, Paris 1968.
3. M. J. Beran, Statistical Continuum Theories, Interscience, New York 1968.
4. D. Jeulin, Morphologie Mathématique et Propriétés Physiques des Agglomérés de Minerais de Fer et du Coke métallurgique. Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines, Paris 1979.
5. G. Matheron, Eléments pour une Théorie des Milieux Poreux, Masson, Paris 1967.
6. S. Benk, Zur Theorie der Eigenschaften Statistisch Aufgebauter Medien, Diplomarbeit, Faculty of Physics, University of Stuttgart 1980.
7. E. Kröner, J. Engng. Mech. Div., Proc. ASCE, 106, 889 (1980)
8. B. Gambin and E. Kröner, Int. J. Engng. Sci. 19, 313 (1981)
9. G. Rieder, Iterationsverfahren und Operatorgleichungen in der Elastizitätstheorie, Abh. Braunsch. Wiss. Ges. 14, 109 (1962)
10. C. Eimer, Arch. Mech. Stos. (Poland) 19, 4 (1967), 20, 87 (1968)
11. R. Zeller and P. H. Dederichs, Phys. Stat. Sol. (G. D. R.) 55, 831 (1973)
12. E. Kröner, J. Mech. Phys. Solids, 25, 137 (1977)
13. E. Kröner, Mech. Res. Comm. 7, 323 (1980)
14. P. H. Dederichs and R. Zeller, Z. Physik 259, 103 (1973)
15. R Hill, Proc. Phys. Soc. London A 65, 349 (1952)
16. M. J. Beran and J. Molyneux, Quant. Appl. Math. 24, 107 (1966)
17. E. Kröner, J. Phys. F: Metal Phys. 8, 2261, (1978)
18. O. Eberhardt, Proc. 3rd Int. Symp. Continuum Models of Discrete Systems, Freudenstadt 1979, Eds. E. Kröner and K. -H. Anthony, University of Waterloo Press, p. 415, 1980.
19. B. K. D. Gairola, ibid., p. 387
20. L. J. Walpole, J. Mech. Phys. Solids 14, 151 (1966)
21. E. Kröner, Z. Physik 151, 504 (1958)

22. B. K. D. Gairola and E. Kröner, *Int. J. Engng. Sci.* 19, 865 (1981)
23. H. M. Ledbetter, private communication
24. G. Bradfield, "Use in Industry of Elasticity Measurements with the Help of Mechanical Vibrations", Notes on applied Science, N° 30, National Physics Laboratory, London, England, 1964.
25. H. H. Wawra, H. Koch and E. Kröner, *J. Mat. Sci. Soc. Japan* 14, 131 (1977)

A most important problem is also to extend this theory to the dynamic case, which is covered by the above given formal solution. In fact, only a reinterpretation of the elastic operator and the Green operator is needed.

Acknowledgement

The author's own work in this field was supported by the Stiftung Volkswagenwerk, Land Niedersachsen, F. R. Germany.

"Manuscrit reçu le 1er Juillet 1981"

APPENDIX

Consider an elastic medium which may be heterogeneous and anisotropic but possesses a local linear law of elasticity. Let $f_j^{(v)}$ and $f_j^{(s)}$ denote the volume and surface densities of external forces acting on the medium. By the equations

$$-\partial_j C_{ijkl}(\underline{r}) \partial_l S_{km}^{(N)}(\underline{r}, \underline{r}') = \delta_{im}(\underline{r}, \underline{r}') \quad r \text{ in } V \quad (A. 1)$$

$$n_j C_{ijkl}(\underline{r}) \partial_l S_{km}^{(N)}(\underline{r}, \underline{r}') = -\delta_{im}/S \quad r \text{ on } S \quad (A. 2)$$

we introduce the Neumann type Green function $S_{km}^{(N)}$ of the medium with elastic parameters $C_{ijkl}(\underline{r})$. Here n_j is the external unit vector normal to the surface and S is the area of the surface. The reader who is not familiar with eqs. (A. 1) and (A. 2) may consult the textbook of Solomon /2/.

With the help of S_{km} the field u_i can be represented by the forces as

$$u_i(\underline{r}) = \int dV' S_{ij}^{(N)}(\underline{r}, \underline{r}') f_j^{(v)}(\underline{r}') + \int dS' S_{ij}(\underline{r}, \underline{r}') f_j^{(s)}(\underline{r}') \quad (A. 3)$$

If

$$f_j^{(v)} = -\partial_i \sigma_{ij} \quad , \quad f_j^{(s)} = n_i \sigma_{ij} \quad (A. 4)$$

is introduced in (A. 3) and then the strain $\epsilon'_{ip} = (\partial_i u_p + \partial_p u_i)$

is calculated (for the prime see below) one finds after partial integration and suitable changes of the subscripts

$$\epsilon'_{ij}(\underline{r}) = \int G_{ijkl}^{(N)}(\underline{r}, \underline{r}') \sigma_{kl}(\underline{r}') dV' \quad (\epsilon' = \underline{G} * \sigma) \quad (A. 5)$$

where \underline{G} is defined by eq. (11). Obviously, stresses which satisfy eqs. (A. 4) with $f_j^{(v)} = 0$ and $f_j^{(s)} = 0$ do not contribute to ϵ' . Such stresses which exist in the absence of external forces are called internal or eigen stresses. The strains connected with these stresses via Hooke's law are internal or eigen strains.

It is helpful to consider general strains, say ϵ , as composed from compatible strains ϵ' and incompatible strains ϵ'' . Let σ in (A. 5) be any stress field. Replacing this by the strain according to $\sigma = \underline{C} * \epsilon$ yields (from now on the superscript (N) is omitted for simplicity)

$$\epsilon' = \underline{G} * \underline{C} * \epsilon \quad (A. 6)$$

Here ϵ' is the (compatible) strain field which results uniquely from external forces

$$f_j^{(v)}(\underline{r}) = -\partial_i (C_{ijkl}(\underline{r}) \epsilon_{kl}(\underline{r})), \quad f_j^{(s)}(\underline{r}) = n_j(r) C_{ijkl}(r) \epsilon_{kl}(r) \quad (A. 7)$$

Since also ϵ'_{kl} obeys the eqs. (A. 7) (with the same forces) we have the result

$$\epsilon' = \underline{G} * \underline{C} * \epsilon' \quad (A. 8)$$

and therefore, operating with $\underline{G} * \underline{C}$ on (A. 8)

$$\epsilon' = \underline{\underline{G}} * \underline{\underline{C}} * \underline{\underline{G}} * \underline{\underline{C}} * \epsilon \quad (\text{A. 9})$$

Since ϵ is arbitrary we have by comparison of eqs. (A. 6) and (A. 9)

$$\underline{\underline{G}} * \underline{\underline{C}} * \underline{\underline{G}} * \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{G}} * \underline{\underline{C}} \quad (\text{A. 10})$$

in other words, $\underline{\underline{G}} * \underline{\underline{C}}$ is a projection operator which projects out from a general strain ϵ the compatible part ϵ' in such a way that (A. 7) is valid with the same forces for ϵ and ϵ' . Since (A. 10) can be shortened by $\underline{\underline{C}}$ we have proved eq. (12).

Let us now consider a comparison medium ($\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{G}}$) of the same shape. Then, in analogy with (A. 8),

$$\epsilon' = \overset{\circ}{\underline{\underline{G}}} * \overset{\circ}{\underline{\underline{C}}} * \epsilon' = \overset{\circ}{\underline{\underline{G}}} * \overset{\circ}{\underline{\underline{C}}} * \underline{\underline{G}} * \underline{\underline{C}} * \epsilon \quad (\text{A. 11})$$

Comparison of (A. 11) and (A. 6) gives

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{G}}} * \overset{\circ}{\underline{\underline{C}}} * \overset{\circ}{\underline{\underline{G}}} * \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{G}} * \underline{\underline{C}} \quad (\text{A. 12})$$

Here we may shorten by $\underline{\underline{C}}$ (not by $\underline{\underline{G}} * \underline{\underline{C}}$ because $\underline{\underline{G}}$ has no inverse) so that

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{G}}} * \overset{\circ}{\underline{\underline{C}}} * \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{G}} \quad (\text{A. 13})$$

Interchanging the role of $\underline{\underline{C}}$ and $\overset{\circ}{\underline{\underline{C}}}$ we also have

$$\underline{\underline{G}} * \underline{\underline{C}} * \overset{\circ}{\underline{\underline{G}}} = \overset{\circ}{\underline{\underline{G}}} * \overset{\circ}{\underline{\underline{C}}} * \underline{\underline{G}}, \quad (\text{A. 14})$$

the latter equation because the $\underline{\underline{C}}$'s and $\underline{\underline{G}}$'s are self-adjoint. Subtracting (A. 14) from (A. 13) leads to the Lippmann-Schwinger equation (20).

In conclusion we note that

$$\underline{\underline{S}} * \sigma = \underline{\underline{G}} * \sigma \quad (\text{A. 15})$$

for constant σ and constant S_{ijkl} . It follows that

$$\int \overset{G}{ijkl}(\underline{r}, \underline{r}') dV' = S_{ijkl} \quad (\text{A. 16})$$

for constant S_{ijkl} which also means constant C_{ijkl} . This together with (21) proves (22).

In the Green function is adapted to the Dirichlet rather than to the Neumann conditions then the final result is

$$\int \overset{D}{ijkl}(\underline{r}, \underline{r}') dV' = 0 \quad (\text{A. 17})$$

This is shown in ref. /24/ where also the relations

$$\int \overset{D}{ijkl}(\underline{r}, \underline{r}') dV' = C_{ijkl} \quad (\text{A. 18})$$

and

$$\int \overset{D}{ijkl}(\underline{r}, \underline{r}') dV' = 0 \quad (\text{A. 19})$$

are shown. Here the D 's are defined by eq. (23). Whereas (A. 18) is true only in media with constant elastic moduli, (A. 17) and (A. 19) apply also to heterogeneous media.

REPRESENTATION PAR LES LOIS DE FARRIS DU COMPORTEMENT VISCO-ELASTIQUE NON LINEAIRE D'UN MATERIAU CHARGE

REPRESENTATION BY FARRIS' LAWS OF THE NON-LINEAR VISCOELASTIC BEHAVIOR OF A FILLED MATERIAL

C. MARTIN, P. RACIMOR, M. LE ROY et M. QUIDOT

Société Nationale des Poudres et Explosifs -
Centre de Recherches du Bouchet - Vert-le-Petit - France

RESUME

Les lois rhéologiques de Farris ont été appliquées à l'étude du comportement d'un propergol composite. Le modèle choisi est de type viscoélastique non-linéaire. Valable pour des sollicitations multiaxiales, il prend également en compte l'augmentation de volume, qui se produit au-delà d'une certaine déformation critique et qui est provoquée par la décohésion entre liant et charge.

La vérification expérimentale a été effectuée sur des éprouvettes soumises à des tractions uniaxiales dans des conditions variées : température -30 à $+60^\circ\text{C}$, différentes vitesses de déformation, pressions jusqu'à 60 bars, relaxation de courte durée. Le calcul à la rupture a également été traité. L'optimisation des paramètres a été faite par ordinateur. Dans l'ensemble, l'accord est bon entre les courbes de traction expérimentales et celles données par la modélisation. Il semble également possible de prévoir l'évolution du module de relaxation à long terme.

ABSTRACT

Farris' rheological theory has been applied to the stress-strain behavior of a composite propellant, composed of a highly filled elastomer. The model that has been developed is a non-linear viscoelastic one, and can be used with multi-axial stresses. Stress-strain response is related to strain-induced volume dilatation, which is attributed to vacuoles formation between filler and matrix.

Uniaxial tensile tests were performed on samples in various environmental conditions : temperatures from -30°C to $+60^\circ\text{C}$, several strain-rates, hydrostatic pressures till 60 bars, short-term relaxation. The amount of damage was calculated in every case. Parameters were optimized on a computer. As a result, agreement was good between experimental and predicted stress-strain curves, as well as for long-term relaxation behavior.

1. INTRODUCTION

Les élastomères à fort taux de charge granulaire, tels que les propergols composites, ont en général un comportement complexe de type viscoélastique non linéaire. Les représentations proposées jusqu'ici, visant à connaître l'état de contraintes existant en réponse à une sollicitation donnée, ont été plus ou moins satisfaisantes.

L'une des plus intéressantes semble être celle de R.J. FARRIS. Elle associe l'écart à la linéarité, à la formation et au développement de vacuoles entre la charge et le liant, et relie de façon quantitative le comportement à la mesure précise de la variation de volume du matériau.

Nous avons tenté, au cours d'une étude faite dans le cadre d'un contrat passé avec la DTEN, d'appliquer ces lois théoriques à un exemple concret, et de vérifier expérimentalement leur validité dans le cas simple de tractions et de relaxations uniaxiales, effectuées dans des conditions (vitesses, pressions, températures, etc...) aussi variées que possible.

2. LES LOIS DE FARRIS

2.1. Loi de comportement

Les propergols composites ont une mémoire. Ils présentent un état tenant compte de leur passé. Il est possible de mettre en évidence ce phénomène en effectuant un essai de traction cyclique (figure 1). Un effet d'hystérésis (effet Mullins) est obtenu sur la contrainte [1,2].

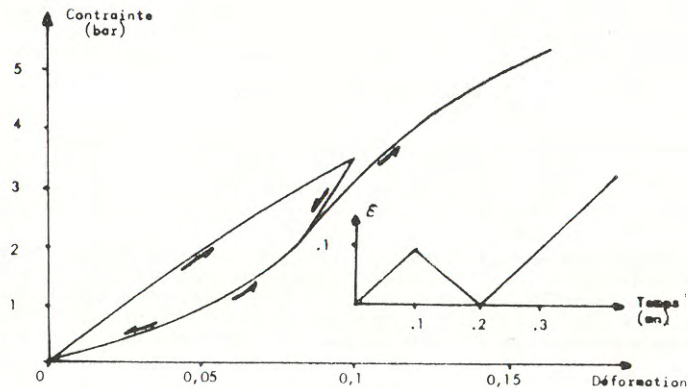


Figure 1 - Mise en évidence de l'effet Mullins

En supposant que chaque chaîne ou portion de chaîne du polymère rompt et reste rompue si à un instant de son histoire son critère de rupture est dépassé, R.J. FARRIS a pu proposer [3] le modèle simple suivant, qui rend bien compte de l'effet Mullins dans le cas d'une contrainte de traction uniaxiale :

$$\sigma(t) = E \left\{ \frac{\xi}{\|\xi\|_p} \right\}^m \xi(t) \quad (1)$$

avec $\|\xi\|_p$ norme de LEBESGUE d'ordre p

$$\|\xi\|_p = \left\{ \int_0^t [\xi(\tau)]^p d\tau \right\}^{1/p} \quad (2)$$

Cependant lorsqu'on poursuit la traction jusqu'à la rupture, on constate aux grandes déformations une divergence entre ce modèle et l'expérience. Elle est due à la variation de volume en cours de traction, qui n'est pas prise en compte par la formule précédente.

Cette variation de volume est elle-même causée par la formation, au-delà d'une certaine déformation critique, de vacuoles autour de certaines particules granulaires. Leur grossissement peut être lui-même modélisé. Cette apparition de vacuoles traduit la rupture des liaisons adhésives existant entre charge et liant [4].

FARRIS, d'autre part, a remarqué une analogie entre les formes des dérivées premières et secondes des courbes contrainte-déformation et variation de volume-déformation [5]. D'où la relation entre contrainte σ , variation de volume $\frac{\Delta V}{V_0}$ et déformation ξ :

$$\sigma = E \xi - K \left(\frac{\Delta V}{V_0} \right) \quad (3)$$

qui peut aussi se mettre sous la forme suivante (meilleure aux grandes déformations) :

$$\sigma = E \xi \exp. \left(- \frac{\beta}{\xi} \frac{\Delta V}{V_0} \right) \quad (4)$$

On trouvera plus de détails sur ce sujet dans [6].

FARRIS a développé ensuite les travaux de GREEN, RIVLIN et SPENCER [7], ainsi que ceux de SCHAPERY, pour proposer un modèle plus général correspondant à des contraintes et déformations multiaxiales, et reprenant les expressions partielles (1) et (4) formulées auparavant [8].

Soit le tenseur des contraintes :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij} \bar{\sigma} \quad (5)$$

FARRIS propose pour la partie déviatrice :

$$\sigma'_{ij}(t) = \exp\left(-\beta \frac{I_d}{I_V} + \beta' I_V\right) \left\{ E_1 \xi'_{ij}(t) + E_2 \left(\frac{I_V}{\|I_V\|_P}\right)^{m1} \xi'_{ij}(t) + E_3 \left(1 - \left(\frac{I_V}{\|I_V\|_P}\right)^{m2}\right) \int_0^t (t' - \xi')^{m3} \xi'_{ij}(\xi) d\xi \right\} \quad (6)$$

dans laquelle :

$I_d = \frac{\Delta V}{V_0}$ est la variation de volume relative

I_V est la déformation octaédrique

$\|I_V\|_P$ est fonction du temps réduit $\frac{\tau}{a_T}$

où a_T est une fonction de la température, telle que la définit le principe d'équivalence temps-température de WILLIAMS, LANDEL et FERRY.

Dans le cas de sollicitation monotone, le terme de l'effet mémoire est égal à zéro, et l'expression (6) devient :

$$\sigma'_{ij} = \xi'_{ij} \cdot \exp\left(\beta' I_V - \beta \frac{I_d}{I_V}\right) \left\{ E_1 + E_2 \left(\frac{I_V}{\|I_V\|_P}\right)^{m1} \right\} \quad (7)$$

S'il s'agit de plus d'une traction uniaxiale, on montre que la contrainte uniaxiale mesurée σ prend la forme :

$$\sigma = \xi \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{3} \beta' \xi - \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\beta}{\xi} \cdot \frac{\Delta V}{V_0}\right) \left\{ E_1 + E_2 \left(\frac{\xi}{\|\xi\|_P}\right)^{m1} \right\} \quad (8)$$

$$\text{avec } \xi = \xi_{11} - \xi_{22} = 1 + \xi_{11} - \sqrt{\frac{1 + \Delta V/V_0}{1 + \xi_{11}}} \quad (9)$$

ξ_{11} étant l'allongement uniaxial mesuré.

22. Loi de variation de volume

FARRIS a proposé pour la partie sphérique du tenseur des déformations, qui est aussi la variation relative de volume, l'expression suivante :

$$I_d = 3\bar{\xi} = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\bar{\sigma}}{K} \left[\exp\left\{ \left[\chi_1 + \chi_2 (T - T_0) \right] \bar{\sigma} \right\} - 1 \right] + A \cdot I_V^r \cdot \exp\left\{ \left[\lambda_1 + \lambda_2 (T - T_0) \right] \bar{\sigma} \right\} \quad (10)$$

Le propergol étant un matériau quasiment incompressible, le premier terme est négligeable, et la variation de volume se réduit alors à :

$$I_d = A \cdot I_V^r \cdot \exp\left\{ \left[\lambda_1 + \lambda_2 (T - T_0) \right] \bar{\sigma} \right\} \quad (11)$$

Dans le cas d'une traction uniaxiale :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} \sigma - P$$

P pression hydrostatique relative par rapport à l'atmosphère.

D'où :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = A \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^r \cdot \xi^r \cdot \exp\left\{ \left[\lambda_1 + \lambda_2 (T - T_0) \right] \left(\frac{1}{3} \sigma - P\right) \right\} \quad (12)$$

23. Loi en dommage

FARRIS donne l'expression suivante, comportant 9 paramètres, pour le dommage subi par le matériau :

$$D(t) = D_1 \left\{ \left\| \exp\left[\left[D_6 + D_7 (T - T_0) \right] \bar{\sigma} \right] \sigma_V \right\|_{\infty} \right\}^{D_2} + D_3 \left\{ \left\| \exp\left[\left[D_8 + D_9 (T - T_0) \right] \bar{\sigma} \right] \sigma_V \right\|_{D_4} \right\}^{D_5} \quad (13)$$

σ_V étant la contrainte octaédrique,

avec $D(t_r) = 1$ à la rupture.

L'expérience nous a conduit à adopter la formulation simplifiée, qui ne comporte plus que 2 paramètres :

$$D(t) = D_3 \left\| \sigma_0 \right\|_{D_4} \quad (14)$$

dans laquelle σ_0 est la contrainte monoaxiale équivalente, définie dans [9], égale à la plus forte des 2 valeurs, déterminées de façon semi-empirique :

$$\begin{cases} \sigma_0 = \frac{1}{3} \left(\bar{\sigma} + \sqrt{\bar{\sigma}^2 + 29 \sigma_V^2} \right) & \text{critère de STASSI} \\ \sigma_0 = 1,15 \sigma_V & \text{critère de VON MISES} \end{cases}$$

Dans le cas d'une traction uniaxiale à pression atmosphérique, la contrainte équivalente σ_0 vaut σ , et le dommage devient :

$$D(t) = D_3 \left\{ \int_0^t \sigma^{D_4} d\xi \right\}^{1/D_4} \quad (15)$$

$$\text{avec } d\xi = \frac{d\tau}{a_T}$$

3. PARTIE EXPERIMENTALE

31. Conditions des mesures

Les mesures, ayant pour but de vérifier la validité des lois précédentes, ont été effectuées en traction uniaxiale, à vitesse d'allongement constante (9,6 à 960 % min⁻¹). Les éprouvettes utilisées étaient des barreaux prismatiques, de dimensions 57x10x5 mm, collés sur des mors métalliques. Trois éprouvettes ont été testées par essai. La longueur utile était de 52 mm et l'allongement a été déduit directement de la distance entre mors. Sur le dynamomètre a été monté un dilatomètre à gaz, mis au point également par FARRIS [10]. La variation de volume se traduit par une différence de pression entre une chambre de référence et une chambre d'essai contenant l'éprouvette à tester. L'appareil est très sensible aux variations de température, et l'on doit corriger la dérive qui se produit pendant la durée d'un essai.

Tous les essais ont été faits sur la même composition, constituée d'un liant polybutadiène chargé à plus de 70 % en volume, de poudre de perchlorate d'ammonium et d'aluminium.

32. Traitement des données par ordinateur

Les coordonnées des points des courbes contrainte/temps et variation de volume/temps sont relevées et traitées à l'ordinateur par un programme, qui permet d'obtenir les coefficients de la loi d'équivalence temps/température puis les paramètres des différentes lois : comportement (8), variation de volume (12) et dommage (14). Les paramètres sont calculés par une méthode d'optimisation, qui minimise dans chaque cas des quantités telles que :

$$F = \sum \left(\frac{Y_{\text{exp.}} - Y_{\text{calc.}}}{Y_{\text{exp.}}} \right)^2$$

$Y_{\text{exp.}}$ et $Y_{\text{calc.}}$

étant les valeurs expérimentales et calculées par la théorie, des contraintes, ΔV , et dommage. L'écart global est chiffré par la valeur d'un écart-type appelé S.

Les courbes qui suivent sont celles qui correspondent aux paramètres ainsi optimisés. Les valeurs calculées de contrainte, $\Delta V/V_0$, dommage, sont obtenues à partir des valeurs expérimentales respectivement de : $\Delta V/V_0$, contrainte, contrainte.

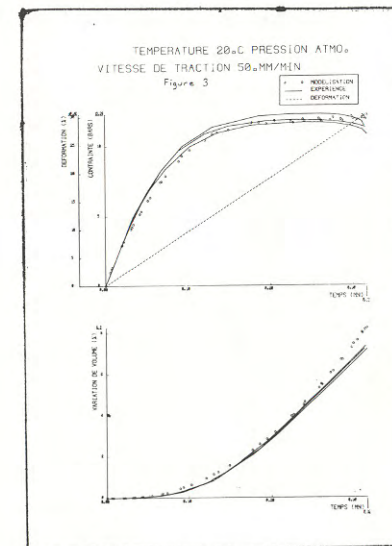
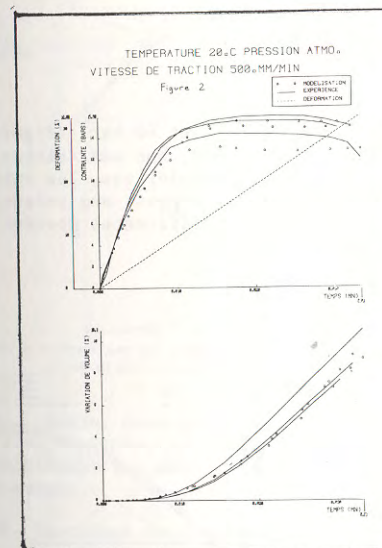
4. COMPARAISON ENTRE CALCUL ET EXPERIENCE

Ces travaux font suite à ceux déjà entrepris dans [6]

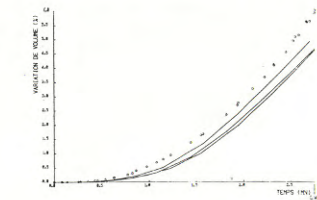
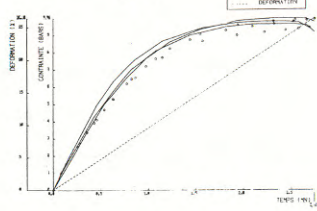
41. Tractions sous différentes pressions

Les mesures ont été effectuées à température 20°C, à 3 vitesses de traction (5 - 50 - 500 mm mn⁻¹, c'est-à-dire 9,6 - 96 - 960 %mn⁻¹) et sous 5 pressions hydrostatiques (pressions relatives : 0-3-10-30-60 bar).

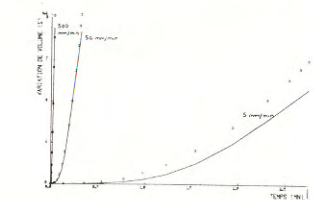
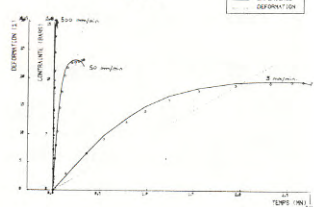
Les courbes de contrainte et de variation de volume en fonction du temps sont données, pour les tractions à pression atmosphérique, dans les figures 2 à 5, qui montrent que, compte-tenu de la dispersion inévitable des mesures expérimentales, la concordance est bonne entre modèle et expérience.



TEMPERATURE 20°C PRESSION ATM.
VITESSE DE TRACTION 50 MM/MIN
Figure 4

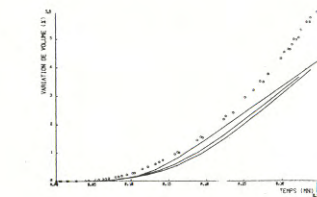
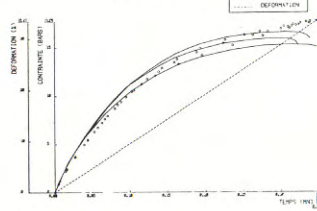


TEMPERATURE 20°C PRESSION ATM.
VITESSE DE TRACTION 500 MM/MIN
Figure 5

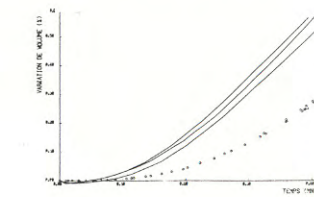
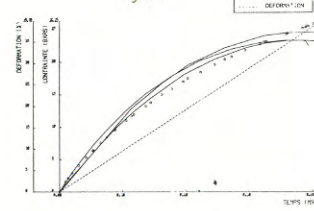


Les courbes sous pression de 10 bar (figure 6), et 60 bar (figure 7), à vitesse de traction 50 mm mm⁻¹, montrent que l'accord, bon aux faibles pressions, l'est moins aux fortes pressions. Dans ce dernier cas, les valeurs calculées de variation de volume sont trop faibles par rapport aux valeurs expérimentales. Toutefois, il faut remarquer que ces différences portent sur des valeurs de $\Delta V/V_0$ faibles en valeur absolue.

TEMPERATURE 20°C PRESSION 10 BARS
VITESSE DE TRACTION 50 MM/MIN
Figure 6

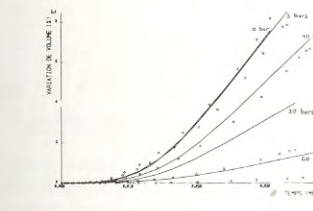
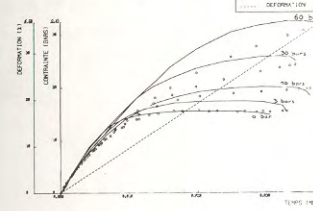


TEMPERATURE 20°C PRESSION 60 BARS
VITESSE DE TRACTION 50 MM/MIN
Figure 7

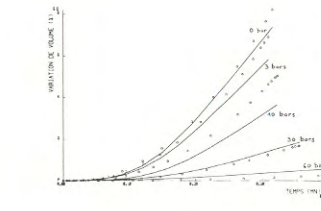
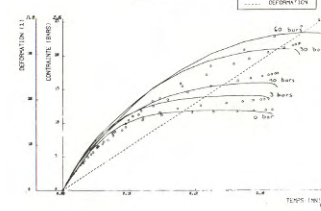


L'influence de la pression hydrostatique est bien mise en évidence dans les figures 8 et 9. Comme prévu, quand la pression augmente, de 0 à 60 bars, la variation de volume (à 50 mm/mm par exemple) diminue de 7,6 % à 0,6 % et la contrainte maximum augmente de 11,9 bars à 23,1 bars. Comme on le sait d'après la loi de Farris, cette action est due à la diminution des vacuoles autour des charges. On constate, par contre, que le module à l'origine semble indépendant de la pression. L'écart entre théorie et expérience est plus grand à 500 mm mm⁻¹ qu'à 50 mm mm⁻¹, mais cela provient peut-être de la plus mauvaise précision de la mesure à 500 mm mm⁻¹, où les ΔV sont obtenus à partir de photos prises sur oscilloscope.

TEMP. 20°C PRESSIONS 0 A 60 BARS
VITESSE DE TRACTION 500 MM/MIN
Figure 8



TEMP. 20°C PRESSIONS 0 A 60 BARS
VITESSE DE TRACTION 50 MM/MIN
Figure 9



Enfin, nous avons vérifié qu'en testant une seule éprouvette, au lieu de trois, par essai, les paramètres trouvés pour les 3 lois étaient sensiblement les mêmes, ce qui doit permettre de réduire le temps nécessaire aux essais.

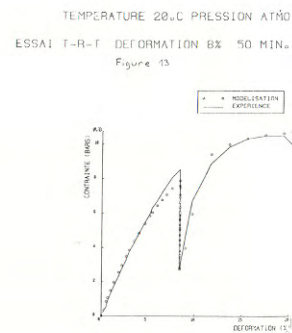
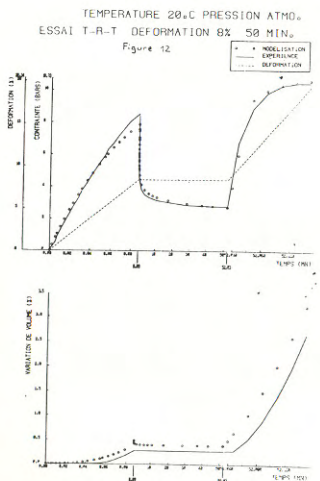
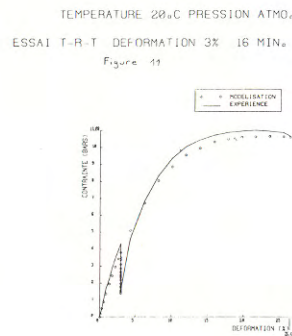
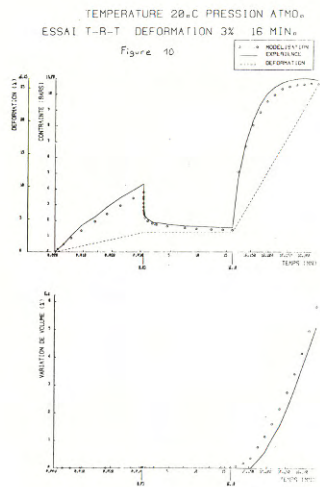
42. Tractions avec relaxation de courte durée

Chaque essai comprend une première traction, suivie d'une relaxation à allongement fixé, de courte durée, puis d'une deuxième traction jusqu'à rupture (essai T-R-T).

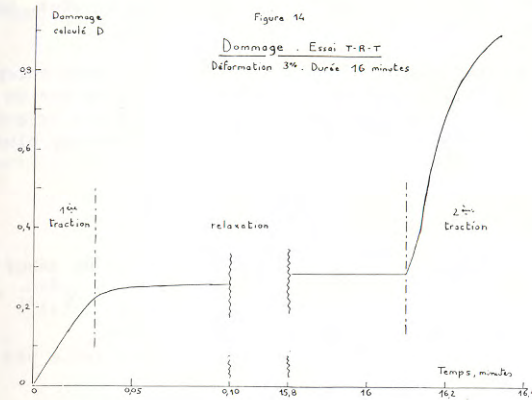
Ces essais ont été effectués à une température de 20°C, à la pression atmosphérique, la vitesse de traction étant de 50 mm mm⁻¹, les allongements de 3 et 8 %, et les durées de relaxation de 7 à 50 minutes. 5 essais avec relaxation ont été retenus pour le calcul des paramètres, contre 35 pour les essais sous pression.

Pour ces essais avec relaxation, la variation de volume est de l'ordre de grandeur de la dérive, donc pratiquement impossible à mesurer. Aussi, nous l'avons supposée nulle pour le calcul.

Comme le montrent quelques courbes typiques (fig. 10 à 13), la variation de la contrainte au cours de la relaxation et de la 2ème traction est bien représentée par le modèle choisi. On vérifie en particulier (fig. 11 et 13) que -conformément à ce que prévoit le calcul- la courbe de 2ème traction rejoint après relaxation la courbe de traction unique. Par contre, la variation de volume calculée est systématiquement un peu trop forte au début de la 2ème traction.



La figure 14 représente le dommage calculé à l'aide de l'expression (15) en fonction du temps pour un essai typique. Elle montre que l'endommagement se produit essentiellement pendant la traction, très peu par contre pendant la relaxation.



43. Valeurs des paramètres obtenues

Nous avons vérifié que le paramètre β' de la loi de comportement (7) pouvait être pris égal à 0, tout en conservant une bonne concordance avec les résultats expérimentaux.

Dans ces conditions, les valeurs numériques trouvées pour les paramètres par l'optimisation permettent d'écrire les 3 lois (7), (11) et (14), sous les formes suivantes, chacune étant accompagnée de l'écart-type S obtenu :

Comportement :

$$\sigma'_{ij} = \epsilon'_{ij} \cdot \exp\left(-1,9 \frac{I_d}{I_T}\right) \left\{ 19,2 + 18,6 \left(\frac{I_T}{\|I_T\|_{20}} \right)^{4,1} \right\} \quad (16)$$

$$S = 13,4 \%$$

Variation de volume :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = I_d = 3,3 \cdot I_T^{2,43} \cdot \exp\left\{ [0,075 - 0,00191 (T - T_0)] \bar{\sigma} \right\} \quad (17)$$

$$S = 33 \%$$

Domage :

$$D(t) = 0,107 \left\| \sigma_0 \right\|_{8,0} \quad (18)$$

$$S = 12,5 \%$$

Ces valeurs numériques sont valables avec les unités suivantes : contraintes et pressions exprimées en bars, temps en minutes, températures en degrés Celsius.

L'écart S entre modèle et expérience est donc très acceptable pour la contrainte et le dommage. Il peut paraître à première vue un peu élevé pour la variation de volume, mais le calcul montre qu'une erreur relative importante sur ΔV n'entraîne qu'une erreur relative beaucoup plus faible sur la contrainte calculée.

44. Relaxation de longue durée

Soit $(\mathcal{E}_{11})_i$ l'allongement imposé et t_i le temps de début de relaxation. Le module de relaxation E_R , défini par $E_R = \frac{\sigma}{(\mathcal{E}_{11})_i}$, décroît avec le temps.

Si on suppose que le volume de l'éprouvette ne varie pas au cours de la relaxation, on peut tirer de (8) :

$$E_R = \frac{(E_R)_i}{E_1 + E_2 \left(\frac{p+1}{t_i} \right)^{m_1/p}} \left[E_1 + E_2 t^{-m_1/p} \right] \quad (19)$$

$$\text{si } t \gg t_i$$

Expression d'ailleurs analogue à celle rencontrée en viscoélasticité linéaire :

$$E_R = E_e + (E_g - E_e) \left(1 + \frac{t}{\tau} \right)^{-n}$$

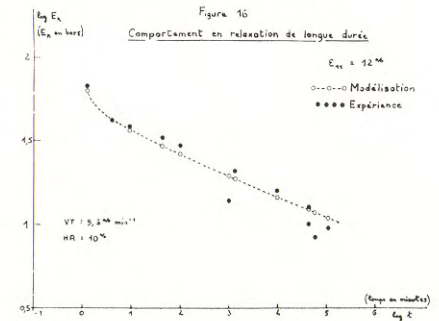
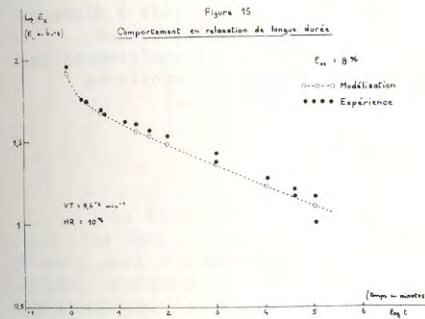
Les essais de relaxation ont été effectués uniquement à température ambiante et pression atmosphérique, sous 3 déformations imposées (4 % - 8 % - 12 %). Les éprouvettes ont été maintenues stockées sur un cadre et reprises au dynamomètre pour la mesure de la contrainte, ce qui explique la dispersion des valeurs obtenues.

La durée des expériences de relaxation a dépassé 1 an, mais nous n'avons tenu compte pour le calcul que des mesures pour des temps inférieurs à $1,2 \times 10^5$ minutes (soit 2 mois 1/2). En effet, au-delà de ce temps :

- les mesures deviennent très dispersées,
- le module E_R subit une chute brutale, probablement due au vieillissement du liant.

Les valeurs mesurées de contraintes concernant 6 essais ont été ajoutées au fichier de données déjà utilisé et traitées avec le code de calcul, selon (8), en supposant, comme nous l'avons dit, que la variation de volume était nulle au cours de la relaxation (de toute façon la mesure au dilatomètre à gaz n'est pas possible sur un temps aussi long).

Les points calculés de $\log E_R$ en fonction de $\log t$ sont reportés sur les figures 15 et 16. On voit que la loi de Farris permet aussi de représenter très correctement le comportement du matériau en relaxation à long terme.



Cependant les valeurs des paramètres obtenues pour la loi de comportement ne sont pas tout à fait les mêmes qu'en (16). Ces valeurs seraient évidemment différentes, si l'on mettait en évidence expérimentalement une variation de volume au cours de la relaxation. L'écart S augmente un peu, atteignant 14,7 %.

Sur les figures 15 et 16, on peut voir que les courbes calculées sont pratiquement des droites. Ces droites ont pour pentes $-\frac{m_1}{p}$, comme le prévoit l'expression (19) dans le cas où $E_1 = 0$.

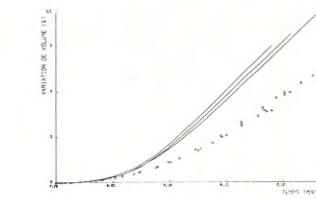
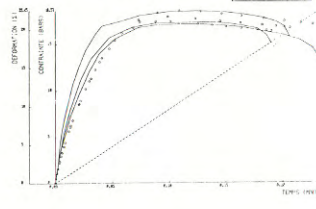
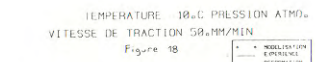
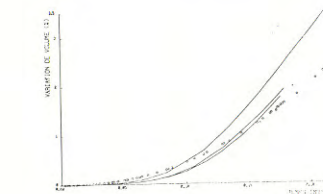
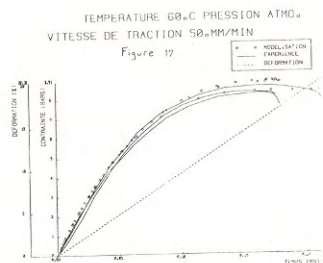
45. Tractions à différentes températures

Ces essais ont été effectués sur des éprouvettes d'âge différent des précédentes. Les propriétés mécaniques ayant évolué, les résultats des mesures ont donc été groupés en un fichier de données distinct du précédent, qui a été traité séparément.

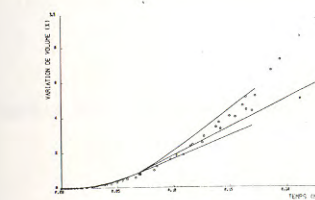
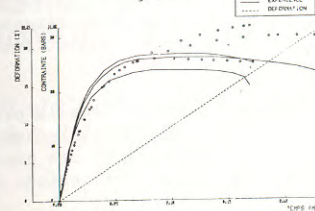
Les essais ont été effectués à pression atmosphérique, à 2 vitesses de traction 5 et 50 mm mm⁻¹, et à 6 températures de -30 à +60°C.

Le programme permet de calculer la fonction a_T d'équivalence temps-température. Par suite, les paramètres obtenus sont indépendants de la température.

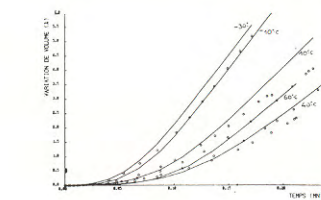
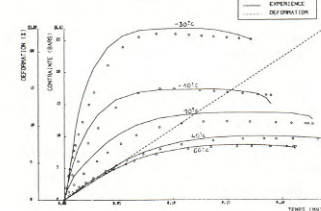
Les figures 17 à 19 donnent quelques courbes typiques à diverses températures. On voit que c'est pour les températures les plus basses (-10 et -30 °C) que les écarts entre courbes théoriques et expérimentales, ainsi que la dispersion des points de mesures sont les plus importants (difficulté d'avoir une température parfaitement bien définie).



TEMPERATURE -30°C PRESSION ATMOS.
VITESSE DE TRACTION 50 MM/MIN
Figure 19



TEMPERATURE -30°C A +60°C PRESSION ATMOS.
VITESSE DE TRACTION 50 MM/MIN
Figure 20



La figure 20 montre que, lorsque la température diminue, la contrainte est plus forte. Cette influence -bien connue- est due au liant. On constate d'autre part l'augmentation -pour un allongement donné- de la variation de volume, autrement dit de la décohesion entre charges et liant, probablement en conséquence des contraintes plus élevées qui s'exercent à basse température entre les deux constituants.

5. CONCLUSIONS

Les résultats précédents montrent que les lois de FARRIS permettent de représenter de façon satisfaisante le comportement viscoélastique non linéaire d'un propergol composite, et plus généralement d'un matériau à base d'élastomère fortement chargé. Alors que certains modèles ne sont valables que dans un domaine assez étroit, l'intérêt des lois de Farris est de fournir, avec un nombre relativement restreint de paramètres fixes, une représentation utilisable dans des conditions très différentes (dans notre cas : pressions 0 à 60 bars, températures -30 à +60°C, vitesses de déformation 10⁻¹ à 10 mm⁻¹, temps 10⁵ mn). Comme nous l'avons vu, l'accord entre calcul et expérience est meilleur dans certaines conditions, moins bon dans d'autres (par exemple hautes pressions, ou basses températures). De toute façon, la précision du calcul théorique ne peut dépasser celle qu'autorise la dispersion inévitable des mesures expérimentales.

Nous avons vu qu'il était possible d'obtenir une estimation chiffrée du dommage subi par le matériau et par suite de prévoir, avec une certaine fiabilité, la rupture de celui-ci.

Il resterait encore -pour être complet- à étudier l'influence du vieillissement sur le comportement, et à vérifier les lois de Farris dans le cas de sollicitations telles que : traction à très grande vitesse, traction non monotone, compression, fluage à long terme, sollicitation multiaxiale.

Ce dernier cas de sollicitation étant très important dans la pratique de la prédiction des chargements de propergols composites, la possibilité d'estimer le comportement tridimensionnel et le dommage par des expériences uniaxiales paraît un des points forts de la théorie viscoélastique non linéaire qui a été étudiée.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) MULLINS L.J. "Effect of stretching on the properties of rubber" Journ. Rubber Research, 16, 275-289, (1947)
- (2) BUECHE F. "Molecular basis for the Mullins effect" Journ. Applied Polymer Sci., 4, 107-114 (1960)
- (3) FARRIS R.J. "Homogeneous constitutive equations for materials with permanent memory" Ph. D Thesis, University of Utah, Department of Civil Engineering (june 1970)
- (4) LE ROY M. "Etude de l'adhésion liant-charge dans les propergols composites" Colloque du Groupe Français d'Etudes et d'Applications des Polymères Toulouse 13-15 Nov 1978
- (5) FARRIS R.J. "The influence of vacuole formation on the response and failure of filled elastomers" Trans. Soc. Rheology 12.2, 315-334 (1968)
- (6) RACIMOR P. "Comportement viscoélastique non-linéaire des propergols composites" Thèse CNAM Paris Décembre 1980
- (7) GREEN A.E., RIVLIN R.S. and SPENCER A.J.M. "The mechanics of non-linear materials with memory" Part 2. Arch. Rat. Mech. Anal., 3, 82-90 (1959)
- (8) FARRIS R.J. and SCHAPERY R.A. "Development of a solid rocket propellant non-linear viscoelastic constitutive theory" Vol. I (june 1973)
- (9) LHUILLIER J.N. et al. "Tenue mécanique et fiabilité des chargements à propergol solide" Sciences et Techniques de l'Armement, 52, 1er fasc. 1978
- (10) FARRIS R.J. "Dilatation of granular filled elastomers under high rates of strain" Journ. Appl. Polymer Sc. Vol. 8, 25-35 (1964).

PROPRIETES VISCOELASTIQUES, STRUCTURE ET ACTION DES COMPOSITES ABRASIFS VISCOELASTIC PROPERTIES, STRUCTURE AND ACTION OF ABRASIVE COMPOSITES

T. MATHIA et C. FAYOLLE
Ecole Centrale de Lyon - Ecully - France

RESUME

Les processus abrasifs, traditionnellement divisés en deux groupes (abrasion à deux corps et abrasion à trois corps), sont analysés et classés d'après leurs domaines d'expression. Les lois d'usure abrasive ont une infinité de domaines d'expression et nous proposons de les compléter par des critères statistiques des états topographiques et de propriétés dynamiques de surfaces abrasives et abradées. Une approche ergodique de l'abrasion est proposée et la notion de morphogenèse est introduite. Une représentation graphique de la réponse sur une classe de sollicitation permet de vérifier la validité du concept rhéologique en abrasion. Enfin, le problème fondamental de la simulation du processus abrasif est abordé dans cet article.

ABSTRACT

Abrasive processes, usually divided into two groups ("two body" abrasion and "three body" abrasion), are analysed and classified according to their areas of definition. The wear laws which can be expressed over an infinite area of definition are presented. This model is supplemented by statistic criterion of roughness and dynamic properties of abrasives and abraded surfaces. An ergodic approach is proposed and a morphogenese idea is introduced. A verification of the rheological concept validation in abrasion is accomplished by a graphic representation of response to a given class of stress sollicitation. Finally the more general problem of abrasive process simulation is approached.

1. PREAMBULE

L'abrasion est un processus qui fait partie du phénomène plus général d'usure, c'est à dire déplacement de matière de la surface active d'un corps par suite de son frottement avec la surface d'un antagoniste animé d'un mouvement relatif.

Si elle est renommée pour ses aspects négatifs (origine de la dégradation des systèmes), elle, présente toutefois un aspect positif recherché dans de nombreux procédés d'usinage tels que : rectification, rodage, pierrage, etc. Que ce soit pour mieux maîtriser ses aspects néfastes ou optimiser ses aspects bénéfiques on cherche donc à comprendre et rationaliser les lois de l'usure.

Dans ce domaine, l'expérimentation constitue un outil de base et les études conduisent à s'intéresser à des facteurs qui relèvent de différentes disciplines scientifiques.

De par la complexité des phénomènes, la réalisation de l'expérimentation conduit généralement à une modélisation des conditions réelles trop complexes à reproduire intégralement. En effet, comme nous l'avons signalé, l'étude de l'abrasion fait appel à diverses disciplines scientifiques (rhéologique, physique des solides, chimie, thermodynamique, mécanique des fluides, cinématique...), pluridisciplinarité qui rend délicat le partage des phénomènes fondamentaux et annihile les possibilités de description unique et universelle. L'aspect interfacial du processus accroît de plus la difficulté d'étude.

L'interface se présente comme générateur et réacteur pour des phénomènes généralement de caractère irréversible, qui s'énoncent en termes d'inéquations : les contraintes, les équations d'état et les lois physiques ou chimiques de comportement évoluent lorsque sont franchis ou atteints certains seuils, les modélisations purement mathématiques deviennent de ce fait très complexes (1).

L'évolution des données telles que l'énergie de surface, la structure cristalline, l'orientation cristallographique, le type des dislocations, l'état microgéométrique, la nature des polluants superficiels n'est pas uniforme dans la zone de contact, l'état ultime du système étant par ailleurs inconnu.

Dans l'état actuel des connaissances, en l'absence de lois d'usure abrasive établies scientifiquement, les ingénieurs s'appuient sur des règles empiriques (évolution de l'usure avec la charge, la température, le temps, la dureté de la pièce, etc...) qui ne peuvent pas être généralisées.

Ainsi, l'abrasion doit être traitée non comme une propriété intrinsèque d'un matériau, mais comme un processus, en particulier lorsqu'il s'agit de systèmes technologiques. Il convient de s'intéresser, non seulement aux données géométriques et mécaniques, mais aussi aux caractéristiques physico-chimiques résultant de l'environnement naturel.

Dans l'exposé qui suit nous nous limiterons à la donnée de quelques observations expérimentales justifiant les relations existant entre le comportement rhéologique des corps participant au processus abrasif et l'état topographique des surfaces résultantes ; ceci dans le but de donner un élément de pronostic des lois d'usure dont l'établissement actuel est limité au diagnostic. N'ayant pas la prétention de rationaliser les lois de l'usure abrasive et dans le souci de l'éviter l'erreur fréquente de l'anamorphose nous commencerons par présenter la classification de l'abrasion et quelques approches positives, puis nous aborderons les points suivants :

- présentation des procédés de génération des surfaces,
- caractérisation topographique des surfaces,
- caractérisation rhéologique des corps,
- modélisation et vérification.

Cette étude fondamentale à caractère phénoménologique s'appuie sur des faits expérimentaux et nous amène à mettre en relief un ensemble de paramètres cachés par le comportement dynamique des corps, mais cependant importants dans le processus abrasif.

2. PROCESSUS ABRASIF

2.1. Les variantes de l'abrasion

De part les multiples paramètres en présence, types de sollicitation, nombre de phénomènes physiques interférents, etc., la classification et la caractérisation des différents modes d'abrasion sont encore très délicates.

Nous avons montré dans le paragraphe précédent, d'une part, que les processus d'usure abrasive étaient complexes et d'autre part, qu'il n'y avait pas jusqu'ici de science fondamentale qui permette la synthèse des modèles d'abrasion en une théorie spécifique.

Cette situation a conduit à la formation d'une nouvelle branche, que certains scientifiques nomment maintenant "la mécanique physico-chimique". C'est une mécanique, parce qu'elle opère avec des notions de mécanique : état de contraintes, déformations, vitesse de déformations, glissement, cisaillement, viscosité, plasticité, écoulement, élasticité, écrouissage, fragilité, etc. Mais en plus, elle étudie spécialement les facteurs physico-chimiques dans leur action directe ou indirecte sur les propriétés d'un corps ou plus généralement d'un système durant sa phase de création (2).

Dans un interface statique, le contact s'effectue par l'intermédiaire d'un certain nombre d'aspérités et de particules, pénétrateurs élémentaires dont les effets dans une partie des cas sont assimilables à ceux observés lors des essais de dureté. La profondeur et la forme des empreintes résiduelles sont fonction de la géométrie, de la charge supportée par ces éléments et du comportement rhéologique des deux surfaces constituant l'interface.

Le problème se complique lorsque l'interface est soumis à une contrainte de cisaillement, et que les deux surfaces se déplacent l'une par rapport à l'autre. On conçoit qu'un certain nombre de pénétrateurs les plus durs (plus écrouis par exemple), très anguleux et convenablement orientés par rapport au sens de déplacement engendrent des rainures et des sillons respectivement accompagnés ou non d'enlèvement de matière. On a coutume d'appeler ce mode : "abrasion à deux corps". Les études de la morphologie d'écoulement autour d'une aspérité ou d'une particule ont montré que l'interférence des bourrelets latéraux constitue un mode complémentaire de déformation plastique et/ou élastique sans ou avec enlèvement de matière. La figure 1 illustre ce processus.

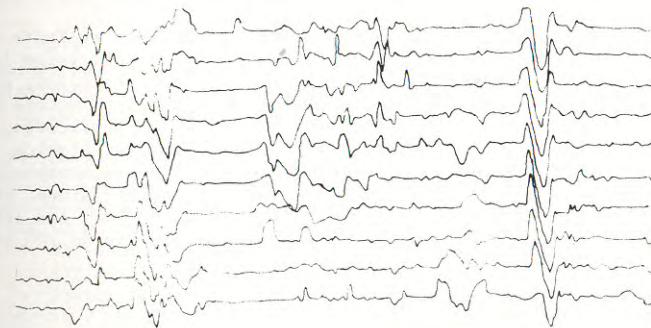


Figure 1 : Déformations typiques de l'abrasion, représentation graphique tridimensionnelle d'une surface tonnelée.

La matière enlevée peut s'agglomérer constituant des "grumeaux" qui dans certains cas peuvent conduire à un enlèvement et/ou au déplacement de matière supplémentaire. Cette phase initiale d'usure à "trois corps" plus complexe se caractérise par le fait que le produit interfacial conduit "in statu nascendi" aux déformations élasto-plastiques précédemment décrites. Ces structures colloïdales constituées de produits a priori très mous initient l'usure même à l'échelle moléculaire. La figure 2 illustre ce phénomène observé en présence des grumeaux constitués de particules d'oxydes et de composés organiques.

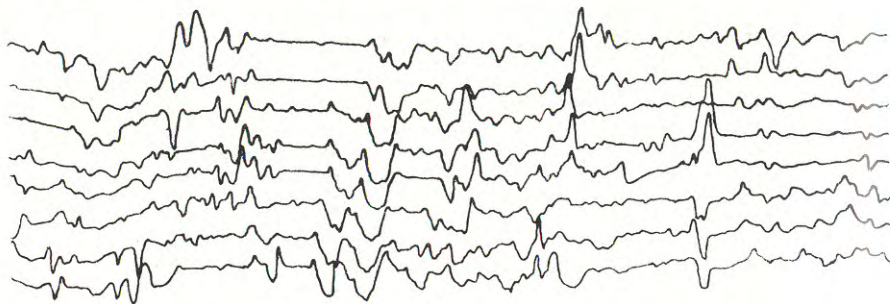


Figure 2 : Déformation plastique provoquée par un agglomérat colloïdal (3).

On conçoit aisément que le phénomène de l'abrasion est fortement influencé par la nature du système qui la concerne.

En "circuit ouvert", les modifications de la surface croissent linéairement avec la distance d'abrasion car la surface abrasive rencontre une surface fraîche dont les caractéristiques sont constantes.

En "circuit fermé", les particules abrasives et les débris d'usure tendent à s'accumuler formant ainsi un produit interfacial. Ses propriétés rhéologiques déterminent l'accroissement ou la diminution des modifications de la surface abradée. De plus, les particules abrasives peuvent s'incruster dans une des deux surfaces transformant l'abrasion à "trois corps" en abrasion à "deux corps". cf. fig. 3.

Dans ces conditions, il paraît nécessaire, pour pouvoir se faire une idée plus complète du processus abrasif de parvenir à un classement selon le mouvement relatif et la nature des corps concernés par l'abrasion. Ainsi, glissement, roulement, pivotement, impact des corps solides ou liquides ou encore des solides dans un liquide ou un gaz conduisent à certaines spécificités.

En particulier, malgré l'absolu des définitions (solide, liquide, gaz) la distinction entre ces comportements est relative. Elle dépend notamment de la durée de sollicitation, de l'état de contraintes, de la température, etc... Or, les contacts lors du processus abrasifs durent de 10^{-2} à 10^{-4} s., les déformations dépassent souvent 1000% en présence de contraintes de l'ordre de 10^3 daN/mm². Toute classification sera donc toujours très arbitraire.

2.2. La réalité de l'abrasion

En présence du phénomène d'abrasion un interface cumule un ensemble des processus élémentaires dont la liste non exhaustive commence par :

- l'adhésion qui conduit aux transferts de différents matériaux (4).
- l'état des contraintes est complexe dans l'interface, les trois types de cinématique (roulement, glissement, pivotement) pouvant être présents au niveau des contacts élémentaires entre aspérités (5).
- des microcraques sont initiées à la surface et sous la surface des pièces, les déformations superficielles sont anisotropes et aléatoires (6).

- le régime de propagation de fracture est constamment perturbé et le mode transitoire de fracture fragile-ductile évolue. (7).

- sous l'effet de la déformation répétée, particulièrement en absence de lubrification la décohesion d'un fragment de la surface est aisée (8).

- les fragments transférés d'un corps sur l'autre ou libérés dans l'interface peuvent, après écrouissage, engendrer des déformations supplémentaires (9).

- l'état des contraintes évolue avec la progression de l'abrasion (10).

- la surface est, dans la plupart des cas réels, recouverte d'un film contaminant d'oxydes, de sulfures... Si la déformation globale du contact est limitée, l'usure intéresse principalement le film superficiel et, est fonction des facultés de dégradation et de reconstitution de ce film (11).

- D'autre part, des transformations se produisent dans l'interface en glissement. Outre les modifications géométriques des surfaces, des transformations superficielles (des solides) de nature chimique ou métallurgique peuvent se produire (12).

- Un film "mou" peut être créé lors du frottement par suite des réactions tribochimiques, phénomène observé en présence de certains lubrifiants (13).

- Une couche "dure" peut être générée lors du frottement par des transformations tribo-chimiques et métallurgiques, phénomène observé le plus souvent avec des matériaux ferreux (11).

- La chaleur dégagée lors du frottement peut accroître la diffusion des éléments dans l'interface et ainsi les facultés d'adhésion entre surfaces non lubrifiées (14).

- Dans le cas de systèmes lubrifiés, l'échauffement a un effet important sur l'efficacité du film protecteur (il peut y avoir désorientation, désorption, transformation chimique de la couche superficielle), (15).

- La température et la vitesse de déformation peuvent modifier les comportements rhéologiques des matériaux en regard, en changeant complètement la nature des phénomènes (16).

Il en résulte que les comportements rhéologiques et la structure des matériaux constituent les principaux éléments du schéma synoptique relatif à l'établissement d'une loi d'usure. Dans l'exposé qui suit nous nous intéressons à cet aspect de l'abrasion dont une des conséquences est l'état géométrique des surfaces résultantes. Le schéma synoptique se réduit à celui de la figure 3.

La température joue un rôle fondamental car en chauffant simplement le métal, on peut provoquer une réorientation des grains, une réhomogénéisation ou une recristallisation. La distribution de précipités ou d'inclusions dans les grains ou aux joints des grains dépend fortement des traitements thermiques subis par le matériau. Ces phénomènes ont une influence non négligeable sur le comportement du matériau à l'égard du processus abrasif, car ils créent dans une matrice relativement homogène des noyaux de dureté différente qui peuvent être des points de concentration de contraintes et créer des hétérogénéités dans la déformation.

La création d'un sillon ou d'une rayure constitue une déformation permanente accompagnée ou non de décohesion.

Les conditions de déformation irréversible des corps réels font appel à la fois à la notion de seuil et la notion de temps. Par exemple, un corps peut présenter une certaine viscoélasticité pour les faibles contraintes, puis, au delà d'un certain seuil, présenter en outre un écoulement irréversible fonction ou non de la vitesse de déformation. Ce seuil de plasticité se détermine en général à partir d'essais de dureté. La notion de la dureté est inhérente à l'abrasion car on montre que pour créer un sillon ou une rainure, la dureté du pénétrateur doit être seulement 20% supérieure à la dureté de la surface rayée (17). La justification de cette relation expérimentale admise par les minéralogistes et les lapidaires est difficile car si l'interprétation d'indentation statique est délicate, le cas dynamique et tridimensionnel devient hasardeux. On sait analyser par la théorie du champ des lignes de glissement l'indentation d'un matériau rigide parfaitement plastique par un poinçon plat triangulaire, cylindrique. Bien que les conditions pendant l'abrasion soient sensiblement

différentes : corps visco-élasto-plastiques, scission interfaciale mal définie, déformations tridimensionnelles etc..., nous essayerons de tirer de ces analyses les éléments utiles à la compréhension de l'abrasion. Mais avant, introduisons la notion de ductilité si importante dans l'abrasion. La ductilité est l'aptitude d'un corps à se déformer sans décohésion à l'échelle macroscopique. Cette notion diffère de celle de la dureté. La dureté est liée à la contrainte d'écoulement. La ductilité, elle, n'est pas forcément liée à la dureté du métal. Un corps peut être mou et peu ductile (Cu + 0,1%Bi) ou dur et très ductile (inox 8/8). Le critère de fracture ductile, qui conduit donc à une décohésion, est très mal connu et on caractérise la ductilité par la déformation à la fracture.

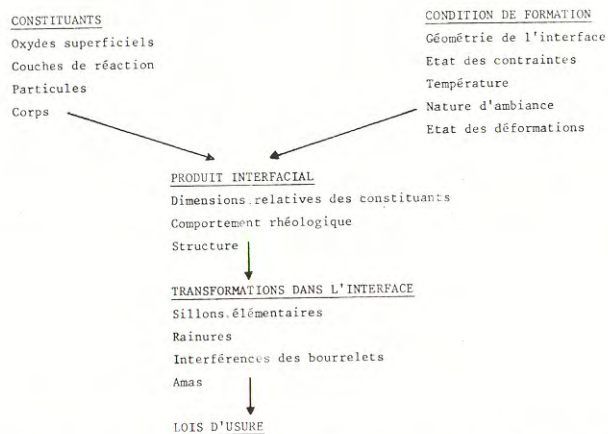


Figure 3 : Schéma synoptique des constituants d'une loi d'usure mettant en relief le contexte relationnel rhéologie - topographie.

2.3. Contribution de la recherche

A ce niveau, deux approches interviennent : globale-macroscopique proposée par les Mécaniciens des Solides, locale-microscopique soutenue par les métallurgistes Physiciens du Solide et Physico-Chimistes des Surfaces. Ces derniers procèdent essentiellement à une description qualitative et parfois quantitative des phénomènes élémentaires qui interviennent en essayant de trouver des relations simples entre eux. La composition chimique d'un métal, par exemple, et l'état structural de ses composants influent considérablement sur ses propriétés mécaniques. Certains éléments comme le magnésium, par exemple, augmentent la limite élastique, d'autres, comme le molybdène, améliorent la tenue en fluage. Suivant le traitement thermique (recuit, trempe...) subi par le matériau, certaines transformations de phases peuvent être accélérées ou au contraire bloquées, la structure peut être maintenue dans un état métastable. On peut observer, par exemple pour un acier austénitique, une transformation martensitique après une déformation plastique importante.

La taille, la forme et l'orientation des grains sont déterminés par des traitements thermiques et/ou mécaniques et conditionnent les propriétés ultérieures du matériau.

Elle dépend essentiellement :

- de paramètres structuraux (un alliage perd généralement sa ductilité avec sa concentration en seconde phase) ;
- de l'état de contrainte (la superposition d'une pression hydrostatique peut permettre la déformation plastique des corps fragiles) ;
- de l'histoire de la déformation (le cumul des dommages créés à chaque moment de la déformation peut diminuer la ductilité).

En l'absence donc de véritables critères de fracture ductile, il faut s'orienter vers la physique du solide. On montre que, au sein même d'un cristal, il existe un nombre considérable de défauts ; les principaux sont les défauts ponctuels (lacunes et atomes interstitiels) et les défauts linéaires (dislocations). Dans un cristal nouvellement préparé, la densité de dislocations après une déformation plastique moyenne est rapidement multipliée par un facteur considérable (10^4 à 10^6). Ces défauts à l'échelle du cristal jouent un rôle fondamental dans la déformation plastique par leurs déplacements et leur évolution étudiés expérimentalement et théoriquement. A l'aide de ces processus élémentaires, les propriétés plastiques et viscoplastiques des matériaux, et particulièrement l'influence sensible de la température ou/et de la vitesse de déformation sur ces propriétés peuvent être étudiées. Les nombreux modèles physiques proposés ne sont valables que lors de changements unidirectionnels. On conçoit, en raison du caractère tridimensionnel du phénomène d'abrasion, qu'une transposition directe de ces modèles et le passage du microscopique au macroscopique n'est pas toujours aisé. Par exemple, la diminution du seuil de plasticité avec l'augmentation de la température est générale, mais elle dépend de nombreux facteurs.

Pour la plupart des corps, la dureté à la température ambiante est d'autant plus grande que sa température de fusion est élevée.

On constate qu'à des températures élevées (1000°C), générées localement dans certaines conditions de frottement, des abrasifs perdent très rapidement leur dureté initiale. Ce phénomène est fondamental pour les processus abrasifs ; car, il est connu que le camphre (t.f. $+178^\circ\text{C}$) raye l'alliage de Wood (dureté 12 HB, t.f. $+68^\circ\text{C}$) mais ne raye pas l'étain (5 HB, t.f. $+235^\circ\text{C}$). L'oxyde de plomb (t.f. $+880^\circ\text{C}$) raye facilement la surface du bronze (Cu 65% - Sn 35%, t.f. $+720^\circ\text{C}$, 460 HB) mais ne raye pas des métaux moins durs comme le nickel (60 HB, t.f. $+1452^\circ\text{C}$), le palladium (30 HB, t.f. $+1555^\circ\text{C}$) et le molybdène (100 HB, t.f. $+2470^\circ\text{C}$) est plus mou que le quartz (100 HB t.f. $+1710^\circ\text{C}$) mais il le raye (17).

Il en résulte que la relation entre la dureté et l'abrasion n'est pas simple, d'autant plus qu'il s'agit de phénomènes cycliques souvent modifiés par le milieu environnant (18).

2.4. Modes de génération des surfaces

De nombreux modèles d'élaboration des surfaces par : enlèvement, agencement, séparation et dépôt ont été décrits dans la littérature (1), cependant, les mécanismes fondamentaux qui régissent l'ensemble des transformations des surfaces dans les processus abrasifs sont complexes et mal connus.

Nos études antérieures ont montré que les modes aléatoires de génération des surfaces, tels que rodage, sablage, polissage ou tribofinition conduisent à des états de surfaces aléatoires (19). La cinématique des éléments dans le dernier procédé bien que dirigée, peut être, du fait du caractère aléatoire des contacts : pièces-composites abrasifs, considérée comme aléatoire. De plus, le caractère aléatoire des surfaces des composites abrasifs d'une part, et le très large spectre de vitesses entre ces dernières et la surface des pièces à traiter d'autre part, nous amènent à supposer qu'il s'agit ici d'un mode aléatoire de génération de surface (20).

De ce fait, une caractérisation de l'état de surface et le suivi de son évolution sont possibles à l'aide de l'analyse statistique. Nous avons donc pour notre étude retenu deux procédés de génération des surfaces : rodage et tribofinition. Cette dernière se caractérise par la dominance de l'usure du type "deux corps" qui, comme nous le montrons dans la suite de l'exposé peut se transformer en usure à "trois corps" par l'intermédiaire du produit interfacial. Le rodage avait été retenu pour son mode de génération des surfaces qui repose essentiellement sur le concept du produit interfacial, donc l'abrasion à "trois corps". Les transformations de surfaces lors des procédés retenus résultent d'un mécanisme

complexe qui se compose comme suit :

- action directe des protubérances dures de la surface et des grains abrasifs enchassés dans la matrice du composite abrasif qui déforment plastiquement les surfaces, avec ou sans enlèvement de matière (abrasion à "deux corps"), (21).
- action du produit interfacial constitué de "microcoqueaux", de résidus d'abrasifs et de la matrice (abrasion à trois corps), (22).
- action des interférences des bourrelets latéraux, des rainures ou/et des sillons (22).

Les paramètres géométriques des abrasifs (forme, orientation, échelle relative, distribution spatiale, etc.) ainsi que le comportement rhéologique des corps antagonistes conditionnent le mode dominant dans le processus de génération de surface. De ce fait, l'importance de la vitesse de déformation et de la température est considérable.

L'action du fluide dans le processus abrasif est très complexe. Nous signalons seulement que son rôle mécanique à l'échelle moléculaire est notable, d'une part par l'action lubrifiante qui peut modifier la morphologie d'écoulement de la matière et d'autre part par la réaction physico-chimique de la surface qui peut conduire à des phénomènes tels que fragilisation et plastification par adsorption, et à la création de films réactionnels. A l'échelle macroscopique, le comportement dynamique du fluide, en tant que "liant" des produits interfaciaux, conditionne la morphologie d'écoulement de ces derniers dans l'interface, et influence les modes de génération des surfaces.

Des examens en microscopie électronique à balayage ont révélé à la surface des pièces, issues du rodage et de tribofinition, de nombreuses rainures - traces de déformation plastique avec enlèvement de matière - et des sillons - traces de déformation plastique dans enlèvement de matière - ainsi que les bourrelets latéraux et frontaux associés (cf. figure 1).

L'analyse à l'aide d'une microsonde électronique de la surface de composites abrasifs ayant travaillé, met en évidence la concentration du métal autour des grains abrasifs et des particules issues de la dégradation des corps en présence et incrustés dans la matrice, participe à l'action abrasive.

Tous les éléments renforcent l'hypothèse du mode aléatoire de génération des surfaces, même dans le cas de l'abrasion à deux corps lors du procédé de tribofinition.

2.5. Caractérisation de l'état de surface

Pour évaluer les états de surface, les techniques tactiles de relevé bi ou tridimensionnel ont été utilisées, puis l'analyse statistique leur a été appliquée.

La topographie de la surface peut être décrite à partir des observations qualitatives puis caractérisée par un certain nombre de grandeurs extrêmes et de grandeurs statistiques provenant de la métrologie dimensionnelle.

La technique tactile la plus développée offre l'avantage de délivrer le profil de la surface ou encore une représentation tridimensionnelle.

Ainsi, l'état géométrique d'une surface réelle peut être défini par la hauteur $z(x,y)$ de ses irrégularités en tout point de coordonnées (x,y) . Pour caractériser cet état, il convient d'étudier cette hauteur comme une variable aléatoire, en utilisant les techniques statistiques. On a donc accès aux grandeurs pouvant caractériser l'étalement vertical et horizontal d'un profil de surface (23).

La plupart des paramètres statistiques ou critères d'un état de surface peuvent être déduits de la connaissance de deux fonctions statistiques seulement, la fonction de densité de probabilité (24) et la fonction d'autocorrélation $C_z(\beta)$.

La caractérisation d'un état de surface tridimensionnel nécessite l'analyse statistique de la distribution des hauteurs de surface comme une variable à deux arguments $z(x,y)$. La hauteur z d'un point P relative à une surface de référence peut être considérée homogène si la description statistique demeure invariante

lors du déplacement sur la surface :

- la valeur moyenne $z = E[z(P)]$ du processus est constante.
 - la fonction d'autocovariance du processus ne dépend que du vecteur $\vec{r} = PP'$.
- Dans le cas où la surface est isotrope, la fonction d'autocovariance ne dépend plus que du module de \vec{r} et non de son orientation. Alors les fonctions d'autocovariance du profil et de la surface sont égales. Les propriétés statistiques sont indépendantes de la direction du profil.

Si la distribution des hauteurs $z(x,y)$ est gaussienne, il en est de même de celle des dérivés des hauteurs donc des pentes. La distribution d'une surface gaussienne et isotrope ne dépend donc que de trois coefficients seulement : écart type des hauteurs σ , acart type de pentes σ_g , et courbure moyenne des sommets C_{Som} .

La connaissance et donc la mesure de ces trois paramètres est suffisante pour définir complètement une surface gaussienne et isotrope d'un point de vue géométrique et statistique.

Les surfaces gaussiennes sont rares. On cherchera donc à donner à l'aide de la statistique descriptive, un résumé quantitatif d'une série statistique observée. Suivant le type d'informations à résumer, on distinguera :

- les paramètres de position qui permettent de situer une série statistique par une valeur sur une échelle de mesure. Les plus connus sont la moyenne, la médiane, le mode, les moments non centrés.
- les paramètres de dispersion qui caractérisent l'homogénéité de la série, citons l'étendue, la variance, l'écart type, l'écart moyen, les moments centrés.
- les paramètres de forme qui permettent d'apprécier l'assymétrie et l'aplatissement d'une distribution.

Des renseignements intéressants concernant la caractérisation des surfaces peuvent être apportés par l'utilisation de paramètres sans dimension tels que l'obliquité (SKEWNESS) S_k , et la finesse (KURTOSIS) E_k . Le premier permet de chiffrer l'assymétrie et le second l'aplatissement de la courbe de densité. Le suivi de l'évolution de ces paramètres permet non seulement de modéliser la topographie d'une surface, mais aussi d'apprécier la rapidité avec laquelle elle évolue (25).

La caractérisation topographique de l'état de surface et son évolution au cours du processus abrasif nécessitent l'évaluation des étalements verticaux et horizontaux. Pour caractériser l'étalement vertical et horizontal du profil, nous avons utilisé respectivement : la fonction densité de probabilité $p(z)$ et la fonction d'autocovariance $C_z(\beta)$.

2.6. Caractérisation rhéologique

D'une manière générale, on sait que les déformations des corps lors du processus abrasif, résultent de l'action de divers mécanismes : distorsion élastique du réseau, déplacement des dislocations, macelage, frottement solide, magnetostriction, décohésions locales, etc. qui peuvent se manifester simultanément ou non, selon les conditions de sollicitations : intensité, vitesse d'application, chronologie, etc.

Le problème essentiel consiste toujours pour un matériau donné, au bon choix des relations de comportement.

Plusieurs approches de ce problème sont possibles. En mécanique des solides on considère les milieux comme continus et on définit en un point des quantités comme le tenseur des contraintes, le tenseur de déformation. En réalité, le point représente un certain élément de volume de matière qu'il faut choisir convenablement, le choix a une importance fondamentale dans la recherche de la relation entre Q , force appliquée et q , déplacement en un point de la matière.

Cette relation peut être obtenue directement, nous dirons à une échelle macroscopique, par une approche globale macroscopique. La limite élastique, les coefficients et fonctions dans la relation qui a pu être proposée empiriquement pour représenter la courbe expérimentale (Q,q) peuvent être déterminés assez facilement lorsque le chargement est unidimensionnel. Mais il ne sera pas

possible d'utiliser cette relation pour un autre système de géométrie différente, il faudra à chaque fois entreprendre une nouvelle série d'expériences.

On peut agir cependant d'une autre façon : dans un premier temps, on s'intéresse au comportement et à la géométrie des différents constituants élémentaires d'élément du volume de matière considérée : c'est une étude à l'échelle microscopique par une approche locale microscopique.

Dans un deuxième temps, on regardera comment les constituants élémentaires ont été placés dans le système : orientations, mobilités possibles, compactage, état des efforts internes, etc.

Dans un troisième temps, on calculera la réponse globale de ce système. On obtient la relation (Q,q) recherchée. Lorsque ce calcul peut être mis sous une forme quasi analytique explicite, il est évident que l'approche microscopique est plus avantageuse que l'approche macroscopique (26).

Lorsque la déformation produite par une contrainte ne se stabilise que progressivement, il y a participation de phénomènes de type visqueux et il convient de faire intervenir un tenseur des vitesses. Lorsque l'action de la contrainte est supprimée, les déplacements limités peuvent être réversibles, renversables ou permanents. Les déplacements réversibles sont liés de manière équivoque à la contrainte qui les produit. Ils constituent l'élasticité parfaite et se produisent sans absorption sensible d'énergie. Les déplacements renversables sont à l'origine des déformations élastiques à hysteresis et viscoélasticité. Dans ce cas, les déplacements s'annulent lorsque l'effort est supprimé, mais ils empruntent un chemin différent à l'aller et au retour, et ce mouvement absorbe une quantité d'énergie appréciable représentée par l'aire du cycle d'hysteresis. Les déplacements permanents laissent subsister une déformation résiduelle macroscopique du corps sollicité.

La plupart des types de déformations peuvent être attribués à une seule cause déterminée, sauf toutefois l'élasticité à hysteresis qui peut être la manifestation de plusieurs des mécanismes de déformation cités plus haut. Dans ce qui suit, il sera question de trois caractéristiques énergétiques étroitement liées entre elles et comme nous le montrons, fondamentales dans le processus abrasif.

- énergie de déformation - W
- énergie absorbée par le matériau ΔW
- capacité d'amortissement $\frac{\Delta W}{W}$

La première se manifeste dès qu'un effort produit une déformation ; la seconde exige de plus, que l'effort soit supprimé afin de pouvoir considérer un cycle complet aller-retour de contrainte ; enfin le troisième réunit les deux notions précédentes sous la forme du rapport entre l'énergie absorbée et l'énergie de déformation. L'énergie absorbée ΔW et l'énergie fournie W sont représentées sur le diagramme Q(q) respectivement par l'aire du cycle d'hysteresis et l'aire totale sous-tendue par le diagramme de mise en charge. Lorsque la capacité d'amortissement $K = \frac{\Delta W}{W}$ est faible ce qui est le cas de la plupart des alliages, on fait appel à des définitions indirectes - décrement des oscillations - δ par exemple ou diminution relative de deux amplitudes consécutives au cours de vibrations librement amorties. Pour passer de cette définition indirecte à la relation fondamentale, il est nécessaire, du point de vue mathématique de faire une hypothèse sur les causes physiques de l'amortissement ce qui dans le cas d'un composite est relativement difficile. Les relations courantes permettent de passer d'une définition à l'autre de la capacité d'amortissement, doivent donc être utilisées avec prudence. Il en résulte que d'une manière générale le processus abrasif dans un grand nombre des cas est influencé par les propriétés rhéologiques des corps considérés

2.7. Ergodisme du processus abrasif

Dans un ensemble stationnaire de fonctions aléatoires engendrées par des processus identiques par leur nature, et dont les valeurs possibles évoluent dans une plage continue, l'amplitude d'un élément quelconque de l'ensemble évolue librement. Cette propriété de quasi-ergodicité de processus peut-il s'appliquer à l'abrasion ? Sur le plan physique, la vérification de la stationnarité est extrêmement délicate, ainsi d'ailleurs que sa définition : on la suppose toujours vérifiée et on la contrôlera par ses conséquences à posteriori sur les résultats obtenus.

Dans le cas des moyennes d'ensemble, on ne peut jamais savoir si l'on a considéré suffisamment de réalisation et dans le domaine des moyennes temporelles, cela est plus difficile encore puisque pour chacune des caractéristiques statistiques, il faut réaliser des intégrations portant sur la durée totale du phénomène et vérifier que des mesures décalées dans le temps donnent les mêmes résultats.

Il est plus commode de calculer des moyennes temporelles plutôt que des moyennes d'ensemble : on a de ce fait très souvent plus facilement accès à l'histoire d'une grandeur sur une durée relativement longue plutôt qu'un grand nombre de valeurs obtenues sur des réalisations différentes d'un même processus.

Le problème est donc de savoir si les résultats obtenus à partir de moyennes temporelles ont la même signification que les résultats obtenus à partir de moyennes d'ensembles.

On démontre que cette équivalence est réalisée dès lors que l'on a faire à un processus ergodique.

Il est facile d'effectuer les calculs des paramètres caractéristiques d'une seule portion de surface. Les paramètres obtenus sont analogues aux moyennes temporelles. Lorsque ces moyennes de surfaces dans notre cas ne dépendent pas de la portion choisie sur la surface considérée, on dit que la surface est homogène. Le processus qui a conduit à la création d'une telle surface est stationnaire.

L'ergodicité du processus sera donc un cas particulier de la stationnarité. Si les moyennes de surfaces sont équivalentes sur tous les échantillons, on en déduit que le lot complet des échantillons issus du processus est homogène. L'opération est donc reproductible.

L'évolution de l'état de surface au cours du processus abrasif à "deux et à trois corps" fait l'objet de la présente partie de notre exposé. Nous montrerons qu'il existe une certaine relation entre les propriétés dynamiques des corps participants et l'état de surface obtenu mais que cette corrélation est perturbée par une relation d'ambiguïté. Elle est facilement décelable dans la phase initiale de l'abrasion à trois corps.

La méthode expérimentale consiste à générer les surfaces à l'aide du processus abrasif à "deux et à trois corps" en présence des surfaces de propriétés rhéologiques différentes.

3. EXPERIMENTATION

3.1. Matériaux et modes de générations des surfaces

Abrasion à "deux corps"

Le processus est simulé à l'aide de la machine de tribofinition. Les composites abrasifs sont constitués d'un agglomérat de grains abrasifs d'origine minérale et de liant organique. On a retenu des abrasifs différents du point de vue de la dureté (500 daN/mm² à 1000 daN/mm²) du polymorphisme cristallin (hexagonal-quadratique) et de la nature (SiO₂, ZrSiO₄). Les liants polymérisés appartiennent à deux familles différentes : polyester et urée-formaldehyde ; leurs propriétés mécaniques sont respectivement : contrainte de rupture en traction 2 daN/mm² et 4 daN/mm², en compression 10 daN/mm² et 18 daN/mm², en flexion 6 daN/mm² et 11 daN/mm². Le tableau 1 résume des concentrations volumiques

en abrasif dans différents agglomérats utilisés. Une caractérisation viscoélastique en compression des différents composites abrasifs a montré une faible dépendance de la fréquence au voisinage de la transition vitreuse.

ABRASIF			
	S ₁ O ₂ quartz α	S ₁ O ₂ cristobalite α	Z _r S ₁ O ₄
LIANT	polyester	60 %	60 %
	urée	60 %	30 %
	formol	30 %	2

Tableau 1

Le spectre de fréquences de sollicitation lors du processus abrasif étudié se situe dans le domaine de 1 Hz à 1kHz avec une dominance localisée vers 50 Hz. Les évolutions de E(T) et tgδ (T) sont présentées sur la figure 4. Les surfaces abradées sont en alliage d'aluminium, voisin de AS2GT Y 34, coulé en coquille, mis en solution, séparé et mûri à l'air ambiant. Sa composition métallurgique a été modifiée (Si -1,4 %, Mg -1,4 %, Zn -0,55 %, Fe -0,2 %, Ti -0,01 %, Mn -0,01 %) en vue d'obtenir une capacité d'amortissement δ plus élevée (δ = 7.10⁻⁶ ; T = 60°C, f = 60 Hz)

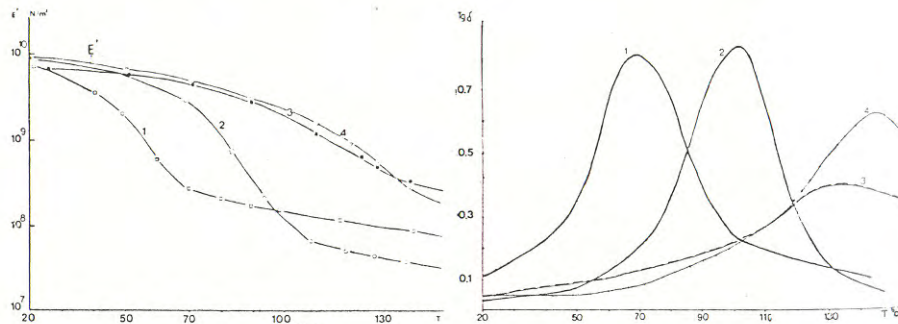


Figure 4 : Comportement viscoélastique des différents agglomérats abrasifs (cf. Tableau 1)

Abrasion à "trois corps"

Le processus est simulé lors du rodage, deux types de matériaux sont testés, alliage d'aluminium et fonte lamellaire. Ces alliages à élasticité non proportionnelle ne présentent pas de relation contraintes-déformations univoques : ces relations sont en particulier modifiées par le sens de variation des efforts appliqués ou par l'action de sollicitations préalables. La structure de l'alliage d'aluminium est macroscopiquement homogène ; par contre, celle de la fonte est polyphasique. La comparaison du comportement en abrasion de ces divers alliages permet d'étudier les mécanismes de déformation inhérents à leur structure. Pour ces alliages, une première sollicitation, même faible, modifie leur configuration structurale de sorte que les caractéristiques mécaniques et, notamment la

limite d'élasticité, le module d'Young et la capacité d'amortissement sont différents de celles d'un alliage exempt de sollicitations préalables. C'est la raison qui nous amène à annoncer ces propriétés uniquement à titre indicatif. La composition d'alliage d'aluminium AU 4GI Y 34 (2017 T4) est la suivante : Cu -4,2 %, Mg -1 %, Si -0,6 %, Mu -0,7 %. Cet alliage est durci par la phase Al₂Cu et, a un degré moindre par Al₂ Cu Mg. La fonte lamellaire fine est par opposition très hétérogène, sa composition est la suivante : C -3,36 %, Si -2,4 %, Mu -0,85 %, Cr -0,46 %, P -0,45 %, S -0,03 %. Les propriétés mécaniques de ces deux matériaux sont reportées dans le tableau 2.

	Duralumin	Fonte	
E	7,5.10 ³	12,15.10 ³	daN mm ⁻²
Rt	59,3	22	daN mm ⁻²
D	18,9	8,3	daN mm ⁻²
δ	4.10 ⁻⁵	400.10 ⁻⁵	
H _y 200	150	Perlite 250, Graphite 10, Stéadite 500	daN mm ⁻²

Tableau 2

3.2. Morphogénèse en abrasion

Abrasion à "deux corps"

L'observation (au microscope électronique à balayage) des surfaces générées lors du processus abrasif à deux corps révèle des rayures, traces de déformation plastique avec enlèvement de matière, et des sillons, traces de déformation plastique sans enlèvement de matière et les bourrelets latéraux et frontaux associés. La décohérence de la matière résulte du déchirement des bourrelets frontaux ou de la fatigue des zones d'interférence entre deux bourrelets latéraux.

L'analyse à l'aide d'une sonde ionique des surfaces des agglomérats abrasifs a permis d'une part de déceler une forte concentration des différents constituants de l'alliage abradé autour des grains émergents et d'autre part de constater des concentrations analogues au voisinage des grains fracturés et des particules issues de la dégradation des corps en présence, qui participent également au processus abrasif. Ces observations ont confirmé l'action aléatoire de chaque "particule abrasive" et on comprend que les propriétés rhéologiques du support qui maintient le grain abrasif jouent un rôle important. En effet, la quantité de matière déplacée ou enlevée varie considérablement avec le module d'Young (E) et le taux d'amortissement (tgδ) du support viscoélastique. Ces paramètres dépendent des conditions d'utilisation : température et fréquence de sollicitation ; ils varient avec la nature et la composition du liant. Les caractérisations dynamiques des agglomérats retenus ont montré que la variation de tgδ en fonction de la fréquence est faible par rapport à sa variation en fonction de la température (cf. Figure 4).

La différence de comportement entre les mélanges de résine (Courbes 3 et 4) et les résines pures (Courbes 1 et 2) est considérable. L'aplatissement des courbes 3 et 4 correspond très vraisemblablement au recouvrement des zones de transition vitreuse de chaque élément du mélange.

La machine utilisée fixe la fréquence et l'amplitude des sollicitations. Les agglomérats ont été choisis en fonction de leur zone de transition vitreuse accessible expérimentalement.

L'évolution de l'état topographique des surfaces abradées est suivie par analyse statistique. Les paramètres σ, β*, C₂ (β) permettent de quantifier d'une

part la "rugosité planéite" et d'autre part, le caractère aléatoire et périodique de la surface.

On remarque que dans des conditions de sollicitations constantes, l'évolution des critères statistiques d'état de surface dépend considérablement du temps et des propriétés rhéologiques des agglomérats. La variation d'écart type de la distribution des hauteurs de la "rugosité" illustre particulièrement bien ce comportement (cf. Figure 5).

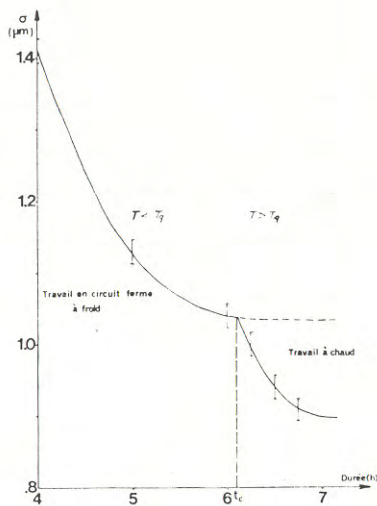


Figure 5 : Influence de la transition vitreuse d'agglomérat abrasif sur la cinétique abrasive $\sigma(t)$

On remarque que l'abrasion à deux corps conduit à une décroissance rapide puis une stabilisation de $\sigma(t)$. La modification des propriétés rhéologiques d'agglomérats abrasifs change cette cinétique. Les variations de la température par exemple, conduisent à une déstabilisation du système et σ décroît de nouveau.

Dans la zone de transition vitreuse du composite abrasif, le taux d'amortissement est maximum : un plus grand pourcentage de l'énergie fournie par le vibreur est dissipée dans le composite. L'énergie résiduelle utilisée pour la coupe et/ou le labourage est plus faible qu'à température ambiante, la profondeur des empreintes est donc diminuée.

De plus, le module d'Young chute rapidement lorsque la température augmente ; donc, à contrainte égale, la déformation élastique de l'agglomérat est plus importante. Ceci se traduit pour le grain abrasif par un déplacement qui diminue l'angle d'attaque et donc réduit la coupe.

Il est donc possible de moduler la morphogénèse en l'abrasion soit par un changement de la nature d'agglomérat abrasif, soit pour la même nature à l'aide de la modification de la température ou de la fréquence.

Abrasion à "trois corps"

L'analyse statistique des états de surfaces générées lors du processus abrasif à trois corps a permis de suivre l'évolution de la morphologie de surface dans le temps. Les expériences menées sur des matériaux de comportements

rhéologiques différents (alliage d'aluminium, fonte d'acier) ont permis de mettre en relief l'importance de propriétés dynamiques dans le processus abrasif.

Dans un premier temps, à l'aide des critères statistiques d'état de surface on a vérifié la stationarité du processus aléatoire et l'homogénéité des surfaces. L'opération étant reproductible, on a pu montrer comment lors du même processus, différentes propriétés rhéologiques des surfaces abrasées conduisent à des morphologies de surfaces totalement différentes. La figure 6 illustre ce phénomène. On remarque deux phases dans les morphogénèses de surfaces abrasées. Dans un premier temps les surfaces évoluent d'une manière quasi identique, les propriétés volumiques des matériaux ne jouent qu'un rôle secondaire. Puis, progressivement, son importance apparaît de plus en plus nettement pour aboutir à des surfaces complètement différentes.

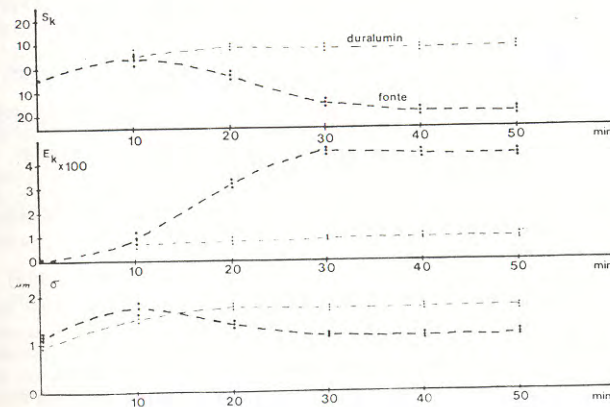


Figure 6 : L'évolution, en fonction du temps, des paramètres caractéristiques de la morphologie des surfaces des propriétés rhéologiques différentes.

Cette observation fondamentale pour la compréhension du processus abrasif met en évidence le rôle du : produit interfacial (rhéologie, organisation, écoulement, etc...) prépondérant dans la phase initiale de l'abrasion à "trois corps" et l'importance des propriétés rhéologiques à 3D dans la phase stationnaire.

Les problèmes du départ sont également fondamentaux car l'état initial de surface modifie considérablement la première phase en introduisant une relation d'ambiguïté.

4. CONCLUSIONS

Une étude phénoménologique de l'abrasion nous a permis, grâce à l'analyse d'état de surface, de vérifier le caractère ergodique de ce processus. L'évolution des données caractéristiques de la morphologie des surfaces lors de "l'abrasion à deux" ou "trois corps" a mis en évidence le rôle important des propriétés dynamiques des matériaux abrasifs et abrasés. Il apparaît clairement qu'une meilleure compréhension du processus abrasif passe par une recherche de relations plus précises entre la rhéologie des corps et l'état de surface généré. On a montré que cela est difficile du fait d'une interférence mutuelle entre l'abrasion "à deux" et "à trois corps". Le rôle de ce produit interfacial abrasif introduit donc une relation d'ambiguïté dans une identification complète du couple "rhéologie - état topographique" des surfaces en abrasion.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 : J. LIONS, "Les inéquations en mécanique et physique", Dunod (1972).
- 2 : R. COURTEL, "Les phénomènes de surface dans la déformation et la fracture des solides, I.S.M.C.M. (1971).
- 3 : T. MATHIA, Wear, 50, 191-194 (1978).
- 4 : H.G. VON HARRACH, B.N. CHAPMAN, Proc. Int. Conf. thin films, 151-161 (1972).
- 5 : T.S. EYRE, "Treatise on materials Science and Technology", vol. 13, Ed. D. SCOTT, Academic Press (1979).
- 6 : A.S. ARGON, "Fundamentals of tribology", Ed. N.P. SUH and N. SAKA, the M.I.T. Press (1979).
- 7 : T. MATHIA, B. ENCRENAZ, Wear, vol. 52 (1981).
- 8 : S. JAHAMIR, S. SUH, Wear, vol. 32, 33-49 (1975).
- 9 : Y. TSUYA, Tech. Rep. of Mech. Eng. Lab., Tokyo, n° 81 (1976).
- 10 : M. SHAW, "New development in grinding", Carnegie Press (1972).
- 11 : T. EYRE, A. BAXTER, Tribology Int. Dec, 256-261 (1972).
- 12 : R. FEIN et col., Trans. of A.S.L.E., vol. 12, 50-57 (1950).
- 13 : J.M. MARTIN, Thèse d'Etat, n° 7827, Lyon (1978).
- 14 : F. BOWDEN, E. FREITAG, Proc. Roy. Soc. Lond., 350-367 (1958).
- 15 : C. ROWE, Trans. of ASLE, vol. 9, 100-111 (1966).
- 16 : M.A. MOORE, Wear, vol. 28, 59-68 (1974).
- 17 : D. TABOR, "The hardness of metals, Oxford (1951).
- 18 : P. REBINDER et col., "Progress in surface science, Pergamon (1972).
- 19 : T. MATHIA, Micronora 80, Besançon (1980).
- 20 : C. FAYOLLE, D. CALLENS, T.F.E., E.C.L. (1980).
- 21 : V. MOROCHKIN, "Friction and wear in machinery, ASME (1959).
- 22 : A. SZUDER, Thèse de Docteur Ingénieur, n° 264, Lyon (1977).
- 23 : J. RIOUT, Note technique, n° 19, CETIM (1979).
- 24 : D.J. WHITEHOUSE, CIRP Annals, vol. 23 (1974).
- 25 : K.J. STOUT et col., Wear, vol. 43, 99-115 (1977).
- 26 : J. ZARKA, IV Congrès Français de Mécanique (1979).

COMPORTEMENT MECANIQUE ET STRUCTURE DES ROCHES MECHANICAL BEHAVIOUR AND STRUCTURE OF ROCKS

R. HOUPERT et F. HOMAND-ETIENNE
Laboratoire de Mécanique des Sols et des Roches -
Institut National Polytechnique de Lorraine - Nancy - France

RESUME

La structure des roches comprend leur texture ainsi que les discontinuités et les vides qu'elles contiennent. Le comportement mécanique des roches en compression simple est essentiellement lié aux défauts de leur structure ; celle-ci influence, en particulier, l'initiation et la propagation de la rupture. Les rôles de la dimension des grains, de la dimension des pores et de la microfissuration sur le comportement mécanique sont examinés à partir d'essais de compression simple contrôlés. L'énergie spécifique de rupture semble constituer un bon paramètre en vue de caractériser la structure et la résistance mécanique des roches.

ABSTRACT

The structure of rocks includes texture, discontinuities and voids. The mechanical behaviour of rocks in uniaxial compression (particularly fracture initiation and propagation) depends on structural defects. The influences of grain size, pore size and microcracks on the mechanical behaviour are investigated by performing controlled uniaxial compression tests. Specific fracture energy seems a good parameter for rock strength and rock structure characterization.

1. INTRODUCTION

Les roches sont des matériaux caractérisés par leur grande diversité de composition minéralogique et de structure. Sous température ordinaire et sous faible pression de confinement, leur comportement est du type fragile. Par conséquent, les roches ne peuvent généralement être sollicitées qu'en compression ; l'étude de la déformation et de la rupture en compression simple préoccupe les chercheurs depuis de nombreuses années. Le concept de la courbe contrainte-déformation complète, avancé par FAIRHURST et COOK [1] pour expliquer l'existence de masses rocheuses fissurées capables de supporter des charges, et la nécessité de réaliser les essais de laboratoire dans des conditions analogues à celles qui existent dans la nature, ont entraîné la mise en oeuvre de méthodes d'essai permettant d'étudier le comportement à la rupture des roches au-delà de la charge maximale ou résistance ultime. Dans ce domaine, l'augmentation de la déformation

est accompagnée d'une diminution de la contrainte et l'on observe, pour de nombreuses catégories de roches, une perte de résistance qui est soit brutale, soit progressive. Cette diminution de la résistance au-delà de la charge ultime est parfois appelée comportement avec radoucissement ; c'est le "strain softening" des anglo-saxons, opposé au "strain hardening", qui concerne l'augmentation de la résistance avec l'accroissement de la déformation. L'étude du comportement mécanique au cours de la phase de perte de résistance et celle de ses relations avec la structure des roches sont primordiales, car elles permettent de comprendre l'évolution des massifs rocheux fissurés soumis à des charges, tels que nous les rencontrons fréquemment, soit dans la nature, soit en rapport avec les ouvrages de génie civil ou de génie minier.

Les relations contrainte-déformation en compression simple sont analogues (qualitativement) pour presque toutes les roches en ce qui concerne la phase qui précède la résistance ultime. Plus précisément, on peut dire que la forme de la courbe $\sigma-\epsilon$ relative à cette phase est à peu près semblable pour de nombreuses catégories de roches. Il n'en est pas de même pour la partie de la courbe $\sigma-\epsilon$ qui correspond à la perte de résistance de la roche ; cette partie dépend essentiellement de la structure du matériau ainsi que des conditions dans lesquelles l'essai est réalisé (vitesse de sollicitation, température).

Nous nous proposons de présenter ci-après quelques aspects de l'influence des caractéristiques intrinsèques des roches sur la déformation et le développement de la rupture, dans le cas d'éprouvettes soumises à des essais de compression simple réalisés au moyen d'une machine d'essai asservie. Les roches étudiées présentent, soit une structure isotrope, soit une structure légèrement anisotrope. Cependant, dans ce dernier cas, cette anisotropie n'a pas de conséquence déterminante sur le comportement mécanique et les roches présentées ici peuvent être considérées comme des matériaux à structure quasi isotrope.

2. STRUCTURE DES ROCHES QUASI ISOTROPES

La plupart des roches sont constituées par des cristaux ou des particules formant les grains du matériau ; la nature des grains est imposée par la minéralogie de la roche, qui peut être monominérale ou pluriminérale. La forme, les dimensions, l'orientation morphologique et la distribution dimensionnelle des grains, ainsi que la répartition des différentes espèces minérales, déterminent la texture des roches. A l'échelle des grains, la texture de certaines roches est homogène (calcaires) ; pour d'autres, elle est hétérogène (granites). Pour les roches à texture isotrope ou quasi isotrope, le principal facteur de non-homogénéité est la distribution dimensionnelle des grains, une roche étant d'autant plus hétérogène que la dimension maximale de ses grains est plus élevée. Cependant, à l'échelle des éprouvettes d'essai utilisées au laboratoire, la plupart des roches peuvent être considérées comme homogènes.

L'assemblage des grains constituant la roche n'est pas continu. Cet agrégat comporte des surfaces de discontinuité et des espaces vides de forme plus ou moins sphérique (cas des pores dans les calcaires) ou de forme plus ou moins aplatie (cas des fissures ouvertes). L'ensemble texture, surfaces de discontinuité et espaces vides constitue la structure du matériau rocheux. Les dimensions des surfaces de discontinuité et celles des espaces vides présentent une certaine distribution qui entraîne également, à petite échelle, une hétérogénéité de la structure.

Les surfaces de discontinuité les plus importantes sont les limites des grains ou joints de grains et les fissures ou microfissures fermées qui peuvent être inter-, intra- ou transgranulaires. Pour les roches cristallines, le joint

de grain constitue une zone de faible épaisseur qui met en contact deux grains dont l'orientation des réseaux cristallins est différente. De plus, ces deux grains appartiennent souvent à des espèces minérales différentes dans le cas des roches pluriminérales. Les fissures non ouvertes sont particulièrement nombreuses dans les roches cristallines ; ces fissures sont rarement droites, mais souvent sinueuses ou en ligne brisée. L'observation montre que la distribution des longueurs des fissures semble être la même que celle des grains. Les fissures des roches cristallines, en particulier celles des granites, peuvent présenter une ou plusieurs directions privilégiées. Pour certaines roches à texture isotrope, il existe donc une anisotropie au niveau des surfaces de discontinuité. Les cliques des cristaux constituent également des surfaces de discontinuité.

3. CARACTERISTIQUES RHEOLOGIQUES DES ROCHES EN COMPRESSION SIMPLE

Jusqu'à une période récente, il était admis que la rupture fragile des roches se propageait de manière instable dès que les conditions critiques d'initiation de la rupture étaient remplies. Cette conception reposait sur le caractère généralement explosif de la rupture des roches en compression simple au cours des essais de laboratoire. Avec le développement et l'utilisation de machines d'essai qui permettent de limiter l'énergie transmise à l'éprouvette d'essai à la quantité minimale nécessaire pour faire progresser la rupture, il est possible de contrôler la propagation de cette rupture.

L'une des premières études importantes concernant le développement de la rupture a été réalisée par WAWERSIK [2] qui a montré que cette propagation est un processus stationnaire. Cet auteur distingue deux types de comportement à la rupture : le type I est caractérisé par le fait qu'une progression de la rupture à partir d'un stade donné nécessite une augmentation de l'énergie transmise à l'éprouvette et la rupture peut être contrôlée ; dans le cas du type II, lorsque la charge maximale est atteinte, l'énergie emmagasinée dans l'éprouvette est en excès et il faut en extraire une partie afin de pouvoir contrôler la rupture. Ces deux types de comportement sont représentés, dans le diagramme $\sigma-\epsilon$, par les deux courbes de la figure 1. La limite de séparation entre ces deux comportements correspond au cas pour lequel l'énergie emmagasinée dans l'éprouvette est en équilibre avec l'énergie nécessaire pour produire la rupture (ligne CE de la figure 1).

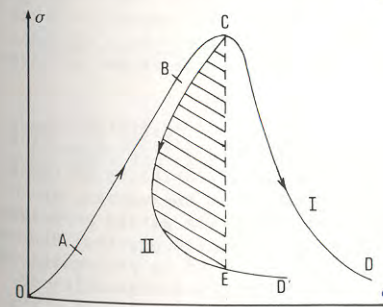


Fig. 1 - Courbes contrainte-déformation des roches en compression simple : les deux types de comportement à la rupture (d'après [2]) et les quatre phases de la déformation.

Lorsque les essais de compression sont réalisés au moyen d'une machine d'essai munie d'un dispositif d'asservissement automatique, la variable indépendante qui est programmée est, soit le déplacement axial, soit le déplacement transversal de l'éprouvette. Seule la programmation du déplacement transversal permet de contrôler la rupture des roches du type II. La partie post-maximum (partie CD) des courbes $\sigma-\epsilon$

du type I, obtenue en programmant le déplacement axial de l'éprouvette d'essai, présente un grand intérêt en Mécanique des Roches ; elle traduit le comportement radoucissant du matériau. Suivant la nature et la structuré du matériau et selon les conditions expérimentales, le contrôle de la rupture est plus ou moins possible et l'on obtient une courbe post-maximum plus ou moins complète.

D'une manière générale, on distingue quatre phases sur la courbe $\sigma-\epsilon$ du type I; ces phases sont plus ou moins étendues selon les caractéristiques des roches :

- (1) la phase de serrage OA, fonction du degré de fissuration ;
- (2) la phase linéaire AB dont la pente donne le module de déformation ; ce module est fonction de la fissuration et des espaces vides du matériau ; il dépend aussi de la nature minéralogique des grains de la roche, la minéralogie étant le facteur principal dont dépendraient les propriétés élastiques de la roche en l'absence de discontinuités ;
- (3) la phase non linéaire BC, le maximum C correspondant à la résistance ultime σ_{ult} en compression ;
- (4) la phase de perte de résistance CD, la ruine de l'éprouvette se produisant en D ; cette phase caractérise le comportement fragile du matériau et le degré de fragilité de ce dernier (pour des conditions expérimentales données) peut être défini par la pente (moyenne) de la courbe CD.

Dans son ensemble, le comportement mécanique d'une roche est largement conditionné par son comportement à la rupture. A partir de différentes expériences de laboratoire réalisées sur des roches diverses, le processus de rupture fragile en compression simple peut être décrit de la manière suivante [2, 3, 4]. Les défauts de la structure (hétérogénéités, discontinuités, vides) induisent des contraintes de traction qui donnent lieu à la formation de microfractures axiales, c'est-à-dire orientées suivant la contrainte de compression. Ces microfractures apparaissent au cours de la phase linéaire AB ; elles se développent sur une faible longueur, puis deviennent stables. Elles sont à l'origine de la dilatance du matériau. La rupture se poursuit par augmentation du nombre de microfractures axiales et formation de microfractures inclinées sur l'axe de l'éprouvette. L'importance de la phase non linéaire BC (fig. 1) de la courbe $\sigma-\epsilon$ dépend de l'intensité de cette microfracturation. A partir d'un certain stade, qui pourrait correspondre à la résistance ultime, certaines zones de l'éprouvette deviennent en quelque sorte homogènes du point de vue de la microfracturation. Ensuite, des fractures et des macrofractures, essentiellement de cisaillement, se développent au cours de la phase CD et conduisent à la ruine de l'éprouvette. La résistance ultime correspond à une perte de résistance généralisée de l'éprouvette et non au développement de macrofractures.

En compression simple, le processus de rupture fragile est essentiellement lié à la structure des roches et aux défauts de cette structure. Les roches à texture hétérogène, ou à dimensions de grains ou de pores variables, ou les roches très microfissurées ou très poreuses ont un comportement à la rupture du type I ; par contre, les roches homogènes à très petits grains ou à très petits pores ont un comportement du type II [2, 5, 6, 7]. Un travail expérimental particulièrement intéressant concernant le rôle des défauts dans l'initiation et la propagation de la rupture a été réalisé par RUMMEL [8], qui a mis en évidence la formation de fractures à partir d'une ouverture cylindrique jouant le rôle d'un défaut et pratiquée dans des éprouvettes de calcaires homogènes et à grains très fins. Cet auteur a montré, pour des ouvertures de diamètre variable réalisées dans un calcaire dont le comportement est du type II en l'absence d'ouverture, qu'à partir d'un diamètre suffisant, le comportement devient du type I (fig. 2) ; l'importance de la taille des défauts est ainsi mise en évidence.

La rupture est un phénomène consommateur d'énergie ; la propagation d'une

fracture donne lieu à une augmentation de l'énergie de surface par suite d'un accroissement de la surface interne. Lorsqu'une fracture se propage, l'énergie élastique disponible n'est que partiellement transformée en énergie de surface ; elle est également utilisée sous toute autre forme d'énergie absorbée par la rupture, en particulier par le franchissement des barrières s'opposant à la propagation de la fracture. Ces barrières sont constituées par les discontinuités du matériau. Il en résulte que l'énergie nécessaire à la rupture des polycristaux est supérieure à celle relative aux monocristaux. C'est la raison pour laquelle il convient de remplacer, dans les critères de rupture fragile, l'énergie spécifique de surface γ , liée à l'énergie d'interaction des atomes, par l'énergie spécifique de rupture γ_F qui est l'énergie utilisée, par unité d'aire, pour la formation de surfaces nouvelles lors de la rupture. L'énergie spécifique de rupture γ_F est une caractéristique intrinsèque du matériau, qui traduit la consommation d'énergie au niveau macroscopique ; γ_F est supérieur à γ . L'ordre de grandeur de γ est de 1 Jm^{-2} , celui de γ_F est de 10^3 Jm^{-2} , soit mille fois supérieur. Pour les roches, on trouve, pour γ_F , des valeurs de 10 Jm^{-2} et même 100 Jm^{-2} , alors que les valeurs de γ , pour les minéraux entrant dans la composition de ces roches, varient de $0,1 \text{ Jm}^{-2}$ à 1 Jm^{-2} .

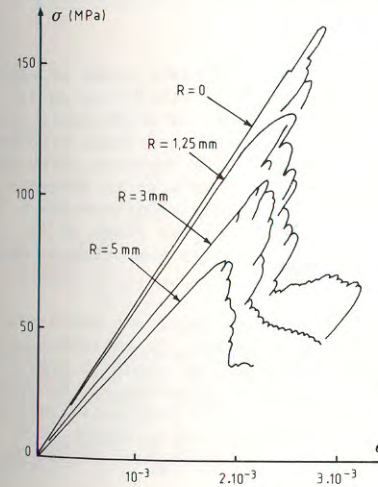


Fig. 2 - Courbes contrainte-déformation réalisées sur des éprouvettes de calcaire comportant une ouverture cylindrique à section circulaire de rayon R variable [d'après [8]].

L'énergie de rupture dépend de la nature du milieu et de la présence de défauts. Les défauts sont constitués par les hétérogénéités et les discontinuités du milieu ; les caractéristiques de ces défauts sont :

- leur nature : microfissure, pore, grain de propriétés mécaniques différentes de celles des grains environnants ;
- leur géométrie : forme et dimensions des microfissures, des pores, des grains ;
- la distribution de leurs dimensions ;
- l'anisotropie de leur orientation ;
- la géométrie de leur répartition.

La rupture des roches, du point de vue initiation et propagation, est conditionnée par les défauts de leur structure. Le comportement mécanique des roches dépend donc du degré d'uniformité de la distribution de l'énergie spécifique de rupture. Suivant que la répartition de γ_F est plus ou moins homogène dans le matériau, la formation des fractures aura lieu de manière plus ou moins simultanée

et leur propagation s'effectuera de manière plus ou moins identique dans tous les éléments de volume du matériau. L'apparition d'une fracture nouvelle prélève une partie de l'énergie emmagasinée dans l'éprouvette et donne lieu à une relaxation des contraintes. La distribution de γ_F conditionne, par conséquent, la dissipation de l'énergie élastique lors de la rupture. Le contrôle de celle-ci dépendra donc du degré d'uniformité de la distribution de γ_F . L'énergie γ_F constitue un bon paramètre en vue de déterminer la "résistance" d'une roche.

Pour les roches dont la distribution des valeurs de γ_F est très étroite, la dissipation d'énergie avant la charge maximale est très faible et elles ont un comportement du type II ; la rupture ne peut être contrôlée que s'il y a extraction d'énergie de l'éprouvette. Par contre, si la distribution des valeurs de γ_F est large, la dissipation d'énergie et, par la suite, la rupture, sont plus ou moins progressives et la pente de la courbe post-maximum est plus ou moins élevée. Autrement dit, le comportement radoucissant est conditionné par le degré de fracturation de l'éprouvette avant la charge maximale.

4. INFLUENCE DE QUELQUES FACTEURS DE STRUCTURE SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE DES ROCHES

Les différentes phases de la courbe σ - ϵ (du type I) dépendent, comme il a été dit ci-dessus, des caractéristiques intrinsèques des roches, c'est-à-dire de la nature de leur composition minéralogique et de leur structure. La minéralogie des grains influence essentiellement la pente de la phase linéaire, qui donne la valeur du module de déformation de la roche ; par contre, la structure (texture et/ou surfaces de discontinuité) intervient dans chacune des quatre phases de la déformation. Nous présentons ci-dessous un certain nombre de résultats expérimentaux concernant le rôle de la dimension des grains, de la dimension des pores et de l'intensité de la microfissuration (d'origine thermique) dans le comportement mécanique des roches.

La dimension des grains constitue un facteur de texture important vis-à-vis du comportement des roches. Comme pour la plupart des matériaux, la résistance mécanique des roches à grains fins est plus élevée que celle des roches à gros grains. Des essais de compression simple réalisés sur quatre granites des Vosges, dont la composition minéralogique et la texture sont à peu près semblables, mais qui diffèrent essentiellement par la dimension de leurs grains de feldspath, ont permis de mettre en évidence la relation suivante, entre la résistance ultime σ_c et le diamètre maximal d des grains de feldspath [4, 9, 10] :

$$\sigma_c = \sigma_i + k d^{-1/2}$$

Dans cette relation, σ_i et k désignent des constantes qui dépendent de la vitesse de sollicitation ; lorsque celle-ci croît, σ_i décroît et k croît. Les cristaux de feldspath différencient le plus ces trois roches ; en effet

- le feldspath constitue le minéral le plus abondant ;
- les dimensions maximales des grains de feldspath présentent la plus grande différence d'un granite à l'autre, par rapport à celles des autres grains (quartz et mica) ;
- les grains de feldspath, par suite de leur plus grande taille, contiennent les éléments de fissure rectilignes les plus longs.

D'après les théories de la rupture fragile, ce sont les fissures rectilignes qui sont les plus favorables à l'initiation de la rupture. En outre, les grains de feldspath constituent les hétérogénéités dont les dimensions sont les plus grandes et des contraintes de traction se produisent vraisemblablement à la

périphérie de ces hétérogénéités. Ces constatations permettent de penser que les grains de feldspath jouent un rôle préférentiel dans la rupture des granites.

La relation précédente entre σ_c et d est à rapprocher de celle de Griffith-Irwin faisant intervenir l'énergie spécifique de rupture γ_F . Aux vitesses de sollicitation élevées, le rôle joué par les défauts de la structure lors de la rupture est moindre qu'aux vitesses de sollicitation faibles [11]. Par conséquent, γ_F augmente vraisemblablement avec la vitesse de sollicitation ; c'est également le cas de k dans la relation précédente. D'autre part, le terme σ_i peut être rattaché aux déformations non élastiques précédant la charge maximale et, en particulier, à l'apparition des microfissures dont le développement est d'autant plus important que la vitesse de sollicitation est plus faible.

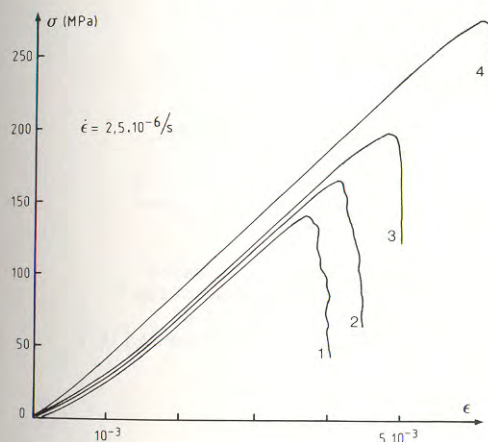


Fig. 3 - Courbes contrainte-déformation pour quatre granites de dimension maximale des grains (de feldspath) différente : (1) granite de Natzweiler (14 mm) ; (2) granite de Senones (11 mm) ; (3) granite de Saulxures (6 mm) ; (4) granite de Senones (2,5 mm) (d'après [3]).

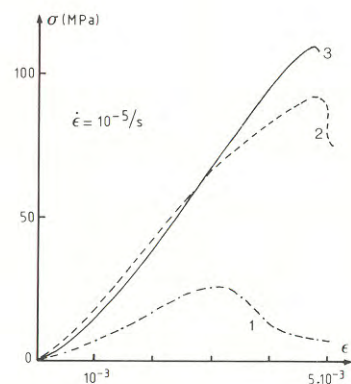


Fig. 4 - Courbes contrainte-déformation pour trois calcaires de dimension de pore différente : (1) supérieure à 1 μm ; (2) comprise entre 0,1 et 1 μm ; (3) inférieure à 0,1 μm (d'après [13]).

Les courbes contrainte-déformation de la figure 3 sont relatives aux quatre granites précédents [3]. On remarque que le module de déformation est indépendant de la dimension des grains, donc en quelque sorte de la texture. Le contrôle de la rupture est d'autant plus facile que la dimension moyenne des grains est plus élevée ; en d'autres termes, la rupture est plus progressive pour les roches à gros grains que pour les roches à grains fins. On constate, en outre, que les plans de rupture des granites à grains fins sont plus lisses que ceux des granites à gros grains [2] ; ceci peut s'expliquer par le fait que les dimensions des défauts du matériau varient comme celles des grains.

Du point de vue discontinuités, les calcaires constituent des matériaux présentant essentiellement des pores. La figure 4 représente trois courbes contrainte-déformation en compression simple relatives à des roches calcaires provenant des Côtes de Meuse et qui diffèrent principalement par la dimension de leurs pores. On constate que la résistance ultime décroît avec l'augmentation de la dimension des pores. De plus, le contrôle de la rupture est d'autant plus facile que les pores

sont plus grands, c'est-à-dire que la rupture est plus progressive pour les calcaires à gros pores que pour les calcaires à petits pores.

Les discontinuités du type fissure influencent considérablement le comportement des roches en compression simple. La phase de serrage est d'autant plus prononcée que le degré de fissuration est plus élevé. Par ailleurs, il est bien connu

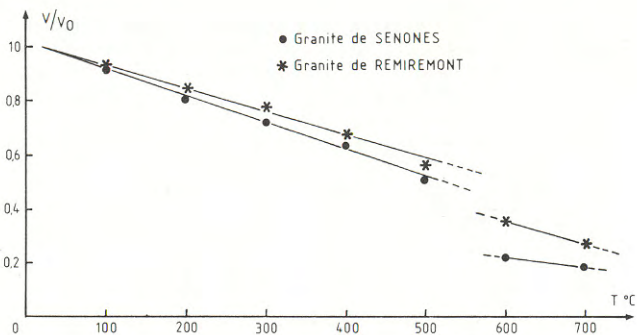


Fig. 5 - Variation relative de la célérité V des ondes élastiques longitudinales en fonction de la température T de préfissuration pour les granites de Senones et de Remiremont (V_0 : célérité du matériau naturel) (d'après [14]).

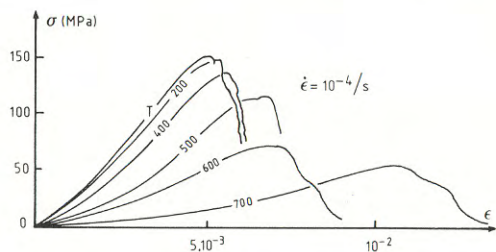


Fig. 6 - Courbes contrainte-déformation du granite de Senones pour différentes températures de préfissuration (T , courbe témoin) (d'après [14]).

que le module de déformation et la résistance ultime sont également fonction de la fissuration : l'augmentation du degré de fissuration entraîne une diminution du module et de la résistance du matériau. Une manière d'obtenir un matériau présentant un degré de fissuration variable consiste à soumettre préalablement des éprouvettes d'essai à différentes températures. L'étude d'un tel matériau permet de mettre en évidence l'évolution des paramètres de rupture et de déformation en fonction de la fissuration ; on peut estimer, en effet, que les autres caractéristiques restent à peu près les mêmes.

Dans les matériaux formés de cristaux à forte anisotropie de dilatation thermique (quartz et feldspath dans le cas des granites) ou de cristaux de dimensions ou de nature minéralogique différentes (cas des roches à texture hétérogène comme les granites), une augmentation de température produit une variation différentielle des dimensions et du volume des grains. Ces dilatations différentielles donnent lieu, après retour à la température ambiante, à la

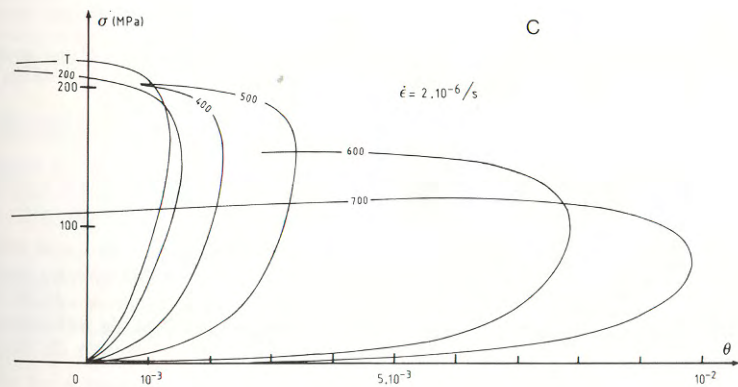
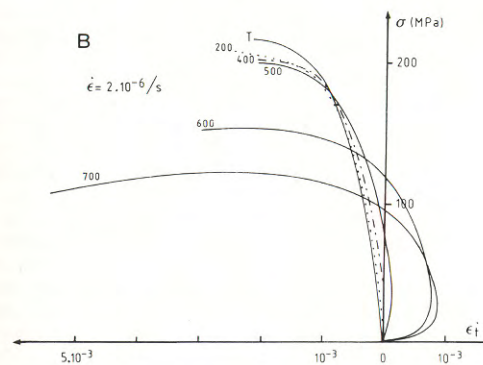
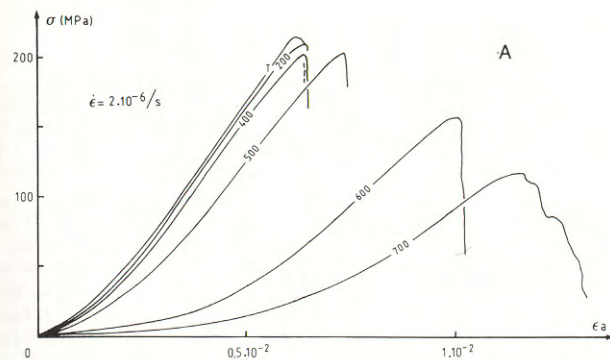


Fig. 7 - Courbes contrainte-déformation du granite de Remiremont pour différentes températures de préfissuration (T , courbe témoin) ; (a) déformation axiale ϵ_a ; (b) déformation transversale ϵ_t ; (c) déformation volumique θ .

formation de fissures et l'intensité de cette fissuration augmente avec la température. La fissuration par effet thermique est essentiellement intergranulaire et elle provoque un déchaussement des grains. On obtient ainsi un matériau dont le degré de fissuration dépend de la "température de préfissuration" et peut être caractérisé par la célérité des ondes élastiques longitudinales.

Les essais présentés ici concernent deux granites des Vosges, le granite de Senones et le granite de Remiremont, pour des températures de préfissuration variant de 100°C à 700°C [14]. La figure 5 représente la variation du rapport V/V_0 , V désignant la célérité des ondes élastiques longitudinales du matériau préfissuré et V_0 la célérité dans le matériau naturel. On constate que les courbes de variation sont linéaires pour les deux granites et qu'elles présentent une forte discontinuité entre 500°C et 600°C. Cette discontinuité est vraisemblablement liée aux caractéristiques particulières de la dilatation du quartz.

La figure 6 représente les courbes contrainte-déformation axiale ϵ_α pour le granite de Senones [14] et la figure 7 les courbes contrainte-déformation axiale ϵ_α (7a), déformation transversale ϵ_t (7b) et déformation volumique θ (7c) pour le granite de Remiremont, pour différentes températures T de préfissuration. On a $\theta = \epsilon_\alpha + 2 \epsilon_t$. Ces courbes mettent bien en évidence l'influence importante de l'intensité de la fissuration sur la résistance ultime et la déformabilité du matériau. Les courbes relatives à $T = 600^\circ\text{C}$ et $T = 700^\circ\text{C}$ sont nettement séparées de celles relatives aux autres températures. L'augmentation de T donne lieu à une rupture plus progressive.

Pour le granite de Remiremont, la courbe $\sigma-\epsilon_t$ témoin présente normalement une pente à l'origine négative. La valeur absolue de cette pente augmente avec T et elle devient positive à partir de 400°C. Ce changement de signe de la pente de la courbe $\sigma-\epsilon_t$ montre qu'il y a contraction transversale de l'éprouvette. On remarque, en outre, l'absence de domaine linéaire pour les courbes $\sigma-\epsilon_t$ et, par suite, également pour les courbes $\sigma-\theta$, dès que T dépasse 200°C. Pour le granite de Senones, on obtient des courbes analogues [14].

5. CONCLUSION

En compression simple, le contrôle de la rupture au moyen d'une machine d'essai asservie permet d'étudier le comportement radoucissant des roches ;

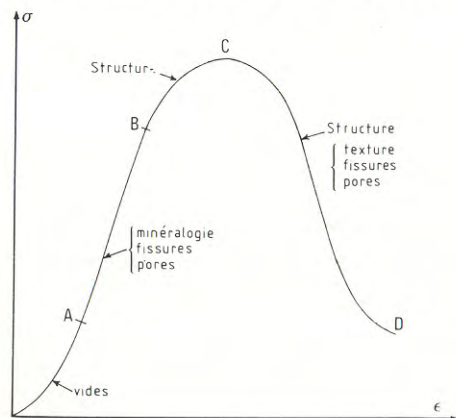


Fig. 8 - Courbe contrainte-déformation schématisée montrant l'influence des paramètres de structure sur les différents domaines de la courbe.

le contrôle est réalisé soit en programmant le déplacement axial, soit le déplacement transversal de l'éprouvette. Suivant les caractéristiques intrinsèques des roches, la rupture est plus ou moins progressive ; par suite, son contrôle est plus ou moins facile et l'on obtient une partie plus ou moins complète de la courbe contrainte-déformation située au-delà de la charge ultime.

Les roches pour lesquelles la distribution de l'énergie spécifique de rupture γ_F est très étroite, la rupture ne peut pas être contrôlée en programmant le déplacement axial de l'éprouvette. Ces roches sont généralement à texture très homogène, à grains fins et elles ne présentent pas de fissures importantes ; leur comportement est du type II. Dans le cas des roches dont la distribution de γ_F est large, la rupture est généralement progressive. Ces roches sont du type I ; leur comportement radoucissant dépend, de leur structure bien évidemment, mais également des conditions expérimentales telles que la vitesse de sollicitation et de la température [15]. Parmi ces roches, on trouve essentiellement celles qui présentent soit une texture hétérogène (grains de dimensions variables), soit des discontinuités (pores ou fissures) de différentes dimensions.

Les facteurs intrinsèques du matériau qui influencent respectivement les différents domaines de la courbe contrainte-déformation en compression simple sont les suivants (fig. 8) :

- OA : les espaces vides ;
- AB : la nature minéralogique du matériau, les espaces vides et les fissures ;
- BC : la structure (texture, espaces vides et fissures) ;
- CD : la structure.

Les domaines dans lesquels a lieu la propagation de la rupture (BC et CD) sont particulièrement sensibles aux caractéristiques de la structure, la phase CD constituant le reflet des phénomènes qui apparaissent au cours de la phase BC.

Un paramètre particulièrement important concernant le comportement mécanique des roches est l'énergie spécifique de rupture qui est directement liée aux défauts (nature, géométrie, distribution) de la structure. Pour développer des modèles de comportement mécanique des roches, plus proches de la réalité que celui de la fissure isolée dans un milieu homogène, il convient de poursuivre les recherches concernant le rôle de la structure dans l'initiation et la propagation des fractures.

6. BIBLIOGRAPHIE

1. FAIRHURST C. et COOK N.G.W. - The phenomenon of rock splitting parallel to the direction of maximum compression in the neighbourhood of a surface. *C. R. 1er Congr. Internat. Méc. Roches*, Lisboa, 1966, vol. 1, p. 687-692.
2. WAWERSIK W.R. et FAIRHURST C. - A study of brittle rock fracture in laboratory compression experiments. *Internat. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol. 7, 1970, p. 561-575.
3. HOUPERT R. - La rupture fragile des roches. *Ann. Soc. Géol. Nord*, vol. 95, 1975, p. 145-153.
4. HOUPERT R. - Rupture fragile en compression et structure des roches cristallines quasi isotropes. *Sci. de la Terre*, vol. 22, 1978, p. 69-108.
5. BROWN E.T. et HUDSON J.A. - The influence of micro-structure on rock fracture on the laboratory scale. In *Fissuration des roches*, C. R. Symp. Internat. Méc. Roches, Nancy, 1971, vol. 1, comm. 2-20, 11 p.
6. HOUPERT R. - Comportement fragile en compression simple et structure des roches. *C. R. 2e Congr. Internat. Géol. Ing.*, Sao Paulo, 1974, vol. 1, comm. 4-25, 10 p.

7. HOUPERT R. - Le comportement à la rupture des roches. *C. R. 4e Congr. Internat. Méc. Roches*, Montreux, 1979, vol. 3, p. 115-122.
8. RUMMEL F. - Experimentelle Untersuchungen zum Bruchvorgang in Gesteinen. *Berichte Inst. Geophysik Ruhr-Univ. Bochum*, n° 4, 1975.
9. HOUPERT R. - La résistance à la rupture des granites en fonction de la dimension de leurs minéraux. *C. R. Acad. Sci.*, vol. 265, série A, 1967, p. 583-586.
10. HOUPERT R. - La résistance à la rupture des granites. *C. R. 1er Coll. Fissuration des Roches*, Paris, 1967, *Rev. Indust. Minér.*, n° spéc. 15 mai 1968, p. 21-23.
11. HOUPERT R., HOMAND-ETIENNE F. et TISOT J.-P. - Mécanismes de propagation de la rupture en compression dans les roches cristallines. *Bull. Soc. Géol. Fr.*, 7e série, 1976, p. 1583-1589.
12. HOUPERT R. - La propagation de la rupture en compression dans les roches cristallines. *Proc. 3rd Internat. Congr. Fract.*, München, 1973, vol. 10, comm. 9-421, 5 p.
13. HOUPERT R., KONOMI N. et TISOT J.-P. - Structure, propriétés physiques et comportement mécanique des roches calcaires. *C. R. 3e Congr. Internat. Géol. Ing.*, Madrid, 1978, sect. 2, vol. 1, p. 191-199.
14. HOUPERT R. et HOMAND-ETIENNE F. - Influence de la température sur le comportement mécanique des roches. *C. R. 4e Congr. Internat. Méc. Roches*, Montreux, 1979, vol. 1, p. 177-180.
15. HOUPERT R. - Le comportement à la rupture des roches. *C. R. 4e Congr. Internat. Méc. Roches*, Montreux, 1979, vol. 3, p. 115-122.

SESSION 2

La session est ouverte sous la présidence de

M. JOLY

Ancien Président du Groupe Français de Rhéologie

Sont intervenus MM. :

P.-M. SUQUET

C. LEGRAND

J.M. RIGO

A. PAPO, V. GARZITTO et F. STURZI

M. LUCIUS, M. DOGNON, S. GAILLARD,

J.M. ROTH et J.F. STOLTZ (*)

R. GRECO, MA RONG TANG, S. CIMMINO et G. RAGOSTA

(*) Le texte écrit de la communication
 « Etude d'un modèle rhéologique
 traduisant les principales caractéristiques viscoélastiques du sang
 en régime transitoire. Relation avec le réseau d'hématies (rouleaux) »
 ne figure pas dans ces comptes rendus.

**METHODES D'HOMOGENEISATION
EN MECANIQUE DES SOLIDES
HOMOGENIZATION METHODS
IN THE MECHANICS OF SOLIDS**

P.-M. SUQUET

Mécanique Théorique - Université Paris VI - Paris - France

RESUME

Les méthodes d'homogénéisation permettent de décrire le comportement global de milieux fortement hétérogènes. On présente ici deux méthodes : la méthode des moyennes où l'accent est mis sur la signification physique des grandeurs introduites, et la méthode des développements asymptotiques rendue très puissante par son caractère systématique.

ABSTRACT

Homogenization methods are used to describe global behaviour of highly heterogeneous media. Two methods are presented : in the mean values method the physical aspect is pointed out, while the systematic aspect of asymptotic expansions is emphasized.

1. LE PROBLEME DE L'HOMOGENEISATION

1.1. Introduction

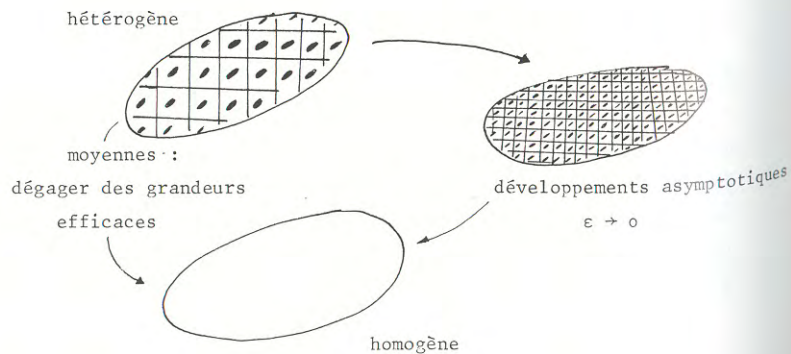
Lorsqu'on est en présence d'un milieu fortement hétérogène on est tenté, dans un souci de simplification numérique, de rechercher un matériau homogène équivalent. Ce matériau doit se comporter, pour des phénomènes mesurés sur une échelle grande par rapport à la taille des hétérogénéités de la même façon que le matériau hétérogène donné. Ce processus de substitution d'un matériau homogène à un matériau hétérogène, que nous appellerons processus d'homogénéisation,

a connu récemment des développements importants, tout au moins en ce qui concerne les milieux à structure périodique.

L'intérêt pour les milieux à structure périodique ne date pas d'hier et, au jeu de la construction de lois homogénéisées de nombreuses branches de la science ont tenté leur chance : les électriciens, les physiciens du solide, les mécaniciens et plus récemment les mathématiciens. A l'origine, le but de ces travaux était de construire des modèles de milieux continus à partir de modèles cristallins. Pour la partie qui nous intéresse, la Mécanique du Solide, les contributions de HILL [13], HASHIN & SHTRIKMAN [12] furent essentielles. Mais depuis quelques années, pour les besoins des composites à hautes performances on cherche à homogénéiser des milieux continus périodiques fortement hétérogènes. Un domaine entier des mathématiques appliquées, consacré à l'homogénéisation a ainsi vu le jour avec les travaux récents de BENSOUSSAN, LIONS, PAPANICOLAOU [1], SANCHEZ [22], TARTAR [29], DUVAUT [9]...

Le présent travail s'efforce donc de présenter dans un contexte mécanique, deux méthodes d'homogénéisation d'origines différentes (l'une est d'inspiration purement mécanique, l'autre est suggérée par des arguments plutôt mathématiques), mais qui ont fait la preuve de leur efficacité. Ces méthodes sont :

a) La méthode des moyennes : C'est "ce qui se passe chez un myope" dont la vision ne rend compte qu'au premier degré d'un paysage très détaillé placé devant lui. Dans un corps fortement hétérogène, les champs de contraintes et de déformation, ou tout autres champs de variables d'état, sont très oscillants. On s'efforce donc de n'en retenir que des informations globales : La première étape de cette méthode est donc de dégager à partir des grandeurs microscopiques des grandeurs macroscopiques équivalentes. La deuxième étape consiste à lier ces grandeurs macroscopiques entre elles ce qui donne par définition la loi de comportement homogénéisée.



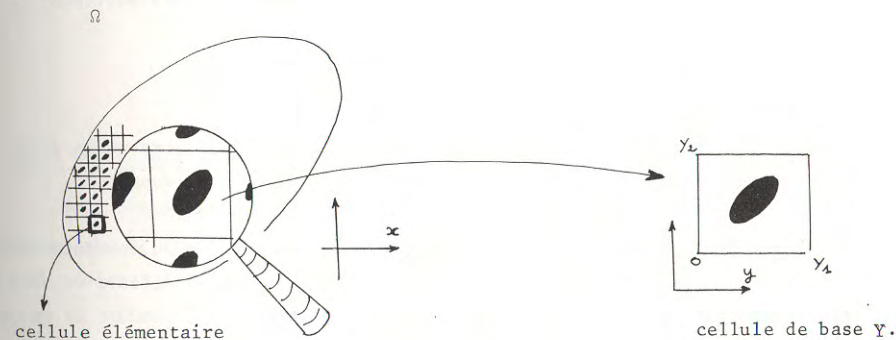
- Figure 1 -

b) La méthode des développements asymptotiques : Cette méthode consiste à remarquer qu'il existe un petit paramètre naturel dans le problème, qui mesure la taille de l'hétérogénéité. Précisons ce point : le solide étudié occupe un domaine Ω de \mathbb{R}^3 . Cet ouvert a une structure ϵY périodique au sens suivant :

$$Y = \prod_{i=1}^3]0, Y_i[$$

est une cellule de base formée de constituants de caractéristiques différentes. ϵ est le rapport d'homothétie entre la cellule de base et la cellule élémentaire qui engendre Ω par périodicité.

corps hétérogène



- Figure 2 -

Dans le corps hétérogène qui nous intéresse, qui correspond à une valeur de ϵ petite mais non nulle règnent des champs de contraintes et de déformation $\sigma^\epsilon, e^\epsilon$ (ou tout autre champ de variables d'état). ϵ étant petit, l'idée de la méthode est d'imaginer de remplacer ces champs par leur limite lorsque ϵ tend vers 0 :

$$\sigma^0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sigma^\epsilon, e^0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^\epsilon \text{ etc.}$$

Cela revient à imaginer une suite de corps correspondant à des valeurs de plus en plus petites de ϵ et à regarder ce que deviennent les grandeurs régnant dans ces corps. La loi de comportement homogénéisée est la loi liant les limites.

La méthode des développements asymptotiques est une façon commode de calculer les limites σ^0, e^0 etc. On cherche par la méthode des échelles multiples un développement des grandeurs intéressantes sous la forme

$$\sigma^\epsilon = \sigma^0 + \epsilon \sigma^1 + \epsilon^2 \sigma^2 + \dots$$

$$e^\epsilon = e^0 + \epsilon e^1 + \epsilon^2 e^2 + \dots$$

En reportant ces développements et en identifiant les termes facteurs des mêmes puissances de ϵ , on obtient la loi de comportement homogénéisée.

L'apport des théories récentes sur les points a) et b) réside plus dans la justification et la systématisation de ces méthodes que dans leur découverte. La méthode des moyennes a) figure dans les travaux de HILL (repris par MANDEL, BUI, ...). Elle a été reprise (ou découverte indépendamment) et systématisée par SANCHEZ [22] [23]. Signalons cependant que la méthode proposée par HILL n'est pas complètement satisfaisante et que déjà sur ce point l'apport des théories récentes est réel. Sa justification mathématique complète est connue sous la nom de G convergence. La méthode c) est une reprise de la méthode des échelles multiples.

1.2. Les lois de comportement envisagées

Un point de Ω est repéré par ses coordonnées $x = (x_i)$ (coordonnées dites macroscopiques) tandis qu'un point de Y est repéré par ses coordonnées $y = (y_i)$ (coordonnées dites microscopiques).

Pour se donner la loi de comportement du solide hétérogène on commence à définir les lois de comportement de chacun des constituants de la cellule de base Y . On obtient ainsi des propriétés matérielles définies sur Y et dépendant de la variable microscopique y en raison de l'hétérogénéité de Y . On prolonge par périodicité à R^3 tout entier ces propriétés. On obtient une loi de comportement définie sur R^3 dépendant de y , périodique de période Y . On fait alors un changement d'échelle en substituant à la variable y , la variable $\frac{x}{\epsilon}$. Les propriétés dépendant de x ainsi obtenues sont définies sur R^3 et sont périodiques de période ϵY .

Nous envisageons quatre lois de comportement pour la cellule de base Y (toutes écrites en transformations infinitésimales) qui nous permettront d'exposer le processus d'homogénéisation.

a) Elasticité linéaire

Soient $(a_{ijkh}(y))$ et $(A_{ijkh}(y))$ les tenseurs de rigidité et de souplesse des divers constituants de la cellule de base Y . On prolonge par périodicité ces tenseurs à R^3 et on pose :

$$a_{ijkh}^\epsilon(x) = a_{ijkh}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

$$A_{ijkh}^\epsilon(x) = A_{ijkh}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

les tenseurs a^ϵ et A^ϵ sont ϵY périodiques.

La loi de comportement s'écrit :

$$\sigma_{ij}^\epsilon = a_{ijkh}^\epsilon e_{kh}(u^\epsilon) \quad \text{en abrégé} \quad \sigma^\epsilon = a^\epsilon e_x(u^\epsilon) \quad (1)$$

avec

$$e_{kh}(u^\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^\epsilon}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h^\epsilon}{\partial x_k} \right)$$

ou de manière équivalente :

$$e_{ij}(u^\epsilon) = A_{ijkh}^\epsilon \sigma_{kh}^\epsilon \quad \text{en abrégé} \quad e_x(u^\epsilon) = A^\epsilon \sigma^\epsilon \quad (2)$$

Les coefficients a_{ijkh} et A_{ijkh} possèdent les symétries classiques :

$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{khij} \quad (3)$$

b) La Viscoélasticité linéaire

Nous envisagerons une viscoélasticité de type Maxwell.

Un tenseur de viscosité $B_{ijkh}(y)$ possédant les symétries (3) est défini sur Y et prolongé par périodicité à R^3 . On pose :

$$B_{ijkh}^\epsilon = B_{ijkh}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

La loi de comportement s'écrit alors :

$$e_{ij}\left(\frac{du^\epsilon}{dt}\right) = A_{ijkh}^\epsilon \frac{d\sigma_{kh}^\epsilon}{dt} + B_{ijkh}^\epsilon \sigma_{kh}^\epsilon \quad (4)$$

en abrégé

$$e_x\left(\frac{du^\epsilon}{dt}\right) = A^\epsilon \frac{d\sigma^\epsilon}{dt} + B^\epsilon \sigma^\epsilon$$

Signalons que la viscoélasticité de type Kelvin :

$$\sigma^\epsilon = a^\epsilon e_x\left(\frac{du^\epsilon}{dt}\right) + b^\epsilon e_x(u^\epsilon)$$

a été étudié par SANCHEZ [22] avec des résultats de la même teneur que ceux que nous allons indiquer pour le matériau de Maxwell.

c) Viscoplasticité de type standard

On postule l'existence d'un potentiel de dissipation $\phi(y, \sigma)$ défini sur Y .

On pose $\phi^\epsilon(x, \sigma) = \phi\left(\frac{x}{\epsilon}, \sigma\right)$

La loi de comportement est donnée par :

$$e_x \left(\frac{du^\epsilon}{dt} \right) = A^\epsilon \frac{d\sigma^\epsilon}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(\sigma^\epsilon) \quad (5)$$

Nous restreindrons notre étude aux potentiels ϕ possédant les propriétés suivantes : ϕ fonction convexe, différentiable par rapport à son argument σ

$$\left. \begin{aligned} \phi(y, \sigma) \geq 0, \quad \phi(y, 0) = 0 \\ \left| \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(y, \sigma) - \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(y, \tau) \right| \leq C |\sigma - \tau| \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

La viscoélasticité de type Maxwell est contenue dans ce modèle avec :

$$\phi(y, \sigma) = \frac{1}{2} B_{ijkh}(y) \sigma_{kh} \sigma_{ij}$$

Un modèle intéressant de viscoplasticité est le modèle de Perzyna :

$$\phi(y, \tau) = \frac{1}{2\mu} |\tau - \Pi_{P(y)} \tau|^2 \quad (7)$$

ou μ , $P(y)$ et $\Pi_{P(y)}$ désignent la viscosité, le convexe d'élasticité du matériau (qui varie avec y) et la projection sur $P(y)$

d) Elasto-plasticité parfaite

En chaque point y de Y on se donne un convexe fermé de R_s^3 (tenseurs symétriques 3×3) noté $P(y)$. On prolonge la définition de $P(y)$ par périodicité à R^3 tout entier. on pose

$$P^\epsilon(x) = P\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

Les propriétés élastiques du matériau étant définies comme en a), la loi de comportement s'écrit

$$\left. \begin{aligned} e_x(u^\epsilon) &= e^{el} + e^{an} \\ e_{ij}^{el} &= A_{ijkh}^\epsilon \sigma_{kh}^\epsilon \\ \left(\frac{de_{ij}^{an}}{dt}, \tau_{ij} - \sigma_{ij}^\epsilon \right) &\leq 0 \quad (\forall \tau \in P^\epsilon) \\ \sigma^\epsilon &\in P^\epsilon \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

La loi élasto plastique parfaite est du type (5) mais avec un potentiel de dissipation ne satisfaisant pas (6) :

$$\phi(y, \sigma) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \sigma \notin P(y) \\ 0 & \text{si } \sigma \in P(y) \end{cases}$$

Elle peut cependant être obtenue comme cas limite de lois du type (5)(6). Un cas intéressant est celui de la loi de Perzyna qui donne (8) lorsque μ tend vers 0.

A ces lois de comportement il faut ajouter les équations de conservation qui s'écrivent en transformations infinitésimales :

$$\left. \begin{aligned} \rho^\epsilon(x, t) &= \rho^\epsilon(x) \\ \rho^\epsilon \frac{\partial^2 u_i^\epsilon}{\partial t^2} &= \sigma_{ij,j}^\epsilon + f_i \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

qui se réduisent dans l'hypothèse statique ou quasi-statique à

$$0 = \sigma_{ij,j}^\epsilon + f_i \quad \text{en abrégé} \quad \text{div } \sigma^\epsilon + f = 0 \quad (10)$$

Pour simplifier l'exposé nous supposons le corps encastré sur son bord

$$u_i^\epsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad \text{en abrégé} \quad u^\epsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Pour les problèmes dynamiques ou quasi-statiques des conditions initiales sont données. Ces conditions seront précisées dans la suite de l'exposé.

1.3. Règles de calcul microscopique et macroscopique

Calcul microscopique

Les champs périodiques ou à déformation périodique jouent un rôle important en théorie de l'homogénéisation. Voici quelques notations et résultats simples les concernant.

On pose :

$$S_{per}(Y) = \{ \tau | \tau \cdot n_y \text{ opposés sur les faces opposées de } Y \}$$

(n_y désignant la normale extérieure à ∂Y)

$$S^0(Y) = \{ \tau | \text{div}_y \tau = 0 \}$$

$$S_{per}^0(Y) = S_{per}(Y) \cap S^0(Y)$$

$$W_{per}(Y) = \{ u | u = (u_i); u_i \text{ égales sur les faces opposées de } Y \}$$

DP (Y) = {u | e_y(u) fonction périodique de y} (*)

$$\langle g \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y g(y) dy \quad \text{où } |Y| = \text{mesure de } Y$$

$$M(T) = \{\tau | \langle \tau \rangle = T\}$$

On a alors :

$$\langle \tau e_y(v) \rangle = \langle \tau \rangle \langle e_y(v) \rangle \quad \forall \tau \in S_{per}^0(Y), \forall v \in DP(Y) \quad (12)$$

$$\langle e_y(v) \rangle = 0 \quad \forall v \in W_{per}(Y) \quad (13)$$

De façon plus générale si v appartient à DP (Y) alors w = v - <e_y(v)> y appartient à W_{per}(Y) à un déplacement rigide près.

$$\langle \tau_{ij} \rangle = \frac{1}{|Y|} \int \tau_{ih} n_h y_j dy \quad (14)$$

$$\frac{1}{|Y|} \int \partial_y y_j n_i dy = \delta_{ij} \quad (\text{symbole de Kronecker}) \quad (15)$$

On définit des vecteurs P_{ij} par

$$P_{ij,h} = y_j \delta_{ih}$$

on vérifie que e_y(P_{ij}) = T_{ij} où T_{ij,kh} = 1/2 (δ_{ih}δ_{ik} + δ_{ik}δ_{jh})

Remarques 1.1.

Soit f une fonction des deux variables x et y, considérées comme variables indépendantes, f étant Y périodique par rapport à la variable y. On pose

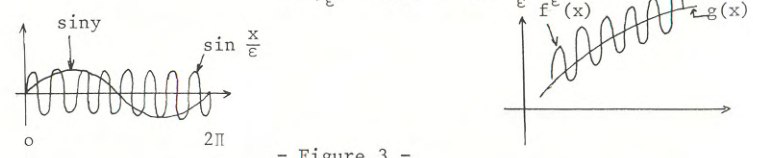
$$f^\epsilon(x) = f(x, \frac{x}{\epsilon}) \quad (17)$$

la fonction f^ε est alors très fortement oscillante, car εY périodique.

Voici un exemple :

$$f(x,y) = g(x) + \sin y \quad Y =]0, 2\pi[$$

$$f(x, \frac{x}{\epsilon}) = g(x) + \sin(\frac{x}{\epsilon})$$



- Figure 3 -

(*) On suppose ici que les champs ont toute la régularité qu'exige la rigueur mathématique pour donner un sens aux diverses expressions écrites.

De façon générale on a avec un peu de régularité sur f

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f^\epsilon = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(y) dy = \langle f \rangle \quad (18)$$

Ainsi dans l'exemple ci-dessus :

$$\lim f^\epsilon = g$$

Calcul macroscopique

Rappelons que le principe des travaux virtuels (ou la formule de Green)

s'écrit :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} e_{ij}(u) dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i dx = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j u_i du$$

que nous écrirons en abrégé

$$(\sigma, e_x(u)) + (\text{div}_x \sigma, u) = \int_{\partial\Omega} \sigma n u dx \quad (19)$$

on pose

$$S(f) = \{\sigma | \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

2. METHODE DES MOYENNES

2.1. Présentation

Dans un premier temps cette méthode consiste à dégager à partir des variables microscopiques qui caractérisent l'état du système, des grandeurs macroscopiques efficaces. Pour commencer par les variables les plus simples, contraintes et déformation, il est clair, en vertu de la remarque 1.1. que de bons candidats aux titres de grandeurs macroscopiques sont les moyennes des grandeurs microscopiques correspondantes sur un volume microscopique élémentaire, c'est à dire sur une cellule :

$$\sigma^0(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma(x,y) dy = \langle \sigma \rangle \quad (20)$$

$$e_x(u^0) = \frac{1}{|Y|} \int_Y e(u) dy = \langle e(u) \rangle \quad (21)$$

On fait dépendre dans (20) et (21) les grandeurs de x et y en les considérant comme variables indépendantes : la variable x indique une variation globale de la grandeur à l'échelle macroscopique, la variable y indique des variations locales très rapides dans la cellule microscopique (cf Fig. 3). Le passage du microscopique au macroscopique est donc simple en apparence : il se fait grâce à

l'opérateur de moyenne. Cette simplification peut être trompeuse et nous verrons en abordant les milieux dissipatifs que certaines grandeurs macroscopiques ne sont pas les moyennes de leurs homologues microscopiques.

Dans un second temps il faut lier les grandeurs macroscopiques, σ^0 et $e_x(u^0)$, en utilisant la loi de comportement microscopique liant $\sigma(x,y)$ et $e(u(x,y))$. Il faut pour cela être capable, étant donné un état macroscopique $\sigma^0(x)$, $e(u^0(x))$, de connaître l'état microscopique $\sigma(x,y)$ $e(u(x,y))$ qui lui correspond. Ce passage macroscopique-microscopique est la difficulté de la méthode. On peut procéder comme suit :

On impose sur la cellule élémentaire Y une déformation dont la moyenne $e(u^0(x))$ est donnée. Cette déformation de moyenne donnée induit par la loi de comportement microscopique un champ de contrainte $\sigma(x,y)$ dont :

on calcule la moyenne $\sigma^0(x)$ qui est donc en fonction de $e(u^0(x,y))$. La loi liant $e(u^0(x))$ et $\sigma^0(x)$ est la loi de comportement homogénéisée : on voit qu'elle s'obtient en résolvant un problème sur la cellule élémentaire à l'aide de la loi de comportement microscopique.

On peut procéder de façon légèrement différente : on impose un champ de contraintes dont la moyenne $\sigma^0(x)$ est donnée; ce champ de contraintes induit par la loi de comportement microscopique un champ de déformation dont :

on calcule la moyenne $e_x(u^0)$. $e_x(u^0)$ est donc une fonction de $\sigma^0(x)$; la loi qui les lie est la loi homogénéisée.

Nous voyons qu'il y a deux approches différentes dans la méthode des moyennes: l'approche déformations et l'approche contraintes. La première approche décrite dans le texte ci-dessus, correspond à un essai de déformation homogène. La seconde approche correspond à un essai de contrainte homogène.

Nous allons voir comment exploiter cette méthode sur les différents exemples.

2.2. Elasticité

2.2.1. Approche déformation

$e_x(u^0)$ étant donnée, on recherche un champ $u(y)$ et un champ $\sigma(y)$ satisfaisant les équations de l'élasticité dans la cellule élémentaire, et la condition de moyenne imposée :

$$\left. \begin{aligned} \sigma(y) &= a(y)e_y(u) && \text{élasticité} \\ \operatorname{div}_y \sigma &= 0 \\ \langle e_y(u) \rangle &= e_x(u^0) && \text{moyenne imposée} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Ainsi énoncé le problème n'est pas bien posé mathématiquement. On ajoute à cela que $\sigma(y)$ et $e_y(u)$ doivent être périodiques sur Y : en effet d'un bord à l'autre de la cellule les variations de la contrainte et de la déformation sont infinitésimales vue la taille de l'échelle microscopique.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &\in S_{\text{per}}(Y) \\ u &\in DP(Y) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Le problème (22) (23) est alors bien posé et admet une solution unique pour σ , u étant défini à un vecteur constant près. Cette solution s'exprime de façon simple en vertu de la linéarité du problème. Pour cela on introduit la notion de concentration de déformation :

Concentration de déformation

Soit v_{ij} la solution définie à un vecteur constant près du problème d'élasticité :

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &= a(y) e_y(v_{ij}) \\ \operatorname{div}_y S_{ij} &= 0 \\ \langle e_y(v_{ij}) \rangle &= T_{ij} \\ v_{ij} &\in DP(Y), S_{ij} \in S_{\text{per}}(Y) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Le tenseur du 4^{ème} ordre de composantes $c_{ijkl} = e_{khy}(v_{ij})$ est appelé tenseur de concentration de déformation

On vérifie facilement que la solution de (22) (23) est alors :

$$u(y) = v_{kh}(y) e_{khx}(u^0) \quad (\text{à une constante près})$$

donc

$$e_{pqy}(u) = e_{pqy}(v_{kh}) e_{khx}(u^0)$$

et

$$\sigma_{ij}(y) = a_{ijpq}(y) e_{pqy}(v_{kh}) e_{khx}(u^0) \quad (25)$$

En prenant les moyennes des deux membres de (25) on obtient :

$$\sigma_{ij}^0 = \langle \sigma_{ij}(y) \rangle = \langle a_{ijpq}(y) e_{pqy}(v_{kh}) \rangle e_{khx}(u^0)$$

on pose

$$A_{ijkh} = \langle a_{ijpq} e_{pqy}(v_{kh}) \rangle = \langle S_{kh,ij} \rangle \quad (26)$$

alors :

$$\sigma_{ij}^0 = A_{ijkh} e_{khx}(u^0) \quad (27)$$

La loi (27) est la loi de comportement homogénéisée dont le tenseur d'élasticité est donné par (26).

Remarques 2.1.

D'un point de vue plus numérique il n'est pas facile de travailler avec des fonctions de gradient (ou de déformation) périodique. Il est plus commode de manipuler des fonctions périodiques. Pour cela on pose :

$$\chi_{ij} = v_{ij} - P_{ij} \quad (P_{ij} \text{ a été définie au § 1.3.})$$

$$\text{de sorte que } e_y(\chi_{ij}) = e_y(v_{ij}) - T_{ij}$$

$$\text{et } \langle e_y(\chi_{ij}) \rangle = 0$$

χ_{ij} est donc un vecteur de composantes périodiques. En éliminant S_{ij} dans (24) on voit que χ_{ij} est solution de

$$\left. \begin{aligned} \chi_{ij} &\in W_{\text{per}}(Y) \\ -\frac{\partial}{\partial y_p} (a_{pqkh} e_{kh}(\chi_{ij})) &= -\frac{\partial}{\partial y_p} (a_{pqij}(y)) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Les fonctions χ_{ij} sont les inconnues classiques de la théorie de l'homogénéisation récente ([5]). Leur intérêt nous semble provenir exclusivement de leur périodicité, car leur sens mécanique est moins clair que celui de v_{ij} .

Remarques 2.2.

Symétries du tenseur \mathcal{A}

Le tenseur \mathcal{A} possède les symétries classiques

$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{khij} \quad (29)$$

Seule la symétrie $(kh)/(ij)$ n'est pas évidente. Elle deviendra claire lorsque nous aurons montré

$$a_{ijkh} = \langle a_{pqrs}(y) e_{pq}(v_{ij}) e_{rs}(v_{kh}) \rangle \quad (30)$$

Pour montrer (30) on remarque que

$$\langle a_{pqrs} e_{pq}(v_{ij}) e_{rs}(v_{kh}) \rangle = \langle S_{kh,pq} e_{pq}(v_{ij}) \rangle$$

En vertu de (12) on obtient

$$\langle S_{kh,pq} \rangle \langle e_{pq}(v_{ij}) \rangle = \langle S_{kh,ij} \rangle = a_{ijkh}$$

C'est souvent l'expression (30) qui est prise pour définition du tenseur \mathcal{A} . (26) qui lui est équivalent semble plus astucieuse du point de vue numérique puisqu'il suffit de calculer la moyenne d'un champ de contraintes, ce qui se fait simplement par (14).

2.2.2. Approche contrainte (duale)

σ^0 étant donné on cherche un champ $v(y)$ et un champ $\tau(y)$ satisfaisant les équations de l'élasticité dans la cellule élémentaire, et la condition de moyenne imposée

$$\left. \begin{aligned} e_y(v) &= A(y) \tau(y) \\ \text{div}_y \tau &= 0 \\ \langle \tau \rangle &= \sigma^0 \\ \tau &\in S_{\text{per}}(Y), \quad v \in DP(Y) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Le problème (31) admet une solution unique τ , v étant défini à un vecteur constant près. Cette solution s'exprime de façon simple si on introduit la notion de concentration de contrainte :

Concentration de contraintes

Soit C_{ij} le tenseur du second ordre solution du problème d'élasticité suivant

$$\left. \begin{aligned} A(y) C_{ij} &= e_y(u_{ij}) \\ \text{div}_y C_{ij} &= 0 \\ \langle C_{ij} \rangle &= T_{ij} \\ C_{ij} &\in S_{\text{per}}(Y), \quad u_{ij} \in DP(Y) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Le problème (32) admet une solution unique C_{ij} , u_{ij} étant défini à un vecteur constant près.

Le tenseur du 4^{ème} ordre $C = (C_{ij,kh}(y))$ est le tenseur de concentration de contraintes.

En vertu de la linéarité de l'opération de moyenne et de l'opérateur de l'élasticité, la solution $\tau(y)$ de (31) s'obtient par

$$\begin{aligned} \tau(y) &= C_{ij}(y) \sigma_{ij}^0 \\ \text{donc } e_{ij}(v) &= A_{ijpq}(y) C_{kh,pq}(y) \sigma_{kh}^0 \end{aligned} \quad (33)$$

En prenant la moyenne des deux membres de (33) il vient :

$$e_{ijx}(u^0) = \langle e_{ijy}(v) \rangle = \langle A_{ijpq}(y) C_{kh,pq}(y) \rangle \sigma_{kh}^0$$

On pose

$$\mathcal{A}_{ijkh} = \langle A_{ijpq}(y) C_{kh,pq}(y) \rangle = \langle e_{ij}(u_{kh}) \rangle \quad (34)$$

Alors

$$e_{ijx}(u^0) = \mathcal{A}_{ijkh} \sigma_{kh}^0 \quad (35)$$

La loi (35) est la loi de comportement homogénéisée dont le tenseur de souplesse élastique est donné par (34). Nous allons vérifier que cette loi est équivalente à la loi (27) : les approches contraintes et déformations conduisent à la même loi de comportement homogénéisée.

Relation entre \mathcal{A}_{ijkh} et (\mathcal{A}_{ijkh}) .

Les tenseurs \mathcal{A} et (\mathcal{A}) sont inverses l'un de l'autre ce qui justifie l'équivalence de (27) et (35). En effet il suffit pour prouver cela de vérifier que :

$$\mathcal{A}_{ijkh} a_{khpq} = T_{ij,pq} = \frac{1}{2} (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp})$$

$$\text{or } \mathcal{A}_{ijkh}^{(*)} = \mathcal{A}_{khij} = \langle A_{khlm} C_{ij,lm} \rangle = \langle e_{kh}(u_{ij}) \rangle$$

$$\mathcal{A}_{khpq} = \langle a_{khlm} e_{lm}(v_{pq}) \rangle = \langle S_{pq,kh} \rangle$$

Par utilisations successives des règles de calcul microscopiques on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ijkh} \mathcal{A}_{khpq} &= \langle e_{kh}(u_{ij}) \rangle \langle S_{pq,kh} \rangle \\ &= \langle e_{kh}(u_{ij}) S_{pq,kh} \rangle = \langle A_{khlm} C_{ij,lm} S_{pq,kh} \rangle \\ &= \langle A_{lmkh} S_{pq,kh} C_{ij,lm} \rangle = \langle e_{lm}(v_{pq}) C_{ij,lm} \rangle \\ &= \langle e_{lm}(v_{pq}) \rangle \langle C_{ij,lm} \rangle = T_{pq,lm} T_{ij,lm} = T_{ij,pq} \end{aligned}$$

Remarques 2.3.

Le calcul du tenseur \mathcal{A} se fait simplement à partir de (34) : pour chaque composante \mathcal{A}_{ijkh} on résout un problème d'élasticité sur la cellule élémentaire et on calcule la moyenne d'un tenseur de déformation.

Remarque 2.4.

Le tenseur \mathcal{A} possède également les symétries (29).

(*) cf remarque 2.4.

Remarques 2.5.

L'énergie élastique macroscopique est en fait la moyenne de l'énergie élastique microscopique au sens suivant : étant donné un point x macroscopique et un champ u^{*0} macroscopique cinématiquement admissible, la densité d'énergie élastique macroscopique vaut :

$$w^0(u^{*0}) = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{ijkh} e_{khx}(u^{*0}) e_{ijx}(u^{*0})$$

Cet état virtuel $e(u^{*0})$ de déformation induit un état microscopique de déformation :

$$e_{pqy}(u^*) = e_{pqy}(v_{ij}) e_{ijx}(u^{*0})$$

L'énergie élastique microscopique est donc

$$\begin{aligned} w(u^*) &= \frac{1}{2} a_{pqrs}(y) e_{pqy}(u^*) e_{rsy}(u^*) \\ &= \frac{1}{2} a_{pqrs}(y) e_{pqy}(v_{ij}) e_{rsy}(v_{kh}) e_{khx}(u^{*0}) e_{ijx}(u^{*0}) \end{aligned}$$

dont la moyenne sur une cellule élémentaire est

$$\langle w(u^*) \rangle = \frac{1}{2} \langle a_{pqrs}(y) e_{pqy}(v_{ij}) e_{rsy}(v_{kh}) \rangle e_{khx}(u^{*0}) e_{ijx}(u^{*0}) = w^0(u^{*0})$$

On voit donc qu'une façon de construire l'énergie macroscopique est de prendre un champ virtuel u^{*0} , de regarder en un point x le champ "réel" qu'il induit au niveau microscopique, de calculer l'énergie microscopique ainsi définie : l'énergie macroscopique du champ virtuel u^{*0} est alors la moyenne sur un volume élémentaire de cette énergie.

En dehors du cas élastique il faut noter que la grandeur qui "passe" par le processus de moyenne du niveau microscopique au niveau macroscopique est l'énergie interne du corps et non l'énergie libre. En élasticité, pour des transformations isothermes ces notions coïncident.

2.2.3. Justification de la méthode

Soient σ^E et u^E les champs de contraintes et de déplacements, solutions des équations (1)(2)(10)(11). Lorsque ϵ tend vers 0 σ^E et u^E ont des limites (pour des topologies qu'il n'est pas de notre propos de détailler) σ^0 et u^0 . Des arguments d'Analyse Fonctionnelle permettent alors d'établir rigoureusement que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^0 = \mathcal{L} e_x(u^0) \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{ou } e_x(u^0) = \mathcal{A}\sigma^0) \\ \operatorname{div}_x \sigma^0 = -f \quad \text{dans } \Omega \\ u^0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

2.2.4. Théorie des modules effectifs

Nous avons vu que l'approche contrainte de la méthode des moyennes apparaissait comme un essai sur la cellule élémentaire en contrainte homogène alors que l'approche déformation est un essai en déformation homogène.

Certains auteurs ont proposé pour réaliser ces essais homogènes (contrainte ou déformation) d'imposer des conditions aux limites homogènes (en force ou en déplacement) au lieu d'imposer des conditions portant sur les moyennes. Cette théorie, dite théorie des modules effectifs, conduit à l'introduction de tenseurs de concentration de contraintes et de concentration de déformation légèrement différents.

Tenseur de concentration de contraintes modifié

Soit \hat{C}_{ij} le tenseur du second ordre solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} A(y) \hat{C}_{ij} = e_y(\hat{u}_{ij}) \\ \operatorname{div}_y \hat{C}_{ij} = 0 \\ \hat{C}_{ij, kh} n_h = T_{ij, kh} n_h \quad \text{sur } \partial Y \quad \text{où } \vec{n} \text{ désigne la normale} \\ \quad \text{extérieure au bord } \partial Y \text{ de } Y. \end{array} \right. \quad (36)$$

Tenseur de concentration de déformations modifié

Soit \hat{v}_{ij} le champ de déplacement défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_{ij} = a(y) e_y(\hat{v}_{ij}) \\ \operatorname{div}_y \hat{S}_{ij} = 0 \\ \hat{w}_{ij, k} = P_{ij, k} \quad \text{sur } \partial Y \end{array} \right. \quad (37)$$

Cette théorie donne alors une loi de comportement homogénéisée de coefficients :

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_{ijkl} = \langle A_{ijpq} \hat{C}_{kh, pq} \rangle \\ \hat{a}_{ijkl} = \langle a_{ijpq} e_{pq}(\hat{v}_{kh}) \rangle \end{array} \right\} \quad (38)$$

Ces coefficients sont différents des coefficients A_{ijkl} et a_{ijkl} dans le cas général (sauf en dimension 1 où ils sont égaux). Ce point est important : la théorie des modules effectifs a, semble-t-il, été considérée comme une théorie exacte pour les problèmes statiques. Nous voyons qu'elle n'est qu'approximative (ce qui est confirmé par des calculs numériques [27]) même si son accord avec l'expérience est bon en regard des erreurs qui entachent les lois de comportement.

2.3. Viscoélasticité

L'approche contrainte (duale) est ici la plus commode. Pour une viscoélasticité de type Kelvin, l'approche déformation (primale) serait préférable.

Dans l'approche contrainte on suppose donc σ^0 contrainte macroscopique donnée et on cherche $\sigma(y, t)$, $v(y, t) = \frac{du}{dt}(y, t)$ solutions de

$$\left. \begin{array}{l} A(y) \frac{d\sigma}{dt} + B(y)\sigma = e_y(v) \\ \operatorname{div}_y \sigma = 0 \\ \langle \sigma \rangle = \sigma^0 \\ \sigma \in \operatorname{Sper}(Y), \quad v \in \operatorname{DP}(Y) \\ \sigma(0) = \sigma_0 \end{array} \right\} \quad (39)$$

On applique à (39) la transformation de Laplace dont on rappelle quelques propriétés :

$$\hat{f}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

On montre que la transformation de Laplace $\mathcal{L} : f \rightarrow \hat{f}$ est injective sur un domaine de fonctions intégrables. \mathcal{L} est donc bijective sur son image et on peut définir une transformation de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1} : \hat{f} \rightarrow f$

On montre aussi que, si on note $f * g$ la convolée des fonctions f et g

$$f * g(t) = \int_0^t f(s) g(t-s) ds$$

Alors $\mathcal{L}(f * g) = \hat{f} \hat{g}$ et $\mathcal{L}^{-1}(\hat{f} \hat{g}) = f * g$ (40)

Après transformation de Laplace (39) revient donc à chercher $\hat{\sigma}$ et \hat{v} solutions de :

$$\begin{aligned} pA(y) \hat{\sigma}(p) + B(y) \hat{\sigma}(p) &= e_y(\hat{v}(p)) \\ \operatorname{div}_y \hat{\sigma}(p) &= 0 \\ \langle \hat{\sigma}(p) \rangle &= \hat{\sigma}^0(p) \\ \hat{\sigma} \in S_{\text{per}}(Y), \hat{v} \in DP(Y) \end{aligned} \quad (41)$$

Le problème (41) est du même type que le problème (31) avec un tenseur de souplesse élastique égale à $pA(y) + B(y)$.

$\hat{\sigma}^0(p)$ et $e_x(\hat{v}^0(p))$ sont donc liés par :

$$e_x(\hat{v}^0(p)) = Q(p) \hat{\sigma}^0(p) \quad (42)$$

où $Q(p)$ est l'opérateur homogénéisé de $pA(y) + B(y)$.

Il est important de remarquer qu'en général on n'a pas égalité entre $Q(p)$ et $p\mathcal{A} + \mathcal{B}$ (\mathcal{A} et \mathcal{B} sont les homogénéisés de $A(y)$ et $B(y)$). Il est facile de vérifier que (*)

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(\lambda A) &= \lambda \operatorname{Hom}(A) \\ \text{mais } \operatorname{Hom}(A+B) &\neq \operatorname{Hom}(A) + \operatorname{Hom}(B) \\ \text{sauf si } B &= \lambda A, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Revenant à (42) on applique la transformation de Laplace inverse :

$$\begin{aligned} e_x(v^0) &= \mathcal{L}^{-1}(Q(p) \hat{\sigma}^0(p)) \\ &= \mathcal{L}^{-1}(Q) * \sigma^0 \\ e_x(v^0(t)) &= \int_0^t \mathcal{L}^{-1}Q(t-s) \sigma^0(s) ds \end{aligned} \quad (43)$$

La loi de comportement homogénéisée est une loi à mémoire longue (alors qu'on était parti d'une loi à mémoire courte). La connaissance de la loi de comportement à l'instant t suppose la connaissance de $\sigma^0(s)$ $s \in \{0, t\}$, donc la connaissance de toute l'histoire du matériau depuis l'instant initial. On obtient donc une théorie de type fonctionnelle.

Nous donnerons plus de détails sur la loi (43) dans la section développements asymptotiques.

(*) On note $\operatorname{Hom}(A) = \mathcal{A}$

2.4. La Viscoplasticité

La loi de comportement viscoplastique étant non linéaire, l'artifice de la transformation de Laplace est inefficace. Nous allons obtenir la loi de comportement homogénéisée en introduisant des variables internes.

Ici encore l'approche duale est préférable. $\sigma^0(t)$ étant donné il s'agit de trouver $\sigma(y, t)$ et $v(y, t) = \frac{du}{dt}(y, t)$ solutions de :

$$\left. \begin{aligned} A(y) \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(y, \sigma) &= e_y(v) \\ \operatorname{div}_y \sigma &= 0 \\ \sigma(0) = 0, \langle \sigma \rangle &= \sigma^0 \\ \sigma \in S_{\text{per}}(Y), v \in DP(Y) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Le problème (44) admet sous les hypothèses de différentiabilité de ϕ faites en (6), une solution unique en σ, v étant défini à un vecteur constant près. Multiplions la première ligne par C_{rs} et intégrons sur Y ;

$$\langle A_{ijkh} C_{rs, ij} \frac{d\sigma_{kh}}{dt} \rangle + \langle C_{rs, ij} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}}(\sigma) \rangle = \langle e_{ij}(v), C_{rs, ij} \rangle$$

On remarque

$$A_{ijkh} C_{rs, ij} = e_{khy}(u_{rs})$$

donc

$$\begin{aligned} \langle A_{ijkh} C_{rs, ij} \frac{d\sigma_{kh}}{dt} \rangle &= \langle e_{khy}(u_{rs}) \frac{d\sigma_{kh}}{dt} \rangle \\ &= \langle e_{kh}(v_{rs}) \rangle \langle \frac{d\sigma_{kh}}{dt} \rangle = \mathcal{A}_{khrs} \frac{d\sigma_{kh}^0}{dt} \end{aligned} \quad (45)$$

de même

$$\langle e_{ij}(v), C_{rs, ij} \rangle = \langle e_{ij}(v) \rangle \langle C_{rs, ij} \rangle = e_{rsx}(v^0) \quad (46)$$

Le problème vient du traitement du terme :

$$\langle C_{rs, ij} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}}(\sigma) \rangle \quad (47)$$

Posons

$$\Phi(\tau, A) = \langle \phi(y, C\tau + A) \rangle$$

où A est un champ de tenseurs 3×3 symétriques

et

$$(C\tau)_{pq} = C_{ij, pq} \tau_{ij}$$

Alors : $\frac{\partial \phi}{\partial \tau_{rs}} = \langle C_{rs,ij} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} (y, C\tau + A) \rangle$

On pose alors : $\sigma^r = \sigma - C\sigma^0$ (48)

(composantes par composantes $\sigma_{pq}^r = \sigma_{pq} - C_{ij,pq} \sigma_{ij}^0$)

Le terme (47) devient alors :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau_{rs}} (\sigma^0, \sigma^r) \quad (49)$$

La loi liant σ^0 et v^0 est d'après (45)(46)(49) :

$$\mathcal{A} \frac{d\sigma^0}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial \tau} (\sigma^0, \sigma^r) = e_x(v^0) \quad (50)$$

(49) ne suffit pas à décrire la loi de comportement homogénéisée puisqu'il y figure σ^r . Il nous faut donc établir des équations caractérisant σ^r .

on pose $v^r = v - u_{ij} \frac{d\sigma_{ij}^0}{dt}$ (par composantes : $v_k^r = v_k - u_{ij,k} \frac{d\sigma_{ij}^0}{dt}$)

de sorte que $e(v^r) = e(v) - e(u_{ij}) \frac{d\sigma_{ij}^0}{dt} = e(v) - AC_{ij} \frac{d\sigma_{ij}^0}{dt}$

σ^r, v^r sont solutions de

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}(y) \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} (y, C\sigma^0 + \sigma^r) &= e_y(v^r) \\ \operatorname{div}_y \sigma^r &= 0 \\ \langle \sigma^r \rangle &= 0 \\ \sigma^r(o) &= 0 \\ \sigma^r \in S_{\text{per}}(Y), v^r \in DP(Y) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

La loi de comportement homogénéisée est l'ensemble des deux systèmes (50) et (51) qui sont couplées :

$$\mathcal{A} \frac{d\sigma^0}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial \tau} (\sigma^0, \sigma^r) = e_x(v^0) \quad \text{dans } \Omega \quad (50)$$

$$\mathcal{A} \frac{d\sigma^r}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial A} (\sigma^0, \sigma^r) = e_y(v^r) \quad \text{dans } Y \quad (51)$$

$$\operatorname{div}_y \sigma^r = 0 \quad \langle \sigma^r \rangle = 0 \quad \sigma^r \in S_{\text{per}}(Y), v^r \in DP(Y) \\ + \text{conditions initiales et au bord}$$

Ce système homogénéisé ne se réduit pas à un système d'équations sur Ω seul; il est couplé avec un système sur Y . La connaissance de la loi de comportement macroscopique suppose la connaissance de grandeurs microscopiques qui servent à décrire l'état du système. Il est possible d'éliminer le niveau microscopique (i.e. σ^r et v^r). On obtient alors comme pour la viscoélasticité une loi non locale en temps, de type fonctionnelle.

Lorsqu'on n'élimine pas le niveau microscopique et qu'on garde le système (50)(51) l'introduction de variables internes met en évidence la structure "standard généralisé" de la loi de comportement homogénéisée. La formulation avec variables internes des lois de comportement est une alternative à la formulation fonctionnelle. Les deux formulations sont souvent considérées comme équivalentes, la formulation fonctionnelle étant une loi à une infinité de variables internes. Nous retrouvons ici cette alternative loi fonctionnelle, loi à variables internes.

La structure "standard généralisé" implique des propriétés supplémentaires de convexité qui permettent de traiter plus facilement certains problèmes : comportement sous charges périodiques, stabilité, etc... Il est donc intéressant de pouvoir reconnaître une loi de type "standard généralisé" en (50)(51).

Rappels sur les standards généralisés {11}{19}

L'état du matériau est caractérisé par le tenseur des déformations élastiques e^{el} et des paramètres internes α (on ne considère ici que des évolutions isothermes) dont l'évolution ne dépend que de l'état actuel. La déformation élastique généralisée est $E^{el} = (e^{el}, \alpha)$, la déformation totale est $E = (e, o)$, la déformation anélastique généralisée est $E^{an} = (e^{an}, -\alpha)$ de sorte que :

$$E = E^{el} + E^{an}$$

Les évolutions réversibles du matériau sont caractérisées par l'énergie libre W , fonction des variables d'état (e^{el}, α) . On a par définition de la contrainte généralisée (σ, A)

$$\Sigma = \frac{\partial W}{\partial E^{el}} \quad \text{i.e.} \quad \sigma = \frac{\partial W}{\partial e^{el}}, A = \frac{\partial W}{\partial \alpha} \quad (52)$$

La partie irréversible de la loi de comportement est caractérisée par le potentiel de force Φ fonction de $\Sigma = (\sigma, A)$

$$\dot{E}^{an} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \quad \text{i.e.} \quad \dot{e}^{an} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad - \dot{\alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial A} \quad (53)$$

en introduisant la transformée de Legendre de W

$$W^*(\Sigma) = \sup_{E^{el}} \left[(\Sigma, E^{el}) - W(E^{el}) \right] \quad (54)$$

On écrit la loi (52)(53) sous une forme équivalente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W^*}{\partial \Sigma}(\Sigma) \right) + \frac{\partial \phi}{\partial \Sigma}(\Sigma) = \frac{dE}{dt}$$

il est fréquent que W soit une fonction quadratique de Σ . On pose alors

$$\begin{aligned} L\Sigma &= \frac{\partial W^*}{\partial \Sigma}(\Sigma) \\ L \frac{d}{dt} \Sigma + \frac{\partial \phi}{\partial \Sigma}(\Sigma) &= \frac{dE}{dt} \end{aligned} \quad (55)$$

L'équation (55) est d'un type connu : elle a la même structure que la loi viscoplastique (5), la contrainte σ étant remplacée par une contrainte généralisée Σ . On peut donc lui appliquer divers résultats mathématiques qui donnent des propriétés intéressantes sur la solution.

Mise sous forme standard généralisée de (50)(51)

On pose :

$$A = (A_{ij}(x,y)) = (\sigma_{ij}^r(x,y))$$

A est un champ d'autocontraintes microscopiques. Les forces $A(\cdot, y)$ $y \in Y$ ne sont pas indépendantes, elles sont liées par les relations

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}_y A &= 0 \\ \langle A \rangle &= 0 \\ A &\in S_{\text{per}}(Y) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

$$\alpha(x,y) = (\alpha_{ij}(x,y)) = - \int_0^{\mathcal{K}} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}}(y, C(y)\sigma^0(x) + \sigma^r(x,y)) ds$$

α est à un signe près la déformation anélastique microscopique.

W est l'énergie élastique emmagasinée :

$$W(e^{e1}, \alpha) = \frac{1}{|Y|} \int_Y A(y)(C(y)\mathcal{Q}e^{e1} + \tau(\alpha(y)))(C(y)\mathcal{Q}e^{e1} + \tau(\alpha(y))) dy$$

où \mathcal{Q} est la matrice de raideur homogénéisée et $\tau(\alpha)$ est la solution du problème microscopique :

$$\left. \begin{aligned} A(y)\tau(\alpha) + \alpha(y) &= e_y(w) \\ - \operatorname{div}_y \tau &= 0 \\ \langle \tau \rangle &= 0, \tau \in S_{\text{per}}(Y), w \in DP(Y) \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Le potentiel de force ϕ a pour expression locale (i.e. en chaque point x de Ω)

$$\phi(\sigma, A) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \phi(y, C(y)\sigma + A) dy$$

On vérifie après calculs que la loi (50)(51) est bien du type (52)(53) (ne pas oublier dans les calculs que les forces $A(\cdot, y)$ sont liées par (56)).

Remarquons que la loi de comportement homogénéisée suppose la détermination d'une infinité de variables internes $\{\alpha(x,y), y \in Y\}$ en chaque point x de Ω .

2.5. Plasticité parfaite

Les constituants de la cellule de base Y sont donc élasto-plastiques parfaits. On note $P(y)$ le convexe d'élasticité en tout point de Y , et on pose $P^E(x) = P(\frac{x}{\epsilon})$.

En dehors de toute considération d'homogénéisation le schéma élastique parfaitement plastique est source de sérieuses difficultés théoriques. Ces difficultés concernent essentiellement le champ des vitesses et sont liées à la régularité de ce champ (cf [28]). Nous nous bornerons donc à l'homogénéisation du problème en contraintes. Pour le solide hétérogène, ce problème s'énonce ainsi :

trouver $\sigma^E(t)$ solution de

$$\left. \begin{aligned} \sigma^E &\in S(f) \cap P^E \\ \int_{\Omega} (A^E \frac{d\sigma^E}{dt}, \tau - \sigma^E) dx &\geq 0 \quad (\forall \tau \in S(f) \cap P^E) \\ \sigma^E(o) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

$S(f)$ est l'espace des champs statiquement admissibles (défini en 1.3.). La condition initiale est prise nulle pour simplifier l'exposé.

Moyennant une hypothèse de sécurité, assurant qu'il existe des champs statiquement et plastiquement admissibles, le problème (58) admet une solution unique (pour une topologie qu'il n'est pas de notre propos de préciser).

Loi de comportement homogénéisée

Nous avons déjà remarqué au paragraphe 1.2. que la plasticité parfaite pouvait être obtenue comme cas limite de la viscoplasticité. Plus précisément si on pose (cf (7))

$$\phi_{\mu}(y, \tau) = \frac{1}{2\mu} |\tau - \Pi_P(y)\tau|^2 \quad (59)$$

le potentiel de la plasticité parfaite est la limite de ϕ_{μ} lorsque μ tend vers 0.

Nous allons donc obtenir la loi de comportement homogénéisée de la plasticité parfaite comme cas limite de la loi homogénéisée viscoplastique.

On affecte d'un indice μ les grandeurs σ^μ, τ^μ relatives au matériau viscoplastique. En multipliant (50)(51) respectivement par τ et τ^r éléments de $S(f)$ et $S_{per}^o(Y)$ on obtient

$$\int_{\Omega} \left(A \frac{d\sigma^\mu}{dt}, \tau - \sigma_\mu^o \right) dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} (\sigma_\mu^o, \sigma_\mu^r), \tau - \sigma_\mu^o \right) dx = 0 \quad (60)$$

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y \left(A \frac{d\sigma^\mu}{dt}, \tau^r - \sigma_\mu^r \right) dy + \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(\frac{\partial \phi}{\partial A} (\sigma_\mu^o, \sigma_\mu^r), \tau^r - \sigma_\mu^r \right) dy = 0 \quad (61)$$

avec :

$$\phi_\mu(\tau, A) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{1}{2\mu} |C(y)\tau + A - \Pi_{P(y)}(C(y)\tau + A)|^2 dy$$

En ajoutant (60) et (61) il vient :

$$\int_{\Omega} \left(A \frac{d\sigma^\mu}{dt}, \tau - \sigma_\mu^o \right) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(A \frac{d\sigma^\mu}{dt}, \tau - \sigma_\mu^r \right) dy dx \quad (62)$$

$$+ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} (\sigma_\mu^o, \sigma_\mu^r), \tau - \sigma_\mu^o \right) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(\frac{\partial \phi}{\partial A} (\sigma_\mu^o, \sigma_\mu^r), \tau^r - \sigma_\mu^r \right) dy dx = 0$$

En choisissant de plus dans (62) (τ, τ^r) élément du convexe \mathcal{P} défini par

$$\mathcal{P} = \{(\tau, \tau^r) : C(y)\tau(x) + \tau^r(x, y) \in P(y) \quad \forall x\}$$

on remarque que

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} (\sigma_\mu^o, \sigma_\mu^r), \tau - \sigma_\mu^o \right) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(\frac{\partial \phi}{\partial A} (\sigma_\mu^o, \sigma_\mu^r), \tau^r - \sigma_\mu^r \right) dy dx \leq 0$$

et donc :

$$\int_{\Omega} \left[\left(A \frac{d\sigma^\mu}{dt}, \tau - \sigma_\mu^o \right) + \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(A \frac{d\sigma^\mu}{dt}, \tau - \sigma_\mu^r \right) dy \right] dx \geq 0 \quad (63)$$

On fait maintenant tendre μ vers 0. Il est facile de montrer l'estimation suivante :

$$\int_{\Omega} \phi_\mu(\sigma_\mu^o, \sigma_\mu^r) dx \leq \text{constante}$$

donc :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y |C(y)\sigma_\mu^o + \sigma_\mu^r - \Pi_{P(y)}(C(y)\sigma_\mu^o + \sigma_\mu^r)|^2 dy dx \leq c\mu \quad (64)$$

En faisant tendre μ vers 0 dans (63)(64) on voit que σ^o, σ^r , limites de σ_μ^o et σ_μ^r sont solutions de :

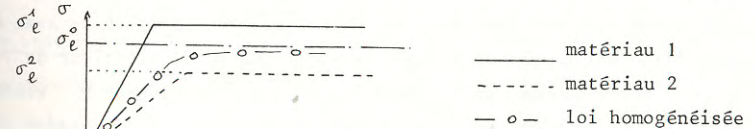
$$\left. \begin{aligned} & (\sigma^o, \sigma^r) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{S} \\ & \int_{\Omega} \left[\left(A \frac{d\sigma^o}{dt}, \tau - \sigma^o \right) + \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(A \frac{d\sigma^r}{dt}, \tau^r - \sigma^r \right) dy \right] dx \geq 0 \quad \forall (\tau, \tau^r) \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

où $\mathcal{S} = \{(\tau, \tau^r), \tau \in S(f)\}$

La loi (65) est la loi de comportement homogénéisée. C'est à nouveau une loi de type standard généralisé construite sur le modèle de la plasticité parfaite : dans l'espace des contraintes généralisées $\Sigma^* = (\tau, \tau^r)$, la solution $\Sigma = (\sigma^o, \sigma^r)$ est astreinte à demeurer dans un convexe \mathcal{P} et satisfait une condition (65) généralisant le principe du travail maximal de HILL.

e) Analyse limite

La loi de comportement homogénéisée d'un matériau élastoplastique fortement hétérogène n'est pas simple comme nous venons de le voir. Mais pour tous les problèmes de calcul à la rupture (détermination de charges limites) la connaissance de la loi de comportement complète n'est pas indispensable. Il suffit en fait de connaître le convexe limite dans lequel le tenseur de contraintes macroscopiques est astreint à demeurer (sur la figure 4 ce convexe asymptote est défini par σ_1^o).



- Figure 4 -

Ce convexe s'obtient simplement en résolvant un problème d'analyse limite sur la cellule :

Rappels d'analyse limite (SALENCON {21})

On considère un corps soumis à un changement dépendant de n paramètres Q_1, \dots, Q_n auxquels sont associés dans l'expression de la puissance extérieure les variables q_1, \dots, q_n . En chaque point x de Ω un convexe d'élasticité $P(x)$ est donné. L'existence de $P(x)$ implique dans l'espace R^n des chargements Q , l'existence d'un convexe \mathcal{P} définissant les chargements supportables par le corps

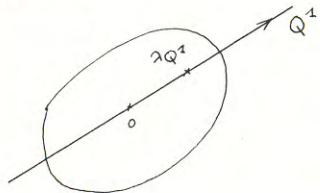
$$\mathcal{P} = \{Q \text{ tels qu'il existe } \sigma \text{ en équilibre avec } Q, \sigma(x) \in P(x) \quad \forall x \in \Omega\}$$

\mathcal{P} par l'intérieur.

\mathcal{P} par l'intérieur.

\mathcal{P} par l'intérieur.

Approche statique



Une direction Q^1 est chargements on considère donné. On définit Maximiser $\lambda \geq 0$ tel que avec $\lambda Q^1, \sigma(x) \in P(x)$ En faisant varier Q^1 \mathcal{P} par l'intérieur.

Une direction Q^1 est chargements on considère donné. On définit Maximiser $\lambda \geq 0$ tel que avec $\lambda Q^1, \sigma(x) \in P(x)$ En faisant varier Q^1 \mathcal{P} par l'intérieur.

Une direction Q^1 est chargements on considère donné. On définit Maximiser $\lambda \geq 0$ tel que avec $\lambda Q^1, \sigma(x) \in P(x)$ En faisant varier Q^1 \mathcal{P} par l'intérieur.

Une direction Q^1 est chargements on considère donné. On définit Maximiser $\lambda \geq 0$ tel que avec $\lambda Q^1, \sigma(x) \in P(x)$ En faisant varier Q^1 \mathcal{P} par l'intérieur.

Approche cinématique

Soit $v(x)$ un champ de vitesse donné. On définit fonction d'appui de $P(x)$

$$\Pi(x, v) = \sup_{\sigma \in P(x)} (\sigma, v)$$

Une direction Q^1 est chargements on considère donné. On définit Maximiser $\lambda \geq 0$ tel que avec $\lambda Q^1, \sigma(x) \in P(x)$ En faisant varier Q^1

Une direction Q^1 est chargements on considère donné. On définit Maximiser $\lambda \geq 0$ tel que avec $\lambda Q^1, \sigma(x) \in P(x)$ En faisant varier Q^1

Une direction Q^1 est chargements on considère donné. On définit Maximiser $\lambda \geq 0$ tel que avec $\lambda Q^1, \sigma(x) \in P(x)$ En faisant varier Q^1

On définit de même dans R^n la fonction d'appui π la fonction d'appui π la fonction d'appui π la fonction d'appui π la fonction d'appui π la fonction d'appui π

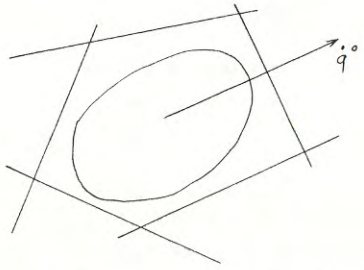
$$\pi(\dot{q}) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} (Q, \dot{q}) \quad \dot{q} = \sup_{Q \in \mathcal{P}} (Q, \dot{q}) \quad \dot{q} = \sup_{Q \in \mathcal{P}} (Q, \dot{q}) \quad \dot{q} = \sup_{Q \in \mathcal{P}} (Q, \dot{q}) \quad \dot{q} = \sup_{Q \in \mathcal{P}} (Q, \dot{q}) \quad \dot{q} = \sup_{Q \in \mathcal{P}} (Q, \dot{q}) \quad \dot{q} = \sup_{Q \in \mathcal{P}} (Q, \dot{q})$$

On a alors en vertu du principe des puissances incipe des puissances incipe des puissances incipe des puissances incipe des puissances incipe des puissances incipe des puissances

$$\Pi(\dot{q}) \leq \inf_{\Omega} \int \pi(x, e(v)) \dot{q} \leq \inf_{\Omega} \int \pi(x, e(v)) \dot{q} \leq \inf_{\Omega} \int \pi(x, e(v)) \dot{q} \leq \inf_{\Omega} \int \pi(x, e(v)) \dot{q} \leq \inf_{\Omega} \int \pi(x, e(v)) \dot{q} \leq \inf_{\Omega} \int \pi(x, e(v)) \dot{q} \leq \inf_{\Omega} \int \pi(x, e(v)) \dot{q}$$

l'inf étant pris sur tous les v cinématiquement les v cinématiquement les v cinématiquement les v cinématiquement les v cinématiquement les v cinématiquement les v cinématiquement

L'inégalité (66) permet de définir une approche: définir une approche: définir une approche: définir une approche: définir une approche: définir une approche: définir une approche: direction \dot{q}^0 étant donnée, si on considère un champ on considère un champ on considère un champ on considère un champ on considère un champ on considère un champ on considère un champ ment admissible avec \dot{q}^0 on voit que \mathcal{P} est contenu: que \mathcal{P} est contenu: que \mathcal{P} est contenu: que \mathcal{P} est contenu: que \mathcal{P} est contenu: que \mathcal{P} est contenu: que \mathcal{P} est contenu



$Q \dot{q}^0 - \int_{\Omega} \pi(x,$
En faisant var
comme intersec

$Q \dot{q}^0 - \int_{\Omega} \pi(x,$
En faisant var
comme intersec

$Q \dot{q}^0 - \int_{\Omega} \pi(x,$
En faisant var
comme intersec

$Q \dot{q}^0 - \int_{\Omega} \pi(x,$
En faisant var
comme intersec

$Q \dot{q}^0 - \int_{\Omega} \pi(x,$
En faisant var
comme intersec

$Q \dot{q}^0 - \int_{\Omega} \pi(x,$
En faisant var
comme intersec

$Q \dot{q}^0 - \int_{\Omega} \pi(x,$
En faisant var
comme intersec

Application à l'homogénéisation

Le chargement est le tenseur de contraintes macrur de contraintes macrur de contraintes macrur de contraintes macrur de contraintes macrur de contraintes macrur de contraintes macrur chargements est R_s^9 (de dimension 6). L'existence ision 6). L'existence ision 6). L'existence ision 6). L'existence ision 6). L'existence ision 6). L'existence ision 6). L'existence convexe d'élasticité implique l'existence dans R^9 l'existence dans R^9 l'existence dans R^9 l'existence dans R^9 l'existence dans R^9 l'existence dans R^9 l'existence dans R^9 l'existence dans R^9

Les deux approches statique et cinématique conduisent très probablement à la même définition de \hat{P}^0 (conjecturé). Une conjecture plus osée consiste à avancer que $P^0 = \hat{P}^0$. Ce résultat qui paraît très probable permettrait une détermination simple du convexe limite macroscopique : \hat{P}^0 s'obtient en effet par résolution d'un problème d'analyse limite classique sur la cellule (chargement par forces imposées sur le bord) alors que les définitions (67) et (68) de P^0 supposent la résolution d'un problème d'analyse limite moins banal (chargement par moyenne volumique imposée).

3. DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

3.1. Orientation

Comme il a été indiqué dans l'introduction on considère ici que le problème possède un petit paramètre naturel ϵ lié à la taille de la cellule élémentaire. L'idée de la méthode des développements asymptotiques par échelles multiples est de postuler un développement en puissance de ϵ des variables intéressantes (par exemple σ^ϵ et u^ϵ) sous la forme :

$$\sigma^\epsilon(x) = \sigma_0(x,y) + \epsilon \sigma_1(x,y) + \dots + \epsilon^i \sigma_i(x,y) + \dots, \quad y = \frac{x}{\epsilon} \quad (71)$$

$$u^\epsilon(x) = u_0(x,y) + \epsilon u_1(x,y) + \dots + \epsilon^i u_i(x,y) + \dots, \quad y = \frac{x}{\epsilon}$$

Les fonctions σ_i et u_i sont Y périodiques par rapport à la variable y et on remplace y par $\frac{x}{\epsilon}$. La dépendance par rapport à x de ces fonctions indique leurs variations macroscopiques alors que la dépendance en y indique leurs variations microscopiques.

La loi de comportement homogénéisée ne portera donc que sur les premiers termes du développement des variables choisies ici σ_0 et u_0 .

La règle de dérivation est suivante. Pour une fonction $f^\epsilon(x)$ définie par

$$f^\epsilon(x) = f(x, \frac{x}{\epsilon}),$$

on a :

$$\frac{d}{dx_i} f^\epsilon(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x, \frac{x}{\epsilon}) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} f(x, \frac{x}{\epsilon}) \quad (72)$$

Cette règle de dérivation permet de développer les opérateurs d'équilibre et de déformation en puissance de ϵ :

$$\text{div}_x \sigma^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \text{div}_y \sigma_0 + (\text{div}_x \sigma_0 + \text{div}_y \sigma_1) + \epsilon (\text{div}_x \sigma_1 + \text{div}_y \sigma_2) + \dots$$

$$+ \dots + \epsilon^i (\text{div}_x \sigma_i + \text{div}_y \sigma_{i+1}) + \dots \quad (73)$$

$$e_x(u^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} e_y(u_0) + (e_x(u_0) + e_y(u_1)) + \epsilon (e_x(u_1) + e_y(u_2)) + \dots + \epsilon^i (e_x(u_i) + e_y(u_{i+1})) + \dots \quad (74)$$

on porte alors les développements (71)(73)(74) dans la loi de comportement et on identifie les termes du même ordre. L'identification des termes d'ordre 0 fournit la loi de comportement homogénéisée. L'identification des termes d'ordre supérieur donne les termes suivants du développement (σ_i, u_i) qui permettent une meilleure connaissance de $(\sigma^\epsilon, u^\epsilon)$ (termes correcteurs).

Détaillons donc ce raisonnement sur les différentes lois de comportement.

3.2. Elasticité

Les équations du problème sont :

$$\left. \begin{aligned} e_x(u^\epsilon) &= A^\epsilon(x) \sigma^\epsilon(x) && \text{dans } \Omega \\ \text{div}_x \sigma^\epsilon + f &= 0 && \text{dans } \Omega \\ u^\epsilon &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

en portant les développements (71)(73)(74) dans (75) il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} e_y(u_0) + \dots + \epsilon^i (e_x(u_i) + e_y(u_{i+1})) + \dots &= A(y) (\sigma_0 + \dots + \epsilon^i \sigma_i + \dots) \\ \frac{1}{\epsilon} \text{div}_y \sigma_0 + \text{div}_x \sigma_0 + \text{div}_y \sigma_1 + f + \dots + \epsilon^i (\text{div}_x \sigma_i + \text{div}_y \sigma_{i+1}) + \dots &= 0 \\ u_0 + \epsilon^i u_i + \dots &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (76)$$

En identifiant les termes facteurs des mêmes puissances de ϵ on obtient :

ordre ϵ^{-1}

$$e_y(u_0) = 0 \quad (77)$$

$$\text{div}_y \sigma_0 = 0 \quad u_0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (78)$$

ordre ϵ^0

$$e_x(u_0) + e_y(u_1) = A(y) \sigma_0 \quad y = \frac{x}{\epsilon} \quad (79)$$

$$\text{div}_x \sigma_0 + \text{div}_y \sigma_1 + f = 0$$

ordre ϵ^1

$$e_x(u_1) + e_y(u_2) = A(y)\sigma_1 \quad (81)$$

$$\text{div}_x \sigma_1 + \text{div}_y \sigma_2 = 0$$

etc...

L'égalité (77) indique que u_0 est un déplacement rigide par rapport à la variable y . Comme d'autre part u_0 est périodique par rapport à y on déduit que ce déplacement rigide ne peut être qu'une translation :

$$u_0(x,y) = u^0(x) \quad (*) \quad (82)$$

Considérons maintenant le problème (78)(79) que nous écrivons sous forme équivalente après avoir posé $w = u_1 + e_x(u^0)y$:

$$\left. \begin{aligned} e_y(w) &= A(y)\sigma_0(x,y) \\ \text{div}_y \sigma_0 &= 0 \\ \sigma_0(x,y) &\text{ périodique, } w \text{ de déformation périodique} \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

A ce niveau on a le choix entre l'approche primale (déformations) et l'approche duale (contraintes)

Approche contraintes

On pose $(*) \sigma^0(x) = \langle \sigma_0(x,y) \rangle$ et on ajoute au système (83) la condition

$$\langle \sigma_0(x,y) \rangle = \sigma^0(x). \quad (84)$$

Le problème ainsi obtenu à déjà été rencontré au paragraphe 2.2. et la solution de ce problème est donc :

$$\sigma_0(x,y) = C_{ij}(y)\sigma_{ij}^0(x)$$

D'autre part en prenant les moyennes dans (83) on obtient, en remarquant que $\langle e_y(w) \rangle = e_x(u^0)$ (conséquence facile de la périodicité de u_1) :

$$e_x(u^0) = \langle e_y(w) \rangle = \langle A(y)C(y) \rangle \sigma^0(x)$$

Composantes par composantes la loi homogénéisée s'écrit :

(*) Notation : chaque fois qu'une moyenne est prise, l'indice passe du bas en haut : $\sigma^0(x) = \langle \sigma_0(x,y) \rangle$, $u^0(x) = \langle u_0(x,y) \rangle = \langle u_0(x) \rangle \dots$

$$e_{ijx}(u^0) = \langle A_{ijpq}(y) C_{kh,pq}(y) \rangle \sigma_{kh}^0(x) \quad (85)$$

La loi (85) n'est autre que la loi (34) obtenue par la méthode des moyennes.

Il est important de remarquer que σ_0 , le premier terme du développement de σ^ϵ , dépend de la variable microscopique y , alors que u_0 n'en dépend pas. Le passage aux moyennes dans (84) n'est pas un choix (alors que c'était un choix intuitif au §2) car il est imposé par la remarque (18) :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sigma^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sigma_0(x, \frac{x}{\epsilon}) = \langle \sigma_0(x,y) \rangle = \sigma^0(x)$$

Approche déformations

Au système (82) on ajoute la condition suivante :

$$\langle e_y(w) \rangle = e_x(u^0)$$

Le problème ainsi obtenu a déjà été rencontré en 2.2. Sa solution est :

$$w(x,y) = w_{kh}(y) e_{khx}(u^0)$$

Reportant cette égalité dans (83) on obtient en moyennant :

$$\sigma^0(x) = \langle \sigma_0(x,y) \rangle = \langle a(y) e_y(w_{kh}) \rangle e_{khx}(u^0)$$

composantes par composantes :

$$\sigma^0_{ij} = \langle a_{ijpq} e_{pqy}(w_{kh}) \rangle e_{khx}(u^0) \quad (86)$$

La loi (86) n'est autre que la loi (29) obtenue par la méthode des moyennes.

Correcteurs

L'étude des égalités obtenues aux ordres supérieurs ϵ^i permet de déterminer les termes suivants des développements que l'on nomme correcteurs, puisqu'ils donnent une approximation de σ^ϵ d'ordre élevé que le seul premier terme du développement.

Ces correcteurs sont déterminés par un processus en cascade ; σ_0 et u_0 étant connus on a :

$$u_1 = w_{kh}(y) e_{khx}(u_0) - e_x(u_0)y$$

σ_1 et u_2 sont solutions de :

$$\left. \begin{aligned} A(y)\sigma_1 &= e_x(u_1) + e_y(u_2) \\ \operatorname{div}_y \sigma_1 + \operatorname{div}_x \sigma_0 + f &= 0 \\ \sigma_1, u_2 &\text{ p\u00e9riodiques} \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Ce probl\u00e8me est bien pos\u00e9 lorsqu'on lui ajoute une condition de moyenne (contraintes ou d\u00e9formations).

Plus g\u00e9n\u00e9ralement les correcteurs $\sigma_i, i \leq n-1$ et $u_i, i \leq n$ \u00e9tant connus σ_n et u_{n+1} sont solutions de :

$$\left. \begin{aligned} A(y)\sigma_n &= e_x(u_n) + e_y(u_{n+1}) \\ \operatorname{div}_y \sigma_n &= -\operatorname{div} \sigma_{n-1} \\ \sigma_n, u_{n+1} &\text{ p\u00e9riodiques} \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Le probl\u00e8me (88) est bien pos\u00e9 lorsqu'on lui ajoute une condition de moyenne obtenue par r\u00e9currence.

3.3. Visco\u00e9lasticit\u00e9

Nous allons pr\u00e9ciser la loi de comportement obtenue au paragraphe 2.3.

Pour le solide h\u00e9t\u00e9rog\u00e8ne les \u00e9quations constitutives sont (cf (3)) :

$$\left. \begin{aligned} A^\varepsilon \frac{d\sigma^\varepsilon}{dt} + B^\varepsilon \sigma^\varepsilon &= e(v^\varepsilon) \quad (\text{on pose } v^\varepsilon = \frac{du^\varepsilon}{dt}) \\ \operatorname{div}_x \sigma^\varepsilon + f &= 0 \\ v^\varepsilon &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \sigma^\varepsilon(o) = \bar{\sigma} \text{ donn\u00e9e initiale} \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

On cherche des d\u00e9veloppements de v^ε et σ^ε sous la forme :

$$\begin{aligned} v^\varepsilon(x,t) &= v_0(x,y,t) + \dots + \varepsilon^i v_i(x,y,t) + \dots & y = \frac{x}{\varepsilon} \\ \sigma^\varepsilon(x,t) &= \sigma_0(x,y,t) + \dots + \varepsilon^i \sigma_i(x,y,t) + \dots \end{aligned}$$

v_i et σ_i sont Y p\u00e9riodiques par rapport \u00e0 l'argument y. En introduisant ces d\u00e9veloppements dans (89) on obtient :

ordre ε^{-1}

$$e_y(v_0) = 0 \quad (90)$$

$$\operatorname{div}_y \sigma_0 = 0 \quad (91)$$

(90) et la condition de p\u00e9riodicit\u00e9 montre que v_0 ne d\u00e9pend que de x :

$$v_0(x,y,t) = v^0(x,t)$$

ordre ε^0

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}_x \sigma_0 + \operatorname{div}_y \sigma_1 + f &= 0 \text{ dans } \Omega \times Y \\ A(y) \frac{d\sigma_0}{dt} + B(y) \sigma_0 &= e_x(v^0) + e_y(v_1) \\ \sigma(o) = \bar{\sigma}, v^0 &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

En passant aux moyennes dans (92) on voit que $\sigma^0(x) = \langle \sigma_0(x,y) \rangle$ satisfait les \u00e9quations d'\u00e9quilibre :

$$\operatorname{div}_x \sigma^0 + f = 0 \text{ dans } \Omega$$

Nous multiplions l'\u00e9quation (93) par le tenseur du second ordre C_{rs} d\u00e9fini au paragraphe 2.2. Il vient :

$$\begin{aligned} A_{ijkh} \frac{d\sigma_{o,kh}}{dt} C_{rs,ij} + C_{rs,ij} B_{ijkh} \sigma_{o,kh} &= C_{rs,ij} e_{ijy}(v_1) + \\ & C_{rs,ij} e_{ijx}(v_0) \end{aligned} \quad (94)$$

on remarque que :

$$A_{ijkh} C_{rs,ij} = e_{kh}(v_{rs})$$

donc

$$\begin{aligned} \langle A_{ijkh} C_{rs,ij} \frac{d\sigma_{o,kh}}{dt} \rangle &= \langle e_{kh}(v_{rs}) \frac{d\sigma_{o,kh}}{dt} \rangle \\ = \langle e_{kh}(v_{rs}) \rangle &< \frac{d\sigma_{o,kh}}{dt} \rangle = \mathcal{A}_{rskh} \frac{d\sigma_{kh}^0}{dt} \end{aligned}$$

De m\u00eame

$$\langle C_{rs,ij} e_{ijy}(v_1) \rangle = \langle C_{rs,ij} \rangle \langle e_{ijy}(v_1) \rangle = 0$$

$$\langle C_{rs,ij} e_{ijx}(v_0) \rangle = \langle C_{rs,ij} \rangle \langle e_{ijx}(v_0) \rangle = e_{rsx}(v^0)$$

En prenant les moyennes dans (94) on obtient donc :

$$\mathcal{A}_{rskh} \frac{d\sigma_{kh}^0}{dt} + \langle B_{ijkh} C_{rs,ij} \sigma_{o,kh} \rangle = e_{rsx}(v^0)$$

Pour exprimer le terme central en fonction des grandeurs macroscopiques le problème réside dans le calcul de σ_0 en fonction de sa moyenne σ^0 . Ce problème, simple en élasticité, est plus complexe ici.

on pose :

$$\sigma(x,y,t) = \sigma_0(x,y,t) - \sigma^0(x,t)$$

alors

$$\operatorname{div}_y \sigma = 0, \quad \sigma \in S_{\text{per}}^0(Y), \langle \sigma \rangle = 0 \quad \text{i.e.} \quad \sigma \in \mathcal{M}(0)$$

De plus il est facile de vérifier que pour tout τ de $S_{\text{per}}^0(Y) \cap \mathcal{M}(0)$ on a :

$$\begin{aligned} \langle A_{ijkh} \frac{d\sigma_{kh}}{dt} \tau_{ij} \rangle + \langle B_{ijkh} \sigma_{kh} \tau_{ij} \rangle &= - \langle A_{ijkh} \tau_{ij} \rangle \frac{d\sigma_{kh}^0}{dt} \\ &\quad - \langle B_{ijkh} \tau_{ij} \rangle \sigma_{kh}^0 \end{aligned}$$

On définit sur $S_{\text{per}}^0(Y) \cap \mathcal{M}(0)$ un produit scalaire par :

$$((\sigma, \tau)) = \langle A_{ijkh} \sigma_{kh} \tau_{ij} \rangle \quad (95)$$

On définit alors un opérateur linéaire et continu D de $S_{\text{per}}^0(Y) \cap \mathcal{M}(0)$ dans lui même par :

$$((D\sigma, \tau)) = \langle B_{ijkh} \sigma_{kh} \tau_{ij} \rangle$$

Deux nouveaux tenseurs g_{kh}^0 et g_{kh}^1 éléments de $S_{\text{per}}^0(Y) \cap \mathcal{M}(0)$ sont définis par :

$$((g_{kh}^0, \tau)) = \langle A_{ijkh} \tau_{ij} \rangle$$

$$((g_{kh}^1, \tau)) = \langle B_{ijkh} \tau_{ij} \rangle$$

(ne pas croire que $g_{kh}^0 = T_{kh}$ car $T_{kh} \notin \mathcal{M}(0)$)

Lorsqu'on muni $S_{\text{per}}^0(Y) \cap \mathcal{M}(0)$ du produit scalaire (95) (ce qui en fait un espace de Hilbert) on voit que σ est solution de

$$\frac{d\sigma}{dt} + D\sigma = - g_{kh}^0 \frac{d\sigma_{kh}^0}{dt} - g_{kh}^1 \sigma_{kh}^0$$

$$\sigma(0) = 0$$

Posons $\tau = \sigma + g_{kh}^0 \sigma_{kh}^0$ et $g_{kh}^2 = Dg_{kh}^0 - g_{kh}^1$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} + D\tau &= g_{kh}^2 \sigma_{kh}^0, \quad \tau \in S_{\text{per}}^0(Y) \cap \mathcal{M}(0) \\ \tau(0) &= g_{kh}^0 \bar{\sigma}_{kh} \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

L'équation (96) est une équation d'évolution linéaire classique qui peut être résolue par la technique standard des semi-groupes linéaires :

$$\tau(t) = e^{-Dt} g_{kh}^0 \bar{\sigma}_{kh} + \int_0^t e^{-(t-s)D} g_{kh}^2 \sigma_{kh}^0 ds$$

Revenant à la définition de τ et σ on obtient

$$\begin{aligned} \sigma_0(x,y,t) &= \sigma^0(x,t) - g_{kh}^0(y) \sigma_{kh}^0(x,t) + e^{-Dt} g_{kh}^0(y) \bar{\sigma}_{kh}(x) + \\ &\quad \int_0^t e^{-(t-s)D} g_{kh}^2(y) \sigma_{kh}^0(x,s) ds \end{aligned}$$

et donc :

$$\langle B_{ijpq} C_{rs,ij} \sigma_{0,pq} \rangle = \langle B_{ijpq} C_{rs,ij} (e^{-Dt} g_{kh}^0)_{,pq} \rangle \bar{\sigma}_{kh}$$

$$+ \langle B_{ijkh} C_{rs,ij} - B_{ijpq} C_{rs,ij} g_{kh,pq}^0 \rangle \sigma_{kh}^0$$

$$+ \int_0^t B_{ijpq} C_{rs,ij} e^{-(t-s)D} g_{kh,pq}^2 \sigma_{kh}^0(s) ds$$

Posons :

$$\mathcal{A}^i_{rskh} = \langle B_{ijpq} C_{rs,ij} (e^{-Dt} g_{kh}^0)_{,pq} \rangle$$

$$\mathcal{A}^c_{rskh} = \langle B_{ijkh} C_{rs,ij} - B_{ijpq} C_{rs,ij} g_{kh,pq}^0 \rangle$$

$$\mathcal{A}^1_{rskh}(\xi) = \langle B_{ijpq} C_{rs,ij} - e^{-\xi D} g_{kh,pq}^2 \rangle$$

La loi de comportement s'écrit alors

$$\mathcal{A}^i_{rskh} \frac{d\sigma_{kh}^0}{dt} + \mathcal{A}^i_{rskh} \bar{\sigma}_{kh} + \mathcal{A}^c_{rskh} \sigma_{kh}^0 + \int_0^t \mathcal{A}^1_{rskh}(t-s) \sigma_{kh}^0(s) ds = e_{kh}(v)$$

Sous forme abrégée

$$\mathcal{A} \frac{d\sigma^0}{dt} + \mathcal{A}^i \bar{\sigma} + \mathcal{A}^c \sigma^0 + \int_0^t \mathcal{A}^1(t-s) \sigma^0(s) ds = e_x(v^0)$$

$$\sigma^0(0) = \bar{\sigma}$$

Commentaires sur la loi de comportement homogénéisée

Le terme élastique de la loi obtenue est comme on pouvait s'y attendre l'opérateur homogénéisé de l'opérateur $A(y)$. Il n'en va pas de même pour le terme dissipatif : on voit qu'il se compose d'un terme de mémoire courte Λ^c analogue à B, d'un terme de mémoire longue Λ^l et d'un terme assez difficile à interpréter Λ^i qui intervient lorsque la donnée initiale est σ . Il semble que ce terme provienne du problème avec donnée initiale : on envisage l'histoire du matériau sur $[0, t]$, alors que pour prendre en compte totalement l'histoire du matériau il faudrait faire une étude sur $(-\infty, t]$ (ce qui est un problème de groupes, et non plus de semi-groupe). Cette étude n'a pas été faite à la connaissance de l'auteur. Si l'on revient au cas où l'on néglige la précontrainte ($\bar{\sigma} = 0$) on voit donc que le terme dissipatif de la loi de comportement homogénéisée est plus riche que le terme initial : mémoire courte et mémoire longue.

3.4. Phénomènes d'échelles

Pour conclure ce paragraphe consacré au développement par échelles multiples (donc au moins deux) livrons nous à une petite réflexion sur les échelles respectives des phénomènes étudiés.

Le matériau à structure périodique que l'on considère possède au moins deux longueurs caractéristiques liées à sa géométrie : une longueur de référence (dite macroscopique liée à la taille du corps étudié et une longueur de référence (dite microscopique) liée à la taille de la cellule élémentaire. Il arrive parfois que les longueurs de référence géométriques soient plus nombreuses : pour les plaques il faut ajouter une longueur de référence liée à l'épaisseur de la plaque. En plus de ces longueurs de référence géométriques il existe une (ou plusieurs) longueurs de référence liée à la longueur d'onde du chargement : pour des chargements statiques ou dynamiques à basse fréquence (grandes longueurs d'ondes) cette longueur peut être confondue avec la longueur de référence macroscopique. Par contre les chargements dynamiques à hautes fréquences (petites longueurs d'ondes) cette longueur doit être considérée a priori comme indépendante des autres.

Il arrive ainsi que sur un problème donné plusieurs petits paramètres se dégagent et se mélangent (source de difficultés). Si l'on s'en tient à sa définition stricte, l'homogénéisation consiste à fixer les longueurs caractéristiques différentes de ϵ et à faire tendre ϵ vers 0. On peut cependant étudier des phénomènes asymptotiques en un sens plus large et lier différentes longueurs caractéristiques avec ϵ avant de faire tendre ϵ vers 0. Dans certains problèmes ce lien est même nécessaire (exemple : hautes fréquences dans les composites) et les résultats

obtenus en dépendent fortement. En voici un exemple étudié par D.CAILLERIE {3}. On considère un corps élastique tridimensionnel d'épaisseur δ , de structure ϵY : le tableau ci-dessous détaille les résultats obtenus selon les tailles respectives de ϵ et de δ

$\delta \rightarrow 0$	$\left[\begin{array}{l} \text{Plaque périodique} \\ \text{hétérogène} \end{array} \right]$	puis	$\epsilon \rightarrow 0$	Plaque homogène de loi (P1)
$\epsilon \rightarrow 0$	$\left[\begin{array}{l} \text{Corps tridimensionnel} \\ \text{homogène} \end{array} \right]$	puis	$\delta \rightarrow 0$	Plaque homogène de loi (P2)
$\epsilon = \lambda \delta^\alpha$	δ et ϵ tendent vers 0			<u>ensemble</u>
				• $\alpha < 1$ Plaque homogène de loi (P1)
				• $\alpha = 1$ Plaque homogène de loi (P λ)
				• $\alpha > 2$ Plaque homogène de loi (P2)

Les lois (P1)(P2) et (P λ) sont toutes différentes !

Si de plus on prend en considération la longueur d'onde λ du chargement on obtient une grande variété de modèles (ayant des significations physiques différentes) selon l'importance respective de λ , δ et ϵ .

Ce phénomène d'échelles, souvent négligé, est très important et montre l'imbrication, des différentes hypothèses faites sur la géométrie du corps et sur la nature du chargement.

4. CONCLUSIONS

Voici donc rapidement présentées, deux méthodes d'homogénéisation qui peuvent devenir des outils commodes de construction de loi de comportement. Rappelons en les caractéristiques essentielles.

• La méthode des moyennes est intuitive et locale. Elle est basée sur des raisonnements mécaniques en ce qui concerne les grandeurs efficaces (macroscopiques). Elle conduit à des problèmes sur la cellule de base Y d'où l'échelle macroscopique est le plus souvent exclue. (En ce sens elle est locale).

• La méthode des développements asymptotiques est systématique : on porte dans les équations un développement des solutions et on identifie les termes du développement. Elle peut donc être employée lorsque l'intuition (et donc la méthode des moyennes) est en panne.

Signalons qu'il existe d'autres méthodes d'homogénéisation, exposées en détail dans les références données ci-dessous.

On peut avancer sans prendre trop de risques que l'homogénéisation au sens large (non restreinte aux méthodes présentées ici) sera dans l'avenir un outil essentiel de la Mécanique des Milieux Continus, autant pour ce qui est de la compréhension de modèles déjà construits (*) que dans l'élaboration de modèles nouveaux.

5. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Les références qui suivent concernent des travaux sur l'homogénéisation au sens où elle a été décrite ici. Il est clair que d'autres auteurs que ceux que nous allons citer ont proposé des méthodes "d'homogénéisation" au sens large (certains ont été cités au cours du texte). Sans mésestimer l'importance de ces travaux, l'auteur n'en a pas une connaissance suffisante pour pouvoir en faire une analyse bibliographique et renvoie pour des références précises aux autres conférences générales de ce congrès (E. KRÖNER, A. ZAOUÏ).

Les deux livres maîtres sur l'homogénéisation sont les ouvrages de E. SANCHEZ-PALENCIA {22} et BENSOUSSAN, LIONS, PAPANICOLAOU {1}, dans lesquels des références mathématiques complètes peuvent être trouvées. Pour ce qui est des deux méthodes présentées ici voici quelques éléments de bibliographie.

a) Méthode des moyennes :

Il serait vain de chercher l'inventeur de cette méthode. Voigt et Reuss en firent usage à leur façon. La première approche décisive, proche de celle que nous avons exposée, semble être due à HILL {13}. Sa théorie fut développée par RICE, MANDEL, KRÖNER, ... et de nombreux autres. Mais à notre connaissance, SANCHEZ fut le premier à utiliser, pour les milieux périodiques, l'approche correcte en déformation présentée ici. (l'approche contraintes est plus récente {20}{25}{27}). Ses travaux remontent au début des années 70 et furent publiés dans un article qui fit date {23}. La justification complète de la méthode des moyennes pour des problèmes elliptiques linéaires semble être due à DE GIORGI, SPAGNOLO {7} généralisée par TARTAR {29} à des situations non linéaires (le vocabulaire est complètement différent). Ces travaux furent développés par B.L.P. {1}, TARTAR {29}, MURAT {18}, DUVAUT {9} et d'autres. Le cas des milieux troués a été envisagé et résolu (problèmes linéaires) par TARTAR, D. CIORANESCU, F. LENE {14}, LIONS {17}. SANCHEZ {24} et B.L.P. {1} remarquèrent que l'homogénéisation de matériaux viscoélastiques à mémoire courte donnait lieu à des phénomènes de mémoires longues. Ils proposèrent également une théorie avec variables internes {16}{17}{22} mais la signification thermody-

(*) voir la construction de la loi de Darcy par homogénéisation de l'écoulement d'un fluide visqueux en milieu poreux (équations de Navier et Stokes dans {22}).

namique de ces variables n'apparaît pas clairement, leur but étant seulement de décrire la loi de comportement homogénéisée sans opérateur intégral différentiel en temps. L'homogénéisation de matériaux viscoplastiques ou parfaitement plastiques semble être due à l'auteur {26} (voir aussi {15}). Certains travaux mathématiques traitent de l'homogénéisation de problèmes liés à la torsion d'arbres cylindriques élastoplastiques en loi de Hencky {4}. L'absence du formalisme standard généralisé rend ces travaux assez complexes.

b) Développements asymptotiques

Les échelles multiples sont d'un usage courant en Mécanique (fluides notamment). Leur utilisation dans le cadre de l'homogénéisation a, d'après {1}, été suggérée par KELLER. Ils furent utilisés et justifiés dans ce cadre essentiellement par SANCHEZ et LIONS. Le développement sur la viscoélasticité (§ 3.3.) suit d'assez près des raisonnements analogues de SANCHEZ {22} pour la loi de Kelvin.

Le domaine d'application des développements asymptotiques ne se limite pas à l'homogénéisation. Les travaux sur les plaques et coques de GOLDENVEIZER, CIARLET {5}, DESTUYNDER {8}, donnent d'autres applications (très voisines de l'homogénéisation) de cette méthode.

Une autre méthode, se basant sur la convergence des énergies (et non plus des opérateurs) est connue sous le nom de Γ convergence. On trouvera dans l'article de DE GIORGI {6} une bibliographie détaillée des travaux sur cette question. Signalons une approche constructive de l'énergie (de déformation) du corps homogénéisé par B.L.P. {1} s'inspirant eux-mêmes de WITHAM {30}. On retrouve des idées du même type chez BERDICHEVSKI {2} aussi bien pour l'homogénéisation que pour les plaques et coques.

- {1} BENSOUSSAN A., LIONS J.L., PAPANICOLAU G. "Asymptotic Analysis for Periodic structures" - North Holland, Amsterdam 1978.
- {2} BERDICHEVSKI V.L. "Periodical structures" - Doklady Akad. Nank. 222, (1975) p 565-567 et "Method of constructing a theory of shells" - J. Appl. and Mech. 43 (1979) p 711-736.
- {3} CAILLERIE D. "Equations aux dérivées partielles à coefficients périodiques dans des domaines cylindriques aplatis" - C.R. Acad. Sci. Paris (A) 290 p 143-146.
- {4} CARBONE C. "Sur la convergence des intégrales du type de l'énergie sur des fonctions à gradient borné" - J. Math. Pures et Appl. 56 (1977) p 79-84.
- {5} CIARLET P.G., RABIER P. "Les équations de Von Karman" - Lecture Notes in Mathematics N° 826 Berlin (1980).
- {6} DE GIORGI E. "Convergence problems for functionals and operators" - in Recent Methods in Nonlinear Analysis, Ed. De Giorgi, Magenes, Mosco, Ed. Pitagora Bologna (1979) p 131-188.
- {7} DE GIORGI E., SPAGNOLO S. "Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine" - Boll. U.M.I. 8 (1973) p 391-411.
- {8} DESTUYNDER P. "Analyse du comportement de la solution tridimensionnelle des plaques ..." - C.R.A.S. 290 (A) (1980) p 119-122.
- {9} DUVAUT G. "Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus..." - Theoretical and Appl. Mech., Ed. W. KOITER, North. Holland, Amsterdam (1976) p 119-132.
- {10} DUVAUT G., LIONS J.L. "Les inéquations en mécanique et en physique" - Dunod, Paris (1972).
- {11} HALPHEN B., NGUYEN QUOC SON "Sur les matériaux standard généralisés" - J. Mécanique 14 (1975) p 39-63.
- {12} HASHIN Z., SHTRIKMAN S. "A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials" - J. Mech. Phys. Solids 11 (1963) p 127-140.
- {13} HILL R. "The essential structure of constructive laws for metal composites and polycrystals" - J. of Mech. Physics of Solids 15 (1967) p 79.
- {14} LENE F. "Comportement macroscopique de matériaux élastiques comportant des inclusions rigides ou des trous répartis périodiquement" - C.R. Acad. Sc. Paris (A) 286 (1978) p 75-78.
- {15} LE NIZHERY D. "Comportement plastique des matériaux composites multicouches" - Thèse Paris (1976).
- {16} LIONS J.L. "Homogénéisation non locale" - in Recent Methods in Nonlinear Analysis - Ed. de Giorgi, Magenes, Mosco, Ed. Pitagora, Bologna (1979) p 189-203.
- {17} LIONS J.L. "Remarks on some asymptotic problems in composites and perforated materials" - in Variational Methods in the Mechanics of Solids - Ed. S. Nemat Nasser, Pergamon Press (1980) p 3-19.
- {18} MURAT F. "Compacité par compensation" - Partie I, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 5 (1978) p 499-507, Partie II, Recent Methods in Nonlinear Analysis, Ed. Giorgi, Magenes, Mosco, Ed. Pitagora Bologna (1979) p 245-256.
- {19} NGUYEN QUOC SON "Evolution quasi-statique des milieux plastiques et viscoplastiques" - Summer School Boundary value problems for dissipative media, Jablonna, Pologne (1978).
- {20} OHAYON R. "Homogénéisation par développements asymptotiques mixtes ..." - C.R. Acad. Sc. Paris (A) 288 (1979) p 173-176.
- {21} SALENCON J. "Théorie de la plasticité" - Eyrolles Paris (1973).
- {22} SANCHEZ-PALENCIA E. "Non homogeneous media and vibration theory" - Lecture Notes in Physics N° 127 Springer-Verlag Berlin (1980).
- {23} SANCHEZ-PALENCIA E. "Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques et hétérogènes" - Int. J. Eng. Sc. 12 (1974) p 331-351.
- {24} SANCHEZ-PALENCIA E., SANCHEZ-HUBERT J. "Sur certains problèmes physiques d'homogénéisation donnant lieu à des phénomènes de relaxation" - C.R. Acad. Sc. Paris (A) 286 (1978) p 903-906.
- {25} SUQUET P.M. "Une méthode duale en homogénéisation : application aux milieux élastiques périodiques" - C.R. Acad. Sc. Paris (A) (1980).
- {26} SUQUET P.M. "Homogénéisation de la loi de comportement d'une classe de matériaux dissipatifs" - C.R. Acad. Sc. Paris (A) (1980).
- {27} SUQUET P.M. "Une méthode duale en homogénéisation application aux milieux élastiques" - A paraître.
- {28} SUQUET P.M. "Sur les équations de la plasticité : existence et régularité des solutions" - J. Mécanique 20 (1981) p 1-37.
- {29} TARTAR L. Cours Peccot - Collège de France (1977).
- {30} WITHAM "Linear and nonlinear waves" - Pergamon Press.

Références ajoutées après la rédaction de cette conférence concernant l'établissement d'un potentiel viscoplastique macroscopique.

- {31} MANDEL J. "Plasticité classique et viscoplasticité" - cours au C.I.S.M. Udine (1971) Ed. Springer.
- {32} RICE J.R. "On the structure of stress-strain relations for time-dependent plastic deformations in metals" - Trans.A.S.M.E. Journal of Appl. Mech. 37 (1970) p 728-737.

L'ETAT FLOCCULENT DES PATES DE CIMENT AVANT PRISE ET SES CONSEQUENCES SUR LE COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE THE FLOCCULENT STATE OF CEMENT PASTES BEFORE SETTING AND ITS CONSEQUENCES ON RHEOLOGICAL BEHAVIOUR

C. LEGRAND

Laboratoire de Génie Civil de l'Institut National des Sciences Appliquées
et de l'Université de Toulouse - Toulouse - France

RESUME

La possibilité d'existence de sites non saturés électriquement sur les grains de ciment, notamment sur les parties anguleuses, permet d'imaginer un modèle de structure où les attractions coulombiennes directes locales sont prépondérantes.

Un tel modèle, compatible avec les teneurs en eau des pâtes de ciment habituelles, permet de donner des explications cohérentes de leur comportement viscoplastique et thixotrope partiel, de l'influence de la vibration et de l'évolution des caractéristiques rhéologiques en fonction de la concentration en ciment et de la surface spécifique de ce dernier.

ABSTRACT

The possibility of existence of electrically non-saturated sites on cement grains, especially on angular parts, allows one to imagine a model of structure in which direct local coulombian attractions predominate.

Such a model, compatible with the water content of usual cement pastes, satisfactorily explains the partial thixotropic viscoplastic behaviour, vibration influence, and the evolution of rheological characteristics in terms of the cement content and its specific surface.

1. INTRODUCTION

L'observation microscopique de la structure des pâtes de ciment avant prise n'a pas encore été réalisée de façon satisfaisante, essentiellement parce que le milieu pâteux se prête mal à ce type d'expérience ; tout au plus peut-on observer une goutte de mélange écrasée entre lame et lamelle, mais il est évident que la structure ainsi réalisée a peu de chose à voir avec celle qui existe réellement au sein de la pâte. Si on attend que cette dernière ait durci, les cristallisations qui commencent très tôt bouleversent la structure initiale et rendent donc toute conclusion, concernant l'état frais, extrêmement critiquable. On pourrait éventuellement penser à figer la structure en remplaçant l'eau de gâchage par une résine

par exemple ; mais l'eau a des propriétés trop particulières et joue un tel rôle dans l'arrangement des grains de ciment qu'une telle substitution ne pourrait donner lieu qu'à des interprétations hasardeuses.

Il ne nous reste donc, à l'aide de nos connaissances en physico-chimie et en mécanique, qu'à formuler des hypothèses et bâtir des modèles. Cette dernière opération se heurte toutefois à des difficultés provenant essentiellement :

- de l'extrême variété des grains de ciment dans leur taille (de quelques microns à une centaine de microns) et dans leur composition minéralogique (silicates, aluminates, gypse, ajouts divers) ;
- de leur forme comportant des faces planes, des arêtes, etc..., se prêtant mal à une modélisation,
- de leur état de surface qui est assez profondément altéré par le broyage,
- de l'évolution chimique de l'ensemble où, très rapidement, des ions passent en solution, des cristallisations s'opèrent, etc...

Faute de ne pouvoir prendre en compte suffisamment de ces facteurs, les modèles de structure élaborés jusqu'à ce jour ne peuvent fournir que des explications qualitatives des propriétés rhéologiques des pâtes de ciment fraîches. Celui que nous proposons dans la présente communication n'a pas non plus la prétention de décrire quantitativement les phénomènes observés ; il a pour seul but d'affiner un peu plus nos connaissances et de nous permettre ainsi, en renforçant notre intuition physique des phénomènes, de mieux connaître les mécanismes qui régissent l'écoulement des pâtes fraîches de ciment.

II. MODELE DE STRUCTURE

II .1. La théorie de POWERS

POWERS (1) a établi la liste des différentes forces qui peuvent exister, dans une suspension de ciment, entre les grains et l'eau environnante, puis entre les grains eux-mêmes. Sans pouvoir dresser le bilan énergétique exact (essentiellement entre les effets des forces attractives de type VAN DER WAALS et répulsives électrostatiques), il montre l'existence, autour de chaque grain, d'un puits de potentiel. Il suppose donc, dans un premier temps, que les grains prennent leur position d'équilibre en formant des flocons séparés, assez compacts, compte-tenu des distances très faibles susceptibles d'exister entre la surface des grains et les puits de potentiel.

Ces flocons devraient alors sédimenter en laissant apparaître une importante couche d'eau superficielle ; ceci n'étant pas le cas dans les pâtes de ciment de concentration habituelle, POWERS suppose alors que les différents flocons sont jointifs (état floculent). Toutefois, pour atteindre des porosités voisines de celles qu'on observe expérimentalement, il pense qu'il est encore possible d'individualiser chaque flocon dans la structure et qu'il subsiste donc des interstices importants remplis d'eau.

Il est difficile d'admettre physiquement l'existence d'une telle structure d'autant plus que, comme le dit POWERS lui-même, les pâtes ne sont pas réalisées en plongeant dans de l'eau des flocons déjà préparés, mais par malaxage direct du ciment et de l'eau. On voit mal alors dans ces conditions comment pourraient se créer et rester individualisés de tels flocons.

II .2. L'effet de porosité

BOMBLED (2) a été parmi les premiers à faire remarquer que, compte-tenu de la force irrégulière des grains de ciment il était clair que, pour de simples raisons géométriques, les arêtes et les pointes n'étaient pas chargées électriquement de la même façon que les faces planes. De plus, l'empilage des ions compensateurs de l'eau de gâchage γ est plus instable. On doit donc assister à un phénomène analogue à l'effet de pointe en électrostatique, caractérisé surtout par une neutralisation incomplète.

Ainsi, bien que plongé dans un liquide ionisé, le grain de ciment pourra présenter, sur ses zones anguleuses notamment, des charges électriques mal ou non saturées.

On peut donc imaginer des associations coulombiennes intergranulaires du type pointe-pointe ou pointe-face, de telles configurations, permettant l'existence de structures beaucoup plus lâches que celle évoquée par POWERS, présentent des porosités voisines de celles des pâtes usuelles.

II .3. Le modèle proposé

Le modèle de structure que nous proposons prend en compte, comme phénomène prépondérant, l'effet local au niveau des angulosités des grains (Fig. 1)

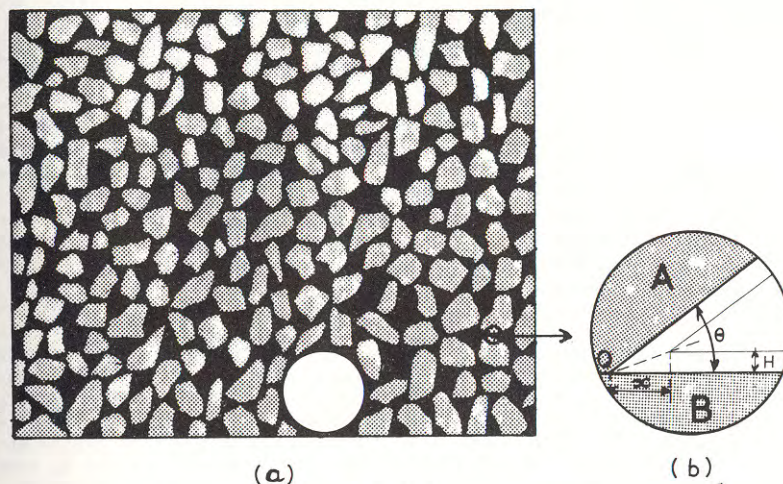


Figure 1

Représentation schématique de la structure de la pâte de ciment

Afin de faciliter la compréhension du schéma, les différents grains ont été représentés à la même dimension. Une bulle d'air témoigne de la présence, toujours inévitable, de gaz occlus au moment du malaxage.

L'arête O du grain A (Fig. 1 b) est attirée fortement par les charges du signe opposé du grain B, les forces attractives de VAN DES WAALS venant renforcer les forces coulombiennes. On a ainsi affaire à une association d'intensité relativement importante s'exerçant sur une surface très faible : il est alors logique de penser que la zone de contact se comporte un peu à la manière d'une articulation.

Au voisinage de la zone de contact, tant que la distance entre faces reste faible, on rencontre les effets dus à la présence de la couche diffuse de GOUY-CHAPMANN et de pression de disjonction de DERJAGUIN (3) qui en résulte. Les forces répulsives auraient ainsi tendance à ouvrir l'angle de contact si la structure environnante ne les empêchait ; elles semblent contribuer ainsi à la stabilité de l'édifice granulaire qui, sans elles, s'écroulerait sous l'effet de la pesanteur.

On peut grossièrement estimer l'ordre de grandeur de la distance x à partir de laquelle la pression de disjonction est négligeable ; en appelant θ l'angle d'ouverture et H l'épaisseur de la couche diffuse, on a :

$$x = \frac{H}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}$$

Par exemple, pour $\theta = 15^\circ$ et $H = 250 \text{ \AA}$, on a $x = 0,2 \mu\text{m}$.

Compte-tenu de la dimension moyenne des grains de ciment, on voit que l'équilibre de la structure, pour la plupart des grains, est assuré très localement, au voisinage des associations de type coulombien. Le reste des vides intergranulaires est essentiellement rempli par de l'eau libre.

III. VISCOPLASTICITE ET DESTRUCTION DE STRUCTURE

Le fait que les pâtes de ciment présentent un seuil de cisaillement est évident ; pour qu'il y ait écoulement, il faut en effet que les forces de cisaillement soient suffisamment élevées pour rompre les liaisons intergranulaires.

Une fois franchi le seuil de cisaillement, on constate que l'effort nécessaire pour faire s'écouler la pâte à vitesse constante diminue au cours du temps. A titre d'exemple, la courbe de la figure 2, obtenue à l'aide d'un viscosimètre à rotation montre clairement le phénomène. Par abus de langage, les auteurs parlent fréquemment de la "thixotropie" des pâtes de ciment, ce terme présageant une réversibilité totale qui, en fait, n'existe pas dans ce type de matériau. Le terme de thixotropie partielle paraît mieux adapté dans ce cas. Par ailleurs, la thixotropie concerne l'évolution des caractéristiques rhéologiques dans le temps, mais non dans l'espace. Or, nous pensons, pour notre part, que l'aspect spatial du phénomène est le plus important dans les pâtes de ciment. Imaginons en effet, à l'aide du schéma de la figure 1, que le cisaillement de la pâte s'opère initialement, à vitesse constante, suivant un seul plan macroscopique P. C'est au voisinage immédiat de ce plan qu'il y aura rupture des liaisons et dépassement du seuil de cisaillement. Dans cette couche détruite, les mouvements des grains vont, par répulsion, frottements et chocs sur les couches adjacentes perturber petit à petit ces dernières en induisant des cisaillements qui pourront, de nouveau, produire des ruptures de liaisons et ainsi de suite. On assistera donc, au cours du temps, à une défloculation progressive de la structure s'étendant de plus en plus loin du plan P. Il en résulte donc une diminution de la contrainte de cisaillement, une facilité croissante de maintenir l'écoulement par extension progressive de la destruction de la structure au cours du temps. Ce phénomène peut être en partie réversible si, après un temps de repos, la structure arrive à se reconstituer partiellement et si la prise du ciment lui en laisse le temps.

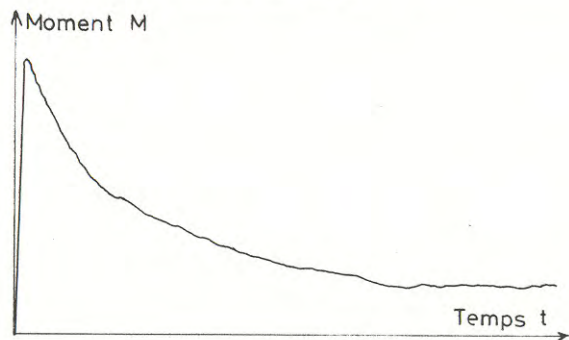


Figure 2

Enregistrement type effectué au viscosimètre à rotation sur une pâte de ciment non vibrée

L'existence de ce phénomène de propagation de la destruction de la structure complique considérablement la caractérisation rhéologique des pâtes de ciment. En effet, dans un viscosimètre à rotation par exemple, l'écoulement n'est stable ni

dans l'espace ni dans le temps, tant que toutes les liaisons intergranulaires susceptibles d'être détruites ne l'ont pas été. Outre l'incidence du couplage inévitable qui en résulte entre le milieu d'essai et l'appareil de mesure (4), la détermination de la vitesse de déformation $\dot{\gamma}$ dans un milieu où changeant, à chaque instant, les conditions aux limites, s'avère particulièrement délicate. Pour notre part, nous avons déjà montré que, dans ces conditions, les seules caractéristiques aisément mesurables avec un viscosimètre classique (4) sont, d'une part, le seuil de cisaillement initial τ_0 , c'est-à-dire celui de la pâte encore vierge de tout cisaillement et, d'autre part, le rhéogramme \mathcal{R} tracé lorsque la stabilité de l'écoulement, pour chaque valeur de la vitesse de rotation Ω du mobile, est atteinte. La figure 3 donne un exemple de ces deux caractéristiques obtenues sur une pâte de ciment usuelle.

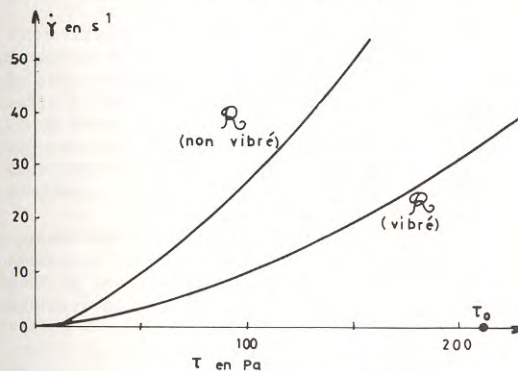


Figure 3

Seuil de cisaillement τ_0
et rhéogramme, après stabilisation, d'une pâte de ciment non vibrée. Rhéogramme de la même pâte, soumise à des vibrations.

On constate immédiatement que, si la pâte de ciment présente bien un seuil d'écoulement, qui justifie sa qualification de viscoplastique, l'écoulement lui-même, après stabilisation, tend à devenir exclusivement visqueux. Il en résulte que la pâte de ciment n'a pas et ne peut pas avoir de comportement binghamien : il faut rompre une certaine structure pour que le matériau s'écoule mais, une fois cette structure rompue, la raison même de la présence du seuil a, en totalité ou en partie, disparu.

Toutefois, la non existence d'un seuil de cisaillement dans un rhéogramme de type \mathcal{R} reste difficile à prouver expérimentalement. En effet, pour des vitesses très faibles, les temps de stabilisation sont très longs et des phénomènes parasites (sédimentation, prise du ciment) viennent perturber la mesure. La partie basse des rhéogrammes résulte donc toujours d'une extrapolation souvent hasardeuse et de nombreux chercheurs, dont nous-mêmes (5) ont attribué, peut-être à tort, un comportement légèrement viscoplastique aux pâtes de ciment, même après destruction prolongée de la structure.

Le fait que le comportement soit fluidifiant n'a pas encore reçu, à notre connaissance, d'explication entièrement satisfaisante. Nous pensons que trois phénomènes sont essentiels dans ce type de comportement.

Tout d'abord, la suppression des liaisons intergranulaires ne libère pas pour autant complètement les grains les uns des autres : pendant les frottements et les chocs dus aux rotations et translations désordonnées de ces éléments, les couches diffuses doivent très certainement s'interpénétrer créant ainsi, localement et pendant des temps très courts, des forces répulsives immédiatement contre-carrées par la présence d'autres particules.

Ensuite, il n'est pas interdit de penser que des liaisons peuvent subsister et que des paquets de grains puissent ainsi être entraînés par le cisaillement, le nombre, le volume et la forme de ces paquets pouvant bien entendu changer suivant la vitesse imposée à la pâte.

Enfin, le mouvement relatif de chaque grain par rapport au liquide environnant ne peut se faire que par arrachement d'une partie de la couche d'eau liée. On montre que les contraintes nécessaires à cet arrachement sont fonction du potentiel électrique dans le plan d'arrachement (potentiel ζ) (1). Les études réalisées dans ce domaine (6) sont encore insuffisantes pour montrer une éventuelle corrélation entre le potentiel ζ et le comportement fluidifiant des pâtes de ciment.

IV. VIBRATION ET COMPORTEMENT FLUIDIFIANT

L'effet de la vibration sur les bétons est bien connu : la suppression du seuil de cisaillement dans la pâte de ciment interstitielle facilite considérablement les opérations de moulage.

Le squelette granulaire de la pâte, tel qu'il est schématisé sur la figure 1, avec ses forces de liaison, constitue une structure qui possède une certaine élasticité. Une vibration est donc capable de s'y propager et de mettre en mouvement les différents grains. Lors de ces mouvements, qui vont s'effectuer vraisemblablement de façon désordonnée, vont se produire des ruptures de liaison au niveau des articulations et une mise en dispersion momentanée des grains. Compte-tenu des fréquences élevées des vibrations usuelles utilisées dans la mise en oeuvre des bétons, tout se passe comme si l'ensemble de la structure vibrée était défloculée.

Il en résulte, non seulement, la suppression du seuil de cisaillement, mais également celle de la thixotropie (Fig. 4). Il n'y a en effet plus de raison pour que le cisaillement provoqué par un viscosimètre détruise localement la structure et pour que cette destruction se propage dans le milieu, puisque la structure est déjà détruite par la vibration.

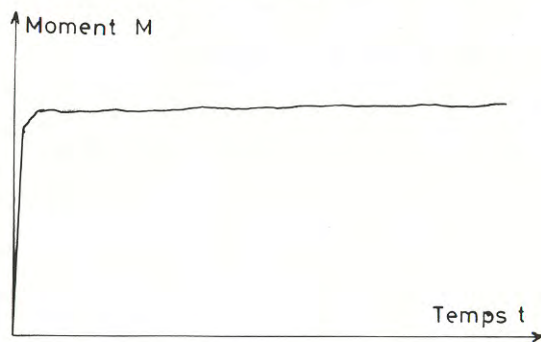


Figure 4

Enregistrement type
effectué au viscosimètre
à rotation sur une pâte
de ciment vibrée

Dans la mesure où l'écoulement est rapidement stable, la caractérisation rhéologique des pâtes de ciment vibrées est simple. La figure 3 montre un type de rhéogramme obtenu dans ce cas. On retrouve un comportement fluidifiant, sans que toutefois, il y ait coïncidence avec le premier rhéogramme. Le mode de destruction de la structure semble donc avoir une influence sur les propriétés rhéologiques du matériau.

V. INFLUENCE DE LA CONCENTRATION EN CIMENT ET DE SA FINESSE

Le seuil de cisaillement et la viscosité (*) des pâtes de ciment augmentent rapidement avec la concentration en solide (5), l'influence du dosage en eau d'un béton sur sa cohésion et sa maniabilité en est une conséquence directe.

L'augmentation de la concentration en ciment revient à loger davantage de grains dans le même volume d'eau et donc à multiplier le nombre de points d'attraction, ce qui se traduit par une croissance du seuil de cisaillement.

Pour des pâtes très concentrées, on pourrait imaginer que, les grains étant suffisamment rapprochés les uns des autres, on arrive à donner la priorité aux forces répulsives et à obtenir ainsi un mélange dispersé, mais très dense. On devrait alors logiquement obtenir des viscosités toujours très élevées, mais pas de seuil de cisaillement.

En réalité, la réalisation d'une telle suspension à la fois diphasique et très concentrée est impossible et de l'air est entraîné bien avant la dispersion, permettant ainsi la formation de ménisques d'eau et la création de forces capillaires rapidement importantes.

Ces dernières prenant le relais des attractions coulombiennes, le seuil de cisaillement ne cesse d'augmenter. Par contre, la viscosité en est profondément perturbée ; pratiquement, le matériau cesse d'être viscoplastique, ayant plus tendance à se déformer et à se rompre comme un solide qu'à s'écrouler comme un fluide.

De façon évidente, l'influence importante de la finesse (5) s'explique également par le nombre de grains, et donc le nombre de liaisons pouvant exister dans un volume donné de pâte. On peut donner une idée de cette influence en supposant, en première approximation, que le nombre de liaisons, à concentration égale, est essentiellement fonction du nombre de grains par unité de volume. A partir d'un modèle constitué de sphères identiques, on montre facilement que le nombre de liaisons serait alors proportionnel au cube de la surface spécifique, ce qui montre l'influence considérable de cette dernière.

VI. CONCLUSION

Les idées développées dans la présente communication n'ont pas la prétention de décrire avec rigueur la structure de la pâte de ciment. En effet, il est impensable d'envisager de tenir compte de tous les paramètres influants qui sont extrêmement nombreux et, pour certains, mal connus. De plus, la vérification du bien-fondé des hypothèses émises, par des observations directes dans un milieu à trois dimensions, de consistance pâteuse et en continuelle évolution physico-chimique, paraît particulièrement délicate à mettre en oeuvre.

On est donc contraint de donner des descriptions schématiques de la structure, reposant sur des hypothèses très simplifiées. Les modèles ainsi élaborés permettent de comprendre, au moins qualitativement, les propriétés rhéologiques essentielles du matériau.

L'image d'une structure floculente, qui s'établit grâce à l'effet conjugué de forces attractives et répulsives d'origines diverses, suffit à expliquer le comportement viscoplastique à thixotropie partielle très importante des pâtes de ciment. Elle permet également de mieux comprendre les rôles que peuvent jouer la vibration ainsi que la concentration en ciment et sa finesse.

Nous nous sommes volontairement limité, dans le cadre de ce travail aux aspects du comportement rhéologique des pâtes de ciment qui nous semblaient les plus importants. Il est bien évident que la liste des différentes propriétés

(*) Le terme viscosité doit être entendu, dans la présente communication, comme la viscosité apparente pour une vitesse de déformation donnée, ceci afin de comparer simplement la position des différents rhéogrammes.

étudiées n'est pas exhaustive et que d'autres pourraient trouver leur explication dans ce modèle de structure. Parmi ceux-ci, on pourrait citer par exemple l'influence de certains adjuvants (plastifiants, fluidifiants notamment) et le ressuage. On pourrait aussi penser à l'influence d'une telle structure sur l'évolution mécanique du matériau au cours de la prise ; il serait également intéressant d'imaginer la perturbation que pourrait apporter, dans un tel assemblage, la présence d'un ou de plusieurs granulats, et de modéliser, par là même, la structure de la pâte au sein du béton.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) POWERS T.C.
The properties of fresh concrete. John Wiley - New-York (1968).
- (2) BOMBLED J.P.
Rhéologie des mortiers et des bétons frais ; influence du facteur ciment. Proceedings of RILEM Leeds Seminar, vol. 1, sujet 3 (mars 1973).
- (3) DERJAGUIN, NERPIN et TCHURAIEV
Effets of film transfer upon evaporation of liquids from capillaries. Bulletin RILEM, n° 29, 1965.
- (4) LEGRAND C.
Détermination des caractéristiques rhéologiques des corps viscoplastiques à thixotropie partielle. Cahiers du GFR. Tome III. n° 2 (avril 1973).
- (5) LEGRAND C. Contribution à l'étude de la Rhéologie du béton frais. Matériaux et Constructions n° 29 et 30 (1972)
- (6) DAIMON et ROY.
Rheological properties of cement mixes : zeta potential and preliminary viscosity studies. Cement and Concrete Research, vol 8, n° 6 (1978) et vol. 9, n°1 (1979).

COMPORTEMENTS RHEOLOGIQUES CARACTERISTIQUES DES BETONS FRAIS

TYPICAL RHEOLOGICAL BEHAVIOURS OF FRESH CONCRETE

J.M. RIGO

Institut du Génie Civil - Liège - Belgique

RESUME

L'auteur a réalisé, au moyen d'un appareil de sa conception, des mesures des caractéristiques physiques qu'il estime fondamentales pour l'étude de la résistance à l'écoulement des mélanges biphasés (bétons) frais (à liant newtonien) : cohésion (c), frottement interne (ϕ), viscosité dynamique (μ). Des mélanges idéalisés de diverses viscosités et proportions de liant ont été testés. Les surfaces des réponses c , ϕ et μ ont permis de décomposer le plan des paramètres précités en zones à comportements caractéristiques des mélanges.

ABSTRACT

The author developed an apparatus to measure the physical characteristics that he thinks fundamental for the study of the flow resistance of fresh biphased mixtures (concrete) with newtonian binder : cohesion (c), internal friction (ϕ) and dynamic viscosity (μ). He tested some idealised mixtures of different viscosities and proportions of the binder. According to the results, the above-mentioned parameters plan can be divided into different areas, characterised by a specific kind of flow resistance.

1. INTRODUCTION

L'apparition des superplastifiants dans le traitement des bétons hydrauliques à l'état frais repose de manière pressante le problème de l'étude de la résistance à l'écoulement de ce type de matériau.

La grande majorité des appareils actuellement normalisés dans ce domaine sont devenus inopérants et insensibles aux variations d'un certain nombre de paramètres.

Désirant éviter l'empirisme actuellement encore en vigueur, nous nous sommes proposé de revoir cette problématique dans son ensemble en faisant appel à des notions émanant de la physique des milieux continus.

2. COMPLEXITE DU PROBLEME

La complexité du problème traité trouve son origine dans un certain nombre de malentendus, d'erreurs et de simplisme des méthodes d'investigations.

2.1. Terminologie

Le grand nombre d'appareils de mesure disponibles s'accompagne d'un vocabulaire très fourni et engendre un système d'unité de mesures déroutant. Ces termes ne trouvent pas toujours leur exact correspondant d'une langue à l'autre.

Il est possible {1} de rassembler ces notions en trois classes :

- notions qualitatives empiriques
 - ouvrabilité } = - pompabilité
 - maniabilité } = - coulabilité
 - stabilité ...
- notions quantitatives empiriques (résultats des mesures)
Slump, V.B., table à secousses...
- notions quantitatives fondamentales : cohésion (c), frottement interne (ϕ), viscosité dynamique (μ).

Nous avons opté pour l'approche par les notions quantitatives fondamentales dans le cadre de notre travail.

2.2. Empirisme

Une analyse {2} détaillée des méthodes d'essais empiriques montre à quel point elles donnent des renseignements incomplets et quelquefois erronés sur le mode de résistance du milieu.

2.3. Grand nombre de facteurs influents

On y trouve principalement :

- les propriétés du liant;
- les propriétés des agrégats;
- les proportions relatives;
- l'ambiance (température, mode de mise en place);
- présence d'adjuvant...

Ces caractéristiques ne sont pas toujours quantifiables.

3. MATERIEL EMPLOYE

3.1. Argumentation

Le scissomètre de la mécanique des sols a été retenu pour l'expérimentation car il permet des mesures :

- de résistance à l'écoulement dans un état de destruction importante, comparable à celui obtenu dans un malaxeur;

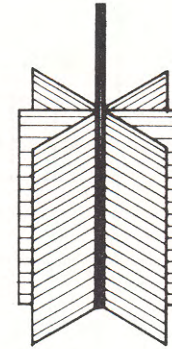


FIGURE 1 : Scissomètre mobile à 6 ailettes

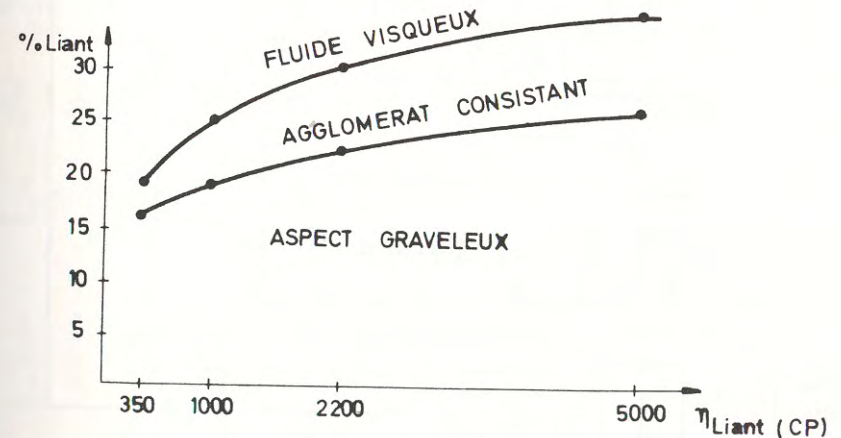


FIGURE 3 : Examen visuel, comportements du mélange liant (huile + farine) + sable + gravier, pour différentes viscosités du liant et différentes proportions du liant

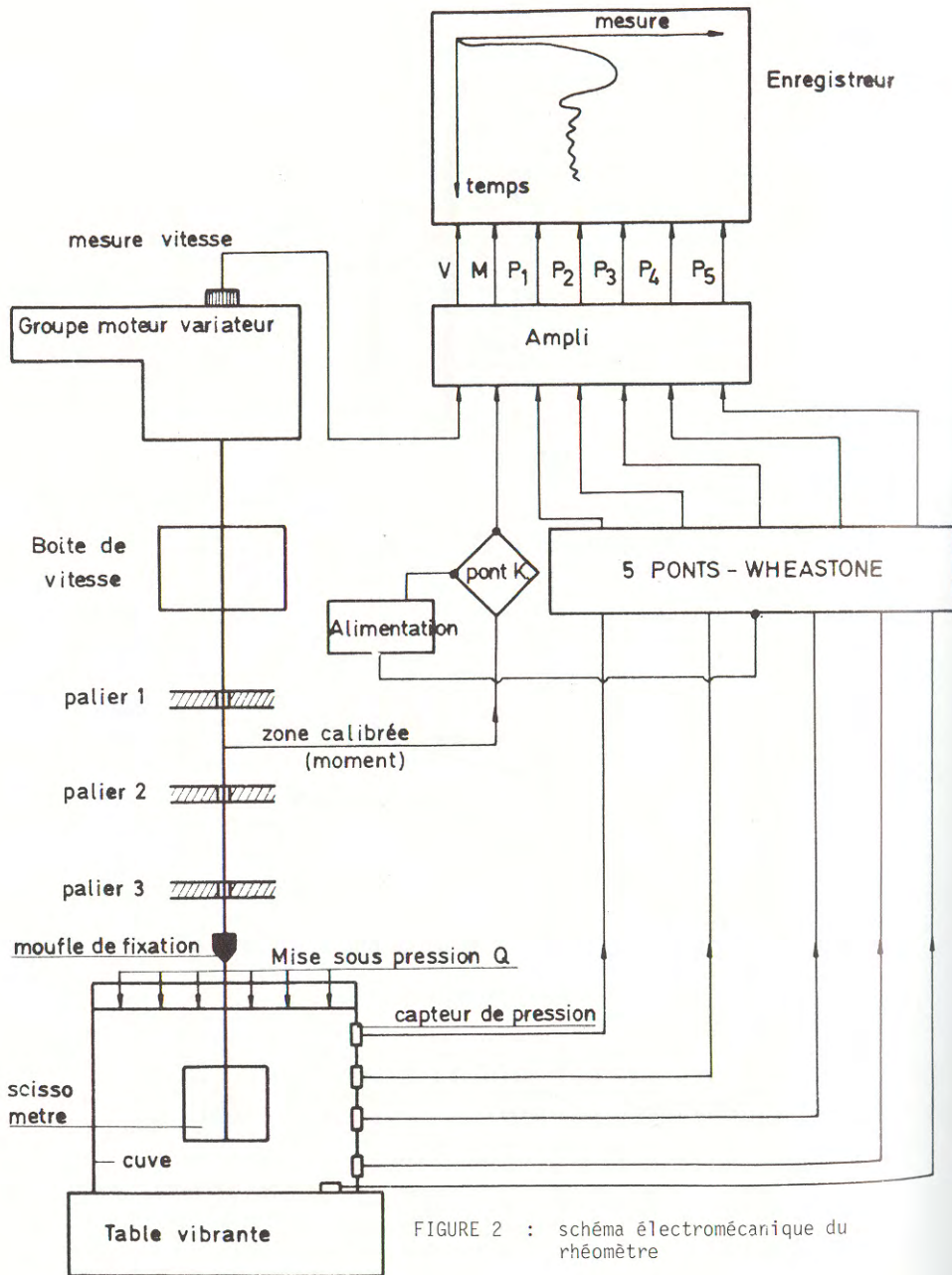


FIGURE 2 : schéma électromécanique du rhéomètre

- en continu (symétrie de révolution);
- à différentes vitesses, d'où μ ;
- sous différentes pressions appliquées, d'où c et ϕ .

3.2. Description (figure 2)

Un groupe moteur-variateur entraîne le scissomètre plongé dans la cuve contenant le mélange à tester. Cette cuve repose sur une table vibrante. Le mélange peut être mis sous pression.

Le moment de torsion est mesuré au moyen d'une zone calibrée en acier, garnie de strain-gages. Il a été nécessaire (cfr § 3.4.) de mesurer la pression sur la paroi verticale de la cuve.

Ces informations traitées sont envoyées à un enregistreur multipiste.

3.3. Assimilation à un cylindre

On a étudié [2] le mouvement des particules autour de la palette en mouvement. La résolution des équations de l'hydrodynamique, généralisée au cas de viscosités variables, au moyen de la méthode des différences finies, a montré que les perturbations engendrées par la forme du scissomètre pouvaient être négligées.

Le mobile à ailette a donc été assimilé à un cylindre. Cela permet en outre d'éviter le problème du glissement à l'interface cylindre-mélange biphasé.

3.4. Détermination des caractéristiques des bétons frais

Vu la forme cylindrique supposée pour le mobile, il est possible de trouver les relations permettant le passage des valeurs des moments de torsion mesurés aux valeurs de μ , c et ϕ .

3.4.1. Viscosité

L'équation de Reiner-Riwlin, employée pour les écoulements de fluide de Bingham dans les viscosimètres à cylindres coaxiaux n'est pas applicable dans notre cas.

Une nouvelle relation permet le calcul de la viscosité :

$$\mu = \frac{1}{\Omega R_i} \left[\frac{M}{2\pi h} \left\{ \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_0} \right\} - \tau_0 \{R_0 - R_i\} \right. \\ \left. + \frac{M}{4\pi h^2} \ln \frac{\left(h + \frac{R_0}{2} \right) \cdot R_i}{\left(h + \frac{R_i}{2} \right) \cdot R_0} \right] \quad (1)$$

- où
- h = hauteur du mobile
 - Ω = vitesse de rotation
 - R_i = rayon du cylindre intérieur
 - R_0 = rayon correspondant au fluide au repos
 - τ_0 = seuil d'écoulement
 - M = moment de torsion

Elle tient compte partiellement de l'effet de bout de palette.

3.4.2. Cohésion et frottement interne

Les faces supérieure, latérale et inférieure contribuent à la valeur du moment de torsion, d'où :

$$M = \frac{\pi R_i^3}{12} [c + (\gamma a + q) \text{ tang } \phi] + \frac{\pi R_i^2 h}{2} [c + \{\gamma (a + \frac{H}{2}) + q\} \cdot K \cdot \text{tang } \phi] + \frac{\pi D^3}{12} [c + \{\gamma (a + H) + q\} \text{ tang } \phi]$$

où γ = poids spécifique du mélange
 a = hauteur de mélange au-dessus de la palette
 q = pression extérieure appliquée
 K = coefficient de transformation de la pression verticale en pression horizontale

En répétant les mesures, on obtient les équations nécessaires à la détermination de c , ϕ et K . Le système obtenu est quasi singulier par suite de la prédominance des termes en pression extérieure (q). On lève l'indétermination en mesurant la pression horizontale au moyen de capteurs de pression d'où la valeur de K .

4. CAMPAGNE D'ESSAIS

4.1. Mélanges testés

De manière à réduire le nombre de paramètres entrant en liste et ainsi diminuer le nombre d'expériences, il a été décidé de constituer le liant au moyen d'un mélange d'huile minérale et de farine de silice.

Leurs proportions relatives permettent d'obtenir des liants à diverses viscosités.

Le rapport (sable calcaire 0/2 + gravier quartz 3/9) est maintenu constant pendant toute l'expérimentation.

Le choix des proportions et viscosités du liant dans les mélanges a été réalisé sur la base d'une expérimentation préliminaire qui consistait en l'examen visuel des mélanges obtenus par ajoutage progressif de liant à un (sable + gravier) sec au départ. On obtient (figure 3) successivement un aspect graveleux, puis la formation d'un agglomérat compact, enfin pour les pourcentages importants de liant, un fluide plus ou moins épais.

Un certain nombre de mélanges ont été programmés et qui cernent ces trois régions de comportement.

4.2. Plan d'expérience

Les paramètres de la mesure sur un mélange sont :

- la vitesse de rotation du mobile;
- le temps (nombre de mesures successives);
- la pression appliquée sur le mélange;
- la vibration appliquée.

5. RESULTATS OBTENUS

5.1. Régression multilinéaire

Le modèle :

$$M = A_0 + A_1 v + A_2 p + A_3 t + A_4 V.B. \quad (3)$$

explique de 94,5 à 99,9 % de la variation du moment de torsion.

Ceci corrobore le fait que ce type de mélange présente un caractère Binghamien.

L'étude statistique [2] a également montré que la non-linéarité était nulle.

5.2. Surfaces de réponse

5.2.1. $A_0 = f(\mu_L, \%L)$ (figure 4)

La surface de réponse de A_0 (c) en fonction de la viscosité dynamique du liant (μ_L) et de la proportion de liant (% L) montre des valeurs importantes le long des axes et des valeurs assez faibles dans la région centrale. Une zone transitoire raccorde ces deux extrêmes.

5.2.2. $A_1 = f(\mu_L, \%L)$ (figure 5)

Le terme associé à la vitesse (la viscosité a la même allure) présente des maxima là où A_0 commence à chuter, c'est-à-dire entre les valeurs importantes de A_0 et la zone transitoire.

Les batonnets indiquent les valeurs obtenues. Les parties droites des courbes sont hypothétiques.

5.2.3. $A_2 = f(\mu_L, \%L)$

Le terme associé à la pression (frottement interne) était non significatif pour tous les mélanges, sauf dans le cas d'essais sur du (sable + gravier) seul. (Frottement interne de 4,17 %).

5.2.4. $A_3 = f(\mu_L, \%L)$ (figure 6)

L'effet du temps est inférieur, sur l'ensemble de l'expérimentation, à 2,5 %.

5.2.5. $A_4 = f(\mu_L, \%L)$ (figure 7)

L'effet de la vibration sera d'autant plus important que le matériau sera pauvre en liant.

6. CONCLUSIONS (figure 8)

Les constatations réalisées au niveau des diverses surfaces de réponses (§ 5.2.) permettent de décomposer le plan des paramètres (μ_L , % L) en un certain nombre de zones caractérisées par un mode de résistance à l'écoulement particulier et notamment :

- le long de l'axe μ_L , lorsque les vides des agrégats ne sont pas saturés par le liant : cohésion et frottement interne;
- lorsqu'il y a saturation, le frottement interne cède la place à la viscosité;
- au-delà de la zone de transition, la cohésion devient très faible, la viscosité reste seule;
- enfin, le long de l'axe (% L), cohésion seule.

7. BIBLIOGRAPHIE

- [1] TATTERSHALL G.H.
The workability of Fresh Concrete.
(A View point publication CCA, 1976)
- [2] RIGO J.M.
Contribution à l'étude de la rhéologie des bétons frais.
Thèse de Doctorat. Université de Liège, 1980.

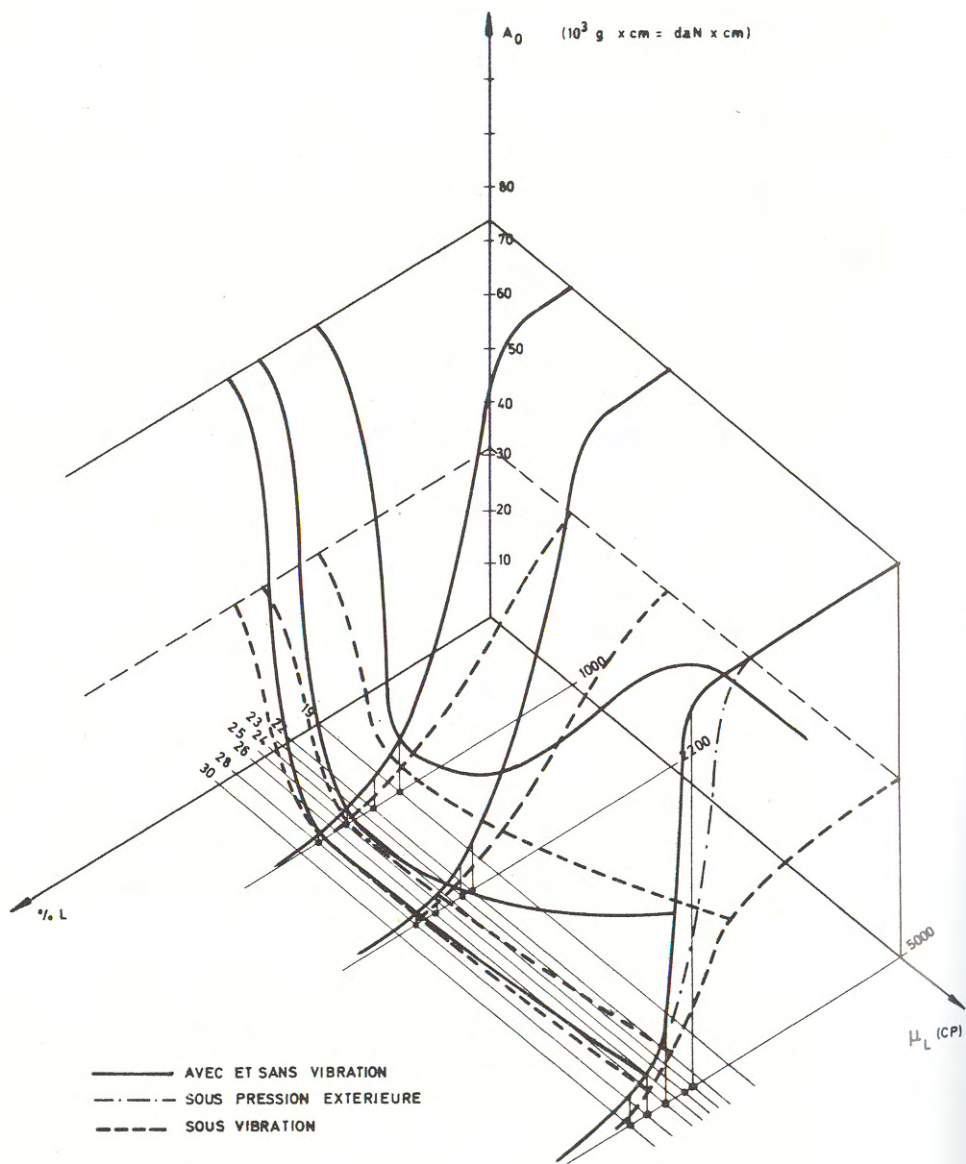


FIGURE 4 : A_0 (Moment) en fonction de :
 - la viscosité du liant (μ_L - cp)
 - la proportion du liant dans le mélange (%)

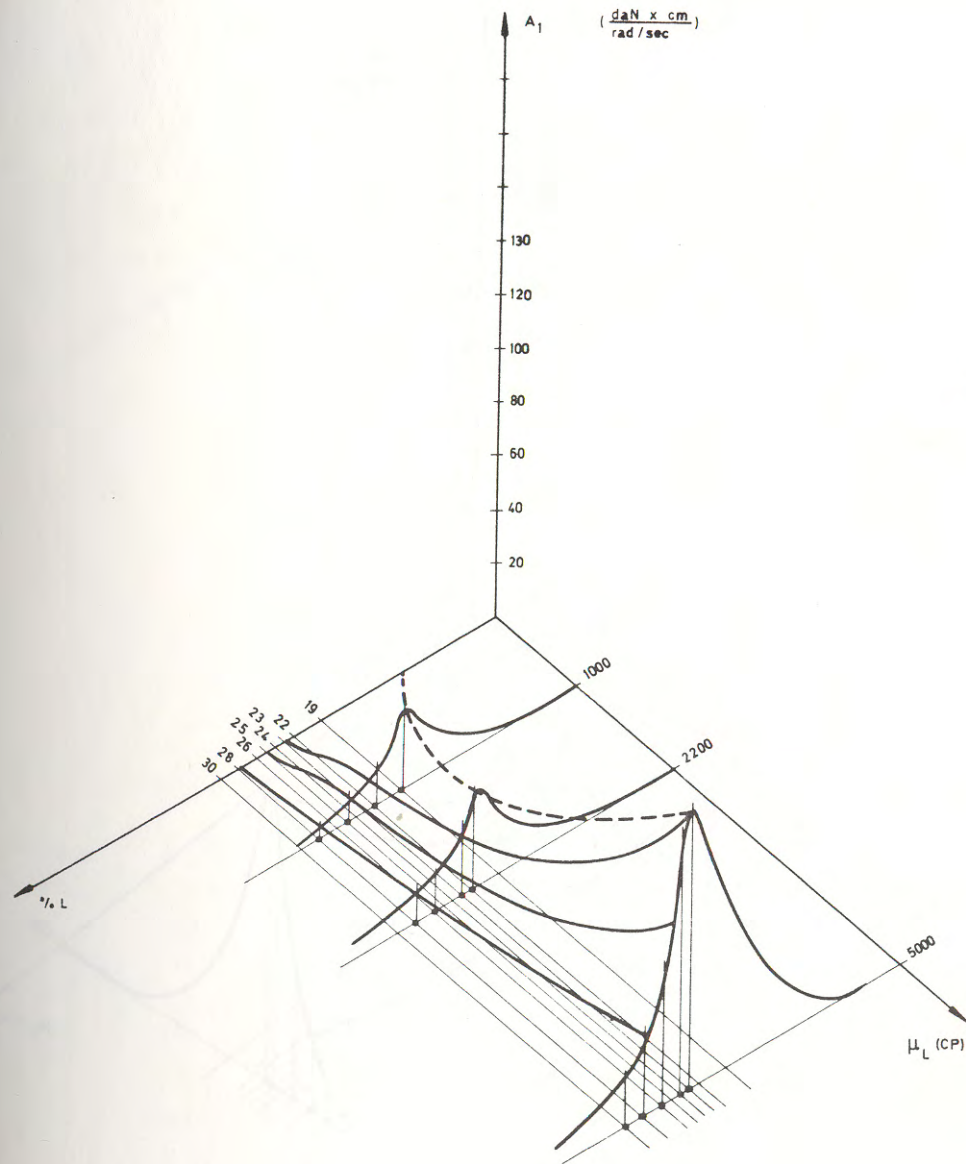


FIGURE 5 : A_1 (effet de vitesse sur la contrainte) en fonction de :
 - la viscosité du liant (μ_L)
 - du pourcentage de liant dans le mélange

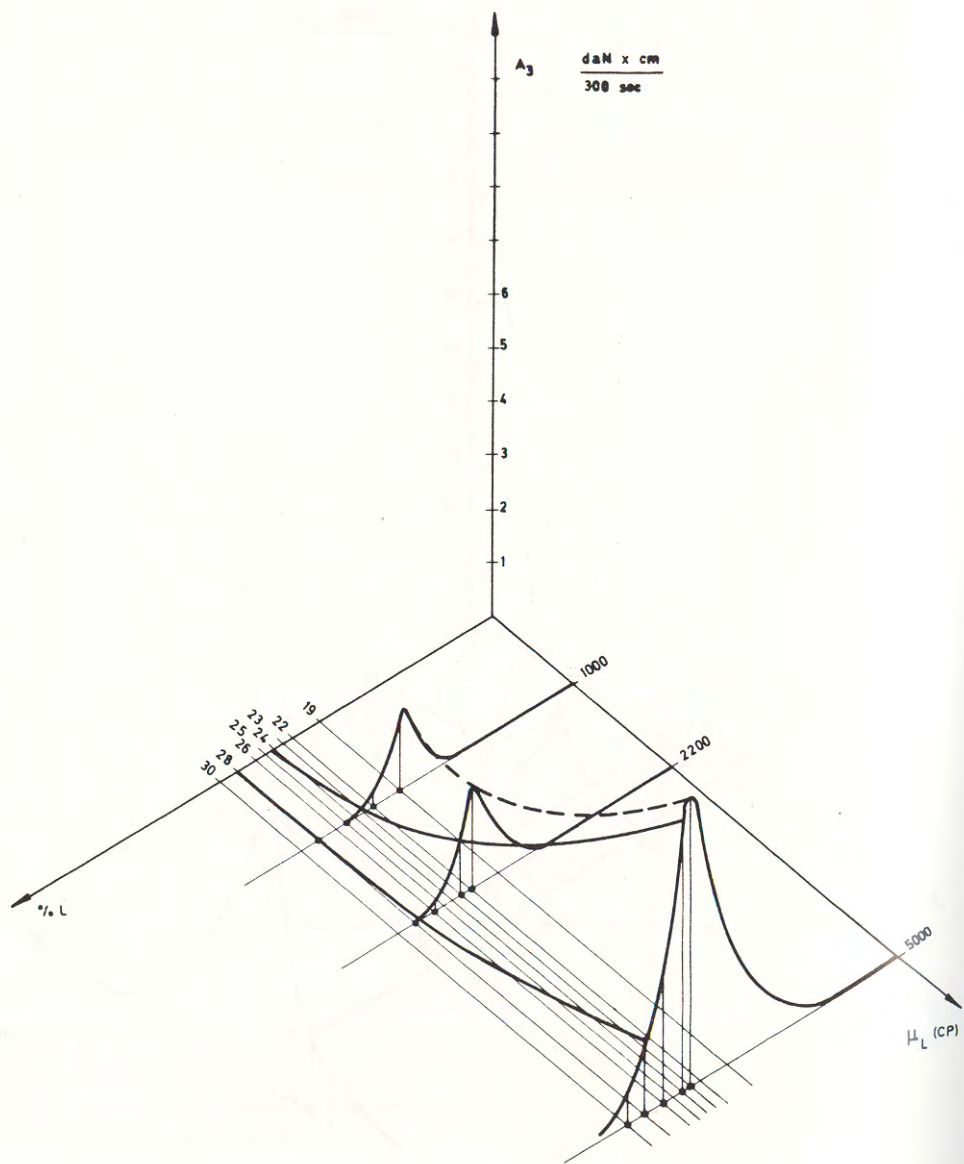


FIGURE 6 : A_3 (effet du temps sur la contrainte)
 en fonction de :
 - la viscosité du liant (μ_L)
 - la proportion de liant dans le mélange (%)

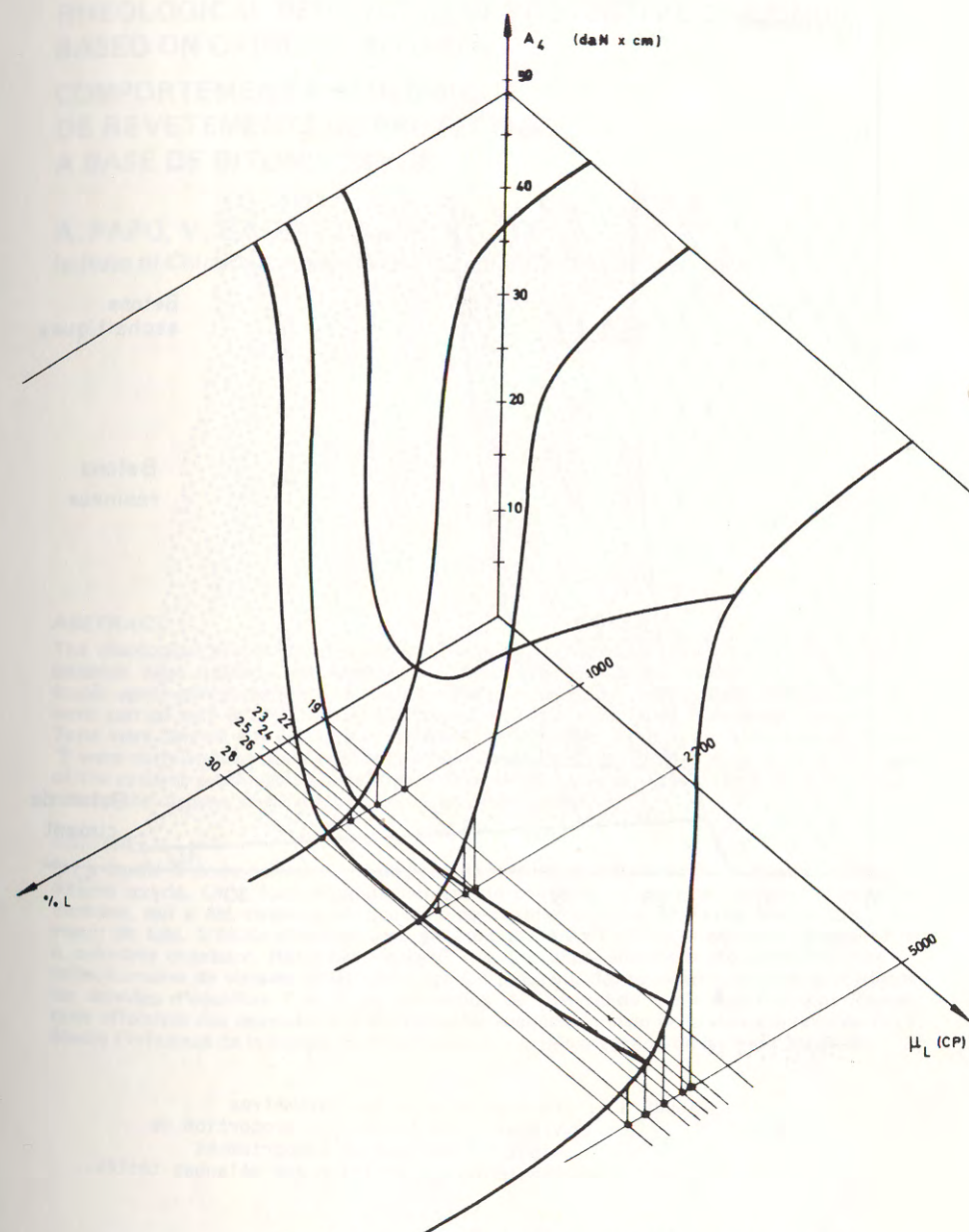


FIGURE 7 : A_4 (effet de la vibration sur le moment)
 en fonction de :
 - la viscosité du liant (μ_L - cp)
 - la proportion de liant dans le mélange (%)

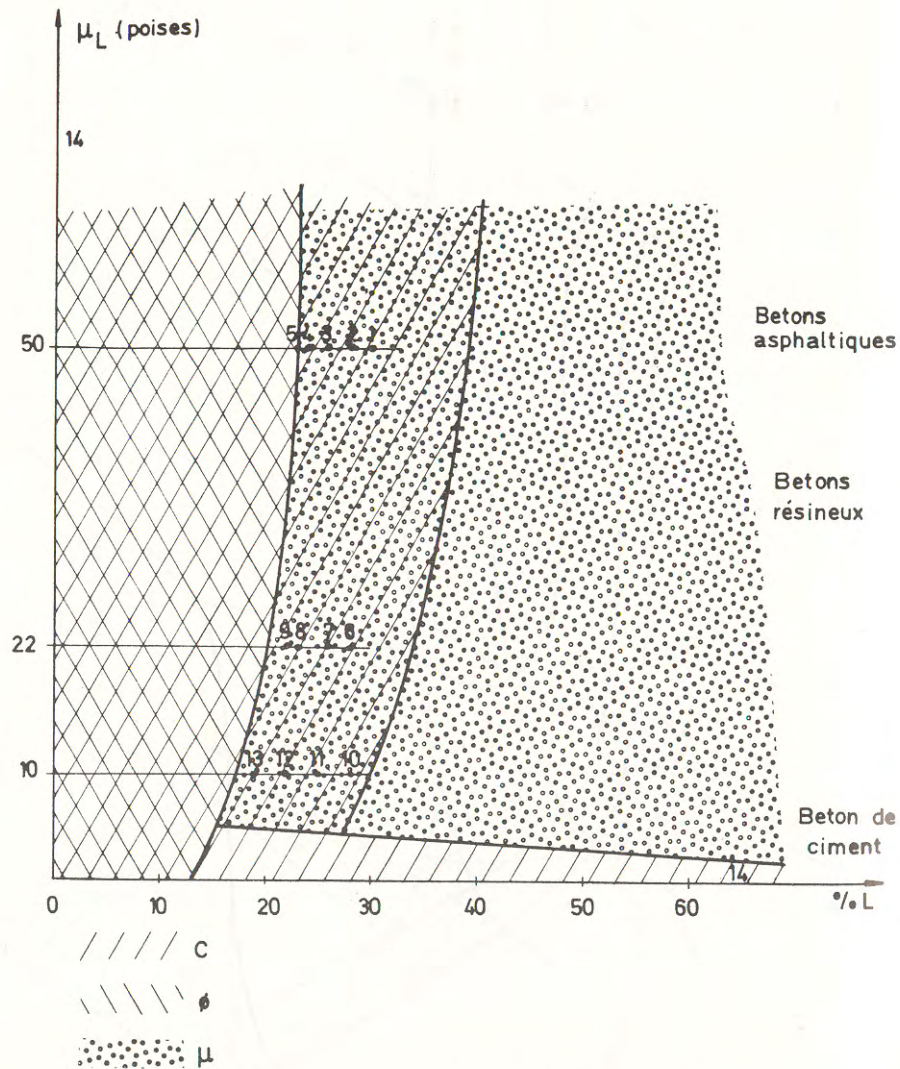


FIGURE 8 : Partage du plan des paramètres viscosité du liant μ_L - proportion de liant % L en zone de comportement rhéologique - Position des mélanges testés.

RHEOLOGICAL BEHAVIOUR OF PROTECTIVE COATINGS BASED ON OXIDIZED BITUMEN

COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DE REVETEMENTS DE PROTECTION A BASE DE BITUME OXYDE

A. PAPO, V. GARZITTO et F. STURZI

Istituto di Chimica, Università degli Studi di Udine - Udine - Italie

ABSTRACT

The rheological properties of a series of high-build protective paints containing oxidized bitumen were studied. Two families of paints were formulated, within which the thixotropic agent concentration and the extender concentration were varied. Rheological tests were carried out at 25°C using the coaxial cylinder viscometer Rotovisko-Haake RV 3. Tests were carried out within a wide range of shear rates. Equilibrium-flow data of τ and $\dot{\gamma}$ were correlated by the Ostwald-de Waele equation. The effective solid volume fractions of the systems examined were calculated from relative viscosity data. The influence of shear rate on the disperse phase disaggregation was investigated.

RESUME

On a étudié le comportement rhéologique de familles de peintures de protection à base de bitume oxydé. On a formulé deux familles de peintures : l'une avec plusieurs niveaux de Bentone, qui a été employé en qualité d'agent thixotropique, et l'autre avec plusieurs niveaux de talc. L'étude rhéologique a été conduite à 25°C. On a employé un viscosimètre à cylindres coaxiaux, Rotovisko-Haake RV 3. Les expériences ont été conduites dans un large domaine de vitesses de déformation. On a obtenu des résultats satisfaisants correlant les données d'équilibre τ et $\dot{\gamma}$ par l'équation de Ostwald-de Waele. Les fractions volumiques effectives des peintures ont été calculées avec les données de la viscosité relative. On a étudié l'influence de la vitesse de déformation sur la désagrégation de la phase dispersée.

1. INTRODUCTION

High-build paints containing oxidized bitumen are at present employed both in the industrial and in the transportation field for protection of metallic surfaces by corrosion caused by chemical and atmospheric agents.

In addition to the performance requirements regarding the various destructive agents and environments to which the film is subjected, also technological aspects connected to application and filmation properties are to be taken into account in the formulation of a high-build protective paint. In fact, high-build paints allow dry films of high thickness (about 100-200 μm) to be laid down by a single coat without sagging on vertical surfaces.

On the other hand, these primers must be easily applicable with airless spraying equipment.

To this end, high-build paints should have particular flow properties.

In detail, in order to prevent sagging high viscosity or the presence of an adequate yield stress is required at the very low shear rates involved in film formation, whereas low viscosity is required at the very high shear rates involved in application processes.

A first approach on the study of the rheological behaviour of high-build paints based on oxidized bitumen was accomplished by the Authors in a previous paper⁽¹⁾. In further works^(2,3) the influence of thixotropic agent concentration and that of temperature were studied.

The present paper reports the results of a series of investigations carried out on the rheological behaviour of two families of paints containing oxidized bitumen, within which two compositive parameters are varied, i.e. the thixotropic agent concentration and the extender concentration.

2. EXPERIMENTAL

2.1. Materials

The materials examined were high-build thixotropic paints containing

oxidized bitumen (25-30 pen.) dispersed in white spirit (50% by weight). As thixotropic agent, Bentone, an organic derivative of montmorillonite, was employed. Four paints were formulated at different thixotropic agent concentrations, ranging from 0 up to 2.5% by weight. As extender, microtalc was used. A second series of four paints was formulated at different talc concentrations, ranging from 0 up to 30% by weight, keeping constant the thixotropic agent concentration.

Paint designation and composition are reported in Table 1.

Table 1

Paint designation and composition					
Paint	Bentone wt%	Talc wt%	ϕ_B	ϕ_T	ϕ
A	0	0	0	0	0.443
B	0.75	0	0.0036	0	0.445
C	1.50	0	0.0073	0	0.447
D	2.50	0	0.0122	0	0.449
E	1.50	0	0.0073	0	0.447
F	1.50	10	0.0073	0.032	0.464
G	1.50	20	0.0073	0.070	0.485
H	1.50	30	0.0073	0.114	0.509

2.2. Apparatus

Rheological tests were performed by means of the coaxial cylinder viscometer Rotovisko-Haake RV 3 with the measuring device MVI (0.96 mm clearance).

Shear rates applied were within the range 0.2-1800 s^{-1} .

Tests were carried out at $25 \pm 0.1^\circ\text{C}$.

3. RESULTS AND DISCUSSION

All the materials examined exhibited a thixotropic flow behaviour. The thixotropic effect was prevailing on the viscoelastic one because of

the presence of both thixotropic agent and extender.

The present paper reports only an investigation on shear-thinning behaviour based on equilibrium-flow data of shear stress and shear rate. A detailed study of time-dependence will be presented in further works.

Fig.1 presents the equilibrium-flow curves $\tau - \dot{\gamma}$ obtained for Paints A-D.

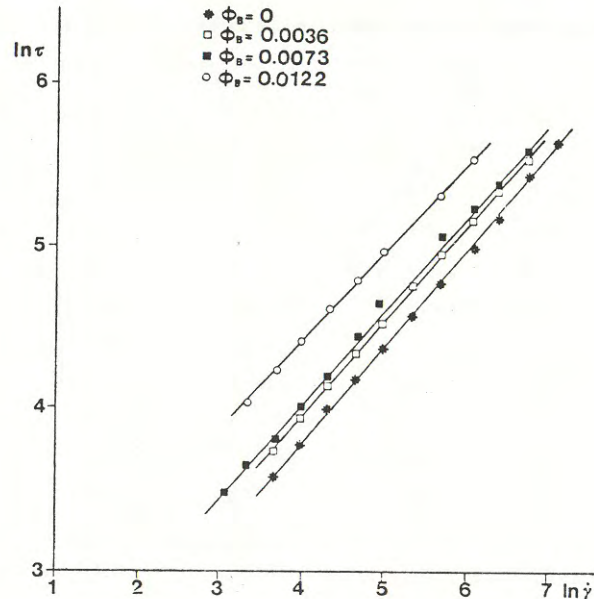


Fig.1-Equilibrium-flow curves $\ln \tau$ versus $\ln \dot{\gamma}$ for Paints A-D

One model suitable for describing the shear-thinning behaviour of these systems is the Ostwald-de Waele model:

$$\tau = K \dot{\gamma}^n \quad n < 1 \quad (1)$$

where K is the consistency and n is the power index.

It can be observed that the variation of consistency with Bentone volume fraction can be described according to an exponential law. In fact, a linear correlation was found by fitting $\ln K$ and ϕ_B data in the ϕ_B range considered ($\ln K = 1.33 + 70.38 \phi_B$).

The plot $\ln K$ versus ϕ_B is reported in Fig.2.

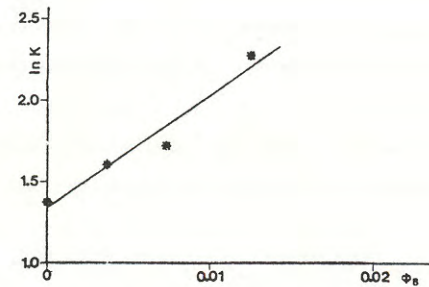


Fig.2-Natural logarithm of consistency versus Bentone volume fraction

In Fig.3, the shear-thinning index $STI = 1/n$ is plotted versus Bentone volume fraction. A straight-line plot was obtained in the ϕ_B range investigated ($STI = 1.66 + 15.06 \phi_B$).

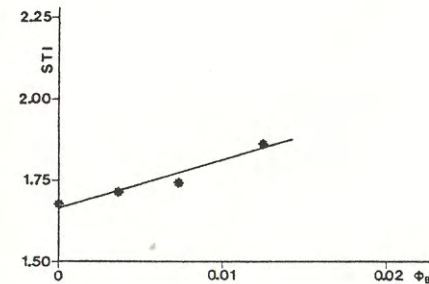


Fig.3-Shear-thinning index versus Bentone volume fraction

So, on the basis of the relationship:

$$\eta = K \dot{\gamma}^{n-1} \quad n < 1 \quad (2)$$

derived from equation (1) and of the empirical correlations of STI and K with Bentone volume fraction, the variation of apparent viscosity with both shear rate and solid volume fraction can be described.

Another approach to study the variation of apparent viscosity with shear rate and solid volume fraction consists in taking into consideration the literature models which correlate the relative viscosity of the dispersed phase with the solid volume fraction. Reference is made to (4).

The suitability of the above-mentioned models requires the knowledge of the effective total solid volume fractions owing to the aggregation of the disperse phase and the different aggregation conditions at the various shear rates tested.

As suggested by Thomas⁽⁵⁾, the effective solid volume fraction at any shear rate can be obtained from relative viscosity data by means of the following equation:

$$\eta_r = 1 + 2.5 \phi_{\text{eff}} + 10.05 \phi_{\text{eff}}^2 + 2.73 \cdot 10^{-3} \exp\{16.6 \phi_{\text{eff}}\} \quad (3)$$

In addition, the floc density, c_{FP} , defined as the ratio of the effective to the nominal solid volume fraction, can be calculated. This quantity is a measure of the volume increment of the disperse phase due to particle aggregation.

Fig.4 reports the plot c_{FP} versus $\dot{\gamma}$ obtained for systems A-D.

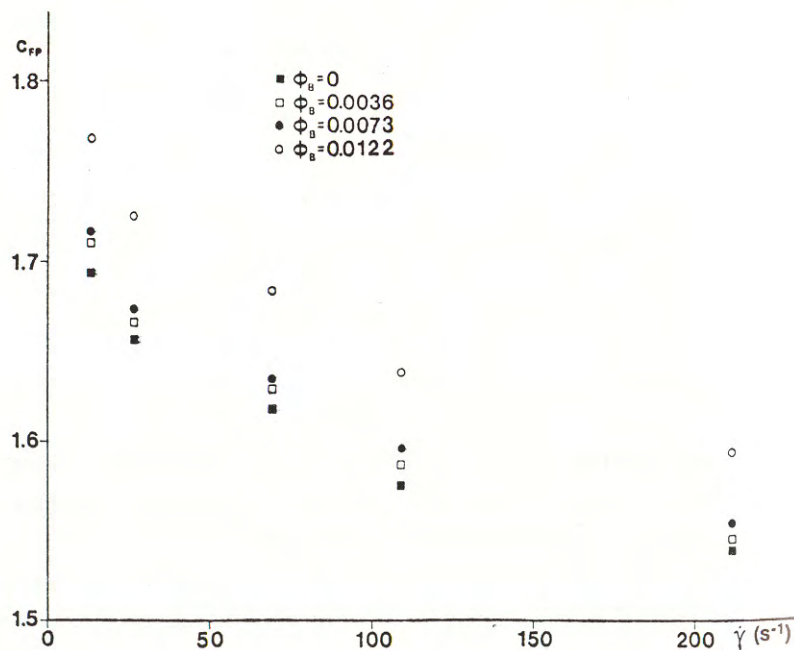


Fig.4-Floc density versus shear rate plot for Paints A-D

It can be noticed that the disaggregation of the disperse phase increases when increasing shear rate. In addition, floc density slightly increases when increasing Bentonite concentration.

Unsatisfactory results were achieved by fitting c_{FP} and $\dot{\gamma}$ data using the equation suggested by Thomas in⁽⁶⁾. A more detailed investigation on the variation of c_{FP} with $\dot{\gamma}$ is in progress in accordance with the approaches proposed by Quemada⁽⁷⁾ and by Smith and Bruce⁽⁸⁾.

As regards the influence of talc on the shear-thinning behaviour of the materials examined, Fig.5 presents the equilibrium-flow curves $\tau - \dot{\gamma}$ obtained for Paints E-H.

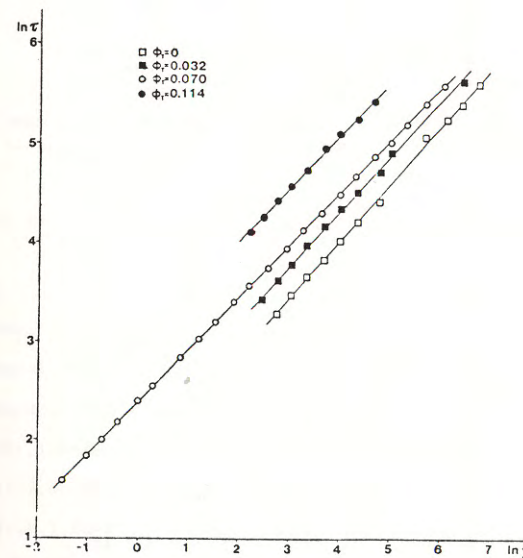


Fig.5-Equilibrium-flow curves $\ln \tau$ versus $\ln \dot{\gamma}$ for Paints E-H

Also in this case, satisfactory results were achieved by fitting τ and $\dot{\gamma}$ data with the Ostwald-de Waele equation.

It can be concluded that the addition of talc does not change the type of rheological behaviour.

Satisfactory linear correlations were also obtained by fitting both data of natural logarithm of consistency and data of shear-thinning index

with talc volume fraction ($\ln K = 1.71 + 10.49 \phi_T$; $STI = 1.76 + 1.20 \phi_T$).

The plots $\ln K$ versus ϕ_T and STI versus ϕ_T are reported in Figures 6 and 7, respectively.

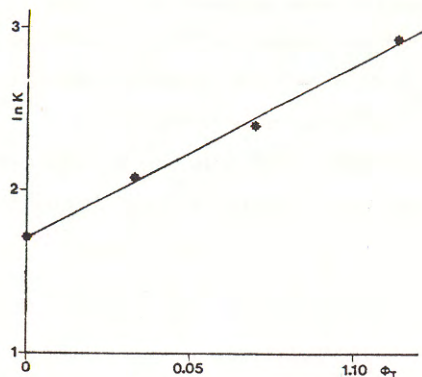


Fig.6-Natural logarithm of consistency versus talc volume fraction

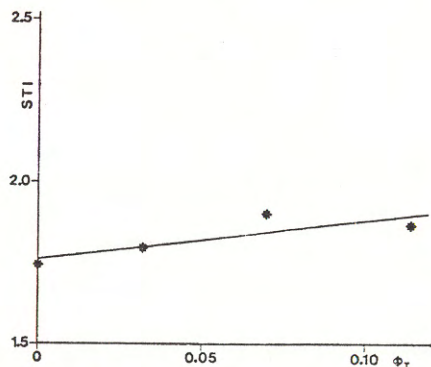


Fig.7-Shear-thinning index versus talc volume fraction

Also for Paints E-H, equation (3) was employed to calculate the effective total solid volume fractions; then, floc density c_{FP} was determined at any shear rate.

The variation of c_{FP} with shear rate is plotted in Fig.8.

It can be noticed that c_{FP} decreases when increasing both shear rate and talc volume fraction.

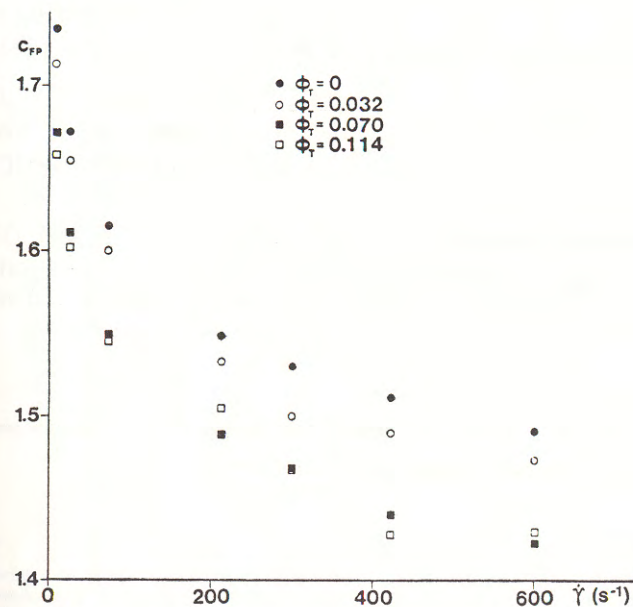


Fig.8-Floc density versus shear rate plot for Paints E-H

4. BIBLIOGRAPHY

- 1) Papo, A., Sturzi, F., *Ind. Vernice*, **34** (8), 3, 1980.
- 2) Papo, A., Sturzi, F., *J. Oil Col. Chem. Assoc.*, in the press.
- 3) Papo, A., Sturzi, F., *Ind. Vernice*, in the press.
- 4) Jinescu, V.V., *International Chem. Eng.*, **14** (3), 397, 1974.
- 5) Thomas, D.G., *J. Colloid Sci.*, **20**, 267, 1965.
- 6) Thomas, D.G., *A.I.Ch.E. Journal*, **10** (4), 517, 1964.
- 7) Quemada, D., *Rheol. Acta*, **17**, 632, 1978.
- 8) Smith, T.L., Bruce, C.A., *J. Coll. Interface Sci.*, **17**, 632, 1978.

5. NOMENCLATURE

- c_{FP} floc density
 K consistency
 n power index
 STI shear-thinning index

Greek letters

$\dot{\gamma}$	shear rate
η	apparent viscosity
η_r	relative viscosity
τ	shear stress
ϕ	nominal total solid volume fraction
ϕ_B	Bentone volume fraction
ϕ_{eff}	effective total solid volume fraction
ϕ_T	talc volume fraction

ACKNOWLEDGEMENT

The Authors would like to thank the SAPPI S.p.a. (Monfalcone, Italy) for supplying the materials needed for this study.

**COLD AND HOT DRAWING
OF HIGH DENSITY
POLYETHYLENE-ISOTACTIC POLYPROPYLENE BLENDS
ETIRAGE A CHAUD ET A FROID
DE MELANGES DE POLYETHYLENE HAUTE DENSITE
ET DE POLYPROPYLENE ISOTACTIQUE**

R. GRECO, MA RONG TANG, S. CIMMINO et G. RAGOSTA
Istituto di Ricerche su Tecnologia dei Polimeri e Reologia
del Consiglio Nazionale delle Ricerche - Arco Felice - Naples - Italie

ABSTRACT

The paper briefly reviews the most important results reported in the literature on the mechanical behaviour of ultradrawn homopolymer fibres, such as high density polyethylene, polyoxymethylene and isotactic polypropylene.

The structural and morphological changes that occur in such materials during their mechanical treatments by different techniques, like solution spinning, hydrostatic extrusion or simple drawing, are also covered.

The preliminary results obtained when using high density polyethylene-isotactic polypropylene blend and ultradrawn fibres are also presented and discussed.

RESUME

Les résultats les plus importants rapportés dans la littérature sur le comportement mécanique des fibres de polymères tels que polyéthylène linéaire, polyoxyméthylène et polypropylène isotactique sont brièvement résumés.

Les variations structurales et morphologiques obtenues dans ces matériaux au cours du traitement mécanique par différentes méthodes (filage en solution, extrusion hydrostatique ou simple étirement) sont aussi mentionnées.

Les résultats préliminaires obtenus sur mélanges composés de polyéthylène linéaire et de polypropylène isotactique sont présentés et examinés.

1. INTRODUCTION

During the last forty years the consumption of plastics has undergone a huge commercial expansion in amounts as well as in the variety of ever new practical applications. This fact is certainly due to the several advantages offered by polymers over other kinds of materials: low costs, easy moldability, bulk dyeing, free maintenance and the possibility of a variety of formulations to provide a wide range of other specific properties. In addition most plastics are biologically inert and show good resistance to chemical attack. Typical examples of such phenomenon are materials like, polystyrene, polyvinylchloride and even more the large polyolefin family (low and high density polyethylenes, polypropylene, etc.).

In the last decade such an expansion has been furtherly accelerated by a large request for more sophisticated products certainly due to the increased oil cost but even more to the great technological progress registered in all fields during the last few years.

To achieve the goal of obtaining materials with increased added value two main ways have been followed:

- The first one, more traditional, is the search for new monomers in order to produce special polymers with very high technological performances like technopolymers and superpolymers. Such a route is of course very expensive and can be pursued only for limited productions of highly sophisticated applications, which can justify the very high costs due for engineering design and manufacture.
- The second one is an effort of exploiting and enlarging the performances and the applications of common polymers, already present on the market. Such a purpose can be pursued by different methods:
 - 1) by copolymerizing different monomers obtaining block, graft or random copolymers (high impact polystyrene, or HIPS, acrylonitrile-co-butadiene-co-styrene, or ABS, are two examples of materials that have reached today very large productions); it is possible to obtain in this way also interpenetrating and gradient networks.
 - 2) by combining the properties of a polymeric material with stiff fibres like glass, carbon, it is possible to get composite systems, where the polymeric matrix (a thermosetting or a thermoplastic resin) is reinforced by the included fibres and higher modulus solids can be obtained. Composite materials cover now a very widespread commercial market in the field of structural engineering applications.
 - 3) by increasing the internal molecular orientation in semicrystalline polymers it is possible to get high reinforcement effects. In fact, as one can observe in table I, bulk unoriented polymers obtained by usual processing conditions (extrusion, injection molding, etc.) exhibit very low moduli (1 GPa) compared with the highly oriented crystalline versions of polymers of the same chemical nature (whose theoretical values are of the order of about 100 GPa). It is to be remarked that such latter moduli compare very well with those of different structured materials

materials like aluminum, glass, steel and carbon filaments.

Table I

Tensile modulus of different structured materials

Material	Modulus (GPa)
Bulk Polymers	1
Polyethylene limit	240
Polypropylene limit	42
Polyoxymethylene limit	54
Polytetrafluoroethylene limit	156
Polyethylterephthalate limit	140
Polyvinylalcohol limit	250
Poly-p-benzamide (Kevlar)	130
Nylon 6 limit	25
Aluminum alloys	70
Glass filaments	70-85
All Steel	200
Carbon filaments	240-500

Therefore from the simple observation that bulk polymers can exploit only a small fraction of their possibilities, several methods have been developed to obtain ultrahigh modulus fibres and films: cold drawing, hydrostatic extrusion and solution spinning. In all the cases the necessary molecular alignment for obtaining the final oriented structure is due to the presence of an effective elongational gradient. (5)

In this paper a preliminary study of cold and hot drawing of high density polyethylene (HDPE)- isotactic polypropylene (iPP) blends for obtaining ultradrawn fibers is presented and discussed. For a better understanding of the above mentioned subject also a brief outline of the structural changes occurring at a molecular level

during the tensile deformation is given and experimental results from the literature, concerning homopolymers like HDPE, iPP or polyoxymethylene (POM) are reviewed.

1.1. Structural considerations

Isotropic semicrystalline polymers, having modulus of the order of magnitude of 1 GPa (like that of glassy substances), can increase their values, as already mentioned previously, by orienting their chains through mechanical treatments⁽⁵⁾. In this paper we will deal only with cold drawing techniques (the distinction between cold and hot drawing procedures relies on the operational drawing temperature, T_d , which is in all the cases below the polymer melting point, T_m ; but in the cold drawing T_d is also lower than a particular temperature, T_α , where the crystalline regions pass from a pure elastic to a viscoelastic mechanical behaviour. T_α is generally lower than T_m of $\sim 30^\circ\text{C}$).

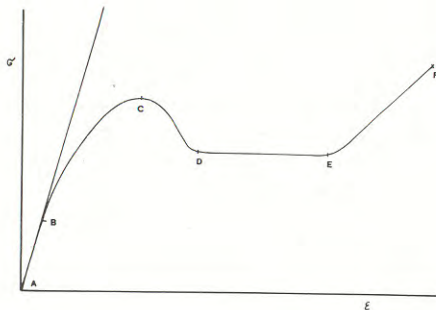


Fig. 1 Typical stress-strain curve of a semicrystalline polymer.

A typical stress-strain curve for a semicrystalline polymer is reported in fig.1. Such materials in their isotropic state (represented by the point A on the curve) are made by spherulites interconnected by tie molecules, which are the main source of the material strength. A spherulite consists of birefringent unit made of folded lamellae emanating radially from its center along helicoidal paths⁽⁶⁾. As soon as the polymer begins to be stretched the spherulite deforms as a whole and elastically recovers its shape when the stress is released (portion AB of the curve). At higher deformations (trait BC on the curve) the lamellae in the spherulite start to slip from their original radial alignment and tend to form blocks of folded chains, therefore permanent deformation sets remain after releasing the stress. After the yield point (CD on the curve) such blocks reorient themselves with the main chain axis (c-axis) along the stretching direction; shear forces between the sliding lamellae become very effective and a macroscopic striction of the sample starts to take place

ce⁽⁷⁾. In the necked portion of the specimen a wide scale lamellar slippage occurs and the spherulitic structure is progressively replaced in time by a fibrillar structure. The neck propagates along the whole sample and the curve (trait DE) becomes horizontal and a cold flow is developed at constant stress level. At point E all the available spherulitic material has been changed in a fibrillar morphology and hence a fibre is formed, in which the c-axis orientation of the chains along the stretching direction is almost complete with a crystalline orientation function, f_c , equal to 0,95. The draw ratio is in the range of 5-10 and is conventionally termed "natural draw ratio", λ_n . The fibre is made by thousands of microfibrils consisting of stacks of alternating folded crystalline blocks with amorphous layers. The microfibrils are interconnected, mainly on the external surface, by taut tie molecules originating by chain unfolding (by the tearing off of the blocks from the lamellae)⁽⁷⁾. Both the modulus and the strength of the fibres stretched at λ_n are increased because of the enhanced number of taut tie chains but their values is very high along the tensile axis and much lower in the transverse directions, where only weak Van der Waals forces are acting in keeping together the microfibrils. Therefore fibrillation or peeling off of the fibres are very common features.

The fibre stretched at λ_n has however a modulus of an order of magnitude lower than the theoretical value, because of the great number of folded chains still present, acting as defects in the continuum of the crystalline material since their modulus is lower than that of the oriented crystal. Therefore to get a further modulus increase it is necessary to reduce the folded chain zones and to create new effective tie molecules. This is obtained stretching the fibre well above λ_n (trait EF on the curve of fig.1) optimizing in the same time, temperature, rate of drawing and molecular characteristics of the samples. In fig. 2 three different models are sketched which were proposed to explain the mechanical behaviour of natural drawn ($\lambda = \lambda_n$) or of ultradrawn ($\lambda > \lambda_n$) materials⁽⁷⁾.

Peterlin⁽⁷⁾ (Model I) assumes taut tie chains crossing the amorphous layers and so bridging different crystal blocks, Kausch^(8,9) (model II) assumes perfectly lax tie molecules between the folded chain crystals. Clark and Fischer^(10,11) (model III) assume continuous crystal in the whole length of the fibre, with amorphous regions built in as defects. The existence of fibrils and microfibrils with finite lengths is assumed only in model I⁽⁷⁾.

Model II can be taken as representative of low deformations of the fibrous sample, but when this is stretched more the interfibrillar tie molecules become mostly taut on the outer side of the microfibrils and fibrils and model I. is more suitable for a good interpretation. This effect gives a good explanation of the observed modulus increase with increasing draw ratio. In some cases, as for polyoxymethylene or for solution drawn samples, model III can be more satisfactory to explain the X-Ray diffraction patterns, the high thermal stability of the fibres and the existence of a certain amount

of completely extended chain crystals into the fibres. However such structure is not indispensable to obtain ultra high modulus material. In fact, as will be shown subsequently, no modulus improvements can be attributed to the presence of extended chain crystals in ultradrawn fibres.

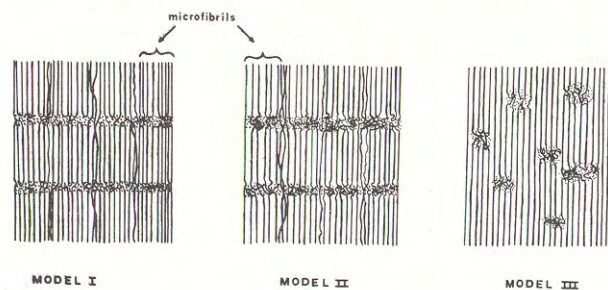


Fig. 2 Structural models.

3. HOMOPOLYMER ULTRADRAWN FIBRES

Modulus values taken from the literature for HDPE, iPP and POM homopolymers are reported in fig. 3. Particularly for HDPE a great deal of data are available. Those obtained by cold drawing or hydrostatic extrusion (12-18) lie on the same zone of the plot (shadowed area).

Therefore, since in extruded fibres the presence of chain extended crystals was detected, such a morphology does not seem to give any difference in the modulus values.

Much higher values, instead, can be observed for HDPE fibres obtained by solution spinning followed by a hot stretching and drying at 120°C (17). Such values are very close to those obtained by a diverse solution technique, where longitudinal growth of polymer crystals was originated by flowing solution (18).

But in the latter case no λ is definable and the comparison is only qualitative. It is to be noted, furthermore, that in both the solution methods the same high molecular HDPE sample, HOSTALEN GUR ($M_w=1.5 \times 10^6$) was used.

Of course the possibility of stretching so a high molecular weight HDPE is due to the low viscosity of the solution, whereas in melt or cold drawing methods the molecular weight of the sample was much lower (of about 1 order magnitude).

Hence in the solution grown fibres a greater number of taut tie molecules are probably present in the sample for which a continuous crystal is formed (model III of fig. 2).

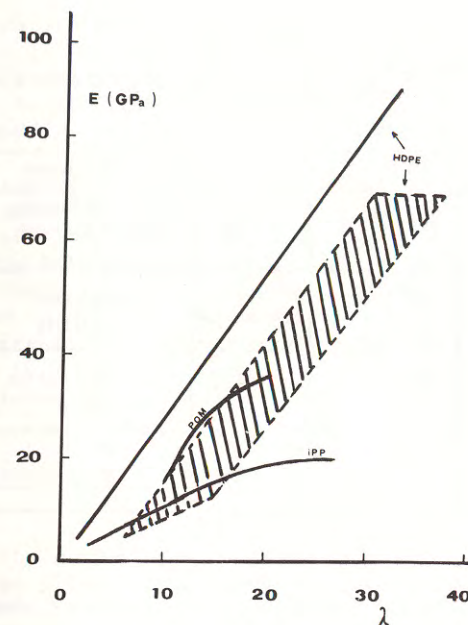


Fig. 3 Literature data for HDPE, POM and iPP moduli.

On the same plot also POM⁽¹⁹⁾ and iPP^(20,21) data are reported. As one can see their moduli are lower in absolute values than those of HDPE at equal λ 's, but relatively they are much closer to their theoretical values, as shown in Table II.

In fact in Table II for all the polymers examined in fig. 3 the maximum experimental moduli obtained (second column) are reported as a function of the λ (third column) and of the used technique (fourth column) and the resulting percentages of the theoretical moduli E_{th} are reported in fifth column.

POM reaches in fact 65%, iPP 48% and HDPE only 40% or less of the theoretical value. This fact can be due to the easier refolding tendency of HDPE with respect to iPP or POM and therefore its modulus is still low in comparison with the theoretical expectations.

It is to be noted however that in spite of this HDPE moduli compare quite well with glass or steel values, previously given in Table I.

Table II

Maximum experimental moduli of homopolymers

Polymer code	E (GPa)	λ	Techniques	% E_{ex}/E_{th}
HDPE	60-70	35	cold drawing hydrostatic extrusion	25-30
HDPE	90-100	32	solution spinning	37-42
POM	35	20	double step drawing	65
iPP	20	"	48	

The strength and the elongation at break for the some of the polymers, whose moduli are shown in fig.3, are reported in fig.4, but some of the corresponding data are not available in the literature. In fact often the moduli are obtained by isochronal creep tests and therefore ultimate values are not known in such cases.

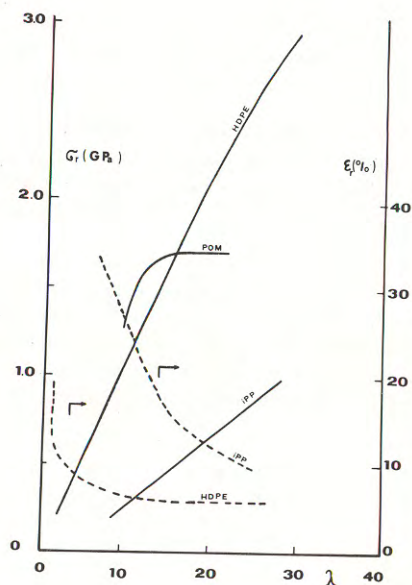


Fig.4 Literature data for HDPE, POM and iPP strength and elongation at break.

Very high values are shown for wet drawing⁽¹⁷⁾, close to that of Zwi jnenburg⁽¹⁸⁾.

Very good strength are also obtain for POM by a double step te chniques⁽¹⁹⁾ (in the first step the natural draw ratio is achieved at 1000%/min and in the second step at 4%/min speed the fibre is ul tradrawn).

The temperature is close to the crystal-crystal transition tem perature, T_{α} , that in the case of POM is $\sim 150^{\circ}\text{C}$.^(20,21)

Also for iPP the same technique has been used^(20,21). Of course the higher λ the lower is the elongation at break. In fact the fibre shows a closer and closer Hookean behaviour with increasing λ .

In all the cases, iPP included, the structural analysis reveals that a good perfection of the crystal (probably the model III is quite adequate to represent in some way the polymer morphology of the three mentioned polymers) has been achieved.

4. ULTRADRAWN HDPE/iPP BLEND FIBRES

4.1. Materials

High density polyethylene (HDPE) ($\bar{M}_w = 9.2 \times 10^4$; $\bar{M}_n = 8 \times 10^3$) and isotactic polypropylene (iPP) ($\bar{M}_w = 3.1 \times 10^5$; $\bar{M}_n = 1.6 \times 10^4$), kindly provided by RAPRA, were used as constituents of the binary HDPE/iPP blends.

The polymers were mixed as received without further purificati on.

4.2. Blend Preparation

The polymers were premixed in a Brabender-like apparatus (Rheo cord EC of HAAKE inc.) at 200°C and at 32 rpm, for about ten minutes, to obtain blends of the following HDPE/iPP weight ratios: 100/0 ; 75/25 ; 50/50 ; 25/75 ; 0/100.

Then flat sheets (1mm thick) were made by pressure molding, usi ng a heated press (Wabash Hydraulic Press).

Successively from such sheets dumbbell shaped specimens were cut by a suitable hollow punch.

The dumbbell gauge lenght was 20mm and the width 4mm.

4.3. Fibre Preparation

The dumbbell shaped specimens were stretched in an air heated oven of an Instron Machine (model 1122) at different cross head spe eds (v) and temperatures (T).

The HDPE-rich blends were elongated at $v = 20\text{cm/min}$ and at $T = 80^{\circ}\text{C}$ in a single step.

The iPP-rich mixtures were stretched in two steps (the first at $v = 20\text{cm/min}$ and $T = 130^{\circ}\text{C}$ and the second at the same temperature but at a much lower speed $v = 0.1\text{cm/min}$). Such² technique was that sugges ted previously by other authors^(11, 18-20).

4.4. Mechanical Tensile Tests

Stress-strain curves on the fibres so obtained were recorded by the same Instron apparatus at room temperature, and at cross head speed of 1cm/min. From such curves the modulus, the strength and the elongation at break were calculated on an average of at least five tests.

4.5. Results and Discussion

The moduli of the two HDPE, iPP homopolymers and of the three blends having 25%, 50%, 75% HDPE, are reported in fig.5.

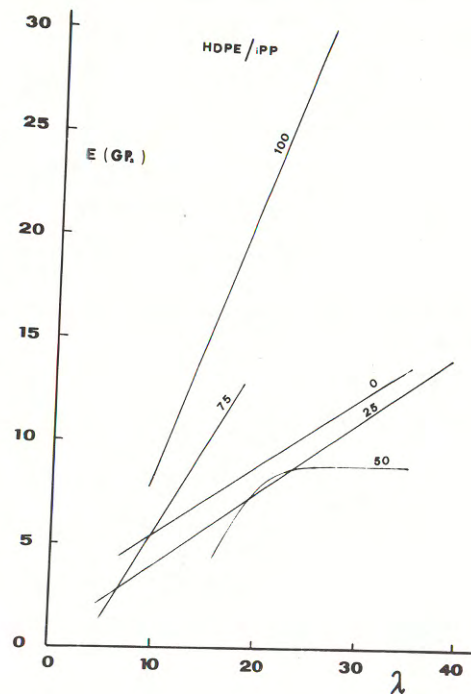


Fig. 5 Moduli for HDPE/iPP blend fibres obtained by cold hot drawing in the present work: HDPE% as indicated.

The HDPE values are much higher than those relative to iPP and to all the blends. However they are lower than those obtained by other authors⁽¹²⁻¹⁶⁾, using similar cold drawing technique (see fig. 3). This effect seems to be attributable to the initial sample thickness, as will be shown in a next paper⁽²²⁾, where the thinner the

thickness the higher seems to be the modulus.

The two blends having respectively iPP (25% HDPE) and HDPE (75% HDPE) matrix behave quite similar to the corresponding homopolymers, but with lower moduli.

The 50% HDPE blend instead shows, beyond $\lambda=20$, a plateau with a modulus of about 9 GPa.

The strength and the elongation at break are reported for the same homopolymers and blends in fig. 6. The strength of pure HDPE and iPP as well as that of the 50% HDPE blend show a maximum around $\lambda=20$.

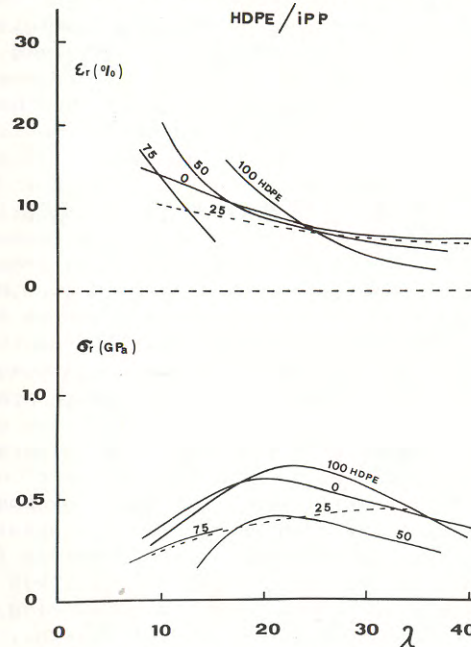


Fig. 6 Strength and elongation at break for HDPE/iPP blend fibres obtained by cold/hot drawing in the present work.

The 25% and the 75% HDPE seems to show contrarily a monotonic increase.

The elongation at break for all the above mentioned materials is a monotonically decreasing function of λ , reaching very low values for almost all the blends.

The slopes of the HDPE-rich mixtures are very steep while those of the iPP-rich blends show a less drastic decrease.

The 50% HDPE blend after a sharp drop levels off beyond $\lambda=15$. It is not possible to give a clear interpretation of the results shown in fig. 5 and 6 and no correlation with structural parameters will be attempted in this work, based only on these preliminary

ry data. In fact, because of the very complex nature of such systems more structural informations are needed: therefore in our Institute, differential scanning calorimetry (DSC), X-Ray diffraction (small and wide angle) and electron scanning microscopy tests are still in progress.

However a few considerations comparing our data with results taken from the literature can be made. In fact ultra high modulus fibres of HDPE-iPP blends have been obtained for the first time only recently by using the "surface growth" technique, already above mentioned⁽¹⁸⁾. From solutions of iPP and HDPE in p-xylene at 120°C HDPE, iPP and a 50/50 blend have been drawn, whose moduli are about 20 GPa^(23,24). Such values are higher than those obtained here directly from solid drawing. This is quite reasonable if one takes into account that in the solution technique the data obtained are relative to very high molecular weight homopolymers HDPE ($\bar{M}_w=1.5 \times 10^6$) and iPP ($\bar{M}_w=3 \times 10^6$).

In our case molecular weight species of about 1 order of magnitude lower were used (HDPE, $\bar{M}_w=1.1 \times 10^5$; iPP, $\bar{M}_w=3 \times 10^5$). Therefore the modulus values obtained in this paper are reasonable lower (10÷15 GPa) than the ones relative to the "surface grown" samples, just as already observed in fig. 3 in the case of pure HDPE.

But, even though no structural interpretation is still possible, a great practical importance stems from the results of this paper. That is, the possibility of obtaining good high modulus and strength fibres from polyolefin-polyolefin blends, which were considered very poor materials from a mechanical point of view just a few years ago⁽²⁵⁾. In fact only very preliminary results were given in a previous study of some authors of this paper, where only fibres drawn at λ_n , were drawn from cylindrical extruded specimens⁽²⁶⁾.

Therefore here we have shown that such a possibility of making ultra-drawn fibres is independent of the previous initial processing conditions (extrusion, pressure molding etc.), but good results can be obtained in any case by choosing and optimizing suitable stretching parameters (i.e. temperature, rate of drawing, single or double step procedures) for more or less compatible components like linear polyethylene and isotactic polypropylene.

5. BIBLIOGRAPHY

- 1) D. Deanin, A. Deanin and T. Sjöblom in Recent Advances in Polymer Blends, Grafts and Blocks, Ed. by H. Sperling, Plenum Press New York 1974.
- 2) J. A. Manson and L. H. Sperling, in "Polymer Blends and Composites" Plenum Press New York 1976.
- 3) R. Paul and S. Newman, Eds. "Polymer Blends" Academic Press, New York 1978.
- 4) R. Greco and E. Martuscelli, *La Chimica e l'Industria* **61**(4), 298 (1979).
- 5) D. M. Bigg, *Polym. Eng. Sci.*, **1b**, 725 (1976).
- 6) E. Martuscelli, *Quad. Ing. Chim. It.*, **11**, 171 (1975).
- 7) A. Peterlin, *Polym. Eng. Sci.*, **17**, 183 (1977);
ibidem " " " , **18**, 1062 (1978);
ibidem " " " , **19**, 118 (1979).
- 8) H. H. Kausch and J. Becht, *Rheol. Acta*, **9**, 137 (1970).
- 9) H. H. Kausch and K. L. De Vries, *Int. J. Fracture*, **11**, 109 (1975).
- 10) E. W. Fisher and H. Goddar, *J. Polym. Sci.*, **C16**, 4405 (1969).
- 11) E. S. Clark, *Polym. Prep., Nat. Amer. Chem. Soc. Meeting, Chicago, Illinois* (August 1977).
- 12) G. Capaccio, I. M. Ward, *Polym. Eng. Sci.*, **15**, 219 (1975).
- 13) G. Capaccio, T. A. Compton and I. M. Ward, *J. Polym. Sci., Polym. Phys. ed.* **14**, 1641 (1976).
- 14) W. G. Perkins, N. J. Capiati and R. S. Porter, *Polym. Eng. Sci.*, **16**, 200 (1976);
R. S. Porter, J. H. Southern and N. Weeks, *Polym. Eng. Sci.*, **15**, 213 (1975).
- 15) P. J. Barham and A. Keller, *J. Mat. Sci.*, **11**, 27 (1976).
- 16) L. Jarecki and D. L. Meyer, *Polymer*, **20**, 1078 (1979);
ibidem , *J. Polym. Sci., Polym. ed.*, **17**, 1611 (1979).
- 17) P. Smith, P. J. Lemstra, *J. Mat. Sci.*, **15**, 505 (1980).
- 18) A. Zwijnenburg and A. J. Pennings, *J. Polym. Sci., Polym. letter*, **14**, 339 (1976).
- 19) E. S. Clark and L. S. Scott, *Polym. Eng. Sci.*, **14**, 682 (1974).
- 20) D. L. M. Cansfield, G. Capaccio and I. M. Ward, *Polym. Eng. Sci.*, **16**, 721 (1976).
- 21) W. N. Taylor jr. and E. S. Clark, *Polym. Eng. Sci.*, **18**, 518 (1978).
- 22) R. Greco, Ma Rong Tang, S. Cimmino and G. Ragosta "Effect of temperature, draw ratio, rate and thickness of the specimen on the fibre formation of polyethylene-polypropylene blends" in preparation.
- 23) A. Coombes and A. Keller, *J. Polym. Sci., Polym. Phys. ed.*, **17**, 1637 (1979).
- 24) A. Coombes, C. G. Cannon and A. Keller, *J. Polym. Sci., Polym. Phys. ed.*, **17**, 1257 (1979).
- 25) R. Greco, G. Mucciariello, G. Ragosta, E. Martuscelli, *J. Mat. Sci.*, **15**, 845 (1980).
- 26) R. Greco, G. Mucciariello, G. Ragosta, E. Martuscelli, *J. Mat. Sci.*, in print.

SESSION 3

La session est ouverte sous la présidence de
B. PERSOZ
Ancien Président du Groupe Français de Rhéologie

Sont intervenus MM. :

M. BERVEILLER et A. ZAOUI
R. MAZET
M. SUERY et B. BAUDELET
C. REY et P. FRANCIOSI

**METHODES SELF-CONSISTENTES
EN MECANIQUE DES SOLIDES HETEROGENES**
**SELF-CONSISTENT SCHEMES
FOR HETEROGENEOUS SOLID MECHANICS**

M. BERVEILLER et A. ZAOUI

Laboratoire PMTM, CNRS, Université Paris-Nord - Villetaneuse - France

RESUME

On situe les méthodes self-consistantes par rapport à l'approche statistique systématique de E. Kröner comme par rapport aux approches déterministes d'homogénéisation des milieux périodiques. Après avoir rappelé le principe général du schéma self-consistent, et présenté la solution de divers problèmes d'inclusions, on traite le cas simplifié d'un matériau à deux phases de comportement isotrope et l'on montre sur deux exemples (plasticité de métaux biphasés et influence d'une porosité sur les coefficients élastiques d'un matériau endommagé) comment l'on peut obtenir aisément des prédictions significatives sur le comportement du milieu homogène équivalent au matériau hétérogène étudié. On revient ensuite à la formulation générale en l'illustrant sur le cas plus complexe de la plasticité des polycristaux métalliques. On souligne dans ce cas l'importance de la prise en compte des effets d'accommodation plastique des incompatibilités plastiques intergranulaires sur la prévision de l'anisotropie plastique et du développement des textures de déformation. D'autre part, sur la formulation numérique adoptée, on souligne les limites de validité des schématisations self-consistantes classiques, puis l'on développe, à partir de la solution du problème d'une paire d'inclusions, une voie de généralisation du schéma self-consistent dans une formule «à n sites» pouvant déboucher sur une formulation statistique plus systématique.

ABSTRACT

Firstly, the self-consistent scheme is compared to E. Kröner's systematic statistical approach as well as to homogenization deterministic approaches for periodic media. The general principle of the self-consistent scheme is recalled and the solution of various inclusion problems presented. The simplified case of a two-phase isotropic material is then studied. Two examples (namely the plasticity of two-phase metals and the influence of a given porosity on the elastic moduli of a damaged material) show how significant predictions may easily be derived concerning the behaviour of the equivalent homogeneous medium. The general formulation is then re-examined and illustrated in the more complex case of metallic plastic polycrystals. The important effects of a plastic accommodation of intergranular plastic incompatibilities are then outlined as far as the prediction of plastic anisotropy and deformation textures is concerned. Moreover, the numerical formulation proposed for such problems allows us to discuss the validity limits of classical self-consistent schemes and to provide for further developments. Based on the solution of the two inclusions/matrix problem, a way of generalization of the self-consistent scheme is presented, in the form of an "n-sites" formulation which could open a more systematic statistical approach.

$$f_i(\sigma_i, \epsilon_i, \Sigma, E, \dots) = 0 \quad (1)$$

où les fonctions f_i ont la propriété d'"auto-équilibre"

$$f_i(\Sigma, E, \Sigma, E, \dots) \equiv 0 \quad (2)$$

1. INTRODUCTION

Les méthodes self-consistantes en mécanique des solides visent, comme les deux approches déjà présentées (méthode des "bornes" [1] et homogénéisation [2]), à déduire le comportement d'un milieu hétérogène de celui de ses constituants. Elles partagent avec la première le point de vue statistique, et non déterministe, et, avec la seconde, l'objectif de parvenir à une estimation unique, et non un domaine de valeurs possibles. Comme, simultanément, elles ne recourent pas à une description statistique complète et systématique de la structure hétérogène, c'est qu'elles se fondent sur une hypothèse implicite de distribution des constituants (du type de l'hypothèse de périodicité, posée dès le départ pour les méthodes d'homogénéisation). Il a été montré effectivement, tout au moins pour certains comportements, que cette hypothèse de structure était celle du désordre parfait [3], à l'opposé, dans un certain sens, de celle de périodicité qui décrit un ordre complet.

Ceci étant, les méthodes self-consistantes, utilisées également dans bien d'autres domaines de la physique, se distinguent par leur relative facilité de mise en oeuvre et leur versatilité, qui leur ont permis très vite de s'adapter à d'autres comportements que ceux de l'élasticité linéaire. Elles reposent sur l'assimilation des interactions mécaniques entre chaque élément d'un agrégat hétérogène et l'ensemble de tous les autres à celle entre cet élément et le milieu homogène équivalent de comportement inconnu par lequel on cherche à représenter l'agrégat hétérogène. Ce dernier problème, se ramenant à celui de l'interaction entre une "inclusion" (l'élément considéré) et une "matrice" infinie (le milieu équivalent), a une solution explicite dans un grand nombre de cas. Cette solution étant alors appliquée successivement à chaque élément de l'agrégat (ou plutôt, à chaque famille d'éléments de mêmes caractéristiques mécaniques et géométriques), le comportement du milieu équivalent est finalement identifié par le biais de l'expression des relations entre variables mécaniques élémentaires et globales.

On doit à Hershey [4] et Kröner [5] les premières formulations de schémas self-consistents appliquées à la mécanique des solides hétérogènes, dans le cas de comportements linéaires. Divers développements ont, à la suite de ceux de Kröner [6], permis d'aborder le cas de la plasticité tandis que Hill [7] formulait d'une manière plus générale et rigoureuse les équations fondamentales du schéma self-consistent (voir ch.3). Il suffira pour le moment d'en donner une description sommaire, avant d'envisager des applications plus spécifiques et explicites.

Soit un agrégat hétérogène de N familles d'éléments homogènes. Chacune de ces familles (i) a un comportement supposé connu, décrit symboliquement par une relation $\sigma_i(\epsilon_i)$ entre contraintes (σ_i) et déformations totales (ϵ_i) locales. On se fixe également la fraction volumique c_i de chaque "phase" (i) ainsi que la forme moyenne de ses constituants et sa disposition par rapport au repère macroscopique de référence.

On a ensuite à résoudre N problèmes auxiliaires de type "inclusion-matrice", où l'on établit les relations entre σ_i, ϵ_i dans la phase (i) rassemblée dans l'inclusion la représentant en moyenne et les contraintes et déformations totales macroscopiques Σ, E appliquées à l'infini à la matrice homogène dans laquelle est située cette inclusion. La solution de ces N problèmes, qui fait intervenir les caractéristiques inconnues du comportement du milieu homogène équivalent constituant la matrice et les conditions de liaison spécifiques entre la phase (i) et la matrice, se met alors sous la forme symbolique :

(i.e. : s'il n'y a pas d'hétérogénéité de comportement entre la matrice et l'inclusion, les contraintes et les déformations doivent être uniformes dans tout le milieu).

On dispose alors de N familles de relations (1) entre les (N+1) familles d'inconnues (Σ, σ_i) ou (E, ϵ_i). Les relations supplémentaires nécessaires sont fournies par les conditions de moyenne :

$$\Sigma = c_i \sigma_i \quad \text{ou} \quad E = c_i \epsilon_i \quad (3)(4)$$

l'une seule des deux relations (3) étant nécessaire du fait de la propriété (2). L'identification du comportement effectif du milieu homogène équivalent est donc en principe possible, sous réserve que les N problèmes auxiliaires d'inclusions soient résolus.

Sans entrer encore dans plus de détails, on conçoit donc que le schéma self-consistent soit applicable à une grande variété de problèmes de mécanique des matériaux hétérogènes, déterminée par la variété des problèmes d'inclusions susceptibles d'être résolus. Citons seulement le cas des polycristaux (en élasticité et en plasticité), des matériaux composites ou multiphasés, des milieux microporeux ou microfissurés etc... On distingue également ce qui fait la principale limitation de cette schématisation, à savoir le fait d'assimiler l'environnement de chaque phase à un milieu homogène, en abandonnant toute possibilité de description de la répartition "géographique" des différentes phases et d'analyse fine des interactions entre phases. Ce sont ces différents aspects qui seront maintenant illustrés de façon succincte, en vue de mieux dégager à la fois l'utilité, les limites et les possibilités d'extension d'une telle schématisation. On étudiera d'abord (chapitre 2) quelques problèmes élémentaires d'inclusions dont la solution peut être utilisée dans une schématisation self-consistente. Puis on formulera une telle schématisation dans diverses versions appliquées à quelques problèmes typiques. Enfin on envisagera une possibilité d'extension du schéma self-consistent classique ("à un site") d'une manière qui pourrait en faire une approche statistique systématique, dans une formulation "à N sites" susceptible de traiter des informations structurales plus riches que celles habituellement prises en compte.

2. PROBLEMES D'INCLUSIONS

2.1. Le problème d'Eshelby [8].

Soit un milieu infini non chargé, homogène, élastique et isotrope, de module de cisaillement μ et de rapport de Poisson ν . On cherche les champs élastiques associés à une déformation plastique ϵ^P uniforme limitée à une région ellipsoïdale V (l'inclusion). Pour établir la solution de ce problème, on le reconstruit par la pensée en différentes phases :

- on isole l'inclusion non déformée de la matrice et on lui fait subir la déformation plastique ϵ^P .
- on ramène alors l'inclusion à sa forme initiale par une déformation élastique $-\epsilon^P$, créée par une distribution surfacique de forces $dF_i = -\sigma_{ij}^P n_j dS$ appliquées à la surface S de l'inclusion de normale unitaire extérieure n_i . On a :

$$\sigma_{ij}^P = 2\mu \left[\epsilon_{ij}^P + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk}^P \delta_{ij} \right] \quad (5)$$

- par rapport à l'état initial, la forme de l'inclusion n'est pas changée mais il subsiste dans le milieu infini la distribution fictive dF_i que l'on peut annuler en lui superposant une distribution opposée $-dF_i$. Celle-ci crée dans tout le milieu un champ de contraintes et de déplacements dont le calcul est l'objet du problème. La solution de celui-ci peut être obtenue par l'intermédiaire du tenseur de Green du milieu élastique isotrope infini défini par :

$$G_{ij} = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\delta_{ij}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} |\vec{r}-\vec{r}'|_{,ij} \quad (6)$$

et tel que le déplacement u_i en un point \vec{r} dû à une force dF_j appliquée en \vec{r}' soit donné par :

$$d u_i(\vec{r}) = G_{ij}(\vec{r}-\vec{r}') dF_j \quad (7)$$

Dans ce problème, la distribution $-dF_i$ déduite de (5) crée un déplacement $u_i(\vec{r})$ tel que :

$$u_i(\vec{r}) = \int_S G_{ij}(\vec{r}-\vec{r}') \sigma_{jk}^P n_k dS \quad (8)$$

En posant :

$$\psi(\vec{r}) = \int_V |\vec{r}-\vec{r}'| dV \quad \text{et} \quad \phi(\vec{r}) = \int_V \frac{dV}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

on a, après transformation de (8) en intégrale de volume :

$$u_i = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \epsilon_{jk}^P \psi_{,ijk} - \frac{1}{2\pi} \epsilon_{ik}^P \phi_{,k} - \frac{\nu}{4\pi(1-\nu)} \epsilon_{kk}^P \phi_{,i} \quad (9)$$

La déformation s'obtient alors, dans l'approximation des transformations infinitésimales, par :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

Un résultat remarquable concerne les inclusions ellipsoïdales pour lesquelles la déformation totale ϵ^T est uniforme dans l'inclusion et s'écrit :

$$\epsilon_{ij}^T = S_{ijkl} \epsilon_{kl}^P \quad (10)$$

Les composantes du tenseur S sont données par Eshelby pour une ellipsoïde quelconque.

Dans le cas d'une sphère, le tenseur S peut être réduit à deux facteurs scalaires α et β reliant respectivement la partie sphérique et le déviateur de ϵ^T et de ϵ^P

$$\epsilon_{ii}^T = \alpha \epsilon_{jj}^P$$

$$(\epsilon_{ij}^T - \frac{1}{3} \epsilon_{kk}^T \delta_{ij}) = \beta (\epsilon_{ij}^P - \frac{1}{3} \epsilon_{kk}^P \delta_{ij})$$

$$\text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2}{15} \frac{4-5\nu}{1-\nu} \quad (11)$$

On a donc en général :

$$\epsilon_{ij}^T = \frac{1}{3} (\alpha-\beta) \epsilon_{kk}^P \delta_{ij} + \beta \epsilon_{ij}^P \quad (12)$$

La contrainte σ_{ij} dans l'inclusion sphérique s'obtient alors simplement par :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left[(\epsilon_{ij}^T - \epsilon_{ij}^P) + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{kk}^T - \epsilon_{kk}^P) \delta_{ij} \right] \quad (13)$$

Pour une déformation plastique qui conserve le volume ($\epsilon_{kk}^P=0$) on a dans l'inclusion :

$$\sigma_{ij} = -2\mu(1-\beta) \epsilon_{ij}^P \quad (14)$$

Cet état de contraintes internes est associé à l'incompatibilité plastique :

$\epsilon_{kk}^P = \epsilon^P$ dans l'inclusion, $\epsilon_{kk}^P = 0$ dans la matrice. Ce résultat se généralise facilement au cas où la matrice est également déformée plastiquement de manière uniforme par ϵ_{ij}^{Po} (Kröner [6]). On a :

$$\sigma_{ij} = -2\mu(1-\beta)(\epsilon_{ij}^P - \epsilon_{ij}^{Po}) \quad (15)$$

Si on superpose à ce champ de contraintes internes, des contraintes uniformes Σ_{ij} appliquées à l'infini, on a alors dans l'inclusion :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu(1-\beta)(\epsilon_{ij}^{Po} - \epsilon_{ij}^P) \quad (16)$$

2.2. Le problème de l'inclusion hétérogène.

Le milieu élastique infini isotrope de coefficients de Lamé λ^0 et μ^0 est soumis à une contrainte uniforme à l'infini Σ_{ij} créant une déformation élastique uniforme à l'infini E_{ij} . Il contient une inclusion ellipsoïdale hétérogène à élasticité isotrope caractérisée par les constantes λ' , μ' , ν' . Cette hétérogénéité élastique perturbe localement, en particulier dans l'inclusion, les contraintes appliquées. La solution de ce problème peut être trouvée à partir de celle du problème précédent : on cherche une déformation plastique fictive ϵ^{P*} de l'inclusion homogène qui conduise aux mêmes contraintes et aux mêmes déformations totales que celles de l'inclusion hétérogène. Dans l'inclusion homogène, on a pour une déformation plastique ϵ^{P*} :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + \lambda^0 (S_{kkmm} - \delta_{mn}) \epsilon_{mn}^{P*} \delta_{ij} + 2\mu^0 (S_{ijkl} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \epsilon_{kl}^{P*} \quad (17)$$

$$\epsilon_{ij}^T = S_{ijkl} \epsilon_{kl}^{P*} + E_{ij} \quad (18)$$

Dans l'inclusion hétérogène, la déformation est élastique et doit être égale à ϵ_{ij}^T . Les contraintes sont alors égales à :

$$\sigma_{ij} = \lambda' \epsilon_{kk}^T \delta_{ij} + 2\mu' \epsilon_{ij}^T \quad (19)$$

Avec (17), (18), (19) et en tenant compte de la relation élastique entre Σ_{ij} et E_{ij} , on a alors :

$$(\lambda' - \lambda^0) S_{mmkl} \epsilon_{kl}^{P*} \delta_{ij} + 2(\mu' - \mu^0) S_{ijkl} \epsilon_{kl}^P + \lambda^0 \epsilon_{kk}^{P*} \delta_{ij} + 2\mu^0 \epsilon_{ij}^{P*}$$

$$= (\lambda^0 - \lambda') E_{kk} \delta_{ij} + 2(\mu^0 - \mu') E_{ij} \quad (20)$$

Pour une sphère, en tenant compte de (11), on a pour ϵ^{P*} :

$$\epsilon_{ij}^{P*} = B E_{ij} + \frac{1}{3}(A-B) E_{kk} \delta_{ij} \quad (21)$$

avec :

$$A = \frac{\chi' - \chi^0}{(\chi^0 - \chi') \alpha - \chi^0} \quad (22)$$

$$B = \frac{\mu' - \mu^0}{(\mu^0 - \mu') \beta - \mu^0} \quad (22)$$

$$\text{où } \chi = \frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu)$$

La déformation élastique réelle ϵ de l'inclusion inhomogène vaut alors :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^T = E_{ij} + S_{ijkl} (B E_{kl} + \frac{1}{3}(A-B) E_{mm} \delta_{kl})$$

soit

$$\epsilon_{ij} = M E_{ij} + \frac{1}{3}(N-M) E_{kk} \delta_{ij} \quad (23)$$

avec

$$\begin{cases} M = 1 + \beta B \\ N = 1 + \alpha A \end{cases} \quad (24)$$

Lorsque la matrice et l'inclusion sont incompressibles ($v_0 = v' = \frac{1}{2}$) on a : $\alpha = 1, \beta = \frac{2}{5}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{kk} &= E_{kk} = 0 \\ B &= \frac{5(\mu^0 - \mu')}{3\mu^0 + 2\mu'} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{5\mu^0}{3\mu^0 + 2\mu'} E_{ij}$$

Pour les contraintes, on a dans l'inclusion :

$$\sigma_{ij} = \frac{5\mu'}{3\mu^0 + 2\mu'} \Sigma_{ij}$$

2.3. Traitement général

Les deux problèmes précédents ne sont en fait que des cas particuliers d'un problème plus général d'un milieu à élasticité hétérogène ayant subi une déformation plastique non uniforme. On désigne les constantes élastiques par

$c_{ijkl}(\vec{r})$ et on décompose le gradient du déplacement total $u_{i,j}^T$ en une partie élastique β_{ij}^e et la partie plastique imposée β_{ij}^P telles que :

$$\beta_{ij}^T = u_{j,i}^T = \beta_{ij}^e + \beta_{ij}^P \quad (26)$$

Toutes les grandeurs mécaniques telles que $c_{ijkl}(\vec{r}), \beta_{ij}^T(\vec{r})$ peuvent être décomposées en une partie uniforme C_{ijkl}^0 et β_{ij}^{To} et une partie variable $c'_{ijkl}(\vec{r})$ et $u_{j,i}^{T'}(\vec{r})$ telles que :

$$\begin{aligned} c_{ijkl}(\vec{r}) &= C_{ijkl}^0 + c'_{ijkl}(\vec{r}) \\ \beta_{ij}^T(\vec{r}) &= \beta_{ij}^{To} + u_{j,i}^{T'}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (27)$$

C_{ijkl}^0 et β_{ij}^{To} sont choisis de telle manière qu'ils correspondent à la valeur moyenne spatiale des grandeurs c et β^T dans tout le milieu :

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^0 &= \frac{1}{V} \int_V c_{ijkl}(\vec{r}) dV \equiv \langle c_{ijkl}(\vec{r}) \rangle \\ \beta_{ij}^{To} &= \langle \beta_{ij}^T(\vec{r}) \rangle \end{aligned} \quad (28)$$

Les équations d'équilibre $\sigma_{ij,i} = 0$ associées à la loi de Hooke

$\sigma_{ij}(\vec{r}) = c_{ijkl}(\vec{r}) \epsilon_{kl}^e(\vec{r})$ conduisent avec l'aide de (26) à :

$$\left[c_{ijkl}(\vec{r}) (u_{l,k}^T - \beta_{kl}^P) \right]_{,i} = 0 \quad (29)$$

A partir de (27) et de (29), on obtient :

$$C_{ijkl}^0 u_{l,ki}^{T'} = C_{ijkl}^0 \beta_{kl,i}^P - \left[c'_{ijkl} (u_{l,k}^T - \beta_{kl}^P) \right]_{,i} \quad (30)$$

équation dont la solution s'obtient à partir du tenseur de Green du milieu infini de constantes élastiques C_{ijkl}^0 sous la forme :

$$u_n^{T'}(\vec{r}) = \int_V G_{jn}(\vec{r}-\vec{r}') f_j(\vec{r}') dV' \quad (31)$$

avec

$$f_j(\vec{r}') = -C_{ijkl}^0 \beta_{kl,i}^P + \left[c'_{ijkl} (u_{l,k}^T - \beta_{kl}^P) \right]_{,i}$$

Par différentiation de (31) on a pour le gradient $u_{n,m}^{T'}$:

$$u_{n,m}^{T'} = \int_V G_{jn,m}(\vec{r}-\vec{r}') \left\{ -C_{ijkl}^0 \beta_{kl,i}^P + \left[c'_{ijkl} (u_{l,k}^T - \beta_{kl}^P) \right]_{,i} \right\} dV' \quad (32)$$

Cette équation integrodifférentielle en $u_{n,m}^{T'}$ peut être résolue par une méthode itérative lorsque $c'(\vec{r})$ et β^P sont donnés. Les deux problèmes précédents peuvent être résolus plus simplement à partir des relations précédentes en posant :

- pour l'inclusion plastique :

$$\begin{cases} \beta_{ij}^P(\vec{r}) = \beta_{ij}^P \delta_v^0(\vec{r}) \\ c'_{ijkl}(\vec{r}) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \delta_v^0(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \notin V \\ 1 & \text{si } \vec{r} \in V \end{cases} \quad (33)$$

- pour l'inclusion inhomogène :

$$\begin{cases} \beta_{ij}^P = 0 \\ c_{ijkl}(\vec{r}) = C_{ijkl}^0 + (C_{ijkl}^1 - C_{ijkl}^0) \delta_v^0(\vec{r}) \end{cases} \quad (34)$$

Nous appliquons ici ce formalisme général pour étudier tout d'abord l'interaction de deux inclusions plastiques puis nous généralisons la solution obtenue au cas de deux inclusions hétérogènes. Nous indiquons comment ces résultats peuvent être étendus au cas de N inclusions.

2.3.1. La paire d'inclusions plastiques.

Dans une matrice infinie élastique, et non chargée de constantes C_{ijkl}^0 existent deux inclusions V_1 et V_2 ayant subi respectivement les déformations plastiques uniformes β^{P1} et β^{P2} . D'après (33), on peut donc écrire :

$$\beta^P(\vec{r}) = \beta^{P1} \delta_{V_1}^0(\vec{r}) + \beta^{P2} \delta_{V_2}^0(\vec{r}), \quad c'(\vec{r}) = 0 \quad (35)$$

D'après (32), on a alors :

$$u_{n,m}^T(\vec{r}) = - \int G_{jn,m}(\vec{r}-\vec{r}') C_{ijkl}^O \beta_{kl,i}^{P1}(\vec{r}') dV' \quad (36)$$

soit avec l'aide du théorème de Gauss et de la propriété $\delta_{v,i}^O = -\delta_i(S)$

$$u_{n,m}^T(\vec{r}) = - C_{ijkl}^O \beta_{kl}^{P1} \int_{V_1} G_{jn,im}(\vec{r}-\vec{r}') dV_1 - C_{ijkl}^O \beta_{kl}^{P2} \int_{V_2} G_{jn,im}(\vec{r}-\vec{r}') dV_2 \quad (37)$$

Les valeurs moyennes $\overline{u_{n,m}^T}$ dans les inclusions 1 et 2 sont alors obtenues par :

$$\overline{u_{n,m}^{T1}} = \frac{1}{V_1} \int_{V_1} u_{n,m}^T dV_1 = - C_{ijkl}^O \beta_{kl}^{P1} T_{jnim}^{11} - C_{ijkl}^O \beta_{kl}^{P2} T_{jnim}^{12} \quad (38)$$

$$\overline{u_{n,m}^{T2}} = \frac{1}{V_2} \int_{V_2} u_{n,m}^T dV_2 = - C_{ijkl}^O \beta_{kl}^{P2} T_{jnim}^{22} - C_{ijkl}^O \beta_{kl}^{P1} T_{jnim}^{21}$$

avec

$$T_{jnim}^{IJ} = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_J} G_{jn,im} dV^I dV^J \quad (39)$$

Connaissant les parties plastiques β^{P1} et β^{P2} , les équations (38) fournissent en moyenne le gradient du déplacement total ; il est donc facile d'obtenir les parties élastiques moyennes dans les inclusions. Cette méthode se généralise sans aucune difficulté à $N(N>2)$ inclusions. Nous avons évalué les intégrales

T^{IJ} dans le cas de deux inclusions sphériques situées dans un milieu infini isotrope.

Dans ce cas, on a pour les déformations totales moyennes ϵ_{ij}^{T1} et ϵ_{ij}^{T2} des inclusions 1 et 2 :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^{T1} &= S_{ijkl} \epsilon_{kl}^{P1} + \frac{1}{V_1} M_{ijkl}^{12} \epsilon_{kl}^{P2} \\ \epsilon_{ij}^{T2} &= S_{ijkl} \epsilon_{kl}^{P2} + \frac{1}{V_2} M_{ijkl}^{12} \epsilon_{kl}^{P1} \end{aligned} \quad (40)$$

Le tenseur S est celui défini par Eshelby [8] et se ramène aux deux scalaires α et β définis par (11).

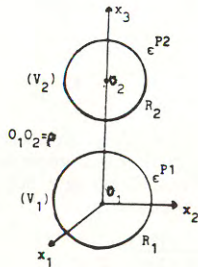


Figure 1 : Le problème de la paire d'inclusions sphériques.

Le tenseur M^{12} a été évalué dans le système d'axes de la figure 1.

On a :

$$M_{ijkl} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \psi_{,ijkl}^* - \frac{1}{8\pi} \left\{ \delta_{il} \phi_{,kj}^* + \delta_{ik} \phi_{,lj}^* + \delta_{jl} \phi_{,ki}^* + \delta_{jk} \phi_{,li}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} \delta_{kl} \phi_{,ij}^* \right\} \quad (41)$$

avec :

$$\psi_{,ijkl}^* = \int_{V_1} \int_{V_2} |\vec{r}-\vec{r}'|_{,ijkl} dV_1 dV_2 \quad \text{et} \quad \phi_{,ij}^* = \int_{V_2} \int_{V_1} \left| \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right|_{,ij} dV_1 dV_2 \quad (42)$$

On obtient finalement pour les composantes indépendantes et non nulles, et avec les notations de la figure 1 :

$$\begin{aligned} M_{1111} = M_{2222} &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{V_1 V_2}{\rho^3} \left(\frac{9}{5} k^2 + 1 - 2\nu \right) \\ M_{3333} &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{V_1 V_2}{\rho^3} \left[\frac{24}{5} k^2 - (8 - 4\nu) \right] \\ M_{1122} = M_{2211} &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{V_1 V_2}{\rho^3} \left[\frac{3}{5} k^2 - 1 + 2\nu \right] \\ M_{1313} = M_{2323} &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{V_1 V_2}{\rho^3} \left(1 + \nu - \frac{12k^2}{5} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

$$M_{1212} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{V_1 V_2}{\rho^3} \left[\frac{3}{5} k^2 + 1 - 2\nu \right]$$

$$M_{2233} = M_{1133} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{V_1 V_2}{\rho^3} \left(2 - \frac{12}{5} k^2 + 2\nu \right)$$

$$M_{3322} = M_{3311} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{V_1 V_2}{\rho^3} \left(2 - \frac{12}{5} k^2 - 4\nu \right)$$

avec

$$k^2 = \frac{R_1^2 + R_2^2}{\rho^2}$$

L'étude des composantes M_{ijkl} montre d'une part une forte anisotropie des interactions entre les inclusions mais aussi leur importance par rapport aux interactions propres d'une inclusion avec la matrice, caractérisées par α et β . Pour un milieu infini isotrope et homogène possédant deux inclusions plastiques et chargé à l'infini (Σ_{ij}), les contraintes σ_{ij}^1 et σ_{ij}^2 dans les inclusions

s'obtiennent alors par :

$$\sigma_{ij}^1 = \Sigma_{ij} - 2\mu(1-\beta) \epsilon_{ij}^{P1} + \frac{2\mu}{V_1} N_{ijkl}^{12} \epsilon_{kl}^{P2} + 2\mu \left[\frac{1}{3}(\alpha-\beta) + \frac{\nu(\alpha-1)}{1-2\nu} \right] \epsilon_{kk}^{P1} \delta_{ij} \quad (44)$$

$$\sigma_{ij}^2 = \Sigma_{ij} - 2\mu(1-\beta) \epsilon_{ij}^{P2} + \frac{2\mu}{V_2} N_{ijkl}^{12} \epsilon_{kl}^{P1} + 2\mu \left[\frac{1}{3}(\alpha-\beta) + \frac{\nu(-1)}{1-2\nu} \right] \epsilon_{kk}^{P2} \delta_{ij}$$

N_{ijkl} se déduit de M_{ijkl} par les relations :

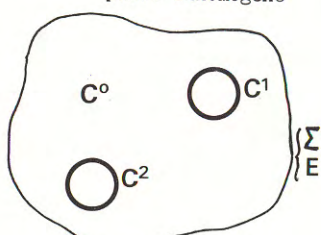
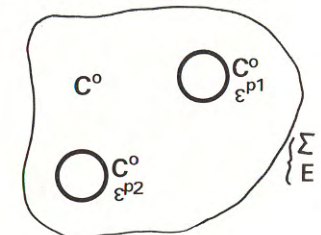
$$N_{ijkl}^{12} = N_{ijkl}^{21} = \left\{ M_{ijkl}^{12} + \frac{\nu}{1-2\nu} M_{mmkl}^{12} \delta_{ij} \right\} \quad (45)$$

2.3.2. Le problème de la paire d'inclusions inhomogènes.

On peut utiliser la solution du problème précédent pour trouver une solution approchée du problème de la paire d'inclusions élastiques inhomogènes situées dans une matrice élastique isotrope chargée à l'infini (Σ_{ij}, E_{ij}). La méthode consiste à chercher pour le problème équivalent d'une paire d'inclusions plastiques mais homogènes, les déformations plastiques moyennes ϵ^{P1} et ϵ^{P2} des inclusions telles que :

- les déformations totales moyennes des deux inclusions soient identiques dans les deux cas.
- les contraintes moyennes dans les inclusions soient les mêmes pour les deux problèmes.

On a donc le tableau suivant : (tableau I).

paire inhomogène		paire équivalente homogène
		
$\begin{cases} \epsilon_1 = E + \epsilon_1' \\ \epsilon_2 = E + \epsilon_1' \end{cases}$	déformations totales	$\begin{cases} \epsilon_1 = S^1 \epsilon^{P1} + \frac{1}{V_1} M^{12} \epsilon^{P2} + E \\ \epsilon_2 = S^2 \epsilon^{P2} + \frac{1}{V_2} M^{21} \epsilon^{P1} + E \end{cases}$
$\begin{cases} \epsilon_1 = E + \epsilon_1' \\ \epsilon_2 = E + \epsilon_1' \end{cases}$	déformations élastiques	$\begin{cases} \epsilon_1^e = (S^1 - I) \epsilon^{P1} + \frac{1}{V_1} M^{12} \epsilon^{P2} + E \\ \epsilon_2^e = (S^2 - I) \epsilon^{P2} + \frac{1}{V_2} M^{21} \epsilon^{P1} + E \end{cases}$
$\begin{cases} \sigma_1 = C_1 \epsilon_1 \\ \sigma_2 = C_2 \epsilon_2 \end{cases}$	contraintes	$\begin{cases} \sigma_1 = C_0 \epsilon_1^e \\ \sigma_2 = C_0 \epsilon_2^e \end{cases}$
$\begin{cases} \sigma_1 \equiv C_1 \left(S^1 \epsilon^{P1} + \frac{1}{V_1} M^{12} \epsilon^{P2} + E \right) = C_0 \left((S^1 - I) \epsilon^{P1} + \frac{1}{V_1} M^{12} \epsilon^{P2} + E \right) \\ \sigma_2 \equiv C_2 \left(S^2 \epsilon^{P2} + \frac{1}{V_2} M^{21} \epsilon^{P1} + E \right) = C_0 \left((S^2 - I) \epsilon^{P2} + \frac{1}{V_2} M^{21} \epsilon^{P1} + E \right) \end{cases} \quad (46)$		

Les équations (46) fournissent donc les inconnues ϵ^{P1} et ϵ^{P2} en fonction de E et le tableau (I) permet de calculer toutes les grandeurs élastiques moyennes dans chacune des inclusions, le tenseur M étant déduit de (43) par le changement d'axes adapté.

pour un milieu et des inclusions inhomogènes mais isotropes et incompressibles, de modules μ^0, μ^1 et μ^2 , on a pour les déformations plastiques fictives ϵ^{P1} et ϵ^{P2} :

$$\begin{cases} \epsilon^{P1} \left(\frac{2}{5} (\mu_1 - \mu^0) + \mu^0 \right) + \epsilon^{P2} \frac{M^{12}}{V_1} (\mu_1 - \mu^0) = (\mu^0 - \mu^1) E \\ \epsilon^{P1} \frac{M^{12}}{V_2} (\mu_2 - \mu^0) + \epsilon^{P2} \left(\frac{2}{5} (\mu_2 - \mu^0) + \mu^0 \right) = E (\mu^0 - \mu^2) \end{cases} \quad (47)$$

Nous avons étudié numériquement le cas particulier d'une paire d'inclusions sphériques de même rayon R inhomogènes, isotropes et incompressibles, de module μ , situées dans une matrice élastique incompressible de module μ_0 à laquelle est appliquée une contrainte ϵ_{33} à l'infini.

La distance entre les inclusions est ρ .

La figure 2 montre la variation du rapport ϵ_{33}/E_{33} entre la déformation élastique moyenne ϵ_{33} dans les inclusions et la déformation de la matrice E_{33} en fonction de la distance ($x = \frac{\rho}{R}$) entre inclusions et du rapport des modules μ_1/μ_0 . Comme on pouvait s'y attendre "l'effet de paire" est surtout sensible pour des inclusions proches ($x < 2,4$) et des inhomogénéités marquées : $0,4 < \mu_1/\mu_0 < 2,5$. Dans ces cas, "l'effet de paire" peut atteindre 50% de l'effet d'inhomogénéité.

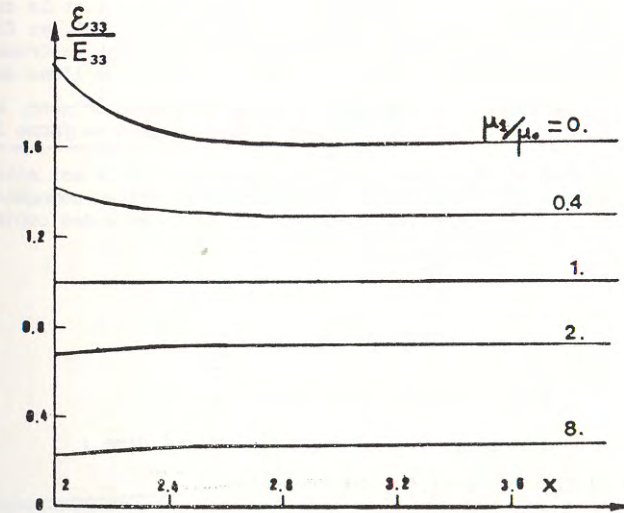


Figure 2 : Rapport ϵ_{33}/E_{33} entre la déformation élastique moyenne ϵ_{33} et la déformation de la matrice E_{33} en fonction du rapport $x = \rho/R$ dans le cas de deux inclusions sphériques inhomogènes.

Ces calculs de paire d'inclusions s'étendent sans difficultés majeures au problème de N inclusions inhomogènes en interaction : les déformations plastiques fictives se déterminent alors par un système de N équations tensorielles à N inconnues, mais la méthode générale reste la même. Ils serviront de base, dans la partie IV, à la formulation de schémas self-consistents généralisés, après l'exposé de quelques exemples de mise en oeuvre du schéma classique "à un site" (une seule inclusion prise en compte dans le problème auxiliaire d'interaction).

3. APPLICATION DU SCHEMA SELF-CONSISTENT A UN SITE A QUELQUES PROBLEMES DE MATERIAUX HETEROGENES.

Les applications qui suivent ont été choisies pour illustrer à la fois la variété des problèmes rhéologiques susceptibles d'être traités par le schéma self-consistent et celle des formes et des niveaux de complexité qu'il peut présenter.

3.1. Endommagement des matériaux.

L'étude de l'endommagement des matériaux est actuellement abordée de deux façons :

- étude des mécanismes physiques responsables de l'endommagement et de l'évolution avec les traitements thermomécaniques.
- caractérisation globale du matériau endommagé.

Ce deuxième point de vue peut être précisé en estimant les effets globaux d'un effet spécifique d'endommagement. Ainsi, l'affaiblissement d'un matériau dû à l'apparition de fissures, de microvides ou de cavités se traduit notamment à l'échelle macroscopique par une diminution des caractéristiques élastiques. Si on considère un tel matériau comme hétérogène, on peut alors utiliser la modélisation self-consistente pour trouver le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν du milieu endommagé (considéré ici comme isotrope), en fonction de la fraction volumique de vides c ; le matériau sain également isotrope a un module d'Young E_m et un rapport de Poisson ν_m connus et constitue l'une des deux

"phases" (parallèlement à la phase "vides") du milieu hétérogène. Le principe exposé dans la partie 1 est donc à mettre en oeuvre dans sa forme la plus simple où $N = 2$.

L'inclusion de matériau sain est supposée sphérique ; elle est située dans une matrice de modules (E, ν) inconnus, représentant le milieu homogène équivalent. On a, à partir de (23), pour les traces et les déviateurs des contraintes :

$$\sigma_{kk} = [1 + A(\alpha-1)] \Sigma_{kk} \quad (48)$$

$$s_{ij} = [1 + B(\beta-1)] S_{ij}$$

avec

$$A = \frac{X_m - \chi}{(\chi - X_m)\alpha - \chi}, \quad B = \frac{\mu_m - \mu}{(\mu - \mu_m)\beta - \mu} \quad (49)$$

Par ailleurs, on doit avoir ici $\langle \sigma_{ij} \rangle = \Sigma_{ij}$, c'est à dire :

$$(1-c) [1 + A(\alpha-1)] = 1 \quad (50)$$

$$(1-c) [1 + B(\beta-1)] = 1 \quad (50)$$

d'où l'on tire μ et χ

$$\begin{cases} \mu = \mu_m \left(1 - \frac{c}{1-\beta}\right) \\ \chi = X_m \left(1 - \frac{c}{1-\alpha}\right) \end{cases} \quad (51)$$

Le module d'Young E du matériau endommagé vaut :

$$E = E_m \frac{1+\nu}{1+\nu_m} \left(1 - \frac{c}{1-\beta}\right) \quad (52)$$

Cette relation permet donc, à partir de mesures expérimentales de E et de ν pour des matériaux endommagés, d'estimer la valeur de la fraction volumique de trous fissures, microvides ou cavités compatible avec ces mesures. Nous avons utilisé des résultats (figure 3) de D. Nouaihas [9] pour calculer l'endommagement c associé à une déformation plastique E^P d'un polycristal de cuivre (figure 4). Cette première approche, très sommaire, veut seulement illustrer la facilité d'utilisation d'un schéma self-consistent simplifié pour une première modélisation d'un phénomène donné. Elle pourrait évidemment être développée pour décrire plus finement la distribution des cavités, des effets d'anisotropie etc...

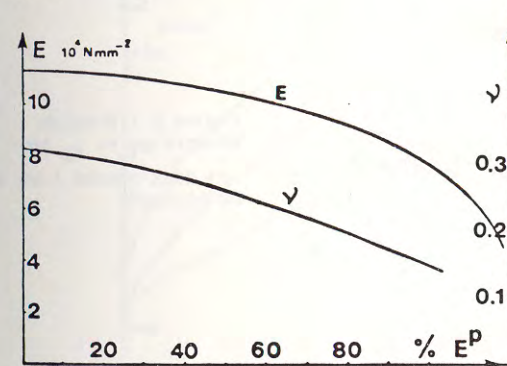


Figure 3 : Module d'Young E et rapport de Poisson ν du cuivre polycristallin en fonction de la déformation plastique de traction E^P (d'après [9]).

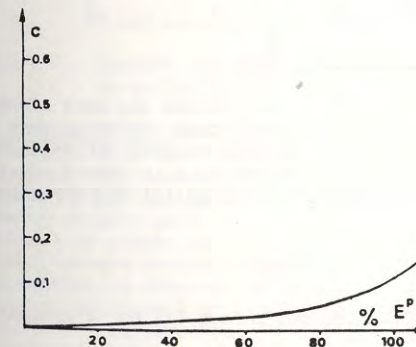


Figure 4 : Concentration en vide calculée d'après (52) et à partir des résultats expérimentaux de la figure 3.

3.2. Plasticité de matériaux biphasés.

L'étude de la plasticité des polycristaux métalliques est directement concernée par les formulations self-consistentes du comportement rhéologique des matériaux hétérogènes, mais elle possède un degré élevé de complexité, notamment du fait de la difficulté d'une bonne description de la loi de comportement intracristallin. Nous présentons ici une méthode simplifiée de caractérisation du comportement de matériaux biphasés : chaque phase est supposée de comportement élastoplastique isotrope, représenté par une loi d'écoulement sous forme finie (relation de Hencky), sans variation de volume. En traction uniaxiale, on a donc, pour chacune des phases (1) et (2) :

$$\sigma_1 = 3 \mu_1 (\epsilon_1) \times \epsilon_1 \quad ; \quad \sigma_2 = 3 \mu_2 (\epsilon_2) \times \epsilon_2 \quad (53)$$

où μ_1 et μ_2 représentent les "modules sécants" (figure 5).

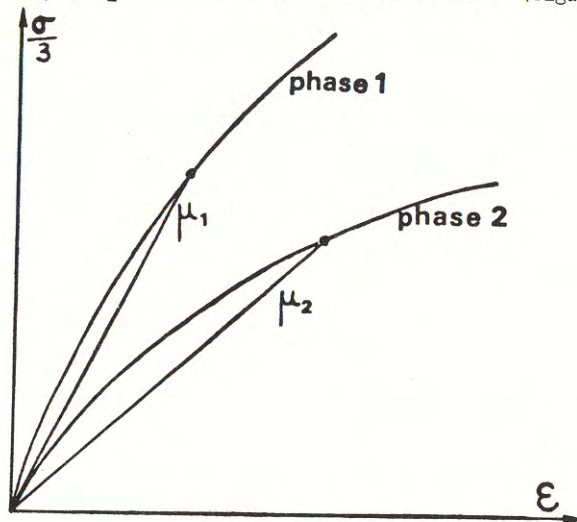


Figure 5 : Modules sécants μ_1 et μ_2 pour les deux phases 1 et 2 du biphasé.

Selon le même schéma self-consistent simplifié à deux phases que dans l'exemple précédent, chaque phase est considérée successivement comme inclusion dans une matrice infinie en écoulement plastique et dont le comportement est celui recherché. Nous supposons qu'il peut également se mettre sous la forme $\Sigma = 3\mu(E) \times E$. D'après le chapitre 2 (formule 25) on peut donc écrire la loi d'interaction sous la forme :

$$\epsilon_1 = \frac{5\mu}{3\mu + 2\mu_1} E, \quad \epsilon_2 = \frac{5\mu}{3\mu + 2\mu_2} E \quad (54)$$

Si c_1 et c_2 désignent les fractions volumiques des phases (1) et (2) respectivement ($c_1 + c_2 = 1$), on a :

$$E = c_1 \epsilon_1 + c_2 \epsilon_2, \quad \Sigma = c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2$$

soit avec la relation (54) :

$$c_1 \frac{5\mu}{3\mu + 2\mu_1} + c_2 \frac{5\mu}{3\mu + 2\mu_2} = 1 \quad (55)$$

Les formules (54) et (55) permettent, pour chaque valeur de E de déduire en fonction de μ_1 , μ_2 et c_1 la valeur de μ et donc la courbe (Σ, E) . Une telle méthode, valable uniquement dans le cas d'un chargement monotone, peut également être développée en termes de vitesses (et de modules tangents). La résolution du problème peut d'ailleurs être simplifiée par l'utilisation d'une méthode graphique [10], à partir de courbes expérimentales de référence obtenues pour deux concentrations particulières.

A titre d'exemple, nous avons appliqué la méthode précédente au cas de laitons biphasés ($\alpha+\beta$). La figure 6 indique la courbe expérimentale $\sigma_1(\epsilon_1)$ pour la phase $\alpha(c_1=1)$ une autre courbe expérimentale pour $c_1 = 40\%$ ainsi que la courbe théorique déduite des précédentes pour $c_1 = 68\%$. La comparaison de celle-ci avec les résultats expérimentaux montre l'utilité de la formulation précédente, relativement à sa simplicité de mise en oeuvre.

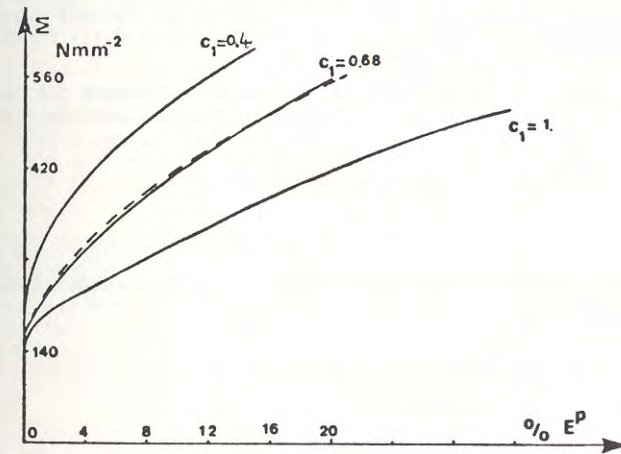


Figure 6 : Courbes d'écroutissage théorique (----) et expérimentale (—) pour le laiton biphasé ($\alpha+\beta$) à 68% de α , 100% de α et 40% de α .

3.3. Plasticité et textures des polycristaux métalliques.

Si l'on veut tenir compte de la structure cristalline réelle des grains du polycristal dans l'analyse du comportement des polycristaux ou matériaux granulaires hétérogènes, il est indispensable de décrire le comportement intracristallin de manière plus détaillée que cela n'a été fait en 3.2. et par ailleurs de prendre en compte les désorientations cristallines entre les grains décrites par leur texture initiale. Le modèle polycristallin permettra alors la prévision de la texture de déformation associée à tels ou tels mécanismes physiques et trajets de chargement et la prise en compte de celle-ci dans la description de l'anisotropie du comportement plastique du polycristal.

Nous présentons tout d'abord une représentation de la plasticité du monocristal (C.F.C., à froid) ; nous montrons ensuite les différentes hypothèses d'accommodation intergranulaire utilisées dans les formulations self-consistentes proposées par différents auteurs. Nous développons ensuite une nouvelle formulation du schéma self-consistent à accommodation plastique ; celle-ci permet de traiter une plus grande diversité de problèmes relatifs au comportement mécaniques de matériaux hétérogènes :

- anisotropie plastique ;
- détermination de surfaces de charges ;
- chargements non monotones ;

- chargements en contrainte ou déformation à un ou plusieurs paramètres.

3.3.1. Comportement du monocristal.

Le comportement élastique du monocristal est supposé linéaire et isotrope. On a pour les déformations élastiques :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij})$$

Pour les métaux, on peut admettre que la transformation plastique à froid est due essentiellement à des glissements sur des plans cristallographiques et dans des directions bien définies. Dans le cas des métaux C.F.C., il s'agit des plans (111) et des directions <110> ; il existe ainsi douze possibilités géométriques de glissement sur les douze systèmes (111) <110>. Nous utilisons un repère privilégié pour décrire les différentes grandeurs mécaniques associées au mécanisme de glissement ; il s'agit d'un repère directeur (c) attaché au réseau atomique du monocristal dont l'orientation n'est pas affectée par le seul glissement plastique. Pour les métaux C.F.C., nous utilisons le repère (c) formé par les axes du cube élémentaire (directions <100>).

Lorsqu'un glissement γ^g a eu lieu sur un système de glissement dont la normale unitaire au plan de glissement est \underline{n}^g et la direction unitaire de glissement \underline{m}^g , on a pour $\underline{\beta}^P$:

$$\beta_{ij}^P = R_{ij}^g \gamma^g \quad (\text{pas de sommation sur } g) \quad (56)$$

$$\text{avec } R_{ij}^g = m_j^g n_i^g$$

Lorsque plusieurs systèmes de glissement sont actifs simultanément on a pour $\underline{\beta}^P$, ϵ^P et ω^P (rotations plastiques) :

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^P &= \sum_g R_{ij}^g \gamma^g \\ \epsilon_{ij}^P &= \frac{1}{2} \sum_g (R_{ij}^g + R_{ji}^g) \gamma^g = \sum_g R_{(ij)}^g \gamma^g \\ \omega_{ij}^P &= -\frac{1}{2} \sum_g (R_{ij}^g - R_{ji}^g) \gamma^g \end{aligned} \quad (57)$$

La cission réduite τ^g sur le plan \underline{n}^g et dans la direction \underline{m}^g vaut :

$$\tau^g = \sigma_{ij} R_{ij}^g \quad (58)$$

Selon la loi de Schmid, un système de glissement est actif lorsque la cission τ^g y atteint une valeur critique τ_c^g dépendant de l'état de l'érouissage du monocristal.

En supposant que cet état d'érouissage dépend linéairement de l'amplitude du glissement sur les n systèmes actifs, τ_c^g peut s'écrire, si l'état initial est identique sur tous les systèmes :

$$\tau_c^g = \tau^0 + \sum_h H^g h \gamma^h \quad (59)$$

où γ^h est choisi positif par une orientation convenable de \underline{m}^g . $H^g h$ est la matrice d'érouissage pour le monocristal ; elle a été introduite par Koiter [11] sous forme diagonale ($H^g h = H \delta^{gh}$) et généralisée par Mandel [12] au cas de mécanismes de glissement non indépendants.

Dans le repère (c), on a alors :

* pour un système g actif et qui le reste :

$$R_{ij}^g(c) d\sigma_{ij}^g(c) = \sum_h H^g h d\gamma^h \quad (60)$$

$$\sigma_{ij}^g(c) R_{ij}^g(c) = \tau^0 + \sum_h H^g h \gamma^h$$

* pour un système g actif et qui cesse de l'être :

$$R_{ij}^g(c) d\sigma_{ij}^g(c) < \sum_h H^g h d\gamma^h \quad (61)$$

$$\sigma_{ij}^g(c) R_{ij}^g(c) = \tau^0 + \sum_h H^g h \gamma^h$$

* pour un système inactif :

$$R_{ij}^g(c) \sigma_{ij}^g(c) < \tau^0 + \sum_h H^g h \gamma^h \quad (62)$$

La matrice H, la cission critique initiale τ^0 et les matrices d'orientation R_{ij}^g caractérisent le comportement plastique du monocristal. La matrice d'érouissage peut être déterminée expérimentalement (au moins partiellement) à partir de mesures d'érouissage latent [13], [14], [15]. Les résultats obtenus montrent qu'en général les termes non diagonaux sont plus importants que les termes diagonaux et qu'il existe une anisotropie d'érouissage latent relativement importante.

3.3.2. Différents schémas self-consistents proposés.

Le modèle de Kröner.

La première approche self-consistente du problème de la plasticité du polycristal a été proposée par Kröner [6] qui utilise la solution d'Eshelby du problème de l'inclusion plastique sphérique en élasticité isotrope, étendue au cas d'une matrice plastifiée et chargée.

Dans un grain du polycristal déformé plastiquement de ϵ^P existe une contrainte σ telle que :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu(1-\beta)(\epsilon_{ij}^P - \epsilon_{ij}^P) \quad (63)$$

Cette solution est obtenue par l'intermédiaire de deux hypothèses très fortes qui font que le modèle de Kröner n'est pas, rigoureusement, entièrement self-consistent :

- la déformation plastique de la matrice est uniforme ;
- le comportement de la matrice est élastique.

Ces hypothèses reviennent à représenter l'accommodation intergranulaire comme purement élastique : la loi d'interaction ainsi obtenue surestime fortement les contraintes internes et masque les caractères propres du comportement intracristallin. Cette modélisation des interactions entre grains présente cependant l'avantage de la simplicité et permet son utilisation effective pour des problèmes variés.

Le modèle de Hill.

Pour lever l'hypothèse de l'uniformité de la déformation plastique dans la matrice et donner à cette dernière un comportement élastoplastique, Hill [7] a proposé une formulation générale sous forme incrémentale.

Soient L_c et L les tenseurs des "modules tangents" de l'inclusion et de la matrice (constituée du milieu homogène équivalent). On a :

$$d\sigma = L_c d\epsilon \quad \text{et} \quad d\Sigma = L dE \quad (64)$$

et, pour le problème de l'inclusion, on obtient alors :

$$d\sigma_{ij} = d\Sigma_{ij} + L^*_{ijkl} (dE_{kl} - d\epsilon_{kl}) \quad (65)$$

où le tenseur L^* dépend du tenseur cherché L par l'intermédiaire de son tenseur de Green associé pour le milieu infini. L'expression des relations générales entre grandeurs locales et globales conduit alors à l'équation self-consistante (relation intégrale implicite) :

$$L = \langle L_C (L_C + L^*)^{-1} (L + L^*) \rangle \quad (66)$$

Les relations précédentes, associées aux relations de comportement du monocristal, permettent en principe de résoudre le problème du polycristal ; en pratique, on se heurte à des difficultés numériques considérables du fait du caractère intégral de la loi d'interaction : le tenseur L^* n'est déterminé qu'en fin de traitement, une fois évalué numériquement le tenseur L . En dehors d'un cas traité par Hutchinson [16], cette formulation générale n'a, à notre connaissance, pas été utilisée.

. Modèle à accommodation plastique isotrope.

Une voie moyenne qui sauvegarde les avantages d'une loi d'interaction explicite (comme dans le cas de Kröner) et la nécessité d'une prise en compte du caractère partiellement plastique de l'accommodation intergranulaire est cependant possible si l'on exprime le tenseur L^* à partir d'une approximation isotrope de L .

(65) s'écrit alors :

$$d\sigma = d\Sigma + L (S^{-1} - I) (dE - d\epsilon) \quad (67)$$

où S est défini, selon Eshelby, par la formule (10) :

La méthode [17] consiste à expliciter la relation (67) en fonction de deux paramètres qui, dans le cas isotrope, permettent de caractériser le tenseur L et, par son intermédiaire, le tenseur S , l'identification des paramètres se faisant à la fin de l'opération de moyenne (66). Dans le cas où le chargement extérieur est monotone, on peut envisager de faire porter l'approximation isotrope, dans l'établissement de la loi d'interaction, non pas sur le tenseur "incrémental" L , mais directement sur le tenseur reliant les quantités finies E^P_{ij} et Σ_{ij} .

Cela revient à adopter la loi de Hencky pour la description de l'écoulement plastique de la matrice ; sous la forme particulière liée au critère de Misès, cette loi s'écrit :

$$E^P_{ij} = h (J_2) S_{ij}$$

où S_{ij} est le déviateur des contraintes et J_2 son second invariant.

La fonction $h(J_2)$ caractérise alors entièrement l'écoulement plastique (un seul paramètre étant suffisant à cause de l'incompressibilité plastique).

En faisant enfin intervenir les caractéristiques élastiques (isotropes) de la matrice, et en se limitant au cas de l'inclusion sphérique, on se ramène à un problème classique d'inclusion inhomogène dont la solution s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu\alpha(1-\beta) (E^P_{ij} - \epsilon^P_{ij}) \quad (68)$$

où α est une fonction de μ , ν et h qui peut s'approximer raisonnablement par :

$$\alpha = (1 + \mu h)^{-1} \quad (69)$$

On peut alors considérer ce résultat de deux points de vue : ou bien, ce qui est plus général et rigoureux, h et α ne sont pas connus à l'avance, mais déterminés en fin de calcul par résolution du problème statistique ; ou bien, ce qui correspond à la majorité des cas d'application pratique, on déduit h d'un essai particulier (par exemple en traction simple où il vaut simplement $3E^P/2\Sigma$) et on l'utilise pour d'autres cas de chargement, par l'intermédiaire de sa forme générale $h(J_2)$.

Cette dernière méthode, bien que plus grossière, a l'avantage d'aboutir à une loi d'interaction entièrement explicite et de voir plus aisément les implications physiques d'une accommodation à caractère partiellement plastique. En particulier, la formule (69), spécifiée par exemple sur un essai de traction, indique que, au début de l'écoulement plastique ($h=0$), l'accommodation est encore purement élastique : α est égal à l'unité et la formule de Kröner s'applique sans modification. Mais dès que l'écoulement plastique se produit, la valeur de α diminue rapidement vers zéro, faisant ainsi baisser les contraintes internes d'un ordre de grandeur au moins par rapport à l'évaluation de Kröner.

3.3.3. Nouvelle formulation d'un schéma self-consistent à accommodation plastique.

La loi d'interaction précédemment décrite (68) permet alors, avec les lois de comportement présentées au paragraphe 3.3.1., d'obtenir l'accroissement du glissement sur un système n d'un grain donné en fonction des accroissements $d\Sigma$ et dE^P .

On a pour un système actif n du grain I :

$$R_{ij}^{nI} d\sigma_{ij}^I = H_{nm}^I d\gamma_m^I$$

et, avec $d\sigma_{ij}^I = d\Sigma_{ij} + \alpha\mu (dE^P_{ij} - d\epsilon^P_{ij})$

et $d\epsilon^P_{ij} = \sum_n R_{(ij)}^{In} d\gamma_n^I$

où β a été pris égal à $1/2$.

On obtient, en considérant α comme constant et en négligeant certains effets secondaires de rotation :

$$(H_{nm}^I + \alpha\mu R_{(ij)}^{In} R_{(ij)}^{Im}) d\gamma_m^I = R_{ij}^{nI} (d\Sigma_{ij} + \alpha\mu dE^P_{ij}) = R_{ij}^{nI} dQ_{ij} \quad (70)$$

équation qui montre les différentes origines de l'écrouissage du polycristal :

- H représente l'écrouissage intracristallin ;
- $\alpha\mu RR$ représente l'écrouissage intergranulaire.

Le terme $(d\Sigma_{ij} + \alpha\mu dE^P_{ij})$ représente globalement les paramètres du chargement extérieur qui est donc représenté par cinq composantes indépendantes inconnues a priori. En effet, pour un chargement en contraintes imposées ($d\Sigma_{ij}$ donné), dE^P_{ij} est entièrement inconnu à l'avance à cause de la texture éventuelle du polycristal et de l'anisotropie du comportement de l'agrégat.

La méthode générale de résolution de (70) consiste donc à utiliser une procédure itérative : on choisit les cinq composantes de dQ_{ij} de manière (presque) arbitraire et on les ajuste progressivement de manière à vérifier à la fin du calcul les conditions $\langle d\epsilon^P_{ij} \rangle = dE^P_{ij}$.

Lorsque l'on peut ramener le nombre de paramètres indépendants de dQ_{ij} à un seul, alors seulement la résolution de (70) est simple et directement possible par cette méthode. Cela a été fait notamment dans le cas de la traction ou du laminage de polycristaux isotropes [18] [19]. Cette méthode a l'avantage de permettre de traiter un grand nombre d'orientations mais son application reste limitée à des cas simples (chargement radial, faibles textures).

Il est possible d'élargir le champ d'application de ce modèle en explicitant d'emblée dans la relation (68) E_{ij}^P en fonction des ϵ_{ij}^{PI} . Dans (70) on écrira alors, pour un nombre fini N de grains :

$$d E_{ij}^P = \sum_{I=1}^n d \epsilon_{ij}^{PI} f(I) \quad (71)$$

où $f(I)$ est la fraction volumique de grains dont la déformation plastique est ϵ_{ij}^{PI} . Cette déformation $d \epsilon_{ij}^{PI}$ résulte de glissements $d \gamma^{In}$ et on a donc :

$$d E_{ij}^P = \sum_{I=1}^N \sum_n f(I) R_{(ij)}^{In} d \gamma^{In} \quad (72)$$

Si on porte cette expression dans (70), on a :

$$\left(H_{nm}^I + \alpha \mu R_{(ij)}^{In} R_{(ij)}^{Im} \right) d \gamma^{Im} - \alpha \mu R_{(ij)}^{In} \sum_J f(J) R_{(ij)}^{Jm} d \gamma^{Jm} = R_{ij}^{In} d \Sigma_{ij} \quad (73)$$

équations qui lient directement les accroissements des glissements $d \gamma^{Im}$ de tous les grains du polycristal à l'accroissement des seules contraintes macroscopiques $d \Sigma_{ij}$. Dans cette méthode, le polycristal est ainsi traité comme un "super monocristal" C.F.C. dont le nombre de systèmes de glissement facile serait $12 \times n$. Les équations précédentes représentent en fait un système linéaire dont le rang est de l'ordre de $5N \times 5N$, ce qui limite évidemment, sur un plan pratique, le nombre de grains pouvant être pris en compte simultanément pour représenter le polycristal. Cette méthode dont la mise au point est actuellement en cours (voir figures 7 à 9 et tableau II des résultats préliminaires significatifs obtenus dans le cas d'une traction simple pour un polycristal sans texture) possède cependant un certain nombre d'avantages et de possibilités :

- traitement effectif de l'anisotropie plastique ;
- traitement de problèmes à déformation imposée ou à conditions mixtes ;
- traitement de cas de trajets de chargement non radiaux.

De plus, la discretisation des interactions entre systèmes de glissement appartenant à des grains différents permet également l'introduction d'interactions plus hétérogènes et anisotropes que cela n'est fait dans (73) où les termes $\alpha \mu R_{ij}^{In} R_{ij}^{Jm}$ traduisent de manière globale les interactions entre systèmes de glissement. Ainsi, l'influence de chaque grain J sur le grain I est la même quelle que soit la position relative de I et J : le grain I "ressent" chaque grain J comme si la déformation ϵ^{PJ} était répartie uniformément dans la matrice. Pour tenir compte de la structure "granulaire" de la matrice nous développons dans le prochain chapitre des extensions à n sites du schéma self-consistent classique, utilisant les lois d'interaction développées dans la partie 2.

$\alpha \backslash A$	0,1	0,5	1	1,5	3
1	5,5	5,4	5,7	5,2	5,1
0,1	5,4	4,6	4,4	4,1	3,2
0,01	4	3,5	2,7	2,2	2
0,001	3,2	2,6	1,5	1,5	1,5

Tableau II : Nombre moyen de systèmes actifs dans les grains du polycristal pendant le stade linéaire d'un essai de traction (influence de A et α).

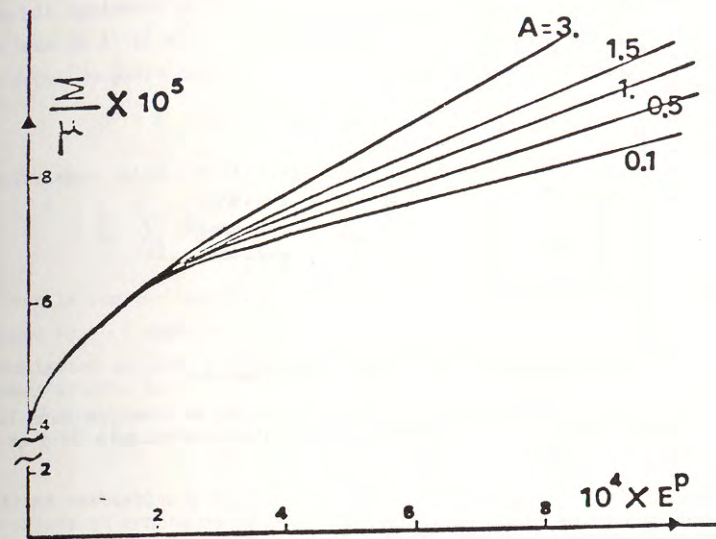


Figure 7 : Courbe d'écrouissage théorique d'un polycristal CFC avec un facteur d'accommodation plastique $\alpha = 0,1$. A représente un facteur d'anisotropie de l'écrouissage intracristallin.

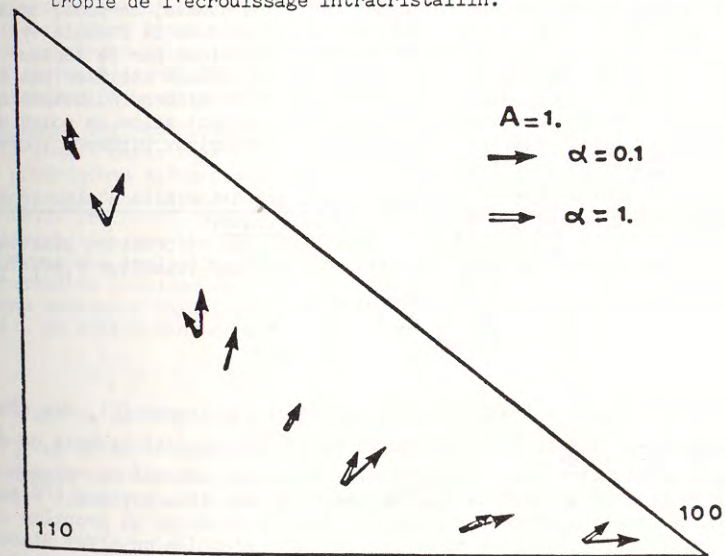


Figure 8 : Influence de α sur les rotations de réseau cristallin lors d'un essai de traction (A = 1, écrouissage isotrope).

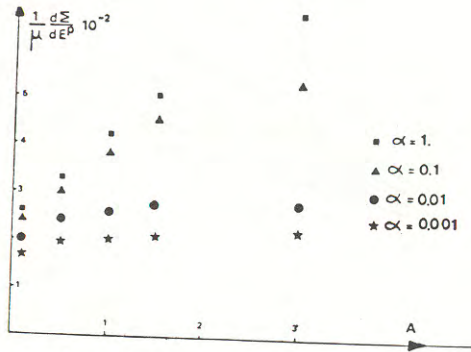


Figure 9 : Pente d'érouissage normalisée de la courbe de traction dans le domaine linéaire (voir figure 7) pour plusieurs valeurs de α et de A .

4. EXTENSIONS DU SCHEMA SELF-CONSISTENT

Les formulations self-consistentes précédentes sont caractérisées par le fait que la loi d'interaction utilisée concerne une inclusion et une matrice physiquement homogène, représentant l'ensemble des autres grains ou hétérogénéités du matériau étudié. Pour tenir compte d'une manière plus précise du caractère hétérogène de l'environnement d'une inclusion donnée, on peut, dans un premier temps introduire les interactions de paires dans la formule (73) en représentant d'emblée les effets d'accommodation plastique par le facteur scalaire α issu d'une approximation isotrope. On peut également utiliser une loi d'interaction résultant de la solution du problème de plusieurs inclusions hétérogènes et formuler un schéma entièrement self-consistent selon le point de vue de Hill déjà explicité simplement sur le cas de matériaux biphasés ; c'est ce que nous esquisserons pour terminer.

4.1. Utilisation d'une loi d'interaction de paire d'inclusions plastiques et introduction directe de l'accommodation plastique.

Soient N grains d'un polycristal ayant subi une déformation plastique E^P . A chaque grain ($I = 1$ à N) sont affectées la fraction volumique f_I ($f_I = V_I/V$) et la déformation plastique ϵ^{PI} . On a donc :

$$E^P = \frac{1}{V} \int \epsilon^P dV \equiv \sum_{I=1}^N \frac{V_I}{V} \epsilon^{PI} = \sum_{I=1}^N f_I \epsilon^{PI} \quad (74)$$

Le grain I est soumis à l'action des contraintes appliquées (Σ), des contraintes internes $\alpha \mu (E^P - \epsilon^{PI})$ dues à l'effet moyen de l'hétérogénéité globale de déformation plastique ($E^P - \epsilon^{PI}$) et des contraintes internes induites par chacun des grains J du fait de l'écart de leur déformation plastique moyenne ϵ^{PJ} par rapport à la déformation moyenne E^P . En utilisant la solution du problème de la paire d'inclusions plastiques et en introduisant d'emblée un effet d'accommodation plastique par le facteur scalaire α , on obtient la loi d'interaction sous la forme :

$$\sigma^I = \Sigma + \alpha \mu (E^P - \epsilon^{PI}) + \frac{2\alpha \mu}{V_I} \sum_{J \neq I} N^{IJ} (\epsilon^{PJ} - E^P) \quad (75)$$

On aurait également pu faire abstraction de l'effet global d'incompatibilité plastique dû à $(E^P - \epsilon^{PI})$ et comptabiliser directement l'effet propre $(-\alpha \mu \epsilon^{PI})$ et les effets de paire dus à $(\epsilon^{PI}, \epsilon^{PJ})$; d'où la relation :

$$\sigma^I = \Sigma - \alpha \mu \epsilon^{PI} + \frac{2\alpha \mu}{V_I} \sum_{J \neq I} N^{IJ} \epsilon^{PJ} \quad (76)$$

L'équivalence entre (75) et (76) implique alors la relation :

$$\sum_I \sum_{J \neq I} \frac{2N^{IJ}}{V_I} = I \quad (77)$$

où I est le tenseur unité. On peut vérifier que (77) exprime la condition d'équilibre $\langle \sigma_I \rangle = \Sigma$ associé à $\langle \epsilon_I^P \rangle = E^P$.

L'association de (76) à la loi de comportement du monocristal conduit, pour les systèmes actifs, à :

$$\left(H_{mn}^I + \alpha \mu R^{Im} R^{In} \right) \dot{\gamma}^I n - \frac{2\alpha \mu}{V_I} \sum_J N^{IJ} R^{Im} R^{Jn} \dot{\gamma}^J n = R^{Im} \dot{\Sigma} \quad (78)$$

équations semblables à (73) mais où maintenant les interactions entre grains sont prises en compte de manière discrète par l'intermédiaire des tenseurs d'interaction de paires N^{IJ} .

Une telle formulation suppose une description complète de l'agrégat polycristallin, ou, tout au moins, du voisinage de chaque famille de grains prise en compte. Par ailleurs, le comportement du milieu homogène équivalent est d'emblée approché par l'intermédiaire du facteur d'accommodation α . Dans ce sens, cette formulation n'est pas entièrement self-consistente. Les indications qui suivent suggèrent au contraire, dans la ligne de la formulation de Hill du schéma self-consistent classique ("à un site"), un moyen de concevoir de nouveaux schémas "à n sites" réellement self-consistentes.

4.2. Schémas self-consistentes à n sites

Il s'agit cette fois d'envisager une succession de situations de n inclusions hétérogènes situées dans une matrice infinie de comportement inconnu a priori (celui du milieu homogène équivalent). Précisons brièvement le principe d'une telle procédure dans le cas où $n=2$, en raisonnant sur les déformations totales (au lieu des vitesses de déformation). Considérons une inclusion (i) et, successivement, chacune des inclusions (j). La solution du problème de la paire d'inclusions hétérogènes dans une matrice homogène subissant la déformation totale E à l'infini peut finalement, à partir de (46), se mettre dans ce cas sous la forme :

$$\epsilon_i^{(j)} = A_i^{(j)} E \quad (79)$$

où $\epsilon_i^{(j)}$ est la déformation totale dans l'inclusion (i) en présence de l'inclusion (j) et où $A_i^{(j)}$ dépend du comportement inconnu de la matrice et de caractéristiques des inclusions (i) et (j). Cette opération étant répétée sur chaque inclusion (j) permet une évaluation moyenne de ϵ_i sous la forme :

$$\epsilon_i = \langle A_i^{(j)} \rangle_{(j)} E \quad (80)$$

L'équation self-consistente permettant l'identification du comportement du milieu homogène équivalent est ensuite obtenue en écrivant la relation de moyenne :

$$\langle \epsilon_i \rangle_{(i)} = E \quad (81)$$

ce qui conduit à :

$$\langle \langle A_i^{(j)} \rangle_{(j)} \rangle_{(i)} = I \quad (82)$$

où I est le tenseur unité. Une telle équation implicite, d'une nature comparable à celle de l'équation de Hill (66) dans le cas du schéma "à un site", pose évidemment de difficiles problèmes de résolution.

On peut signaler cependant la méthode numérique conçue par P.R. Morris [20] dans le cas de l'élasticité de polycristaux anisotropes et du schéma self-consistent classique et qui pourrait servir de guide pour une éventuelle généralisation. Indiquons pour terminer que le principe de schémas self-consistents à n sites (avec $n > 2$) ne diffère pas fondamentalement de celui présenté ci-dessus ; seuls changent les problèmes élémentaires à résoudre, formulés sur le cas de n inclusions hétérogènes, et qui peuvent être traités selon la méthode déjà exposée.

5. CONCLUSION

Les différentes voies de modélisations self-consistentes qui viennent d'être présentées permettent de mieux dégager deux de leurs aspects essentiels :

- la commodité de mise en oeuvre des formulations les plus simples, qui devrait faire des méthodes self-consistentes un outil plus fréquemment employé pour une première approche des problèmes de rhéologie des matériaux hétérogènes.
- la diversité des versions pouvant être adoptées, d'une complexité qui peut être adaptée à la richesse des informations statistiques disponibles sur la structure d'hétérogénéité des matériaux étudiés comme à la finesse attendue des prédictions de comportement. Notamment, il n'est pas interdit de penser que l'élaboration de schémas self-consistents généralisés, à n sites, permette de définir une nouvelle voie d'approche statistique systématique du comportement rhéologique des matériaux hétérogènes.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) Kröner E., ce colloque.
- (2) Suquet P., ce colloque.
- (3) Kröner E., 1978, J. Phys. F., Metal Phys., 8, 2261.
- (4) Hershey A.V., 1954, J. Appl. Mech., 21, 236.
- (5) Kröner E., 1958, Z. Phys., 151, 504.
- (6) Kröner E., 1961, Acta Met. 9, 155.
- (7) Hill R., 1965, J. Mech. Phys. Solids 13, 89.
- (8) Eshelby J.D., 1957, Proc. Roy. Soc., A241, 376.
- (9) Nouaihas D., 1980, thèse, Université Paris VI.
- (10) Berveiller M., Zaoui A., 1981, Res. Mechanica Letters 1, 119.
- (11) Koiter W.T., 1960, Prog. in Sol. Mech., 1.
- (12) Mandel J., 1965, Int. J. Solids Struct., 1, 273.
- (13) Jackson P.J., Basinski Z.S., 1967, Can. J. Phys. 45, 707.
- (14) Franciosi P., 1978, thèse, Université Paris VII.
- (15) Franciosi P., Berveiller M., Zaoui A., 1980, Acta Met., 28, 273.
- (16) Hutchinson J.W., 1970, Proc. Roy. Soc., A319, 247.
- (17) Berveiller M., Zaoui A., 1979, J. Mech. Phys. Sol., 26, 325.
- (18) Budiansky B., Wu T.T., 1962, 4th U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., 1175.
- (19) Berveiller M., Parnière P., Zaoui A., 1980, Contrats DGRST, n°78.7.2392 et 78.7.2393.
- (20) Morris P.R., 1970, Int. J. Engng. Sci., 8, 49.

**SUR L'EQUILIBRE ET LE FLUAGE PROGRESSIF
D'UN MILIEU HETEROPLASTIQUE ISOTROPE
SOU MIS A UN CHARGEMENT PROPORTIONNEL
LENTEMENT CROISSANT**

**ON THE STABILITY AND PROGRESSIVE CREEP
OF AN HETEROPLASTIC ISOTROPIC MEDIUM,
SUBMITTED TO A PROPORTIONAL LOAD
WHICH INCREASES SLOWLY**

R. MAZET

Professeur honoraire des Universités -

Correspondant de l'Académie des Sciences - France

RESUME

On considère un milieu tridimensionnel hétérogène à l'échelle microscopique (les limites élastiques des micro-éléments qui le constituent obéissent à une loi statistique spécifique du milieu), mais homogène, isotrope et continu à l'échelle macroscopique. Les lois de comportement du micro-élément sont les lois classiques de l'échelle macroscopique ; la correspondance entre les deux échelles est définie dans le cas où l'élément de volume (réunion d'un grand nombre de micro-éléments) est libre de se déformer plastiquement. La déformation élastique macroscopique est supposée connue en tout point. La déformation élasto-plastique réelle est encadrée par deux déformations calculables dont on tire d'utiles indications sur la stabilité de la structure chargée au-delà de sa limite élastique vraie. Un exemple relatif à un barreau métallique du type «cantilever» est traité à partir de l'hypothèse de Fraeijs de Veubeke qui met en relief le caractère tridimensionnel du problème.

ABSTRACT

Let us consider a tridimensional medium which is heterogeneous at the microscopic scale (the elastic limits of the microelements which constitute it obey a statistical specific law), but homogeneous, isotropic and continuous at the macroscopic one. The constitutive laws of the microelement are the classic laws of the macroscopic scale ; the dealings between the two scales are defined when the element of volume (an assembly of a great number of microelements) may become plastic without restraint. The macroscopic elastic deformation is assumed to be known in every point. The real elastoplastic deformation is enframed by two calculable deformations from which useful informations are deduced about the stability of the structure when it is loaded beyond its true elastic limit. An example, relating to a metallic "cantilever" beam, is treated with the help of Fraeijs de Veubeke's hypothesis which throws the tridimensional character of the problem into relief.

1. INTRODUCTION

L'étude qui suit s'applique, par exemple, à une construction métallique reposant sur des appuis fixes et supportant une charge susceptible de dépasser, au cours du temps, la limite élastique du matériau. Le problème est résolu, à l'heure actuelle, pour une charpente formée de poutres minces [1]. Grâce à l'hypothèse de l'indéformabilité des sections transversales (structure dite "lamellaire"), les solutions s'apparentent encore fortement au cas unidimensionnel de la poutre en traction simple [2]. Que peut-on dire dans le cas plus général d'une structure nettement tridimensionnelle possédant toutefois des propriétés d'homogénéité et d'isotropie ?

Nous utiliserons, pour traiter ce problème qui concerne plus particulièrement les matériaux métalliques (métaux et alliages du commerce), la modélisation hétéroplastique qui considère le milieu comme formé de micro-éléments enchevêtrés - donc comme hétérogène à l'échelle microscopique - et, d'autre part, comme homogène, isotrope et continu à l'échelle macroscopique. Chaque élément de volume D contient un très grand nombre de micro-éléments D_i dont il est la réunion au sens de Lebesgue :

$$\partial D = \sum \partial D_i$$

En raison de leurs orientations différentes et du traitement antérieur subi par le matériau, les micro-éléments ont des "limites élastiques" e_{Mi} - expression dont nous précisons le sens - différentes, réparties d'une manière aléatoire entre une valeur e_0 (limite élastique vraie) et $+\infty$. Chacun d'eux est schématisé par un solide élasto-plastique extrêmement petit. La loi de répartition est considérée comme spécifique du matériau, de la température (constante dans tout ce qui suit) et du traitement antérieur. Enfin, les déformations sont toujours supposées petites.

2. LOIS DE COMPORTEMENT ET HYPOTHESES

Nous devons d'abord énoncer les lois de comportement d'un micro-élément : ce seront les lois classiques de l'échelle macroscopique affectées de l'indice i . Les tenseurs des contraintes et des déformations seront écrits sous la forme dilatauteur + déviateur :

$$\sigma_i = (\sigma_m)_i 1 + s_i A_i \quad \varepsilon_i = (\varepsilon_m)_i 1 + e_i B_i$$

Les déviateurs ont pour modules $s_i = \sqrt{\sum (s_{jk})_i^2}$ et $e_i = \sqrt{\sum (e_{jk})_i^2}$, A_i et B_i sont les déviateurs - unités.

Dans l'état élasto-plastique, la déformation ε_i se compose d'une déformation élastique (réversible) ε_i^e et d'une déformation plastique (irréversible) ε_i^p

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p$$

La production de déformation plastique est le fluage.

Lois de l'élasticité isotrope :

$$(\sigma_m)_i = \frac{E}{1-2\nu} (\varepsilon_m)_i, \quad s_i = \frac{E}{1+\nu} e_i^e, \quad A_i = B_i^e \quad (\text{Hocke})$$

(E : module d'Young, ν : coefficient de Poisson équivalent).

Lois de plasticité isotrope sans retour en arrière :

$$\varepsilon_i^p = 0 \quad \text{si } e_i < e_{Mi}, \quad \dot{\varepsilon}_i^p = 0 \quad \text{si } e_i > e_{Mi} \quad (\text{von Mises})$$

$$(\dot{\varepsilon}_m)_i = 0 \quad (\text{incompressibilité})$$

$$s_i = \frac{EK}{1+\nu^*} (\dot{\varepsilon}_i^p)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{Bailey - Norton})$$

$$\dot{\varepsilon}_i^p \text{ proportionnel } A_i \quad (\text{Prandtl - Reuss})$$

K et n sont des coefficients spécifiques, de même que E et ν^* .

Correspondance entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique :

Cette correspondance se résume pour nous en trois hypothèses :

(H₁) A constant entraîne $A_i = A$ pour tous les ∂D_i contenus dans ∂D .

(H₂) Les lois de la déformation élastique sont indépendantes de l'échelle.

(H₃) $\dot{\varepsilon}$ constant entraîne $\dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}$ si l'élément de volume qui contient ∂D_i est libre de se déformer plastiquement.

Nous nous limiterons dans la suite à un mode de chargement dans lequel A reste le même en tout point du milieu.

Hypothèses particulières au problème traité :

Initialement, le milieu est non écroui (pas de contraintes résiduelles) et en équilibre sous un ensemble de charges de référence ΣQ_i^f suffisamment petites pour que le milieu soit partout élastique. Dans cet état, la déformation macroscopique est connue en tout point P . Le chargement est tel que les charges restent proportionnelles à leurs valeurs initiales : $Q_i = Q_i^f f(t)$; il est réalisé sans retour en arrière et assez lent pour que les forces d'inertie puissent être négligées ($\frac{df}{dt} > 0$ et modéré).

Nous désignerons par Q une charge pilote, par Q^f sa valeur initiale.

3. CONSEQUENCES

3. 1. A est constant. Il en résulte que l'on a :

$$B = A, \quad B_i = A_i = A, \quad e_i^e + e_i^p = e_i, \quad \dot{\varepsilon}_i^p = \dot{\varepsilon}_i^p A$$

3. 2. Calcul de $e(t)$ dans le cas où ∂D est libre de se déformer plastiquement.

A l'instant t , l'élément de volume qui occupe le point P contient un certain nombre de micro-éléments disséminés dont le module e est devenu supérieur au seuil de plasticité respectif e_{Mi} qui les affecte selon von Mises. Ces micro-éléments sont passés de l'état élastique à l'état élasto-plastique ; nous dirons qu'ils sont "plastifiés" et nous appellerons taux de plastification Θ le rapport, dans ∂D , du nombre des micro-éléments plastifiés au nombre total des micro-éléments :

$$\Theta = \frac{\sum \partial D_i''}{\partial D} \quad \text{en désignant par } \partial D_i'' \text{ le volume (au sens de Rayleigh) d'un micro-élément plastifié.}$$

⊙ est une fonction de e et de \dot{e} supposée spécifique du matériau au même titre que E, ν^* , K, n et les courbes ($\mathcal{E}, \dot{\mathcal{E}}$) ; on la détermine à partir d'essais de traction simple opérés à vitesses de déformation constantes [3]. Nous la noterons ⊙ (e/ \dot{e}), sa variation avec \dot{e} étant d'ailleurs faible. Quand e varie à partir de l'état non chargé, ⊙ est nul tant que tous les éléments sont élastiques, puis il croît de 0 à 1 dans un intervalle fini (e_G, e_L) et décroît ensuite [4]. L'intervalle (e_G, e_L) est généralement petit (Crussard) ; les déformations qui nous intéressent ne vont pas au-delà. Comme les vitesses sont elles-mêmes modérées, on ne commet qu'une erreur très faible (tout en se situant du côté de la sécurité) en confondant ⊙ (e/ \dot{e}) avec ⊙ (e/0) que nous noterons simplement ⊙ (e).

Cela étant, considérons l'élément ∂D_i appartenant à ∂D . S'il est plastifié, on peut écrire :

$$e_i^e = K (\dot{e}_i^p)^{\frac{1}{n}} \quad \text{si } e > e_{Mi}$$

d'où, en tenant compte de $e_i^e + e_i^p = e_i$

$$e_i^e = e_i - e_{Mi} - \int_{t_{Mi}}^t \frac{e_i^e}{K^n} dt' \quad \text{si } e > e_{Mi} \quad (1)$$

Supposons que ∂D soit libre de se déformer plastiquement et que \dot{e} soit constant. D'après (H_3), on a alors :

$$\dot{e}_i = \dot{e} \quad \text{et, par suite, } e_i = e \quad (\text{car } e_i = 0 \text{ quand } e = 0).$$

A partir de là, le raisonnement est le même qu'en traction simple, e jouant le rôle de \mathcal{E} et ⊙ le rôle de θ [5] [6] [7]. Il aboutit, en supposant, d'une part, \dot{e} modéré et variable sans retour en arrière, d'autre part, n grand (cas de matériaux métalliques usuels aux températures inférieures à 300 ° C), à :

$$e^e = (1 - \odot) e + K \Psi x (\dot{e}^p)^{\frac{1}{n}} \quad \Psi = \frac{\odot}{\left[\frac{\partial \odot}{\partial e} (\odot \times e) \right]^{\frac{1}{n}}} \quad (2)$$

qui compte tenu de $e^e + e^p = e$, établit une relation entre e(t) et e^e , lui-même connu en fonction de Q(t).

4. METHODE DE CALCUL

Soit (D) le milieu solide étudié ; traçons à l'intérieur de (D) les sections $e^r = \text{Constante}$. Un point P quelconque est partiellement repéré par la section e^r sur laquelle il se trouve.

On pose :

$$e^r (P) = e^r (P^*) \mu \quad \text{avec } 1 \gg \mu \gg \mu_{\min}$$

P^* étant le point le plus exposé au fluage lorsque Q augmente (ou l'un des points s'il n'est pas unique).

L'état de référence (état initial) est pris tel que $e^r (P) = e_G$, limite élastique vraie. On prend comme fonction pilote

$$e^e (P^*) = e_G \frac{Q(t)}{Q^R}$$

On en déduit :

$$e^e (P) = \mu (P) \times u (Q) \quad (3)$$

(2) devient :

$$\dot{e} = \mu \dot{u} + \left[\frac{\xi (\mu u, e)}{K} \right]^n \quad (4)$$

en posant :

$$\xi (\mu u, e) = \frac{\mu u - [1 - \odot (e)] e}{\Psi (e)} \quad (5)$$

L'équation différentielle (4) se résout pas à pas en discrétisant les sections μ_i d'une part, les charges pilotes $Q_k = Q^k + k\Delta Q$ d'autre part, et remplaçant par $\frac{\Delta \mu}{\mu_k}$ (d'où Δt_k), les pas $\Delta \mu$ et ΔQ étant pris convenablement petits. La première valeur de E qui ne soit pas égale à $e^e = \mu u$ s'obtient en faisant $\xi = 0$, $e = e_{jk}$, $k = j + 1$ dans (5).

Dans le calcul, ⊙ (e) est représenté par tronçons comme une densité de probabilité de Rayleigh conformément à l'expérience [8].

5. DISCUSSION

Quel parti pouvons-nous tirer de la fonction e (t/P) ou, plus précisément, e (Q/ μ) ainsi obtenue ?

Ecrivons le tenseur des déformations au point P sous la forme

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m^e \Gamma + e^e \Gamma A \quad \text{en posant } \frac{e}{e^e} = \Gamma$$

Dans cette formule, le scalaire $\Gamma (P)$ est seul inconnu. Nous sommes tentés de prendre $\Gamma = \frac{e(Q/\mu)}{e^e}$, $e^e (Q/\mu)$ étant la fonction que nous venons de calculer - puis de remonter au déplacement de P par la formule de Beltrami

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} = \frac{\partial \mathcal{E}_{lm}}{\partial x_l} + e_{lmn} e_{pqn} \frac{\partial \mathcal{E}_{lq}}{\partial x_p} \quad (e_{lmn}, e_{pqn} = 0, 1 \text{ ou } -1) \quad (6)$$

intégrée deux fois sur un chemin partant d'un point fixe (une seule fois si $m = l$).

Mais cette procédure n'est pas correcte, car (6) n'est valable que si le tenseur \mathcal{E} satisfait aux trois conditions de compatibilité de Beltrami, ce qui n'a lieu que si $\Gamma = 1$ (milieu partout élastique, $\mathcal{E} = \dot{\mathcal{E}}e$) ou si Γ ne dépend que du déplacement de certains points privilégiés (structure lamellaire). Dans le cas contraire, le déplacement calculé selon deux chemins différents ne sera, en général, pas le même : la solution comprendra des discontinuités (lacunes ou recouvrements) inacceptables. Leur cause réside dans l'emploi abusif de l'hypothèse (H_3) : ∂D ne peut pas fluer librement sous l'effet des charges ; il subit, de la part des éléments voisins, des contraintes qui restreignent cette liberté.

Retenons néanmoins la formule (6). Prenons, pour simplifier, un chemin d'intégration sur lequel une seule coordonnée varie à la fois. Le second membre de (6) fait intervenir $\Gamma (P)$ directement et par ses dérivées partielles qui s'écrivent $\frac{\partial \Gamma}{\partial x_p} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_p}$; (6) prend ainsi la forme

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} = \frac{Q}{E} (a_{lm} \Gamma + b_{lm} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} + c_{lm}) \quad (7)$$

dans laquelle a_{lm} , b_{lm} et c_{lm} sont des fonctions connues de x_1, x_2, x_3 .

Le terme $b_m \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu}$, où $\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{e^p}{e^e} \right)$, traduit la progression du fluage dans le milieu quand celle-ci s'effectue librement. Si l'on fait dans (7) $\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} = 0$ (tout en conservant Γ), on obtient une relation qui exprime que, dans une petite région entourant P (où Γ a sensiblement la même valeur qu'en P); la texture du milieu est quasi-élastique et, par suite, s'oppose au maximum à une déformation plastique de ∂D .

Nous admettrons que la réalité est entre les deux, autrement dit que la déformation réelle le long du chemin choisi est comprise entre les deux solutions de (7) obtenues l'une en conservant, l'autre en supprimant le terme en $\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu}$, la première étant située du côté de la sécurité.

La recherche de la meilleure fonction $G(Q/x_1, x_2, x_3)$ à mettre à la place de $\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu}$ ne fait pas partie de cet exposé. Les conditions de Beltrami - qui expriment l'existence d'un vecteur-rotation au point P - se retrouvent sous une forme différente. Si l'on pose que la fonction G ne dépend, comme Γ , que de Q et de μ , on ne pourra rechercher, dans le cas général, qu'une optimisation et non une détermination rigoureuse.

Sans poursuivre dans cette voie, la mise en place d'un encadrement permet dans certains cas d'estimer le degré de stabilité de structures chargées au-delà de leur limite élastique vraie, comme le montre l'exemple suivant.

6. EXEMPLE

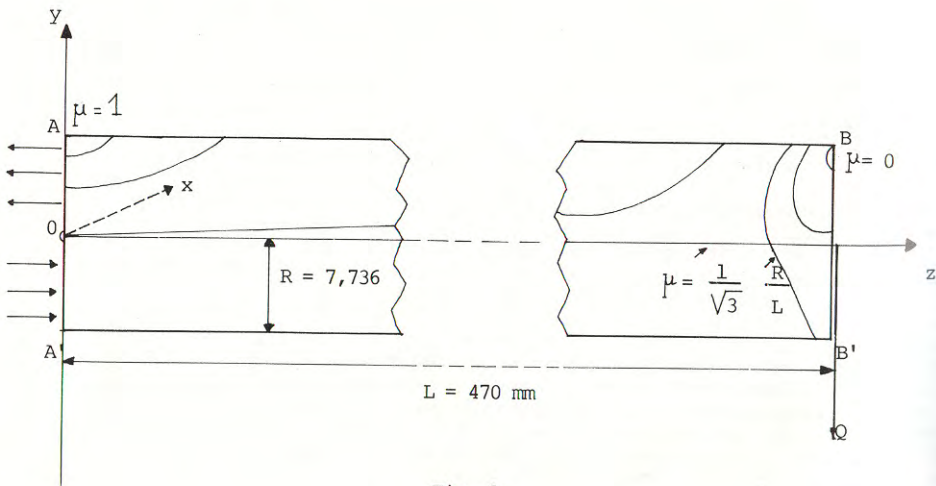


Fig. 1.

Soit un barreau cylindrique en alliage AU4GD1J encasté horizontalement à une extrémité et soumis à l'autre à une charge verticale Q lentement croissante à vitesse uniforme. Etudier son comportement. Le poids propre est négligé. La température est 200°C .

Bien que les dimensions du barreau permettent d'utiliser l'hypothèse de Bernoulli sur l'indéformabilité des sections transversales, nous ne le ferons pas et retiendrons plutôt l'hypothèse de Fraeijs de Veubeke [9] qui reste valable lorsque le barreau est d'épaisseur modérée et rend le problème nettement tridimensionnel. Cette hypothèse consiste à admettre qu'en dehors du point fixe 0 l'encastrement n'exerce sur le barreau que des actions horizontales permettant à la section encastree de se déformer librement dans son plan. La solution exacte conduit à une certaine répartition de Q sur la section libre, mais, en vertu de Saint-Venant, la déformation du barreau sur la plus grande partie de sa longueur est moins modifiée que par l'hypothèse de Bernoulli dont on peut d'ailleurs, par ce moyen, contrôler la validité.

Nous nous bornerons à présenter quelques résultats significatifs en prenant, pour simplifier, $\nu^* = 0,5$ (la formule théorique est : $\nu^* \nu + (0,5 - \nu) \otimes$); $x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3$, seront remplacés par x, y, z, u, v, w ; toute confusion entre les deux emplois de la lettre u sera évitée.

$$\mathcal{E}^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} by (L - z) & 0 & -\frac{1}{2} bxy \\ 0 & \frac{1}{2} by (L - z) & -\frac{1}{2} b(R^2 - y^2) \\ -\frac{1}{2} bxy & \frac{1}{2} b(R^2 - y^2) & -by (L - z) \end{bmatrix}, b = \frac{Q}{EI}$$

$$\mu^2 = \left(\frac{y}{R} \right)^2 \left(1 - \frac{z}{L} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \left\{ \left(\frac{x}{R} \right)^2 \left(\frac{y}{R} \right)^2 + \left[1 - \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right]^2 \right\}$$

Les intersections de quelques surfaces $\mu = \text{Constante}$ et du plan vertical de symétrie sont portées sur la fig. 1.

Autres données : $e_e = 0,404 \cdot 10^{-2}$, $K = 0,715 \cdot 10^{-2}$, $n = 27$,
 $E = 6375 \text{ kg/mm}^2$, $\frac{R}{L} = 0,0165$; $Q^R = 16,28 \text{ kgf}$, $Q = 1 \text{ kgf}$, $t = 1 \text{ s}$

$$\Theta = \begin{cases} 1 - \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{2}{3} e_e \cdot 10^2 - 0,330}{0,319} \right)^2 \right] & \text{pour } 0,404 \leq e_e \cdot 10^2 \leq 0,744 \\ 1 - \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{2}{3} e_e \cdot 10^2 - 0,288}{0,367} \right)^2 \right] & \text{pour } 0,744 \leq e_e \cdot 10^2 \leq 0,784 \\ 1 - \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{2}{3} e_e \cdot 10^2 - 0,197}{0,462} \right)^2 \right] & \text{pour } 0,784 \leq e_e \cdot 10^2 \leq 1,28 \end{cases}$$

\uparrow est calculé comme fonction de μ^2 pour $\mu = 1, 2, \dots$

Cherchons les déformées des génératrices supérieure et inférieure en suivant le chemin OAB (resp. OA' B'). Pour le trajet OA (resp. OA'), on constate, en partant de :

$$\frac{\partial v}{\partial y} (0, y, 0) = \frac{1}{2} \Gamma bLy \quad \text{pour } 0 \leq y \leq R,$$

que les valeurs de v peuvent être négligées (nous ne sommes pas allés au delà de $k = 14$).

Le trajet AB (resp. A' B') demande un calcul plus compliqué :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} (0, R, z) = bL \left(1 - \frac{z}{L}\right) \left[\Gamma + 2 \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial (\mu^2)} \right] \quad \text{pour } 0 \leq z \leq L \quad (8)$$

P^* coïncide avec A (resp. A') ; $\mu^2 (0, R, z) = \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2$ varie de 1 à 0 le long de AB (resp. de A' B').

Les déformés $v(z)$, obtenues par une double intégration numérique de (8) à partir de $z_0 = 0$ ($\frac{v}{z}_0 = 0$), ont été calculées jusqu'à $k = 14$ ($Q = 30,28$).

La figure 2 en reproduit quelques-unes ($k = 5, 10, 13, 14$) qui

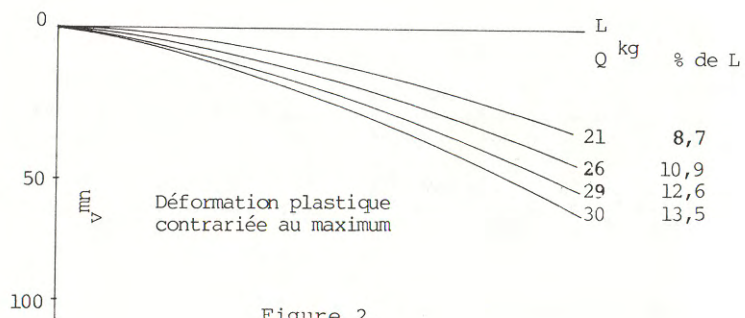
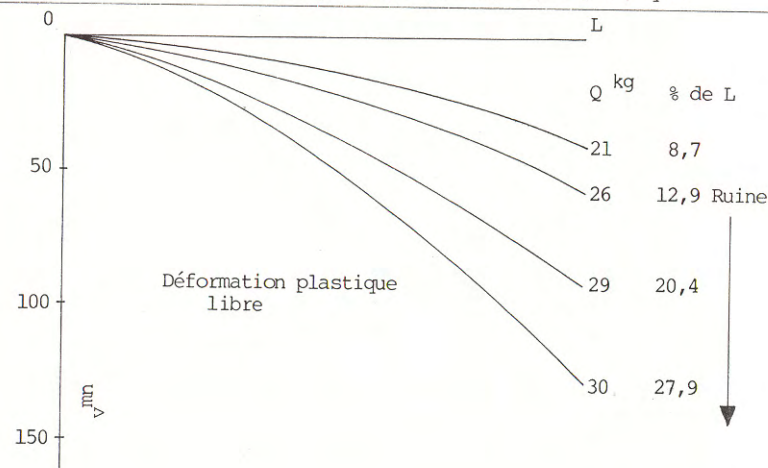


Figure 2.

montrent l'accélération de la ruine à partir de $k = 10$. On a également porté sur la fig. 2 les déformées correspondantes lorsqu'on fait, dans l'équation (8), $\frac{\partial \Gamma}{\partial (\mu^2)} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} (0, y, z)$ ne dépendant que de y^2 , les courbes seraient les

mêmes pour la génératrice inférieure. Elles représentent donc aussi les moyennes des déformées extrêmes (qui ne sont pas des déformées de la fibre moyenne !)

Il est intéressant de représenter la variation de la flèche v_L de l'extrémité du barreau en fonction de la charge Q (fig. 3) dans les deux hypothèses encadrant la réalité.

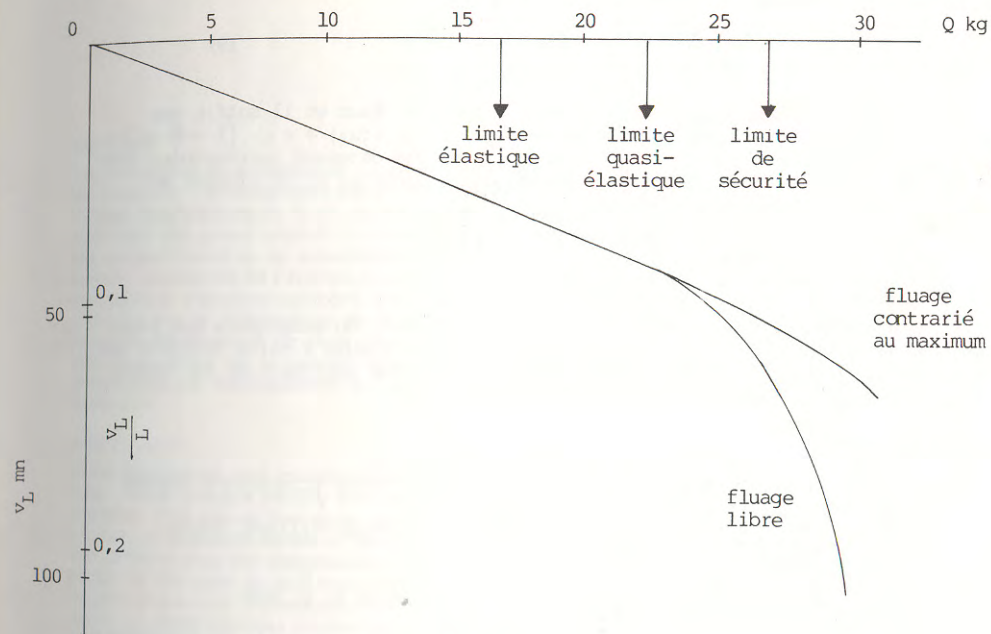


Fig. 3

On constate que cette variation, commune aux deux cas de calcul, est linéaire, non seulement jusqu'à la limite élastique ($Q = 16,28$), mais beaucoup plus loin jusqu'à $Q = 21$. On appelle cette seconde valeur la limite quasi-élastique.

Entre les deux limites il existe en fait une légère plastification, mais celle-ci n'est pas discernable en raison du lent "démarrage" de la fonction. Ce résultat, qualitativement et quantitativement conforme à l'expérience, confirme la validité des hypothèses sur lesquelles il repose (hétéroplasticté, isotropie de la plasticité aux petites déformations).

7. LIMITE DE SECURITE

On peut se demander à partir de quelle charge la structure fluierait en l'un de ses points jusqu'à fissure même si la charge cessait de croître, entraînant éventuellement la ruine. Pour le savoir en se plaçant en outre du côté de la sécurité, il convient de reprendre le cas du fluage libre, représenté par l'équation (4), en y faisant $u = \text{Constante } u_e$, d'où :

$$\dot{\epsilon} = \left\{ \frac{\mu u_e - [1 - \Theta(e)] e}{K \Psi(e)} \right\}^n \quad (9)$$

Pour que l'équilibre soit atteint pour e fini, il faut et il suffit que $[1 - \Theta(e)] e$ tende vers μu_e quand e croît à partir de $e(u_e) = e_e$. $[1 - \Theta(e)] e$ présente un maximum X pour $e = e_x$. La charge à ne pas dépasser correspondra donc à $u_e = \frac{X}{\mu}$ - d'où $Q = \frac{XQ^R}{\mu e_G}$ - et, pour la structure globale, en se plaçant au point P, à

$$Q^S = \frac{XQ^R}{e_G}$$

Dans l'exemple, $X = 0,533 \cdot 10^{-2}$, d'où $Q^S = 25,8$ kgf. On remarquera que cette valeur est supérieure à la limite quasi-élastique et assure à cette dernière une marge de sécurité lui permettant de remplacer, dans une application, la limite élastique avec un gain de plus de 30 % sur la charge.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMJA (J.) et MAZET (R.) - Etude de la résistance d'une structure à barres à partir de la notion d'hétéroplasticté. *Journal de Mécanique Appliquée*, vol. 2, n° 1, Gauthier-Villars, Paris, 1978, pp. 93-118.
- [2] *Comptes rendus Acad. Sci. Paris*, 1978, t. 286, série A, p. 699
- [3] *Conférence Nationale de Mécanique*, Krościenko, 1971 - *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences*, Série des Sciences Techniques, 1973, vol. XXI, n° 5 pp. 243-254.
- [4] *Comptes rendus Acad. Sci. Paris*, 1979, t. 288; série B, p. 329.
- [5] *Comptes rendus Acad. Sci. Paris*, 1978, t. 286, série A, p. 579.
- [6] *Comptes rendus Acad. Sci. Paris*, 1972, t. 275, série A, p. 531.
- [7] *Comptes rendus Acad. Sci. Paris*, 1977, t. 284, série B, p. 9.
- [8] *5ème Congrès International de Rhéologie*, Kyoto 1968 - *La Recherche Aérospatiale*, n° 128, Paris (Châtillon), 1969, pp. 59-62.
- [9] FRAEIJIS DE VEUBEKE (B. M.) - A Course in Elasticity, Applied Mathematical Sciences vol. 29, Springer-Verlag, New-York, 1979.

RHEOLOGIE DES MATERIAUX SUPERPLASTIQUES RHEOLOGY OF SUPERPLASTIC MATERIALS

M. SUERY et B. BAUDELET

Laboratoire de Physique et de Technologie des Matériaux -
Faculté des Sciences de Metz - France

RESUME

Les matériaux superplastiques subissent souvent au cours de leur déformation des évolutions de structure - grossissement des grains et phénomène de cavitation - qui modifient les paramètres rhéologiques de la loi de comportement du matériau. Il est ainsi montré que le grossissement des grains conduit à un écrouissage apparent du matériau, à des valeurs apparentes du coefficient m de sensibilité de la contrainte à la vitesse de déformation ainsi qu'à des valeurs apparentes de l'énergie d'activation pour la déformation. Le matériau subit aussi un phénomène d'endommagement. Dans le cas des laitons biphasés, cet endommagement est contrôlé par la déformation de la phase ductile β et il est d'autant plus important que le taux de déformation de cette phase est plus grand. Le phénomène de cavitation entraîne une diminution de la contrainte apparente au cours d'un essai de traction ainsi qu'une diminution de l'allongement à rupture comme conséquence de la diminution du coefficient m .

ABSTRACT

Grain coarsening and cavitation can often occur during deformation of superplastic materials. These changes modify the rheological parameters of the constitutive equation of the material. It is shown that grain coarsening leads to apparent strain-hardening during deformation, to apparent values of the strain rate sensitivity index and to apparent values of the activation energy for deformation. Moreover, damage occurs during deformation of the material. In the case of α/β brass, this damage is correlated to the deformation of the most ductile phase and increases as the deformation of the phase increases. This phenomenon leads to stress decrease during tensile testing and smaller elongation as a consequence of lower values of the apparent strain-rate sensitivity index.

1. INTRODUCTION

Le terme superplasticté est employé pour caractériser la déformation plastique à haute température de certains matériaux à taille de grains petite et

généralement stable qui peuvent subir des allongements très importants au cours d'une sollicitation de traction. De tels allongements sont corrélés à des valeurs élevées du coefficient m de sensibilité de la contrainte à la vitesse de déformation associées à une absence d'endommagement qui conduirait à une rupture prématurée. Certains matériaux cependant présentent au cours d'une déformation à haute température un grossissement très important de la structure ainsi qu'un phénomène de cavitation qui limitent les allongements maximum obtenus à quelques centaines de pourcents. L'objet de cet exposé est de montrer les influences du grossissement de la structure et de la cavitation sur les propriétés rhéologiques d'un matériau superplastique. L'alliage retenu pour cette étude est le laiton α/β dont la loi de comportement métallurgique peut se mettre sous la forme /1/ :

$$\dot{\epsilon}_g = g(\alpha) \dot{\epsilon}_\beta = h(\alpha) \frac{\sigma^n}{L_\beta} \exp\left(-\frac{Q_\beta}{RT}\right) \quad (1)$$

où $g(\alpha)$ et $h(\alpha)$ sont des fonctions de la proportion de phase α présente dans l'alliage, $\dot{\epsilon}_\beta$ est la vitesse de déformation de la phase β en présence de phase α , L_β est la taille des grains de la phase β , Q_β est l'énergie d'autodiffusion dans la phase β , et n et a sont des coefficients égaux à 2.

Les variations de la fonction $g(\alpha)$ sont représentées sur la figure 1. C'est une fonction fortement décroissante de la fraction volumique de phase α mais elle est indépendante de la taille des grains de celle-ci. Cette loi de comportement a été déterminée expérimentalement en déformant des alliages présentant des fractions volumiques différentes de phase α et en tenant compte des évolutions de la structure au cours de la déformation /1/

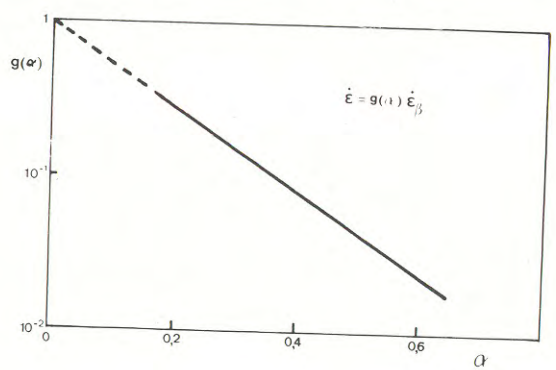


Fig. 1 - Variation de la fonction $g(\alpha)$ en fonction de la fraction volumique de phase α pour les laitons biphasés - Equation (1)

2. GROSSISSEMENT DE LA STRUCTURE : INFLUENCE SUR LES PARAMETRES RHEOLOGIQUES.

Les laitons subissent un grossissement très important des grains à haute température : la figure 2 illustre ce comportement dans le cas d'un laiton à 45% de phase α recuit à 600° C. De plus ce grossissement est favorisé par la déformation ; il est d'autant plus important que la vitesse de déformation est plus faible.

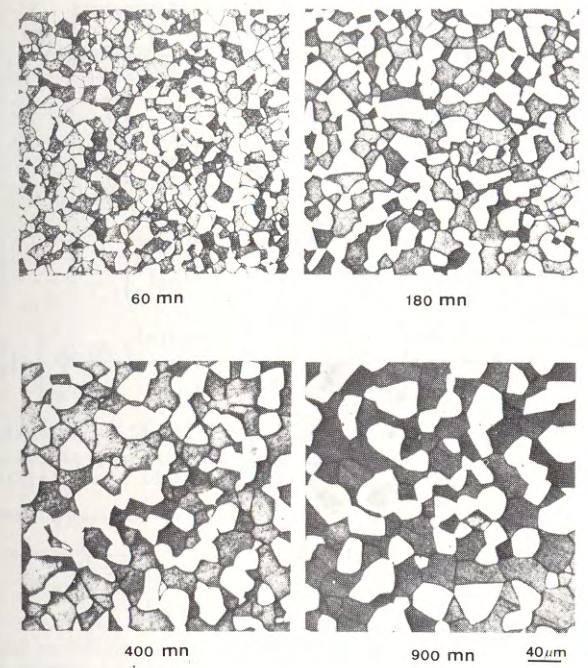


Fig. 2 - Micrographies obtenues sur une coupe transversale d'échantillons d'alliages à 45% de phase α après différents temps de recuit.

De façon plus générale, la taille des grains de la phase β dépend de la taille des grains initiale, de la déformation, de la vitesse de déformation, de la température et de la fraction volumique de phase α ou plutôt de la concentration C en l'un des éléments présents dans l'alliage, cuivre ou zinc. Ce paramètre apparaît en effet mieux adapté que la fraction volumique de phase α pour caractériser les laitons biphasés dans la mesure où α dépend à la fois de la concentration et de la température.

Sous forme incrémentale on peut écrire :

$$\begin{aligned} \delta \text{Log} L_\beta &= \frac{\delta \text{Log} L_\beta}{\delta \text{Log} \epsilon} \Bigg|_{\dot{\epsilon}_g, T, c, L_{\beta i}} \delta \text{Log} \epsilon + \frac{\delta \text{Log} L_\beta}{\delta \text{Log} \dot{\epsilon}_g} \Bigg|_{\epsilon, T, c, L_{\beta i}} \delta \text{Log} \dot{\epsilon}_g \\ &+ \frac{\delta \text{Log} L_\beta}{\delta \left(\frac{1}{T}\right)} \Bigg|_{\epsilon, \dot{\epsilon}_g, c, L_{\beta i}} \delta \left(\frac{1}{T}\right) + \frac{\delta \text{Log} L_\beta}{\delta c} \Bigg|_{\epsilon, \dot{\epsilon}_g, T, L_{\beta i}} \delta c \\ &+ \frac{\delta \text{Log} L_\beta}{\delta \text{Log} L_{\beta i}} \Bigg|_{\epsilon, \dot{\epsilon}_g, T, c} \delta \text{Log} L_{\beta i} \end{aligned} \quad (2)$$

La loi de comportement (1) s'écrit sous forme incrémentale :

$$\delta \text{Log} \sigma = \frac{1}{n} \delta \text{Log} \dot{\epsilon}_g + \frac{a}{n} \delta \text{Log} L_\beta + \frac{Q_\beta}{nR} \delta \left(\frac{1}{T} \right) - \frac{1}{n} \delta \text{Log} h(\alpha) \quad (3)$$

$$\delta \text{Log} h(\alpha) = \frac{\delta \text{Log} h(\alpha)}{\delta \alpha} \left[\left(\frac{\delta \alpha}{\delta c} \right)_T \delta c + \left(\frac{\delta \alpha}{\delta \frac{1}{T}} \right)_c \delta \left(\frac{1}{T} \right) \right] \quad (4)$$

Compte-tenu des relations (2) et (4), l'équation (3) s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta \text{Log} \sigma = & \frac{a}{n} \frac{\delta \text{Log} L_\beta}{\delta \text{Log} \dot{\epsilon}_g} \Big|_{\dot{\epsilon}_g, T, c, L_{\beta i}} \delta \text{Log} \dot{\epsilon}_g + \frac{1}{n} \left[1 + a \frac{\delta \text{Log} L_\beta}{\delta \text{Log} \dot{\epsilon}_g} \Big|_{\dot{\epsilon}_g, T, c, L_{\beta i}} \right] \delta \text{Log} \dot{\epsilon}_g \\ & + \frac{1}{nR} \left[Q_\beta + aR \frac{\delta \text{Log} L_\beta}{\delta \left(\frac{1}{T} \right)} \Big|_{\dot{\epsilon}_g, \dot{\epsilon}_g, c, L_{\beta i}} - R \frac{\delta \text{Log} h(\alpha)}{\delta \alpha} \left(\frac{\delta \alpha}{\delta \left(\frac{1}{T} \right)} \right)_c \right] \delta \left(\frac{1}{T} \right) \\ & + \frac{1}{n} \left[a \frac{\delta \text{Log} L_\beta}{\delta c} \Big|_{\dot{\epsilon}_g, \dot{\epsilon}_g, T, L_{\beta i}} - \frac{\delta \text{Log} h(\alpha)}{\delta \alpha} \left(\frac{\delta \alpha}{\delta c} \right)_T \right] \delta c \\ & + \frac{a}{n} \frac{\delta \text{Log} L_\beta}{\delta \text{Log} L_{\beta i}} \Big|_{\dot{\epsilon}_g, \dot{\epsilon}_g, T, c} \delta \text{Log} L_{\beta i} \end{aligned} \quad (5)$$

Si on ne tient pas compte de l'évolution de la taille des grains au cours de la déformation et en supposant que la loi de comportement soit de la même forme que précédemment, on peut écrire :

$$\delta \text{Log} \sigma = \frac{1}{n^*} \delta \text{Log} \dot{\epsilon}_g + \frac{a^*}{n^*} \delta \text{Log} L_{\beta i} + \frac{Q_\beta^*}{n^* R} \delta \left(\frac{1}{T} \right) - \frac{1}{n^*} \delta \text{Log} h^*(\alpha) \quad (6)$$

ou encore en remplaçant $\delta \text{Log} h^*(\alpha)$

$$\begin{aligned} \delta \text{Log} \sigma = & \frac{1}{n^*} \delta \text{Log} \dot{\epsilon}_g + \frac{1}{n^* R} \left[Q_\beta^* - R \frac{\delta \text{Log} h^*(\alpha)}{\delta \alpha} \left(\frac{\delta \alpha}{\delta \left(\frac{1}{T} \right)} \right)_c \right] \delta \left(\frac{1}{T} \right) \\ & - \frac{1}{n^*} \frac{\delta \text{Log} h^*(\alpha)}{\delta \alpha} \left(\frac{\delta \alpha}{\delta c} \right)_T \delta c + \frac{a^*}{n^*} \delta \text{Log} L_{\beta i} \end{aligned} \quad (7)$$

Dans ces relations n^* , a^* , Q_β^* , et $h^*(\alpha)$ sont les grandeurs rhéologiques qui seraient déterminées en considérant la structure initiale comme paramètre. La comparaison des relations (5) et (7) permet de mettre en évidence l'influence de l'évolution de la structure sur la loi de comportement. Cette influence se traduit par :

* un écrouissage apparent de coefficient $\frac{a}{n} \frac{\delta \text{Log} L_\beta}{\delta \text{Log} \dot{\epsilon}_g} \Big|_{\dot{\epsilon}_g, T, c, L_{\beta i}}$ qui est égal à $\frac{\delta \text{Log} L_\beta}{\delta \text{Log} \dot{\epsilon}_g}$

Compte-tenu des valeurs trouvées pour a et n , ce coefficient est égal à $\frac{\delta \text{Log} L_\beta}{\delta \text{Log} \dot{\epsilon}_g}$. La figure 3 illustre ce résultat dans le cas d'un alliage à 45% de α déformé à une vitesse de déformation égale à 10^{-2} mn^{-1} : la contrainte augmente au cours de la déformation et elle augmente proportionnellement à la taille des grains de la phase β .

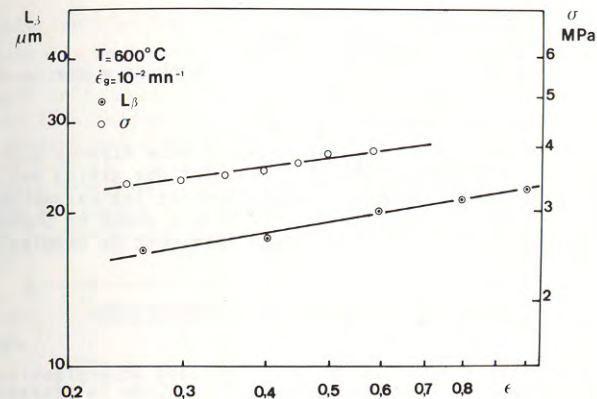


Fig. 3 - Influence de la déformation sur la taille des grains de la phase β et sur la contrainte d'écoulement pour un alliage à 45% de phase α déformé à une vitesse de déformation de 10^{-2} mn^{-1} .

* Une valeur apparente du coefficient de sensibilité à la contrainte

$$n^* = \frac{n}{1 + a \frac{\delta \text{Log} L_\beta}{\delta \text{Log} \dot{\epsilon}_g} \Big|_{\dot{\epsilon}_g, T, c, L_{\beta i}}} = \frac{2}{1 + 2 \frac{\delta \text{Log} L_\beta}{\delta \text{Log} \dot{\epsilon}_g} \Big|_{\dot{\epsilon}_g, T, c, L_{\beta i}}} \quad (8)$$

Cette valeur qui ne tient pas compte du grossissement apparaît toujours supérieure à n . La figure 4 montre ce résultat pour l'alliage à 45% de phase α déformé à 600° C jusqu'à différents taux de déformation. Les différentes valeurs obtenues par le coefficient n^* sont le résultat de la comparaison de structures différentes.

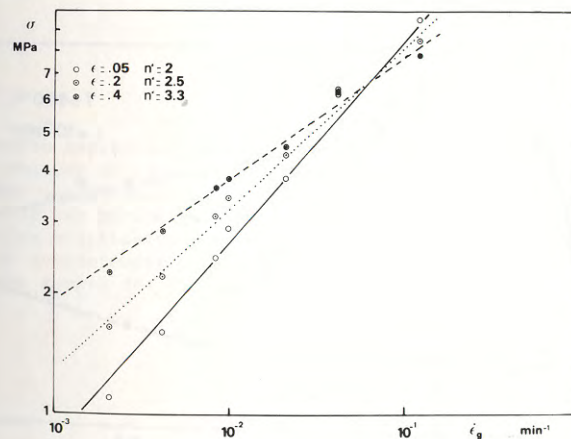


Fig. 4 - Variations de la contrainte en fonction de la vitesse de déformation pour l'alliage à 45% α déformé à 600° C jusqu'à différents taux de déformation. Les différentes valeurs obtenues pour le coefficient n^* sont le résultat de la comparaison de structures différentes.

- * Une énergie d'activation apparente Q_{β}^*
- * Une influence différente de la proportion de phase α sur la loi de comportement.
- * Une valeur apparente du coefficient a^*

Ces résultats concernant les laitons peuvent être étendus à d'autres alliages superplastiques pour lesquels le grossissement des grains est très important au cours de la déformation. Ce grossissement modifie les paramètres rhéologiques de la loi de comportement et il doit être considéré comme un phénomène dont il est nécessaire de tenir compte lors de l'établissement de modèles physiques.

3. CAVITATION : INFLUENCE SUR LES PARAMETRES RHEOLOGIQUES.

Les laitons subissent au cours de la déformation superplastique un phénomène d'endommagement dont le taux dépend de l'alliage, de la vitesse de déformation et de l'amplitude de la déformation. Il se manifeste par des cavités aux joints triples $\alpha/\alpha/\beta$. Les études expérimentales ont montré que le taux de cavitation est contrôlé par la déformation de la phase la plus ductile ϵ_{β} , celle-ci se déduisant de la déformation totale subie par le matériau par la relation :

$$\epsilon_{\beta} = \frac{\epsilon}{g(\alpha)} \quad (9)$$

L'effet d'endommagement sous forme de cavités supposées approximativement sphériques a été étudié théoriquement par Jonas et Baudelet /2/. Ils ont aussi montré que la génération de cavités tend d'une part à diminuer le coefficient d'érouissage (dans le cas de matériaux superplastiques sans grossissement des grains, cet effet se traduit par un adoucissement du matériau) et d'autre part à diminuer le coefficient n^* (ou augmenter n^*) conduisant ainsi à une localisation plus rapide de l'écoulement et donc à des allongements à rupture plus faibles. Un tel adoucissement ainsi qu'une légère augmentation du coefficient n^* mise en évidence par des essais de relaxation à différents taux de déformation ont été observés dans le cas d'un alliage à 70% de phase α (figure 5).

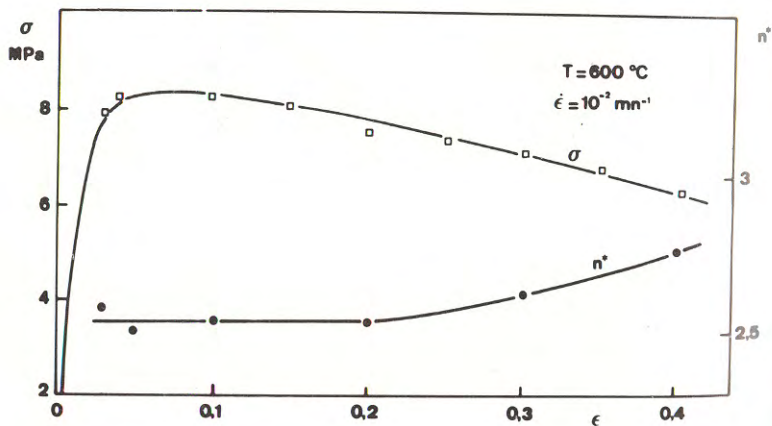


Fig. 5 - Effet de l'endommagement sur la contrainte et le coefficient n^* déterminés à différents taux de déformation pour l'alliage à 70% α déformé à 600°C à une vitesse de déformation de 10^{-2}mn^{-1}

Un autre effet de l'endommagement apparaît clairement dans le cas d'un alliage à 70% de phase α . La figure 6 donne les variations de la contrainte en fonction de la déformation pour un échantillon déformé jusqu'à rupture à une vitesse de $6,45 \times 10^{-3} \text{mn}^{-1}$. Cette courbe présente une augmentation très importante de la contrainte dans le dernier stade de la déformation. Un tel phénomène a également été observé par d'autres auteurs dans les laitons /3-5/ ainsi que dans les alliages Cu-Ni-Zn /6/. Il correspond à une coalescence des cavités conduisant à une rupture sans striction apparente. Pour les faibles proportions de α , un tel phénomène n'apparaît pas, la rupture est alors parfaitement ductile sans augmentation de la contrainte en fin d'essai malgré la présence des cavités.

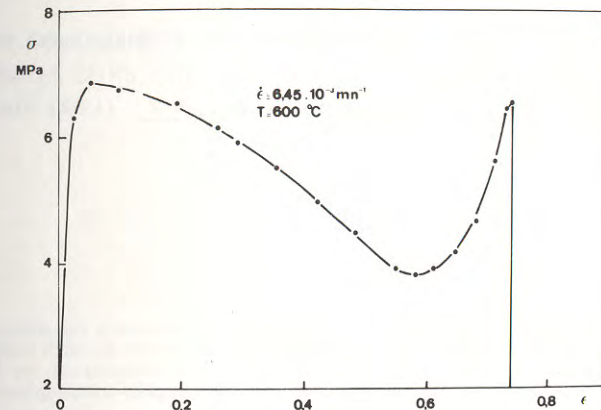


Fig. 6 - Courbe contrainte-déformation pour l'alliage à 70% α déformé jusqu'à rupture à 600°C à une vitesse de déformation de $6,45 \times 10^{-3} \text{mn}^{-1}$.

4. CONCLUSION

La déformation superplastique s'accompagne parfois de grossissement de grains et de formation de cavités. Ces phénomènes sont importants et l'étude des facteurs qui les influencent permet de mettre en évidence les modifications qu'ils font subir aux paramètres rhéologiques de la loi de comportement du matériau. De telles modifications doivent être prises en compte pour l'établissement de lois de comportement à caractère métallurgique et de modèles physiques en vue de rendre compte des caractéristiques de la déformation superplastique.

**INFLUENCE DU DURCISSEMENT INTRACRISTALLIN
ET DES INTERFACES
SUR LA PLASTICITE A FROID DES METAUX PURS
THE INFLUENCE OF INTRACRYSTALLINE HARDENING
AND INTERFACES
ON PURE METALS PLASTIC BEHAVIOUR**

C. REY et P. FRANCIOSI
Laboratoire PMTM, CNRS, Université Paris-Nord - Villetaneuse - France

BIBLIOGRAPHIE

- /1/ M. SUERY and B. BAUDELET - *Phil. Mag. A* 41, (1980) 41.
- /2/ J. J. JONAS and B. BAUDELET - *Acta. Met.* 25, (1977) 43.
- /3/ S. SAGAT and D. M. R. TAPLIN - *Acta. Met.* 24, (1976) 307.
- /4/ S. SAGAT, P. BLENKINSOP and D. M. R. TAPLIN - *J. Inst. Metals* 100, (1972) 268.
- /5/ T. CHANDRA, J. J. JONAS and D. M. R. TAPLIN - *J. Aust. Inst. Metals* 20 (1975) 220
- /6/ D. W. LIVESEY and N. R. RIDLEY - *Met. Trans.*, 9 A (1978) 519.

RESUME

On étudie l'influence du durcissement intracristallin et des hétérogénéités de déformation plastique (existence dans un même grain de zones déformées suivant des systèmes de glissement différents) sur les propriétés de bicristaux d'aluminium et de cuivre compatibles et incompatibles plastiquement déformés en traction simple.

Dans la première partie de ce travail, les caractéristiques du durcissement intracristallin sont déterminées à partir d'essais en traction sur des monocristaux de cuivre et d'aluminium. Dans la deuxième partie, il est montré que l'existence des hétérogénéités de glissement est liée à la formation d'interfaces intragranulaires incompatibles plastiquement et que leur évolution avec la déformation dépend de la nature des différents systèmes de glissement activés dans le grain. Les conditions d'activation de ces systèmes sont analysées en fonction des contraintes internes (évaluées à partir de la théorie continue des dislocations) et du durcissement intracristallin. Il est montré que la formation d'hétérogénéités de glissement constitue un mécanisme d'accommodation des différentes incompatibilités (intra et intergranulaires) qui favorise l'affaiblissement des pentes d'écrouissage.

ABSTRACT

The present work is concerned with the influence of intragranular latent hardening and plastic slip heterogeneities (i.e. the simultaneous occurrence in the same grain of several areas plastified differently) on the main features of tensile tested plastically compatible and incompatible aluminium and copper bicrystals.

The first part of the paper is devoted to the characterization of latent hardening properties of tensile tested single crystals. The second part shows that the initiation of heterogeneities is bound to the formation of plastically incompatible intragranular interfaces and that their evolution with increasing deformation depends upon the kinds of activated slip systems in the grain. Conditions of the latter activation are given by taking into account the internal stresses (evaluated thanks to the continuous theory of dislocations) as well as the latent hardening properties of the material. It is also pointed out that the formation of heterogeneities sets up an accommodation process of the different plastic incompatibilities (intra and intergranular) leading to smooth bicrystals hardening slopes.

INTRODUCTION

La connaissance du comportement plastique du monocristal et celle de l'influence propre des joints de grains sur les propriétés mécaniques des agrégats sont autant d'éléments indispensables à la compréhension du comportement du polycristal. En effet, il est maintenant clairement établi (1)(2) que les propriétés du polycristal (écrouissage, texture) dépendent de l'action combinée de trois facteurs élémentaires qui sont : les interactions entre les systèmes de glissement activés au cours de la déformation (durcissement latent), les incompatibilités plastiques (sources de contraintes internes), les hétérogénéités de glissement (existence dans un même grain de plusieurs zones déformées suivant des systèmes différents). Ces deux derniers facteurs sont liés à la présence des joints de grains.

Dans l'étude présentée ici, il est montré que les effets du durcissement latent contrôlent l'évolution en fonction de la déformation des hétérogénéités de glissement plastique dans les grains d'un polycristal et de ce fait, jouent un rôle important dans l'accommodation des incompatibilités plastiques. Cette étude comprend trois volets :

- Evaluation des interactions entre systèmes de glissement grâce à une approche expérimentale de la loi d'écrouissage du monocristal (grain hors de l'agrégat) sur deux matériaux, aluminium et cuivre, de caractéristiques mécaniques différentes.

- Détermination du rôle du joint de grain dans la formation des hétérogénéités de glissement et analyse des effets propres au durcissement latent et aux contraintes internes dans l'évolution de ces hétérogénéités. Pour dissocier les deux rôles d'obstacle au glissement et de sources de contraintes internes d'un joint de grain, l'étude a porté sur des bicristaux (de cuivre et d'aluminium) incompatibles et compatibles plastiquement.

- Un essai de généralisation des résultats obtenus sur les bicristaux au cas des polycristaux est tenté dans la troisième partie.

I. ETUDE DES INTERACTIONS ENTRE SYSTEMES DE GLISSEMENT DANS LE MONOCRISTAL

I.1. Principe de la méthode

A froid, la déformation plastique des monocristaux CFC s'effectue par glissement cristallographique sur les systèmes $\langle 110 \rangle$ (111) (12 systèmes). Lorsqu'un monocristal (recuit pour homogénéisation) est déformé plastiquement en traction uniaxe selon une orientation convenablement choisie, la déformation plastique s'effectue par glissement simple homogène sur le système (noté i) le plus sollicité (cission réduite τ_i maximum). Une seconde éprouvette découpée dans le cristal préformé à un état plastique ($\tau_{i\max}$, $\gamma_{i\max}$) et d'axe choisi pour favoriser du point de vue des cissions réduites un système différent du premier activé, se déformera soit en glissement simple soit en glissement multiple selon le choix du système secondaire et le degré d'anisotropie de l'écrouissage du matériau. Lorsque la déformation secondaire est un glissement simple (k), l'effet du glissement primaire (γ_i) sur l'écrouissage de ce second système est exprimé (moyennant certaines précautions expérimentales (3)) par le rapport de durcissement

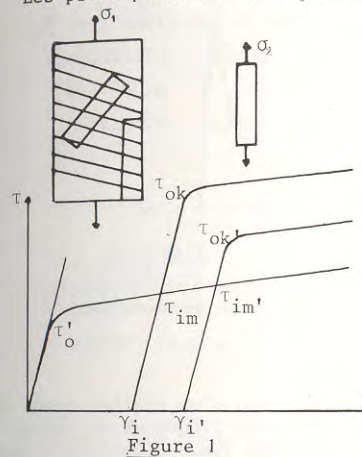
$$L_{ki} = \frac{\tau_{ok}}{\tau_{i\max}}$$

cission critique maximale de la prédéformation (Fig. 1). Une déformation secondaire multiple malgré le choix d'une orientation sollicitant préférentiellement un système, traduit également l'anisotropie de l'écrouissage due au glissement

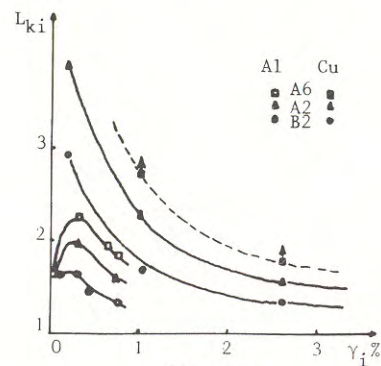
primaire, mais les amplitudes relatives des glissements n'étant pas mesurables, ces cas ne fournissent que des informations qualitatives. Cette démarche expérimentale a été suivie pour les présents essais sur cuivre et aluminium, réalisés à 200°K.

1.2. Rapports de durcissement pour le cuivre et l'aluminium

Les principaux résultats peuvent s'énoncer comme suit : (Fig. 2)



Principe des essais



Rapports du durcissement latent en fonction du glissement primaire

- Pour l'ensemble des essais réalisés, le durcissement des systèmes inactifs (latents) apparaît plus important que celui du système actif, ceci conformément à l'essentiel de la bibliographie sur le sujet (4)(5).

- Pour chaque système secondaire, le rapport de durcissement croît rapidement de 1 ($\gamma_i = 0$) jusqu'à un maximum (γ_i de l'ordre de 0,2 %) puis décroît régulièrement tout au long du Stade I des courbes de traction CFC, pour se stabiliser vers la fin de celui-ci à une valeur résiduelle supérieure à l'unité.

- Les maxima des rapports de durcissement pour le cuivre (de 2,5 à 4,5) sont globalement doubles de ceux pour l'aluminium.

- Les 11 systèmes latents de la structure CFC semblent pouvoir être classés en 3 groupes principaux, à la fois en accord avec la géométrie de la situation (symétrie par rapport au système actif) (Fig. 3a) et avec une classification en termes de types d'interactions de dislocations à courte distance (intersections) (6). Le groupe de plus fort durcissement réunit les systèmes dont les dislocations forment des verrous de Lomer-Cottrell avec celles du primaire. Le groupe intermédiaire contient les systèmes dont les dislocations peuvent former des jonctions glissiles avec celles du primaire, le groupe des systèmes faiblement durcis rassemble ceux ne faisant pas de jonctions avec le primaire (Fig. 3b).

- La plus forte anisotropie du cuivre s'explique alors par sa plus faible énergie de faute d'empilement (dislocations plus dissociées).

- Il est vérifié qu'un monocristal ayant été prédéformé n'obéit plus à un simple critère de facteur de Schmid maximal. Dans un tel cas, le premier système activé n'est plus celui (k) de plus grand facteur de Schmid $F_k = \frac{\tau_k}{\sigma}$ (donc subissant la cission réduite τ_k la plus élevée) mais celui de plus grand rapport $\frac{F_k}{L_{ki}}$.

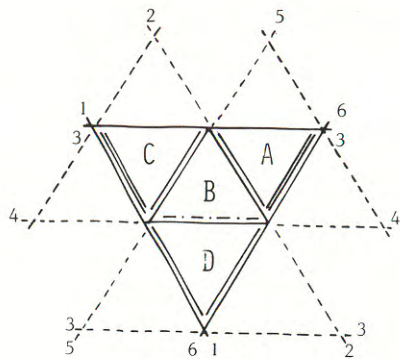


Figure 3a

Tétraèdre de Thomson

- Jonctions avec B_4

A_6-C_1 b. Lomer Cottrell

$A_2-C_5-D_1-D_6$ j. glissiles

- Pas de jonctions avec B_4

B_2-B_5 coplanaires

D_4 g. déviés

A_3-C_3 v. Hirth

Figure 3b

Type d'interactions de dislocations

effet déterminant pour la déformation ultérieure. Si le cas est tel, on peut prendre pour termes de la matrice H les L_{ki} "résiduels" de fin de Stade I qui pour l'aluminium sont très voisins de l'isotropie.

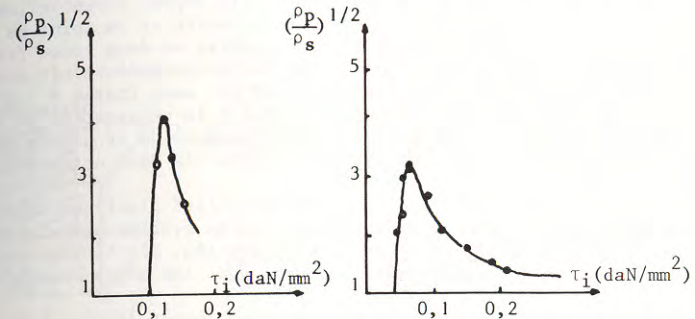


Figure 4a

Variation prédite du rapport $(\rho_p/\rho_s)^{1/2}$

Al

Figure 4b

Variation mesurée du rapport $(\rho_p/\rho_s)^{1/2}$

Cu (9)

1.3. Loi d'écroissage du monocristal

La nature de l'interaction entre les dislocations d'un système donné (actif) et les dislocations obstacles du cristal, ainsi que la fréquence de chacun des types d'interaction (donc les densités des différents types d'obstacles) apparaissent comme les facteurs déterminants de l'écroissage de ce système et donc du monocristal. La variation, avec le glissement primaire, de l'écroissage latent serait alors due à la multiplication, au cours du glissement, des densités de dislocations, tant sur le système actif où elle est prédominante que sur les autres systèmes où l'expérience montre qu'elle n'est pas inexistante (7)(8). En exprimant la cission critique d'un système k sous la forme :

$$\tau_{ck} = \mu b \left(\sum_j a_{kj}^2 \rho_j \right)^{1/2} \quad (1)$$

où les ρ_j sont les densités de dislocations sur chacun des systèmes et les a_{kj} des coefficients distinguant les divers types d'interactions, les rapports de durcissement peuvent s'écrire (pour i actif) :

$$L_{ki} = \frac{a_{ki}^2 \rho_i / \rho + (C - a_{ki}^2)^{1/2}}{a_{ii}^2 \rho_i / \rho + (C - a_{ii}^2)^{1/2}} \quad (2) \quad C = \sum_{j=1}^{12} a_{kj}^2$$

lorsque, pour simplifier, les densités de dislocations sur les systèmes latents sont supposées identiques ($\rho_k = \rho$ pour tout $k \neq i$).

La variation du rapport ρ_i/ρ , densité primaire sur densité secondaire moyenne, en fonction du glissement primaire γ_i , telle qu'on l'obtient à partir de (2) et des courbes L_{ki}/γ_i expérimentales (on identifie les maximaux aux rapports des coefficients $\frac{a_{ki}}{a_{ii}}$), est tout à fait comparable aux courbes expérimentales de mesures de ce même rapport obtenues par Mecking et Bullian (9) pour le cuivre déformé en glissement simple (Fig. 4a et 4b).

Une description commode du comportement plastique du monocristal par une matrice d'écroissage H telle que $\tau_{ck} = \tau_o + \sum_j H_{kj} \gamma_j$ (10) apparaîtra comme une approximation raisonnable si la forte anisotropie initiale des L_{ki} n'est pas un

Néanmoins, les valeurs relatives des densités de dislocations et leur variations sont vraisemblablement liées à la combinaison des cissions réduites ($\tau_1 \dots \tau_n$) due à l'état de contrainte appliqué, et à l'évolution de cette combinaison au cours de la déformation. Dans un tel cas, et au moins pour les états de contrainte (uni ou multiaxes) réalisant une combinaison de cissions réduites ($\tau_1 \dots \tau_n$) très différente de celle associée à la traction uniaxe orientée pour un glissement initialement simple, une matrice H définie à partir de tels essais ne pourra garder la même validité. Au cours de l'étude des bicristaux rapportée maintenant, il sera possible d'examiner la valeur d'une matrice H ainsi identifiée aux L_{ki} résiduels des essais de durcissement latent.

II. ETUDES DES HETEROGENEITES DE GLISSEMENT DANS LE BICRISTAL

II.1. Formation de hétérogénéités

Une première étude (11) portant sur des bicristaux d'aluminium compatibles plastiquement a permis de mettre en évidence une différence d'aspect des lignes de glissement apparues sur les deux faces perpendiculaires au joint d'un même grain. Cette différence se manifeste dès le début de la déformation plastique : alors qu'une des faces est déformée plastiquement suivant le système primaire, l'autre présente le long du joint une zone en régime élastique. Un accroissement de la déformation macroscopique entraîne par la suite l'activation dans cette zone d'un système dit secondaire, différent du système primaire, ainsi que la formation d'une interface à l'intérieur du grain.

Le modèle qui a été élaboré pour expliquer ce phénomène repose sur le fait que le système de glissement primaire ne s'active pas de façon homogène dans l'ensemble du grain : il s'initie préférentiellement près d'une surface libre et se propage dans la direction du vecteur de glissement primaire vers le joint. Tant que le système primaire ne rencontre pas le joint, sa propagation est compatible et ne crée pas de contraintes internes. Une telle propagation implique que la région déformée est limitée par une interface plane, perpendiculaire au vecteur de glissement ou parallèle au plan de glissement. Dès que l'interface atteint le joint, la propagation devient incompatible, l'interface prend alors

une position moyenne et se comporte comme une source superficielle d'incompatibilités plastiques et de contraintes internes. La position initiale de cette interface incompatible est parfaitement définie par les caractéristiques géométriques et cristallographiques du grain concerné : elle dépend essentiellement de l'orientation relative du vecteur de glissement primaire et du joint de grain. Un grain contenant une interface de ce type, se divise en deux zones distinctes : une zone (notée V) où la propagation du système primaire s'effectue facilement sous l'effet de la contrainte appliquée et une zone (notée V') où le système secondaire déjà présent constitue un obstacle à la propagation du système primaire. L'importance de cet obstacle dépend évidemment de la nature des interactions que peuvent former ces deux systèmes lorsqu'ils sont activés dans la même région.

Pour vérifier que la présence d'une incompatibilité plastique intergranulaire ne modifiait pas le processus de propagation du système primaire et par conséquent le mécanisme de formation des hétérogénéités, des bicristaux de cuivre incompatibles plastiquement ont été déformés dans les mêmes conditions que les bicristaux d'aluminium.

Les prévisions faites à partir du modèle précédemment décrit, concernant l'existence et la localisation des hétérogénéités dans les bicristaux de cuivre, se sont révélées en parfait accord avec les observations, ce qui permet d'affirmer que le processus d'initiation des hétérogénéités est un phénomène géométrique indépendant des effets d'incompatibilité globale et de l'érouissage latent. Il n'en est pas de même en ce qui concerne l'évolution et l'aspect de ces hétérogénéités, et d'importantes différences apparaissent d'une série de bicristaux à l'autre. Pour comprendre cette différence de comportement, une étude systématique de la nature des systèmes activés au cours de la déformation jointe à une évaluation des contraintes internes a été effectuée.

II.2. Evolution des hétérogénéités de glissement plastique avec la déformation (12)

Les observations des lignes de glissement activées de part et d'autre d'une interface intragranulaire et l'évolution de celle-ci à l'intérieur du grain à différents stades de la déformation, ont permis de distinguer deux classes d'hétérogénéités :

a) Hétérogénéités stables

Dans le cas du cuivre, il a été constaté que l'activation dans les deux zones V et V' de systèmes de glissement qui, mis en présence, donneraient des interactions fortes (barrière de Lomer Cottrell, jonctions glissiles) suffit à stabiliser l'interface intragranulaire. Ceci entraîne la formation à l'intérieur du grain d'un véritable domaine contenant des systèmes de glissement différents du système primaire. De tels domaines se sont révélés stables jusqu'à la rupture.

Le cas de l'aluminium est assez différent. En effet, il n'existe pas réellement de domaine stable : des "paquets" de glissement primaire parviennent à se propager dans la zone V' conférant à celle-ci un aspect très hétérogène mais différent de l'aspect initial et du reste du grain.

La différence de comportement des bicristaux de cuivre et d'aluminium s'explique aisément à partir des courbes de durcissement latent données au paragraphe 1. En effet, les interactions du type barrière de Lomer Cottrell et jonctions glissiles sont beaucoup plus faibles dans l'aluminium que dans le cuivre. Il en résulte que la propagation du système primaire dans V' est seulement freinée dans le premier cas et totalement interdite dans le second.

b) Hétérogénéités instables

La déformation plastique du grain s'homogénéise par propagation du système primaire dans la zone V'. L'interface intragranulaire disparaît alors, laissant le grain en glissement multiple. Le taux de déformation à partir duquel il y a homogénéisation complète du glissement dépend également du durcissement latent : il est plus faible pour l'aluminium que pour le cuivre.

Les différents types d'hétérogénéités sont représentés sur la figure 5.

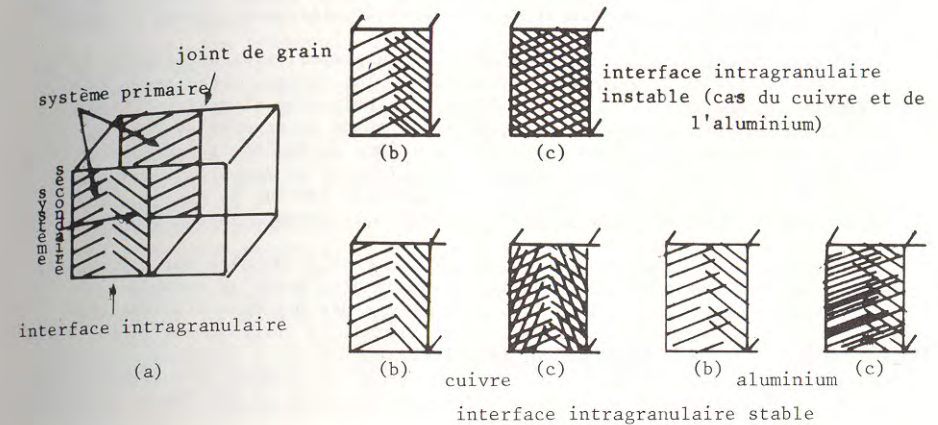


Figure 5 : Evolution des hétérogénéités de glissement et des interfaces intragranulaires avec la déformation dans le cas de bicristaux de cuivre et d'aluminium.

(a) faible déformation $E_{zz} < 1\%$

(b) moyenne déformation $2\% < E_{zz} < 5\%$

(c) forte déformation $E_{zz} > 5\%$

Pour analyser la part respective des contraintes internes (intra et intergranulaires) et du durcissement latent dans l'activation des différents systèmes de glissement observés dans V et V', il était logique de comparer les systèmes actifs et les systèmes les plus chargés.

La cission réduite totale $\tau(k)$ sur les différents systèmes k de glissement est déterminée à partir d'un calcul de contraintes internes dérivé de la théorie continue des dislocations (13) et qui prend en compte les effets d'accommodation plastique. Les contraintes internes sont évaluées en fonction des caractéristiques élastiques du matériau, des incompatibilités plastiques de déformation d'origine intra et intergranulaire, des courbes de traction et de la position de l'interface intragranulaire.

L'évaluation des contraintes totales (internes et appliquées) dans V et V' en fonction de la déformation macroscopique axiale E_{zz} a été effectuée pas à pas afin de tenir compte de l'activation progressive des différents systèmes de glissement. Deux cas ont été distingués, celui des très faibles déformations, où la zone V est déformée plastiquement suivant le système primaire tandis que la zone V' est en régime élastique, et celui des moyennes déformations, où la zone V' est déformée suivant le premier système secondaire k.

À très faible déformation, le classement des systèmes de glissement dans l'ordre de leur cission décroissante, permet de mettre en évidence une correspondance entre le système le plus chargé et le système effectivement observé dans V'. À ce stade de déformation, aucune différence de comportement n'apparaît entre le cuivre et l'aluminium.

A moyenne déformation, il a été constaté que la prise en compte dans les calculs du système secondaire k activé dans V' , contribue premièrement à diminuer les contraintes internes aussi bien dans V' que dans V , ce qui indique une accommodation progressive des incompatibilités plastiques initiales, et deuxièmement à modifier le classement des systèmes de glissement obtenu à faible déformation.

Si dans le cas de l'aluminium (faible écrouissage) le second système k' activé dans V' correspond toujours au système le plus chargé, cette correspondance n'existe plus dans le cas du cuivre. Ce dernier phénomène s'explique aisément à partir des résultats obtenus au paragraphe I : quand un premier système est actif dans une région, il durcit les autres systèmes de manière anisotrope et l'activation d'un second système k' dépendra à la fois de sa nouvelle cission critique réduite (déterminée par l'activation du premier système k , qui joue ici le rôle de système primaire) et des propriétés de durcissement latent (interactions entre les systèmes k et k').

Les conditions pour que la cission réduite totale calculée sur les seconds systèmes de glissement activés dans V' ou dans V atteignent la nouvelle cission critique ont été analysées (12) dans le cas des moyennes déformations ($E_{zz} > 3\%$) où, d'après l'étude sur le monocristal, le durcissement latent varie linéairement avec la déformation et peut être représenté de façon satisfaisante dans cette gamme de déformation par une matrice d'écrouissage dont chaque élément $H_{kk'}$ est lié directement à la force d'interaction entre le système k' considéré et le système k déjà actif.

Les valeurs $H_{kk'}$ correspondant à différents types d'interaction sont déduites des calculs de contraintes internes, à condition que les systèmes k et k' soient parfaitement identifiés. Dans l'hypothèse où la cission critique réduite initiale τ_0 est négligeable devant celle liée directement au durcissement (formule 10) un critère d'activation proche de celui déjà signalé dans le cas des monocristaux a été déduit : le second système k' effectivement activé est celui

qui présente le plus grand rapport $\frac{\tau(k')}{H_{kk'}}$ où k est le système déjà présent et $\tau(k')$ la cission réduite calculée sur k' . Notons que dans le cas de l'aluminium, l'écrouissage latent est trop faible pour modifier le classement des systèmes par ordre de cission décroissante.

Les valeurs de $H_{kk'}$ ainsi calculées sont en bon accord avec les mesures directes de durcissement latent sur monocristaux dans la même gamme de déformation, ce qui montre que les propriétés de durcissement latent du monocristal peuvent être transposées sans grande modification au cas du bicristal tout au moins dans une première approche.

L'évolution des hétérogénéités de glissement et par conséquent le mécanisme d'accommodation des incompatibilités plastiques sont donc en majeure partie contrôlés par les propriétés de durcissement latent du matériau. Les conséquences de tels effets sur les propriétés mécaniques des bicristaux sont maintenant analysées.

III. COURBES D'ECROUISSAGE

Dans les bicristaux, la pente d'écrouissage dépend de l'importance des zones en glissement double par rapport au volume total du bicristal et par conséquent de la nature des interactions des systèmes présents dans une même région, sans qu'il soit possible de préciser l'importance relative du facteur taille et du facteur interaction. Il faut souligner particulièrement le fait que l'existence d'interfaces stables (bicristaux de cuivre) séparant des systèmes qui, activés simultanément dans une même région, auraient interagi fortement, contribue à diminuer les pentes d'écrouissage, à condition bien entendu que les systèmes présents d'un même côté de l'interface soient en interaction faible. L'importance de ce phénomène dépend évidemment de la taille des hétérogénéités par rapport à la taille du bicristal, et varie d'une situation à l'autre.

CONCLUSION

Le bicristal correspond à une situation très simplifiée par rapport à celles du polycristal où chaque grain est totalement entouré et les résultats exposés ci-dessus ne peuvent être transposés sans précaution préalable à ce dernier.

Un point commun aux bicristaux et polycristaux est l'existence de domaines, comme l'ont confirmé les études sur bicristaux "spéciaux" où l'un des grains entoure l'autre (14), sur les tricristaux (15), et enfin les observations micrographiques et les mesures de désorientation par méthode de Kossel (1) à l'intérieur d'un même grain d'un polycristal déformé plastiquement. Il faut noter que la formation de domaines dans les polycristaux est probablement favorisée par l'existence à l'intérieur de chacun des grains de contraintes internes intergranulaires hétérogènes liées au fait que les grains proches voisins ne sont pas tous déformés de façon identique.

Du processus géométrique de formation des hétérogénéités, il faut garder l'idée qu'un joint de grain, ou une partie du joint si celui-ci n'est pas plan (ce qui est le cas dans les polycristaux), peut s'opposer à une propagation homogène d'un glissement plastique initié par exemple à l'intérieur d'un grain (ce blocage de la déformation dépend uniquement de l'orientation relative du vecteur glissement et de la partie du joint concernée). Par contre, il est évident que la position des interfaces intragranulaires ne peut plus être déterminée étant donnée la complexité de la géométrie des grains, rendant ainsi l'évaluation des contraintes intragranulaires extrêmement difficile. Il n'en reste pas moins que ces contraintes ne doivent pas être négligées car, si l'on se réfère au cas des bicristaux, on constate qu'elles sont du même ordre de grandeur que les contraintes internes d'origine intergranulaire *.

Des résultats du paragraphe II, il ressort que la formation des domaines dans les matériaux à écrouissage très anisotrope constitue un mécanisme très favorable d'accommodation des incompatibilités plastiques qui favorise l'affaiblissement des pentes d'écrouissage et conduit à la dispersion de la texture **. Il est donc justifié d'introduire ces deux propriétés (écrouissage anisotrope et formation de domaines) dans les modèles polycristallins.

Parmi les différentes approches du comportement cristallin, le schéma self-consistent de Kröner (16) (dans lequel chaque grain du polycristal est considéré comme une inclusion dans une matrice homogène dont le comportement est celui du polycristal) est celui qui peut offrir la meilleure base pour développer une telle tentative. Pour tenir compte de la localisation des systèmes de glissement en des points différents du grain, l'inclusion de départ (déformée de façon homogène suivant deux systèmes), est remplacée par deux inclusions de même orientation initiale, déformées chacune de façon homogène suivant un seul des deux systèmes. La résolution d'un problème plus général appliqué au cas de deux inclusions a permis d'affirmer que la formation de domaines est un phénomène favorable du point de vue énergétique (1).

La formation de domaines a pour conséquence de diminuer le nombre de systèmes en interaction forte. Pour traduire cette propriété sans passer par le modèle de la double inclusion, on peut envisager d'introduire dans le comportement du grain une matrice d'écrouissage anisotrope de façon à diminuer la probabilité d'activer des systèmes en interaction forte. Si un tel procédé ne peut rendre compte des textures puisque les systèmes prévus par le modèle ne correspondent pas forcément aux systèmes réellement activés, il peut se révéler suffisant pour donner une bonne approximation des caractéristiques de durcissement des polycristaux.

* : Dans le cas de l'aluminium, les contraintes intragranulaires sont largement dominantes et sont donc presque exclusivement responsables de l'activation des systèmes de glissement dans V' .

** : Si l'on écarte le cas des polycristaux à très petits grains où les hétérogénéités ont peu de possibilités de se développer, il est probable que l'importance des effets liés à l'existence des hétérogénéités dépend de la taille du grain ; mais en l'absence de travaux sur ce sujet aucune précision ne peut être apportée ici.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) M. BERVEILLER, Thèse d'Etat, Université Paris-Nord, Villetaneuse, 1978.
- (2) M. BERVEILLER, A. ZAOUÏ, J. Mech. Phys. Solids 26, 325 (1979).
- (3) P. FRANCIOSI, Thèse, Université Paris VII, 1978.
- (4) P.J. JACKSON et Z.S. BASINSKI, Can. J. Phys. 45, 707 (1967).
- (5) U.F. KOCKS et T.J. BROWN, Acta Metall. 19, 903 (1971).
- (6) J.D. BAIRD et B. GALE, Phil. Trans. R. Soc. A 257, 553 (1965).
- (7) J.D. LIVINGSTON, G.E. Research Lab Rapt. N° 62-RL-3173 M (1962).
- (8) Z.S. BASINSKI, Phil. Mag. 9, 51 (1964).
- (9) H. MECKING et G. BULIAN, Acta Metall. 24, 294 (1976).
- (10) J. MANDEL, Int. J. Solids Struct. 1, 273 (1965).
- (11) C. REY, A. ZAOUÏ, Acta Met, 28, 687 (1980).
- (12) C. REY, Thèse d'Etat, Université Paris-Nord, Villetaneuse, 1980.
- (13) E. KRÖNER, Kontinuums Theorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Berlin, Springer Verlag, 1958.
- (14) J.J. HAUSER, B. CHALMERS, Acta Met 9, 802 (1961).
- (15) T.D. LEE, H. MARGOLIN, Metal. Trans. 8A, 175 (1977).
- (16) E. KRÖNER, Acta Met 9, 155 (1961).

SESSION 4

La session est ouverte sous la présidence de
R. COURTEL
Ancien Président du Groupe Français de Rhéologie

Sont intervenus MM. :

C. HUET
H. AYTAC, J. RENARD et G. VERCHERY
Y. BAMBERGER (*)
G. CORDIER et K. DANG VAN
J.M. JALINIER et B. BAUDELET (**)

(*) Le texte écrit de la communication
«Modèle de matériau microfissuré
et application aux bétons et aux roches»
ne figure pas dans ces comptes rendus.

(**) Le texte écrit de la communication
«Endommagement et rhéologie»
ne figure pas dans ces comptes rendus

**REMARQUES SUR LA PROCEDURE D'ASSIMILATION
D'UN MATERIAU HETEROGENE
A UN MILIEU CONTINU EQUIVALENT**

**REMARKS ON ASSIMILATION
OF A HETEROGENEOUS MATERIAL
TO A CONTINUOUS MEDIUM**

C. HUET

Centre d'Enseignement et de Recherche en Matériaux de Construction -
Ecole Nationale des Ponts et Chaussées - Paris - France

RESUME

Certains aspects du traitement statistique généralement appliqué aux équations relatives à un corps constitué d'un matériau hétérogène sont examinés. Ceci conduit à appliquer le traitement statistique, dans le cadre stochastique, dès le niveau des équations universelles de bilan. On obtient alors des conditions universelles d'assimilation à un milieu continu équivalent. Leur satisfaction permet la construction d'un système complet d'équations du comportement statistique local sans hypothèse a priori sur les propriétés du matériau ni sur celles de ses constituants. Le principe d'une procédure de détermination expérimentale du comportement statistique local est définie.

ABSTRACT

A few aspects of the statistical treatment currently applied to a body made of a heterogeneous material are examined. This leads to an application of the statistical treatment, in the stochastic frame, at the level of universal balance equations in local form. This provides universal conditions for assimilation of the material to an effective continuum. When these are fulfilled, a complete set of statistical constitutive equations can be built on, without any assumption on the material properties, nor on those of the constituents. A procedure for their experimental determination is defined in the principle.

1. INTRODUCTION .

Les conférences et communications faites à ce Colloque suffisent à montrer, si besoin était, à quel point l'hétérogénéité des matériaux peut compliquer le schéma initial de la théorie des milieux continus. Pourtant le Bureau d'Etudes ne s'embarrasse généralement pas de ces complications et traite les matériaux entrant dans la constitution des ouvrages ou des pièces qu'il conçoit et dimensionne comme des milieux auxquels il applique, le plus souvent avec un succès indéniable, la théorie classique des milieux continus.

Il effectue ainsi en fait, de façon implicite si ce n'est inconsciente, l'assimilation du matériau à un milieu continu équivalent.

Cette démarche repose sur la notion de propriété macroscopique résultant d'une certaine globalisation effectuée par la pensée au niveau du matériau et qui conduit notamment à celle d'élément de volume significatif (ou représentatif) assez grand pour que soit gommée l'influence des détails microscopiques, mais assez petit pour se prêter, au moins de façon heuristique, à une approche par les équations locales de la théorie des milieux continus homogènes. L'expérience montre alors que, dans certains cas, la démarche ainsi adoptée laisse échapper des phénomènes nouveaux, non prévus par cette théorie.

A l'opposé du point de départ de cette démarche se situe celle qui tente, par des techniques statistiques, ou par l'analyse de la structure de la solution des équations que l'on obtient lorsqu'on peut tenir compte de l'hétérogénéité du milieu grâce à certaines particularités simplificatrices (par exemple périodicité) de disposer d'instruments plus réalistes, permettant de prévoir ou de rendre compte effectivement de ces phénomènes nouveaux (comme par exemple la diffraction et la dispersion des ondes dans un milieu à inclusions).

Mais la première démarche est tellement courante et ses succès, au moins approximatifs, tellement fréquents, qu'il vaut la peine de rechercher de façon précise ce qui peut les justifier et quelles limites infranchissables leurs sont assignées.

Ceci a déjà fait l'objet, depuis une vingtaine d'années, d'études fort importantes, notamment de la part de M. KRÖNER (cf. la synthèse présentée par cet auteur à ce même Colloque [2]). A la même école de pensée se rattachent les noms de HILL [3], HASHIN [4], BERAN [5], MANDEL et DANTU [6], SENDECKYJ [7], ACHENBACH [8], etc...

Nous examinons ici quelques aspects des problèmes posés par ces traitements statistiques, avec le souci de rapprocher les résultats de ces études des méthodes utilisées couramment dans la pratique des Laboratoires et des Bureaux d'Etudes.

Les remarques que nous formulerons à cette occasion et les conséquences que nous en tirerons s'inscrivent largement dans la perspective des travaux des auteurs cités ci-dessus, dont l'étude a constitué notre plate-forme de départ, et auxquels nous tenons à rendre hommage.

Avant d'en aborder l'exposé, il y a lieu tout d'abord de s'entendre sur ce que nous appellerons ici "la procédure d'assimilation d'un milieu hétérogène à un milieu continu équivalent de la thermomécanique classique".

De façon restrictive, nous dirons qu'il en est ainsi si l'équation ou les équations locales du problème peuvent être ramenées à des équations locales remplissant les deux conditions suivantes :

a) ces équations locales ne portent que sur des grandeurs qui sont des moyennes appropriées des grandeurs physiques de la thermomécanique classique, cette dernière étant supposée applicable au niveau de chaque constituant homogène ;

b) ces équations locales ont même forme que celles de la thermomécanique des milieux continus classiques, à l'exclusion par exemple des milieux "à structure" tels que les milieux polaires, les milieux à directeurs (en particulier les milieux de COSSERAT) etc., pour lesquels s'introduisent des grandeurs physiques supplémentaires (par exemple partie non symétrique du tenseur des contraintes).

C'est en effet à ces deux conditions que répond, plus ou moins implicitement, la démarche couramment pratiquée qui consiste à ignorer purement et simplement le caractère hétérogène du matériau. Cependant, si cela revient à considérer le milieu continu équivalent comme un milieu dépourvu de structure, cela ne veut pas dire que la structure du matériau réel sera sans influence sur ses propriétés. Cela ne veut pas dire non plus qu'aucune des idées qui vont maintenant être exposées ne pourraient s'appliquer à un milieu équivalent pourvu d'une définition plus large.

2. ENONCE DE QUATRE REMARQUES .

2.1. Sur la nature des équations à considérer .

Les études relatives au traitement statistique des équations de la thermomécanique portent généralement sur les équations locales classiques dans leur forme finale, généralement commandée par le souci d'éliminer le plus grand nombre possible d'inconnues (de façon à aboutir autant que faire se peut à des équations découplées) et où se trouvent de ce fait déjà incorporés certains coefficients thermorhéologiques et par là-même certaines hypothèses sur la classe de comportement auquel appartiennent, non seulement les constituants, mais également le milieu continu considéré comme équivalent au mélange final.

C'est ainsi que sont souvent considérés, par exemple, des mélanges de constituants, tous élastiques linéaires, parfaitement adhérents entre eux aux interfaces (supposés imperméables), mélanges considérés eux-mêmes comme assimilables à des milieux élastiques linéaires homogènes, assez souvent isotropes (bien que l'intérêt porté aux milieux stratifiés ou à fibres ait favorisé récemment un fort développement de l'étude du cas anisotrope).

Par exemple, pour un matériau élastique hétérogène, l'équation finale considérée est alors l'équation classique aux déplacements, sur lesquels agit l'opérateur classique de l'élasticité.

Mais on sait bien que beaucoup de matériaux réels n'obéissent pas à un tel schéma. Les milieux granulaires, les milieux fissurés, les milieux à constituants perméables, etc. peuvent constituer des mélanges où les interfaces ne sont pas à adhérence parfaite, et dont les constituants ont des comportements qui n'appartiennent pas forcément à la même classe. Or, on sait bien d'expérience, tout spécialement chez les rhéologues, que les comportements d'un tel mélange sont souvent fort complexes, fort éloignés de ceux de ses constituants et que la classe à laquelle ils appartiennent, déjà fort difficile à déterminer expérimentalement de façon complète, l'est encore plus à prévoir a priori, ce qui rend impossible en pratique l'adoption, pour le mélange, d'une équation finale (ici aux déplacements) de même niveau que celle utilisée pour chacun des constituants.

Considérons par exemple l'un des exemples les plus simples et les plus fréquents de la pratique : le mélange d'un solide élastique linéaire et d'un fluide visqueux newtonien à compressibilité également linéaire.

A partir des mêmes équations de base de la mécanique (équations dynamiques, rhéologique et cinématique), on aboutit à des équations locales substituées de formes très différentes pour chacun des deux milieux (LAME d'une part, NAVIER de l'autre). De plus, l'équation relative au constituant 2 apparaît déjà comme celle d'un milieu viscoélastique (dépourvu d'élasticité instantanée), faisant intervenir simultanément les déplacements et les vitesses.

Or si l'on veut appliquer un traitement statistique au niveau des équations finales, on se trouve dans l'embarras, puisque les opérations statistiques doivent porter sur des grandeurs de même nature et des équations d'une même forme, ce qui n'est pas réalisé ici. De plus, on ne sait pas décider a priori quelle sera la forme de l'équation finale substituée du mélange, ni même si, en toute rigueur, une telle équation existe. On sait bien en effet qu'à partir de ces deux

Moyennes spatiales (Définitions)

- (1.1) $\langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{D}-\Gamma} \sigma \, dV$ (contrainte)
- (1.2) $\langle d \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{D}-\Gamma} d \, dV$ (vitesse de déformation)
- (1.3) $\langle \sigma..d \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{D}-\Gamma} \sigma..d \, dV$ (puissance de déformation)
- (1.4) $\langle q \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{D}-\Gamma} q \, dV$ (courant de chaleur)
- (1.5) $\langle u \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{D}-\Gamma} u \, dV$ (énergie interne massique)
- (1.6) $\langle \frac{1}{T} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{D}-\Gamma} \frac{1}{T} \, dV$ (température inverse)
- (1.7) $\langle g \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{D}-\Gamma} g \, dV$ (gradient thermique inverse)
- (1.8) $\langle q.g \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{D}-\Gamma} q.g \, dV$ (création thermique d'entropie)

Relations avec conditions au contour (par théorème du gradient et bilan)

- (1.9) $V \langle \sigma \rangle = \int_{\partial\mathcal{D}} \sigma \, dV = \int_{\partial\mathcal{D}} x \times (\sigma.n) \, d\Sigma + \int_{\mathcal{D}-\Gamma} x \times (f-\rho b) \, dV + \int_{\Gamma} x \times [\sigma.n]_{-}^{+} \, d\Gamma$
- (1.10) $V \langle d \rangle = \int_{\mathcal{D}-\Gamma} d \, dV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}-\Gamma} (\text{grad } v + \text{grad }^T v) \, dV = \int_{\partial\mathcal{D}} v \times n \, d\Sigma + \int_{\Gamma} [v]_{-}^{+} \times n \, d\Gamma$
- (1.11) $V \langle \sigma..d \rangle = \int_{\partial\mathcal{D}} v \cdot (\sigma.n) \, d\Sigma + \int_{\mathcal{D}-\Gamma} (f-\rho b) \cdot v \, dV + \int_{\Gamma} [\sigma.v.n]_{-}^{+} \, d\Gamma$
- (1.12) $V \langle q \rangle = \int_{\partial\mathcal{D}} x \times q.n \, d\Sigma - \int_{\mathcal{D}} x \times (\sigma..d + r-\rho u) \, dV + \int_{\Gamma} x \times [q.n]_{-}^{+} \, d\Gamma$
- (1.13) $V \langle g \rangle = \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{1}{T} \times n \, d\Sigma + \int_{\Gamma} [\frac{1}{T} \times n]_{-}^{+} \, d\Gamma$
- (1.14) $V \langle q.g \rangle = \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{1}{T} \times q.n \, d\Sigma - \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{T} (\sigma..d + r-\rho u) \, dV + \int_{\Gamma} [\frac{1}{T} q.n]_{-}^{+} \, d\Gamma$

Notations

a^T transposé de a ; \times produit tensoriel (non contracté)

\cdot produit tensoriel contracté une fois ;

$..$ produit tensoriel contracté deux fois

$[a]_{-}^{+} = a^{+} - a^{-}$ (discontinuité à la traversée d'un interface)

$\langle \rangle$ moyenne spatiale sur un domaine \mathcal{D} hétérogène par morceaux

Γ réunion des interfaces entre sous-domaines homogènes

$\partial\mathcal{D}$ frontière de \mathcal{D} ; n^{+} normale extérieure

constituants, on saura réaliser des mélanges (par exemple milieu poreux, à porosité ouverte ou à porosité fermée, suspension plus ou moins dense, etc.) qui se comporteront de façons très différentes, à la fois entre eux et par rapport aux constituants de départ.

On sera donc obligé de particulariser en postulant la forme de l'équation finale du mélange, mais sans savoir la relier aux équations de départ par de simples considérations statistiques portant sur les équations finales substituées des constituants.

On peut par contre espérer obtenir des résultats intéressants en appliquant le traitement statistique dès le niveau des équations universelles, telles qu'elles résultent de l'application des grandes lois générales de la physique, et qui se réduisent, dans notre cas des comportements rhéologiques, aux cinq bilans de la thermomécanique (conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment cinétique, de l'énergie, création d'entropie).

Par nature même en effet, ces équations sont indépendantes des propriétés des matériaux, tant pour ce qui concerne les constituants que pour ce qui concerne le mélange.

Les résultats obtenus par leur traitement statistique seront donc tout à fait généraux. En particulier, ils s'appliqueront immédiatement à des mélanges de constituants dont les comportements appartiennent à des classes différentes, ainsi qu'à ceux dont on ne sait pas prévoir a priori à quelle classe appartient leur comportement. Ils s'appliqueront même à ceux (fréquemment rencontrés dans la pratique, notamment dans le cas de matériaux grossiers utilisés en grandes masses, en Génie Civil par exemple) dont on ne sait pas réaliser une caractérisation expérimentale complète (i. e. valable pour une histoire de sollicitation quelconque).

2.2. Sur la notion de macroscopique

Malgré quelques exceptions notables (cf. par exemple [5]), la procédure de traitement statistique des milieux hétérogènes se fait le plus souvent (cf. [3], [4], [6], [7]) par la considération de la notion de macroscopique, qui constitue l'échelle à laquelle se font les calculs du Bureau d'Etudes et les essais du Laboratoire, par opposition à l'échelle microscopique qui est celle des détails de constitution interne du matériau.

Il est toutefois nécessaire d'attirer l'attention sur quelques unes des difficultés que fait naître, dans l'établissement des équations locales du milieu continu équivalent, l'utilisation de la notion de macroscopique qui passe par la considération de grandeurs physiques attachées à chaque point du milieu continu équivalent et qui sont les moyennes spatiales sur un volume "représentatif" glissant des grandeurs homologues définies en chaque point du matériau hétérogène.

Pour prendre conscience de la première de ces difficultés, il faut remonter aux sources mêmes des opérations qui conduisent à l'établissement des équations universelles de bilan sous leur forme locale. Cet établissement passe en effet par l'écriture globale de ces bilans sur une famille de domaines spatiaux contenant le point considéré et qui, pour autoriser le passage du global au local (i. e. de la nullité d'une intégrale à celle de l'intégrande) doivent constituer une famille dense (cf. par exemple [9]).

Ceci implique en particulier que l'on puisse faire tendre vers zéro la taille du domaine (puisque tout voisinage d'un point, aussi petit qu'on le veut, doit contenir au moins un domaine de la famille). Or cette exigence contredit la considération d'un élément de volume de taille minimale finie, suffisamment grande pour qu'il soit "représentatif" du matériau

Hypothèses :

- pas de sollicitation dans le volume
- nullité (par continuité ou en moyenne) des $\int_{\Gamma} [-]_{-}^{+} d\Gamma$ dans (1.9) à (1.14)

Sollicitation mécanique appliquée à la surface extérieure de l'éprouvette

1^{er} Cas : Contrainte uniforme imposée au contour

- (2.1) $P = \sigma_o \cdot n$ sur $\partial D_o \Rightarrow$
- (2.2) $\langle \sigma \rangle = \sigma_o$ (par $\int_{\partial D_o} \sigma \times n \, d\mathcal{L} = \int_{D_o} \text{grad } \sigma \, dV = 0$)
- (2.3) $\langle \sigma \cdot d \rangle = \sigma_o \cdot \langle d \rangle = \langle \sigma \rangle \cdot \langle d \rangle$ (par $v \cdot (\sigma \cdot n) = \sigma_o \cdot (v \times n)$)

2^e Cas : Vitesse affine imposée au contour

- (2.4) $v = d_o \cdot x$ sur $\partial D_o \Rightarrow$
- (2.5) $\langle d \rangle = d_o$ (par $(d_o \cdot x) \times n = d_o \cdot (x \times n)$)
- (2.6) $\langle \sigma \cdot d \rangle = \langle \sigma \rangle \cdot d_o = \langle \sigma \rangle \cdot \langle d \rangle$ (idem)

Sollicitation thermique appliquée à la surface extérieure :

Hypothèse : équilibre mécanique (d=0) ; régime thermique stationnaire (u=x=0)

1^{er} Cas : Flux uniforme imposé au contour

- (2.7) $h = q_o \cdot n$ sur $\partial D_o \Rightarrow$
- (2.8) $\langle q \rangle = q_o$ (par $x \times q \cdot n = q_o \cdot (x \times n)$)
- (2.9) $\langle q \cdot g \rangle = q_o \cdot \langle g \rangle = \langle q \rangle \cdot \langle g \rangle$ (par $\frac{1}{T} \times q \cdot n = q_o \cdot (\frac{1}{T} \times n)$)

2^e Cas : Température inverse affine imposée au contour

- (2.10) $1/T = g_o \cdot x$ sur $\partial D_o \Rightarrow$
- (2.11) $\langle q \rangle = q_o$ (par $(g_o \cdot x) \times n = g_o \cdot (x \times n)$)
- (2.12) $\langle q \cdot g \rangle = \langle q \rangle \cdot g_o = \langle q \rangle \cdot \langle g \rangle$ (idem)

Cette difficulté a d'ailleurs été mise en évidence de longue date (cf. par exemple [10]) par les théoriciens de la turbulence en Mécanique des Fluides.

A l'approche macroscopique, nous préférons donc une approche stochastique, qui passe par la considération de moyennes stochastiques portant sur l'espace des diverses réalisations aléatoires (par exemple en usine ou sur chantier) d'un même modèle (par exemple le plan d'exécution) de la pièce ou de l'élément de construction. C'est le point de vue adopté par BERAN [5].

2.3. Sur l'hypothèse d'ergodicité .

Même lorsque le point de départ est stochastique, une démarche fréquemment utilisée dans la littérature consiste à bifurquer à partir d'un certain moment vers le macroscopique, par l'utilisation de l'hypothèse d'ergodicité qui consiste ici à écrire que la moyenne stochastique locale d'une grandeur sur les diverses réalisations est égale à la moyenne spatiale de la même grandeur sur le volume de la structure.

Cette hypothèse comporte une exigence préalable de stationnarité spatiale (ou uniformité) des grandeurs physiques macroscopiques, qui oblige elle-même à ne prendre en considération que des structures de dimensions infinies.

Cette hypothèse d'ergodicité ne peut se raccorder à la procédure suivie en pratique.

En effet, le Bureau d'Etudes ne peut se restreindre à ne calculer et ne dimensionner que des structures de dimensions infinies sous sollicitations macroscopiques uniformes.

De son côté, le Laboratoire, s'il peut bien envisager (malgré certaines difficultés pratiques) d'effectuer ses essais sur des éprouvettes sous sollicitations macroscopiques uniformes, est par contre astreint à leur donner des dimensions finies.

Mais nous verrons que, au niveau de la caractérisation expérimentale, on peut éviter de faire appel à l'hypothèse d'ergodicité.

2.4. Sur la condition de HILL .

Dans la littérature consacrée à la théorie des milieux hétérogènes, il est fait un usage fréquent d'une propriété attribuée au travail ou à la puissance de déformation et suivant laquelle ce travail ou cette puissance ont une expression invariante par changement d'échelle. Ceci signifie que les moyennes $\langle \sigma \cdot \epsilon \rangle$ ou $\langle \sigma \cdot d \rangle$, prises sur un volume, des produits $\sigma \cdot \epsilon$ ou $\sigma \cdot d$ de la contrainte par la déformation ou sa vitesse sont respectivement égales aux produits $\langle \sigma \rangle \cdot \langle \epsilon \rangle$ ou $\langle \sigma \rangle \cdot \langle d \rangle$ des moyennes de σ et ϵ ou d prises sur le même volume.

Malgré l'existence de plusieurs tentatives (cf. par exemple [6]), il ne semble pas qu'il soit possible de donner de cette invariance d'échelle une démonstration générale. Elle peut cependant être réalisée, au moins approximativement, dans un certain nombre de cas particuliers, comme on le voit facilement par l'emploi des relations liant les moyennes spatiales aux données extérieures et aux conditions aux limites (Tableau 1). Ces relations sont obtenues par utilisation des théorèmes de la divergence ou du gradient, combinés aux équations locales universelles et sont présentés ici pour l'ensemble des grandeurs physiques de la thermomécanique.

Un cas particulier important où la condition de HILL se trouve vérifiée trivialement et rigoureusement, est celui où les seules sollicitations extérieures sont des sollicitations uniformes au contour extérieur de la structure, c'est-à-dire (cf. Tableau 2) :

- soit de la forme $\sigma_o \cdot n$ sur le contour, où σ_o est un tenseur contrainte uniforme sur le contour (on a alors $\langle \sigma \rangle = \sigma_o$ et $\langle \sigma \cdot d \rangle = \sigma_o \cdot \langle d \rangle$) ;
 - soit de la forme $d_o \cdot x$ sur le contour, où σ_o est un tenseur vitesse de déformation uniforme sur le contour (on a alors $\langle d \rangle = d_o$ et $\langle \sigma \cdot d \rangle = \langle \sigma \rangle \cdot d_o$).
- Ces deux résultats sont d'une importance pratique fondamentale pour la détermination expérimentale des lois de comportements du milieu continu équivalent au matériau hétérogène considéré et ce même si la procédure générale que nous pro-

Tableau 3 BILANS UNIVERSELS LOCAUX

. Au sein de chaque constituant

$$(3.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho v = 0$$

$$(3.2) \quad \text{div } \sigma + f - \rho \dot{v} = 0$$

$$(3.3) \quad \sigma^T = \sigma$$

$$(3.4) \quad \rho \dot{u} - \sigma \cdot d = r - \text{div } q$$

$$(3.5) \quad \rho \dot{s} - \left(\frac{r}{T} - \text{div } \frac{q}{T} \right) = \rho \dot{s}_i \geq 0$$

. A la traversée d'une interface

$$(3.6) \quad [\rho (v - v_p) \cdot n^+]_{-}^{+} = 0$$

$$(3.7) \quad [\sigma \cdot n^+]_{-}^{+} = [\rho (v - v_p) \cdot n^+ v]_{-}^{+}$$

$$(3.8) \quad [e \cdot x \times \rho v \times (v - v_p) \cdot n^+]_{-}^{+} = e \cdot [x \times \sigma \cdot n^+]_{-}^{+}$$

$$(3.9) \quad [(\sigma \cdot v - q) \cdot n^+]_{-}^{+} = [\rho (v - v_p) \cdot n^+ (u + \frac{1}{2} \rho v \cdot v)]_{-}^{+}$$

$$(3.10) \quad [-\frac{q}{T} \cdot n^+ - \rho s (v - v_p) \cdot n^+]_{-}^{+} = \dot{z}_i \geq 0$$

Notations : $\Gamma \rightarrow \Gamma^+$ dans un milieu, de normale extérieure n^+
 $\Gamma \rightarrow \Gamma^-$ dans le milieu adjacent, de normale extérieure $n^- = -n^+$
 \dot{z}_i densité du débit de la production interfaciale d'entropie éventuelle.

TABLEAU 4 BILANS STATISTIQUES LOCAUX : FORME BRUTE

$$(4.1) \quad E \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho v \right] = 0$$

$$(4.2) \quad E \left[\text{div } \sigma + f - \rho \dot{v} \right] = 0$$

$$(4.3) \quad E \left[\sigma^T - \sigma \right] = 0$$

$$(4.4) \quad E \left[\rho \dot{u} - \sigma \cdot d - (r - \text{div } q) \right] = 0$$

$$(4.5) \quad E \left[\rho \dot{s} - \left(\frac{r}{T} - \text{div } \frac{q}{T} \right) - \rho \dot{s}_i \right] = 0$$

$$(4.6) \quad E \left[\rho \dot{s}_i \right] \geq 0$$

Notation : $E[\Psi]$ espérance mathématique (ou moyenne stochastique) de Ψ

posons maintenant fera apparaître la nécessité dans certains cas de procéder à une extension de la forme prise classiquement par la condition de HILL.

3. PROPOSITION D'UNE PROCEDURE GENERALE .

L'exploitation des remarques ci-dessus permet de définir une procédure générale pour l'assimilation d'un matériau hétérogène quelconque à un milieu continu équivalent. Cette procédure est basée sur une approche stochastique ponctuelle et comporte les étapes suivantes.

3.1. Distinction entre le modèle d'un corps matériel et ses réalisations .

Le modèle est défini par les plans d'exécution. Les diverses réalisations α sont obtenues à partir de matériaux ou de matières premières et d'instruments de production bien définis. On suppose ici que la forme extérieure est obtenue avec une précision parfaite. En chaque point du modèle, on peut alors définir des grandeurs physiques statistiques locales, moyennes stochastiques des grandeurs physiques locales homologues en chaque point des diverses réalisations ayant même coordonnées relatives.

3.2. Ecriture des équations globales des bilans universels et localisation .

En chaque point d'une réalisation, on peut associer une famille dense de domaines. Pour tout domaine de la famille, on écrira le jeu des équations universelles globales résultant des lois universelles de bilan (conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment cinétique, de l'énergie, création d'entropie). Par rapport au cas homogène, la procédure classique de localisation fera apparaître des termes supplémentaires sous forme d'intégrales définies sur l'ensemble des interfaces. Ceci fournit d'abord le jeu des équations universelles locales classiques (relatives à chaque constituant), mais aussi un jeu de relations entre les valeurs prises localement, de part et d'autre de l'interface par un certain nombre de grandeurs physiques (Tableau 3).

3.3 Traitement statistique des équations locales de bilan .

On prend sur chaque réalisation le point M_α ayant mêmes coordonnées relatives qu'un point M donné du modèle. Pour chaque M_α , on peut écrire les équations universelles locales, écrites de façon telle que tous les seconds membres soient nuls. Il en résulte que l'espérance mathématique (ou moyenne stochastique) de la collection des premiers membres est également nulle. En appliquant les règles classiques de commutation entre un opérateur d'espérance mathématique et les opérateurs algèbre-différentiels figurant dans les équations locales initiales, on obtient un jeu d'équations qui portent d'une part sur les moyennes stochastiques des grandeurs physiques, d'autre part, sur des covariances entre ces grandeurs (*) (Tableaux 4, 5 et 6).

3.4. Hypothèse de décorrélation (condition d'assimilation) .

Dans les opérations obtenues, les expressions portant sur les moyennes stochastiques des grandeurs physiques ont mêmes formes que celles qui figurent dans les équations locales universelles d'un milieu homogène. Pour que le matériau soit assimilable, à ce niveau des équations générales universelles, à un milieu continu équivalent, il faut et il suffit que les expressions portant sur les covariances soient toutes globalement nulles (condition de décorrélation faible, moins sévère qu'une décorrélation stricte portant sur chaque covariance de composantes individuelles des différentes grandeurs physiques vectorielles ou tensorielles ...

(*) On notera que les interfaces étant de mesure nulle par rapport au volume, les relations de passage n'interviennent pas à ce niveau dans le traitement stochastique ainsi défini.

TABLEAU 5

REGLES DE COMMUTATION

Notations

$$(5.1) \quad \overline{(a_0 + a_i \psi_i)} = a_0 + a_i \bar{\psi}_i$$

$$(5.2) \quad \overline{\psi_1 \psi_2} = \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 + \overline{\psi_1' \psi_2'}$$

$$(5.3) \quad \overline{(\partial \psi / \partial x_i)} = \partial \bar{\psi} / \partial x_i \quad ; \quad \overline{(\partial \psi / \partial t)} = \partial \bar{\psi} / \partial t$$

$$(5.4) \quad \overline{(d\psi/dt)} = \overline{(\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \cdot \text{grad } \psi)} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad } \bar{\psi} + \overline{v' \cdot \text{grad } \psi'}$$

$$\leftrightarrow \bar{\dot{\psi}} = \dot{\bar{\psi}} + \overline{v' \cdot \text{grad } \psi'}$$

(a_k non aléatoire)

(par définition de $\dot{\bar{\psi}}$)

Notations

$$\bar{\psi} = E [\psi]$$

$$\psi' = \psi - \bar{\psi} \quad \text{fluctuation}$$

$$\overline{\psi_1' \psi_2'} \quad \text{covariance}$$

TABLEAU 6

BILANS STATISTIQUES LOCAUX : FORME COMMUTE

$$(6.1) \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div } \bar{\rho} \bar{v} = - \text{div } \overline{\rho' v'}$$

$$(6.2) \quad \text{div } \bar{\sigma} + \bar{\rho} \bar{b} - \bar{\rho} \dot{\bar{v}} = \bar{\rho} \overline{v' \cdot \text{grad } v'} + \overline{\rho' \dot{v}'} - \overline{\rho' b'}$$

$$(6.3) \quad \overline{\sigma' T} = \bar{\sigma}$$

$$(6.4) \quad \bar{\rho} \dot{\bar{u}} - \bar{\sigma} \cdot \bar{d} - \bar{r} + \text{div } \bar{q} = - \overline{\rho' \dot{u}'} - \bar{\rho} \overline{v' \cdot \text{grad } u'} + \overline{\sigma' \cdot d'}$$

$$(6.5) \quad \bar{\rho} \dot{\bar{s}} - \left(\frac{1}{T}\right) \bar{r} + \text{div } \left(\frac{1}{T}\right) \bar{q} - \bar{\rho} \dot{\bar{s}}_i = - \bar{\rho} \overline{v' \cdot \text{grad } s'_i} - \overline{\rho' \dot{s}'_i} + \left(\frac{1}{T}\right)' r' - \text{div } \left(\frac{1}{T}\right)' q' + \bar{\rho} \overline{v' \cdot \text{grad } s'_i} + \overline{\rho' \dot{s}'_i}$$

$$(6.6) \quad \bar{\rho} \dot{\bar{s}}_i \geq - \bar{\rho} \overline{v' \cdot \text{grad } s'_i} - \overline{\rho' \dot{s}'_i}$$

TABLEAU 7

CONDITIONS D'ASSIMILATION A UN MILIEU CONTINU EQUIVALENT

$$(7.1) \quad \text{div } \rho' v' = 0$$

$$(7.2) \quad \bar{\rho} \overline{v' \cdot \text{grad } v'} + \overline{\rho' \dot{v}'} = \overline{\rho' b'}$$

$$(7.3) \quad \bar{\rho} \overline{v' \cdot \text{grad } u'} + \overline{\rho' \dot{u}'} = \overline{\sigma' \cdot d'}$$

$$(7.4) \quad \bar{\rho} \overline{v' \cdot \text{grad } s'_i} + \overline{\rho' \dot{s}'_i} = 0$$

$$(7.5) \quad \bar{\rho} \overline{v' \cdot \text{grad } s'_i} + \overline{\rho' \dot{s}'_i} = \left(\frac{1}{T}\right)' r' - \text{div } \left(\frac{1}{T}\right)' q'$$

rielles (Tableau 7).

Ces conditions de décorrélation faible constituent une généralisation de la condition de HILL étudiée en 2.4. et qui s'exprime, rappelons-le, par la nullité de $\overline{\sigma' \cdot e'}$ (ou de $\overline{\sigma' \cdot d'}$, lorsqu'on l'exprime comme ici en puissance).

On constate alors immédiatement que, dans le cas général, la condition de HILL n'est ni nécessaire (car on peut envisager que (7.3) soit satisfaite dans certains cas de non-nullité de son second membre), ni suffisante (car toutes les autres conditions (7.1 à 7.5) doivent aussi être satisfaites). En outre, on peut même envisager que la satisfaction de la condition de HILL puisse empêcher l'assimilation. Il suffit en effet que l'on ait pu établir que le premier membre de (7.3) soit non nul.

Réciproquement, si l'on a pu établir que, dans des situations appropriées, (nous en avons vu un exemple), la condition de HILL exprimée en puissance est rigoureusement vérifiée, alors l'hypothèse d'assimilation à un milieu continu imposera la nullité du premier membre de (7.3). D'une façon générale, l'hypothèse d'assimilation impose la satisfaction simultanée de toutes les relations (7.1 à 7.5), et l'on pourra utiliser l'information correspondante.

Enfin, des conditions suffisantes (plus faciles à tester), s'obtiennent en écrivant que tous les termes présents dans ces conditions, ou des groupements exhaustifs de ces termes sont nuls séparément et simultanément.

3.5. Construction d'un système d'équations du comportement statistique.

Les conditions d'assimilation étant supposées remplies, et après avoir tenu compte de la symétrie, imposée par (6.3), du tenseur de la contrainte statistique $\bar{\sigma}$, on obtient pour les 17 composantes des grandeurs physiques statistiques (moyennes stochastiques), un système d'équations universelles locales qui se réduit à 6 équations scalaires et qui est identique à celui obtenu pour un milieu continu classique.

Un système d'équations du comportement statistique pourra donc être établi une fois effectué le choix, parmi ces 17 variables, d'un nombre de variables indépendantes égal à ce nombre d'équations. Les 11 grandeurs statistiques restantes seront donc des variables liées, i. e. pour lesquelles devront être fournies des relations supplémentaires les liant aux variables indépendantes, jusqu'à ce que le système d'équations disponibles soit rendu complet, ce qui impose que leur nombre soit aussi égal à 11.

Ce système de 11 relations entre les variables statistiques liées et les variables statistiques indépendantes constitue le système des équations du comportement statistique du matériau hétérogène.

Il est clair qu'elles peuvent aussi être considérées comme les équations de comportement du milieu continu équivalent. A ce titre, on pourra appliquer à leur écriture toutes les restrictions imposées par les principes généraux de la thermomécanique des milieux continus classiques (cf. par exemple [11], [12], [13]).

On remarque qu'aucune hypothèse n'a été faite sur la forme de ces équations, ni par conséquent sur la nature des propriétés statistiques du matériau hétérogène i. e. sur la nature du comportement du milieu continu équivalent. La forme précise de ces équations de comportement devra être, dans chaque cas particulier, soit postulée a priori (problèmes d'école), soit déterminée expérimentalement à partir d'expériences convenablement conçues (matériaux réels), soit évaluée par le calcul à partir des informations disponibles sur les constituants, leurs proportions ou probabilité de présence, leurs propriétés, et leur configuration mutuelle (modélisation).

Nous nous limitons ici au cas de la détermination expérimentale sur matériau réel.

3.6. Caractérisation expérimentale du comportement statistique.

L'expérimentation ne peut être effectuée que sur des éprouvettes de dimensions finies et les variables thermomécaniques locales à l'intérieur d'une éprouvette

Théorème de FUBINI

$$(8.1) \quad \overline{\langle \sigma \rangle} = \langle \bar{\sigma} \rangle ; \overline{\langle \bar{d} \rangle} = \langle \bar{d} \rangle ; \overline{\langle \sigma \cdot \bar{d} \rangle} = \langle \bar{\sigma} \cdot \bar{d} \rangle$$

$$(8.2) \quad \overline{\langle q \rangle} = \langle \bar{q} \rangle ; \overline{\langle T^{-1} \rangle} = \langle \bar{T}^{-1} \rangle ; \overline{\langle g \rangle} = \langle \bar{g} \rangle ; \overline{\langle q \cdot g \rangle} = \langle \bar{q} \cdot \bar{g} \rangle$$

Hypothèse d'homogénéité stochastique sous sollicitation extérieure uniforme

1^{er} Cas : Contrainte uniforme imposée au contour :

$$(8.3) \quad F = \sigma_0 \cdot n \text{ sur } \partial V_0 ; \bar{d} = \hat{C} \bar{\sigma} ; \hat{C} \text{ uniforme} \Rightarrow \bar{\sigma}, \bar{d} \text{ uniformes sur } V_0 \Rightarrow$$

$$(8.4) \quad \bar{\sigma} = \langle \bar{\sigma} \rangle = \overline{\langle \sigma \rangle} = \bar{\sigma}_0 = \sigma_0 = \langle \sigma_\alpha \rangle \quad \forall \alpha$$

$$(8.5) \quad \bar{d} = \langle \bar{d} \rangle = \overline{\langle \bar{d} \rangle} ; \bar{\sigma} \cdot \bar{d} = \bar{\sigma}_0 \cdot \bar{d} = \sigma_0 \cdot \bar{d} = \overline{\langle \sigma \cdot \bar{d} \rangle}$$

2^e Cas : Vitesse de déformation affine imposée au contour :

$$(8.6) \quad v = \dot{d}_0 \cdot x \text{ sur } \partial V_0 ; \bar{\sigma} = \hat{E} \bar{d} ; \hat{E} \text{ uniforme} \Rightarrow \bar{\sigma}, \bar{d} \text{ uniformes sur } V_0 \Rightarrow$$

$$(8.7) \quad \bar{d} = \langle \bar{d} \rangle = \overline{\langle \bar{d} \rangle} = \bar{d}_0 = d_0 = \langle \dot{d}_\alpha \rangle \quad \forall \alpha$$

$$(8.8) \quad \bar{\sigma} = \langle \bar{\sigma} \rangle = \overline{\langle \sigma \rangle} ; \bar{\sigma} \cdot \bar{d} = \bar{\sigma}_0 \cdot \bar{d} = \bar{\sigma}_0 \cdot d_0 = \overline{\langle \sigma \cdot \dot{d}_0 \rangle}$$

3^e Cas : Flux thermique uniforme stationnaire imposé au contour

$$(8.9) \quad h = q_0 \cdot n \text{ sur } \partial V_0 ; \bar{g} = \hat{H} \bar{q} ; \hat{H} \text{ uniforme} \Rightarrow \bar{q}, \bar{g} \text{ uniformes sur } V_0$$

$$(8.10) \quad \bar{q} = \langle \bar{q} \rangle = \overline{\langle q \rangle} = \bar{q}_0 = q_0$$

$$(8.11) \quad \bar{g} = \langle \bar{g} \rangle = \overline{\langle g \rangle} ; \bar{q} \cdot \bar{g} = \bar{q}_0 \cdot \bar{g} = q_0 \cdot \bar{g} = \overline{\langle q \cdot g \rangle}$$

4^e Cas : Température inverse affine imposée au contour :

$$(8.12) \quad T^{-1} = g_0 \cdot x \text{ sur } \partial V_0 ; \bar{q} = \hat{K} \bar{g} ; \hat{K} \text{ uniforme} \Rightarrow \bar{q}, \bar{g} \text{ uniforme sur } V_0 \Rightarrow$$

$$(8.13) \quad \bar{g} = \langle \bar{g} \rangle = \overline{\langle g \rangle} = \bar{g}_0 = g_0$$

$$(8.14) \quad \bar{q} = \langle \bar{q} \rangle = \overline{\langle q \rangle} ; \bar{q} \cdot \bar{g} = \bar{q}_0 \cdot g_0 = \overline{\langle q \cdot g_0 \rangle}$$

vette ne sont généralement pas accessibles. Par contre, sur chaque éprouvette (ou réalisation d'un corps), on peut définir la moyenne spatiale $\langle \psi \rangle$ de chaque variable thermomécanique ψ . Nous avons vu en 2.4. que ces moyennes spatiales peuvent être reliées aux conditions aux limites, aux forces de volume extérieures et aux accélérations par les identités du Tableau 1. Ces identités comportent en outre des intégrales sur l'interface que l'on peut prendre nulles dans un grand nombre de cas pratiques (par exemple imperméabilité et adhérence parfaite). Si les intégrales de volume peuvent être annulées, négligées ou calculées a priori (par exemple conditions quasi-statiques et forces de volume négligeables), on peut alors déterminer les moyennes spatiales $\langle \psi \rangle$ de chaque variable ψ en fonction de quantités qui sont imposées au contour ou qui peuvent être mesurées au contour.

En opérant sur un ensemble d'éprouvettes, on peut alors déterminer la moyenne stochastique $\langle \Psi \rangle$ des moyennes spatiales $\langle \psi \rangle$. Par le théorème de FUBINI elle est égale à la moyenne spatiale $\langle \Psi \rangle$ de la moyenne stochastique.

Sur un lot d'éprouvettes conformes au même modèle, on peut imposer un même jeu de conditions aux limites uniformes (au sens défini en 2.4.). Prenons par exemple une contrainte $\sigma_0 \cdot n$ appliquée au contour avec σ_0 uniforme. Les conditions d'assimilation étant supposées satisfaites, la contrainte statistique en chaque point du modèle de l'éprouvette est gouvernée par le même système d'équations que pour un milieu continu homogène et admet donc, comme dans le cas d'un milieu homogène, la solution triviale $\sigma = \sigma_0$. La contrainte statistique est donc uniforme sur le modèle de l'éprouvette, est égale à sa moyenne spatiale, et est connue si l'on a pris soin de mesurer la contrainte σ_0 imposée au contour.

Si l'on suppose que les propriétés statistiques du matériau sont uniformes sur le volume du modèle de l'éprouvette, la vitesse de déformation statistique \bar{d} (ou la déformation statistique $\bar{\epsilon}$) liée à $\bar{\sigma}$ par un opérateur \hat{C} uniforme sera également uniforme et égale à sa moyenne spatiale, elle-même égale à la moyenne stochastique $\langle \bar{d} \rangle$ (ou $\langle \bar{\epsilon} \rangle$) des moyennes spatiales, lesquelles sont, comme nous l'avons vu, accessibles expérimentalement par des mesures effectuées au contour.

Cette détermination expérimentale indépendante des deux grandeurs $\bar{\sigma}$ et \bar{d} (ou $\bar{\epsilon}$) nous donne donc accès à l'opérateur \hat{C} qui les lie entre eux et qui dans le cas général représentera une fonctionnelle. On remarquera qu'à aucun moment, nous n'avons eu à utiliser l'hypothèse d'ergodicité.

Des résultats similaires s'établissent, par le même raisonnement, pour une vitesse (ou un déplacement) affine imposée au contour, ainsi que pour des sollicitations thermiques uniformes (en flux ou en température) imposées au contour. Ils sont récapitulés sur le Tableau 8.

4. DISCUSSION

L'approche stochastique locale permet d'éviter les difficultés rencontrées dans la procédure de localisation à partir de moyennes spatiales définies sur un volume représentatif.

Les conditions générales d'assimilation présentées au paragraphe 3.4. permettent de définir la notion de milieu continu équivalent à un matériau hétérogène donné de façon tout à fait générale, i.e. sans hypothèse a priori sur les comportements des constituants, sur leur agencement mutuel, ni sur la nature des propriétés statistiques du matériau. Elles permettent donc d'envisager l'extension des méthodes statistiques utilisées jusqu'à présent pour des classes simples de comportement (par exemple élastique ou elastoplastique) à des comportements rhéologiques de complexité quelconque.

On notera que le fait même de parler du comportement rhéologique d'un matériau hétérogène suppose implicitement que ces conditions générales d'assimilation soient satisfaites, ce qui peut définir certaines classes de configurations internes des constituants et/ou certaines classes de données extérieures et aux limites. L'inventaire systématique de ces diverses classes reste à faire.

Il apparaît particulièrement satisfaisant que la procédure expérimentale, classique

par lots d'éprouvettes de dimensions finies en conditions uniformes, permette effectivement la détermination des propriétés statistiques locales, ce qui fournit, du point de vue examiné ici, le début d'une base rationnelle à la pratique courante des laboratoires. Elle utilise cependant une hypothèse d'homogénéité des propriétés statistiques qui ne sera satisfaite qu'approximativement, du fait des effets de bord liés à la perte de symétrie de l'arrangement mutuel des constituants au voisinage des surfaces libres. On peut cependant s'attendre à ce que l'influence de ces effets de bord sur les mesures soit négligeable dès que la taille des éprouvettes sera suffisamment grande devant celle des hétérogénéités (le cas contraire constituant l'une des sources des effets d'échelle fréquemment observés en pratique).

Si la considération de variables statistiques locales nous rapproche du traitement rigoureux des cas de sollicitations non uniformes, le chemin à parcourir pour une application sans réserve à ce cas des schémas de la thermomécanique classique des milieux homogènes reste important, puisqu'il faudrait encore montrer notamment que les gradients statistiques n'ont, au moins dans certaines limites, qu'une influence négligeable sur les propriétés statistiques.

Lorsque ce ne sera pas le cas, où lorsque les conditions d'assimilation ne seront pas vérifiées, il sera nécessaire de faire appel à des théories plus fines que la thermomécanique classique des milieux continus homogènes, ou de consentir à ne considérer la solution obtenue que comme une première approximation.

Enfin, l'étude des comportements sensibles aux défauts (comme les phénomènes de rupture) pourra exiger la détermination de la distribution statistique des fluctuations des grandeurs physiques autour de leur valeur moyenne.

Ceci exige qu'un traitement statistique faisant intervenir des moments stochastiques d'ordre supérieur à 1, soit appliqué aux équations générales de départ. Les équations obtenues seront cependant irréductibles à celles fournies par la théorie du milieu continu homogène, qui ne pourra donc servir de cadre à cette étude. Une théorie statistique plus complète devra alors être élaborée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. KRÖNER - Statistical continuum mechanics, Springer - Verlag, Vienne, 1972.
- [2] E. KRÖNER - Communication au 15e Colloque annuel du Groupe Français de Rhéologie, "Comportements rhéologiques et structure des Matériaux Paris, 1980.
- [3] R. HILL - Elastic properties of reinforced solids, I. Mech. Phys. Solids, vol. 11, pp. 357 to 372, 1963.
- [4] Z. HASHIN - Theory of mechanical behaviour of heterogeneous media, Applied mechanics review, vol. 17, pp. 1 to 9, 1964.
- [5] M. BERAN - Application of statistical theories for the determination of thermal, electrical and magnetic properties of heterogeneous materials ; in SENDECKYJ, Mechanics of composite materials, Academic press, 1974.
- [6] P. DANTU et J. MANDEL - Contribution à l'étude théorique et expérimentale du coefficient d'élasticité d'un milieu hétérogène, mais statistiquement homogène, Annales des Ponts et Chaussées, n° 2, 133, pp. 1 à 115, 1963.

- [7] G. P. SENDECKYJ - Elastic behaviour of composites, in Mechanics of composite materials, Academic press, 1974.
- [8] J. D. ACHENBACH - A theory of elasticity with microstructure for directionally reinforced composites, Springer-Verlag, Vienne, 1975.
- [9] P. GERMAIN - Cours de Mécanique des milieux continus, t 1, théorie générale, Masson, Paris, 1973.
- [10] J. KAMPE DE FERIET - Fonctions aléatoires et théorie statistique de la turbulence in Théorie des fonctions aléatoires, par A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET Chap. 14, MASSON, Paris, 1953.
- [11] C. TRUESDELL et W. NOLL - The non linear field theories of Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [12] J. MANDEL - Introduction à la Mécanique des milieux continus déformables Editions Scientifiques de Pologne, Varsovie, 1974.
- [13] C. HUET - Sur la notion d'état local en rhéologie. Cahiers du Groupe Français de rhéologie. Sciences et techniques de l'armement, 53.4, pp. 611 à 651, 1979.
- [14] C. HUET - Universal conditions for assimilation to an effective continuum (soumis pour publication).
- [15] C. HUET - Eléments de théorie des mélanges - Cours de matériaux de construction de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1981.

ETUDE DE L'ENDOMMAGEMENT
DANS LES MATERIAUX COMPOSITES UNIDIRECTIONNELS
A STUDY OF DAMAGE
IN UNIDIRECTIONNAL COMPOSITE MATERIALS

H. AYTAC, J. RENARD et G. VERCHERY
Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées - Palaiseau - France

RESUME

Pour mettre en évidence certains des mécanismes fondamentaux de l'endommagement dans les matériaux composites fibres-résine (décohésion fibre-matrice, craquellements dans la matrice), on a retenu dans la présente étude des composites unidirectionnels sous chargement de cisaillement quasi-statique. Un premier groupe d'éprouvettes testées à différents niveaux de chargement a mis en évidence une *variation linéaire* de l'endommagement en fonction de l'excès de couple au-delà de la limite élastique. Avec un autre groupe d'éprouvettes, où chaque spécimen a été cyclé entre un couple nul et un couple déterminé, on a établi une *loi de progression géométrique* de l'endommagement en fonction du nombre de cycles, avec un endommagement limite, le rapport de la progression étant indépendant du couple maximum. Enfin, une analyse par éléments finis utilisant une variation locale des propriétés élastiques a été mise en œuvre pour prédire la propagation de l'endommagement.

ABSTRACT

In order to investigate basic mechanisms of damage (fibre-matrix interfacial bond failure and matrix crazing) in fibre resin, uni-directionnal composites with a quasi-static shear loading were studied. With the first group of intact specimens, loaded up to different levels of couple, we observed a *linear variation* of damage in respect of the couple excess beyond the elasticity limit. Each specimen in another group was loaded by a given couple beyond the elasticity limit, then cyclically loaded between this couple and a zero couple. This showed a *geometrical progression* of the damage with respect to the number of cycles and limit. It also showed that the ratio of the progression is not dependent on the maximum applied couple. Finally, to predict damage propagation, a finite element analysis using a variation of local elastic properties during the damage was performed.

1. INTRODUCTION

Parmi tous les matériaux hétérogènes, on réserve l'appellation de *composites* à des matériaux élaborés par des procédés mécaniques à partir de deux phases : une phase de renforcement constituée presque toujours de fibres de diamètre très faible (quelques microns), et une phase de liaison, ou *matrice*, qui est généralement une résine. Les fibres (de verre, de Kevlar, de graphite, de bore, etc.), regroupées en fils, en rubans, en tissu ou en feutre sont disposées en *orientation* et en *proportion* pour former une structure microscopique bien définie. La variété de fibres disponibles, la variété d'appâts, ou *ensimages*, qu'elles peuvent subir pour faciliter leur adhésion, la variété plus grande encore de familles de résines disponibles comme matrice, combinées à la liberté d'orientation et de proportion du renforcement conduisent jusque dans la pratique à une diversité très grande de structures qui diffèrent par leurs caractéristiques mécaniques dans le domaine élastique et encore plus au delà du domaine élastique.

Aussi, bien que le comportement des matériaux composites ait fait l'objet de très nombreuses études expérimentales, peu de lois ont été formulées en termes de mécanique des milieux continus et pour des sollicitations générales, les essais publiés portant généralement sur des matériaux très variés soumis à des chargements particuliers, que ce soit pour la rupture, la fatigue, l'endommagement, etc.

Nous avons donc tenté de mettre sur pied approche systématique de l'endommagement, dont le présent travail constitue la première étape, menée en simplifiant le problème dans l'espoir de mettre en évidence des lois caractéristiques. Ainsi, on a retenu un seul type de matériau seul type de structure : un composite unidirectionnel graphite-époxy, et une sollicitation typique : un effort de cisaillement quasi-statique au-delà de la limite élastique. Il convient de rappeler, pour situer l'intérêt de ces choix, que, dans les matériaux composites, les propriétés dans le sens des fibres sont toujours excellentes, car elles sont régies essentiellement par les caractéristiques des fibres ; au contraire, les propriétés transversales et en cisaillement sont généralement faibles, car elles dépendent étroitement des caractéristiques de la matrice (basses dans le cas d'une matrice résine) et des caractéristiques de l'interface souvent peu élevées et très sensibles aux conditions d'élaboration du matériau (1). Du point de vue de l'endommagement des composites unidirectionnels, des sollicitations de traction transversale et de cisaillement sont donc beaucoup plus critiques que la traction longitudinale, et leur effet est en conséquence plus important à étudier. Par ailleurs, comme les structures composites sont très souvent formées de couches unidirectionnelles disposées dans diverses directions, il est concevable de la même façon que pour les propriétés élastiques, de faire une prévision de l'endommagement d'un tel composite stratifié à partir de la connaissance du comportement à l'endommagement d'un composite unidirectionnel.

Parmi les trois causes : ruptures de fibres, décohésions fibres-matrice, craquellement de la résine, auxquelles on peut attribuer l'origine de l'endommagement dans les matériaux composites à matrice résine, ce sont les deux dernières qui se rencontrent dans le type de sollicitation que nous avons choisi dans notre étude. On trouvera successivement la description de la procédure expérimentale et de l'analyse des variables d'endommagement puis la présentation des résultats expérimentaux qui permettent d'énoncer les lois de base de la création et du cumul de l'endommagement pour des chemins de chargement simples. On expose ensuite une étude par éléments finis qui permet de recouper les résultats expérimentaux et fournit une représentation de la progression de l'endommagement dans la volume de l'éprouvette. Enfin, trois annexes précisent des points techniques dont les résultats sont utilisés dans l'étude.

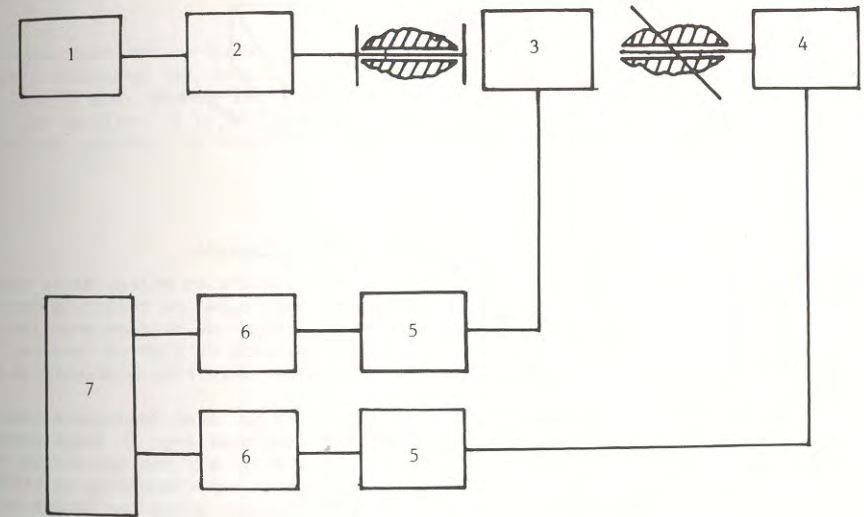
2. PROCEDURE EXPERIMENTALE

2.1. Introduction

Une étude antérieure de l'adhésion fibre-matrice a conduit à la mise au point d'un dispositif de torsion statique, avec mesure d'une déformation moyenne

du cisaillement sur les faces par extensométrie électrique (2). Ce dispositif permet la mise en évidence avec une grande sensibilité du point à partir duquel apparaît une irréversibilité observable du matériau. Ce point est retenu comme limite élastique du matériau ; au delà de ce point se produit un endommagement quasi-statique. Les essais sont effectués sur des barreaux à section carrée découpés dans des plaques. Ces barreaux sont ainsi bien représentatifs du matériau à étudier contrairement aux éprouvettes de torsion sur cylindres ou sur barreaux à sections circulaires qui demandent une élaboration spéciale dont on n'est jamais sûr qu'elle reproduit le matériau que l'on veut étudier. En contrepartie la procédure de dépouillement est plus compliquée, toutefois elle ne fait appel qu'à des résultats classiques de la théorie de l'élasticité (Annexe 2).

Le travail présenté étudie en terme d'endommagement le comportement au delà de la limite élastique du composite graphite/époxy (T 300/Narmco 5208) à l'aide du même dispositif sur des éprouvettes prismatiques (7mm x 7mm x 140mm).



- (1) levier
- (2) réducteur
- (3) éprouvette
- (4) couplemètre

- (5) Ponts d'extensométrie Sedeme TS 105
- (6) mutimètres numériques Schlumberger 7040
- (7) Traceur X-Y Sefram type TRP

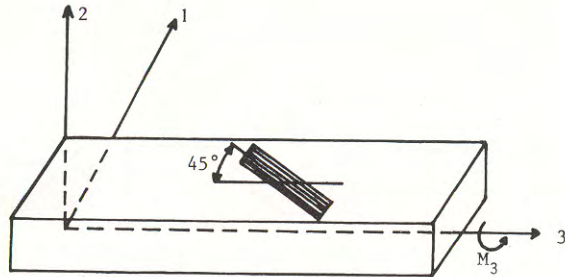
SCHEMA SYNOPTIQUE (fig. 2-1)

2.2. La machine de torsion

Cette machine est composée de deux poutres entre lesquelles se trouvent deux mors servant à fixer l'éprouvette et adaptés à la section de l'éprouvette. L'un des mors est solidaire d'un chariot et peut se déplacer parallèlement à l'axe des poutres. L'autre mors, fixe en translation, est monté sur l'un des axes d'un réducteur de vitesse. Sur l'autre axe est exercé manuellement le couple de torsion, par l'intermédiaire d'un levier. Le couple exercé signalé par un capteur à jauge étalonné et placé entre l'extrémité du barreau et le chariot est enregistré et constitue le paramètre de force.

2.3. Mesure d'une déformation de cisaillement moyenne

La mesure de la déformation de cisaillement est faite par une jauge à trame pelliculaire du type 3/120 (dimension 3 x 1,4mm² et de résistance 120 ohms). Elle est collée au milieu de la face latérale d'un des côtés dans une direction inclinée à 45° par rapport à l'axe du barreau (fig.1.2). Cette jauge donne de par ses dimensions une déformation moyenne de cisaillement dont le calcul se trouve en annexe II. De l'étude de cette grandeur globale en fonction du moment appliqué dépendent les paramètres mécaniques étudiés : limite élastique, définition de l'endommagement et évolution de l'endommagement.



(fig.2-2) Schéma d'une éprouvette équipée.

Une autre jauge à trame pelliculaire 6/120 collée au milieu de la face latérale opposée parallèlement à l'axe du barreau a pour but de régler un mauvais alignement du barreau. En effet un mauvais alignement du barreau avec les mors du dispositif expérimental entraîne des déformations de flexion lors du chargement qui s'observe par l'intermédiaire de cette jauge afin d'obtenir un état de torsion pur.

D'autre part pour éliminer les effets thermiques qui sont importants dans les composites, chaque jauge active est montée en demi pont avec la jauge passive correspondante dite témoin, se situant au même endroit sur une éprouvette identique non chargée. On améliore encore les conditions expérimentales en utilisant des fils électriques de raccordement de même longueur entre les jauges et les ponts de mesure. Ce dispositif a conduit à des essais bien reproductibles que nous pouvons donc considérer comme fiables.

3. CONSIDERATIONS GENERALES ; ASPECT MACROSCOPIQUE

L'étude permet tout d'abord de déterminer la limite élastique comme le point où commence à exister une déformation résiduelle sensible. Au delà de ce seuil, obtenue pour le couple Me, on a étudié l'endommagement pour deux types de chargement. Les premiers essais ont été effectués pour des chargements monotones donnés suivis d'un déchargement en-dessous de la limite élastique. L'aspect cumulé de l'endommagement a été mis en évidence par une deuxième série d'essais selon des lois qui seront données plus loin. Ce cumul d'endommagement sera défini comme la somme de l'endommagement occasionné lors de chaque aller-retour.

Dans ces deux cas simples des chargements à divers niveaux ont été effectués et l'on a observé peu de changement dans la rigidité initiale. En effet l'origine de l'endommagement réside dans la création de microfissures dans la matrice. Le comportement est de type fragile et non plastique si bien que le matériau se comporte en permanence comme un matériau élastique avec éventuellement des pro-

priétés élastiques affaiblies dans la zone où des microfissures sont apparues. Cette nature fragile du matériau entraîne un certain nombre de conséquences, en particulier les fissures sont susceptibles de se refermer si bien que les caractéristiques élastiques globales varient peu en cours de l'endommagement. Par contre nous avons noté une déformation résiduelle, ce qui nous a conduit par la suite à définir un endommagement à partir de la déformation.

4. FORMULATION THEORIQUE ; STRUCTURE GLOBALE

En transposant les travaux effectués par Kachanov (3) et Rabotnov (4) nous avons été conduit à introduire une mesure quantitative de l'endommagement basée sur la déformation résiduelle en cisaillement. Pour un chargement monotone donné suivi d'un déchargement en-dessous de la limite élastique on pose que l'endommagement est entièrement irréversible et ne s'accroît pas durant le déchargement. On a introduit une variable ω d'endommagement en cisaillement, rapport de la déformation résiduelle généralisée \bar{e}_n à la déformation totale généralisée \bar{e}_t

$$\omega = \frac{\bar{e}_n}{\bar{e}_t}$$

De même, pour des cyclages entre le couple 0, jusqu'à un couple supérieur à la limite élastique Me, avec retour en-dessous de Me, la définition identique sera adoptée pour chaque chargement en cours.

En appelant \hat{e} la déformation réversible généralisée et K la rigidité généralisée sécante, le couple M peut s'écrire

$$M = K\hat{e} = K(\bar{e}_t - \bar{e}_n)$$

$$M = K(1 - \omega)\bar{e}_t = K\bar{e}_t \quad (\text{fig III.1})$$

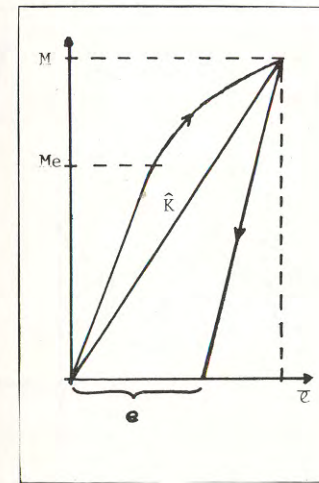


fig (III.1) Courbe chargement-déchargement

Si bien que la variation d'endommagement pouvait être mesurée à l'aide de la définition utilisant le rapport des déformations généralisées où à partir de la variation du module généralisé :

$$\omega = 1 - \hat{K}/K$$

5. ETUDE EXPERIMENTALE DES LOIS D'ENDOMMAGEMENT

5.1. Etude du 1er endommagement

Nous avons travaillé sur un premier lot de 24 éprouvettes vierges. Chacune d'elle est montée à un niveau de charge différent afin d'obtenir une série de mesures du 1er endommagement pour divers niveaux. Chaque éprouvette est montée jusqu'à un couple supérieur à M_e puis déchargée. La figure 5.1 où le moment appliqué est porté en fonction de la déformation de cisaillement moyenne représente les résultats obtenus pour 8 points - chaque point est la moyenne des résultats sur trois éprouvettes. Ces résultats ont mis en évidence une loi expérimentale de premier endommagement particulièrement simple : une variation linéaire de la mesure de l'endommagement en fonction de l'accroissement de couple à partir du seuil M_e (fig. 5.2)

$$\omega = \begin{cases} 0 & \text{si } M < M_e \\ k(M - M_e) & \text{si } M > M_e \end{cases}$$

avec $k = 0,03 \text{ N}^{-1} \text{m}^{-1}$ et $M_e = 4 \text{ N.m}$

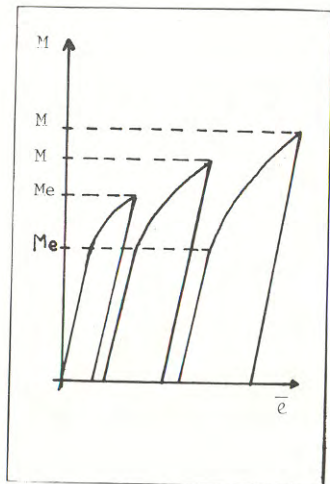
De cette loi expérimentale, et compte tenu de la définition de la rigidité sécante : $\hat{K} = K(1 - \omega)$ pour $M > M_e$, on obtient une variation linéaire de la rigidité généralisée sécante \hat{K} au delà du seuil M_e .

$$\hat{K} = \begin{cases} K & \text{si } M < M_e \\ K(1 - M + kM_e) & \text{si } kM > M_e \end{cases}$$

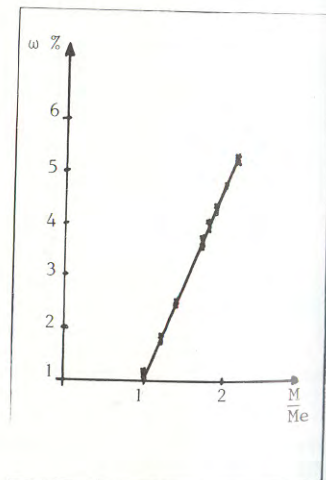
Par ailleurs $K = \frac{M}{\bar{e}} = G_e F\left(\frac{a}{b}\right)$ dans le domaine élastique, G_e étant le module de cisaillement et $G\left(\frac{a}{b}\right)$ étant uniquement fonction de la géométrie de l'éprouvette. Au delà de la limite élastique $\hat{K} = \hat{G} F$. D'où en combinant les relations précédentes

$$\hat{G} = G_e(1 - \omega)$$

Donc la variation du module de cisaillement global \hat{G} sécant est également linéaire.



(figure 5.1)
courbes de chargement-déchargement
pour divers couples



(figure 5.2)
Courbes du premier endommagement

5.2. Etude de l'endommagement cumulé

Par ailleurs dans un autre lot, chaque éprouvette vierge est montée depuis le couple 0 jusqu'à un couple supérieur à M_e et des cyclages sont effectués entre 0 et ce couple donné M . Ces essais mettent en évidence un endommagement limite. Cette limite est atteinte en moins de 10 cycles. La figure 5.3 schématise les résultats obtenus. De plus en utilisant le paramètre d'endommagement introduit on a mis en évidence que le cumul de l'endommagement, défini comme la somme des endommagements créés à chaque cycle, se faisait selon une loi de progression géométrique en fonction du nombre de cycles. Cette loi de progression s'écrit de la façon suivante :

$$\omega(n) = \alpha \omega(n-1)$$

où $\omega(n)$ est la part d'endommagement produite durant le $n^{\text{ième}}$ cycle. L'endommagement cumulé au cours des n premiers cycles peut s'exprimer de la façon suivante :

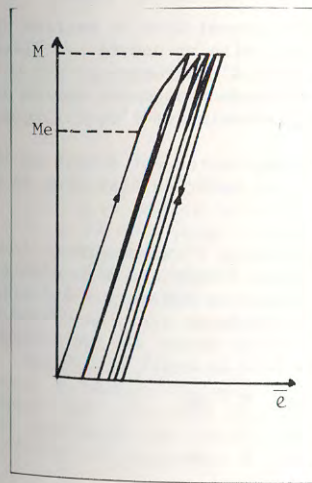
$$W(1) = \omega(1)$$

$$W(n) = \omega(1) \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} = k(M - M_e) \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}$$

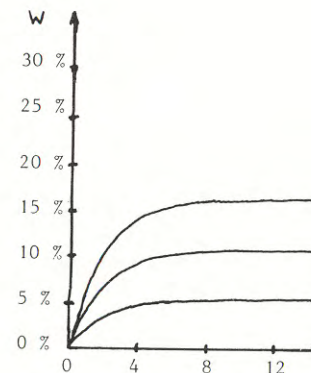
et l'endommagement limite

$$W(\infty) = \frac{k(M - M_e)}{1 - \alpha}$$

Enfin les essais pour diverses valeurs du couple M mettent en évidence que la raison de la progression géométrique est indépendante de ce couple. Ce résultat apparaît sur la figure 5.4 qui schématise la loi d'accroissement de l'endommagement en fonction du nombre de cycles. Pour divers couples on observe que la valeur limite est atteinte dans tous les cas pour le même nombre de cycles.

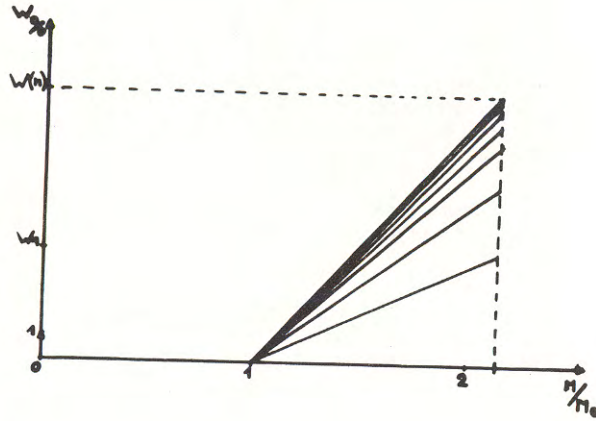


(figure 5.3) Cyclage entre 0 et un
couple M



(figure 5.4) Cumul de l'endommagement
en fonction du nombre de cycles

On peut en déduire que la loi de $n^{\text{ième}}$ endommagement ou d'endommagement final doit être linéaire en fonction de l'accroissement de couple au delà de M_e . Ceci a été vérifié pour des lois d'endommagement d'ordre n pour différentes valeurs de n . Ces linéarités servent de vérification à la valeur unique de α (figure 5.5).



(figure IV.5) lois de cumul du $n^{\text{ième}}$ endommagement en fonction du couple appliqué

6. ETUDE PAR REGION AU COEUR DE LA STRUCTURE

On a cherché à réaliser une analyse de l'endommagement dans la section de l'éprouvette à l'aide d'une modélisation par régions, mise en oeuvre par éléments finis. Cette modélisation est basée sur une moyenne de l'endommagement sur un élément. La progression de l'endommagement en fonction du chargement est un phénomène linéaire et est déterminé par une recherche itérative de l'équilibre sous un couple donné.

Le huitième de la section de nos barreaux rectangulaires est divisé en 108 triangles (fig.6.1). Chaque triangle est assimilé à un matériau élastique de module G_e dans le cas élastique et de module

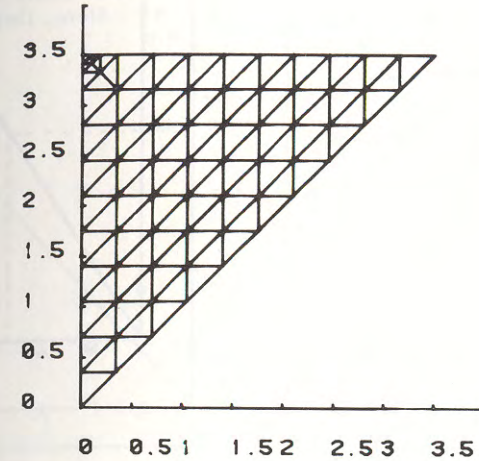
$$G_i = G_e(1 - \phi_i)$$

pendant l'endommagement si ϕ_i représente le pourcentage d'endommagement local. On traduit cette loi en faisant une moyenne sur tout l'élément, afin d'obtenir un module équivalent dans cet élément. La taille finie des éléments a été prise en compte empiriquement de la façon suivante. Dans l'élément le plus chargé et pour une taille d'élément donné, on représente le module moyen $\overline{G_i}$ en fonction du couple appliqué M par une loi hyperbolique au delà du seuil (fig.6.2).

$$\frac{\overline{G_i}}{G_e} = \begin{cases} 1 & \text{si } M < M_e \\ \frac{a M/M_e}{\frac{M}{M_e} - (1 - a)} & \text{si } M > M_e \end{cases}$$

Le coefficient a dépend de la taille de l'élément et a été ajusté à partir des essais pour la partie hyperbolique de la courbe au voisinage de la limite élastique. A la limite, pour un élément de taille nulle a tend vers 0, donc également le module $\overline{G_i}$ et l'endommagement ϕ_i en ce point tend vers 100 %.

Le chargement est fixé indirectement en imposant une chute de module dans l'élément le plus chargé. L'état correspondant n'est pas équilibré. La recherche de l'équilibre s'effectue en faisant évoluer l'endommagement dans les autres éléments, par une méthode itérative :



(figure 6.1) maillage de la section

- on calcule e_i la déformation généralisée élastique au noeud i pour le couple M calculée à partir de la moyenne quadratique

$$\hat{e}_i = \sqrt{\hat{e}_{ixz}^2 + \hat{e}_{iyz}^2}$$

- on la compare à la déformation moyenne quadratique total $\overline{e_{ti}}$ trouvée pour l'état endommagé non équilibré et on forme l'endommagement local i :

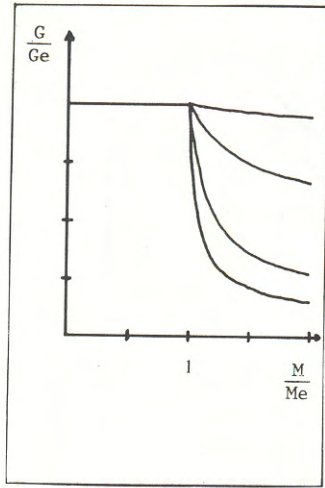
$$\phi_i = \frac{\overline{e_{ti}} - \hat{e}_i}{\overline{e_{ti}}}$$

d'où on déduit le module G_i au noeud i .

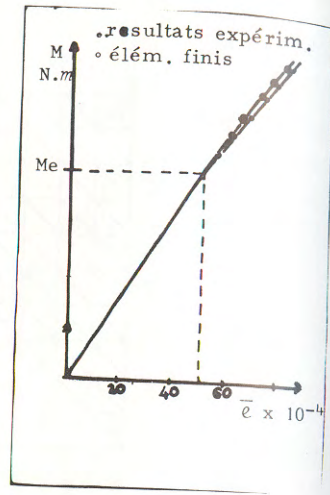
- on réitère jusqu'à l'obtention de valeurs identiques dans deux itérations successives.

Pour l'état d'équilibre ainsi obtenu, on calcule la "déformation de cisaillement moyenne utilisée dans l'étude expérimentale. On détermine ainsi par le calcul une loi M en fonction de \overline{e} qui est en accord avec les résultats expérimentaux (fig.6.3).

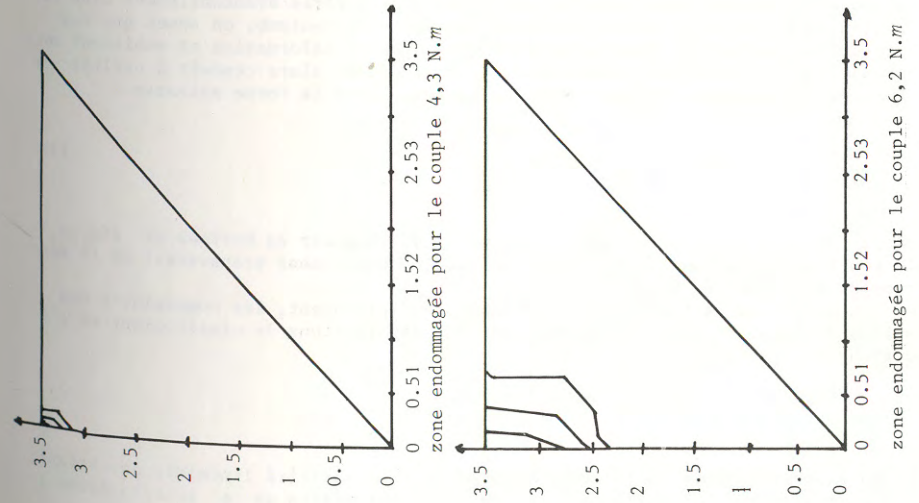
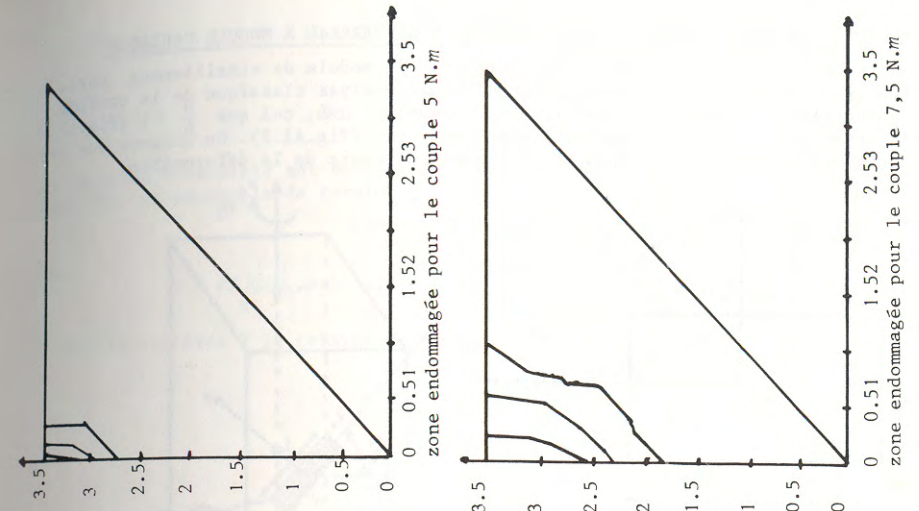
Les résultats obtenus à l'aide de notre modélisation montrent que l'endommagement se propage fortement en dessous du premier point endommagé. Les résultats obtenus sont présentés dans les diagrammes suivants sur lesquels la limite de la zone endommagée est tracée ainsi que la limite des zones à 5 % d'endommagement et 10 % d'endommagement.



(figure 6-2) loi de chute du module dans l'élément le plus contraint en fonction de sa taille



(figure 6-3) Comparaison des résultats expérimentaux et des résultats obtenus par éléments finis



ANNEXE 1 - ANALYSE THEORIQUE DE LA TORSION D'UN BARREAU A MODULE VARIABLE

La torsion d'un barreau prismatique dont le module de cisaillement varie dans la section se déduit sans difficulté de l'analyse classique de la torsion d'un barreau homogène. Soit un barreau de section axb , tel que $\frac{a}{b} > 1$ (fig.A1.1) est soumis au couple M_3 de torsion suivant Ox_3 (fig.A1.2). On suppose que les extrémités du barreau se déplacent librement au cours de la déformation.

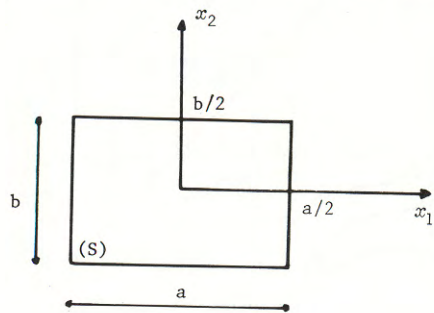


figure A1.1

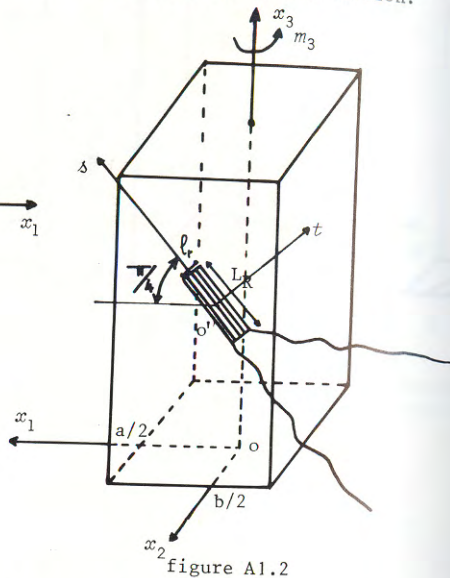


figure A1.2

Nous prendrons comme loi de comportement du matériau celle d'un matériau isotrope transverse dont le module de cisaillement varie éventuellement dans la section $G = G(x_1, x_2)$. En partant de l'hypothèse de Coulomb, on admet que les sections ne restent planes, ni pendant, ni après la déformation et subissent toute une même déformation indépendante de x_3 ; on est alors conduit à utiliser le champ de déplacements en tout point du barreau, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_1 &= -\omega x_2 x_3 \\ u_2 &= \omega x_1 x_3 \\ u_3 &= \omega \phi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1)$$

où ω désigne l'angle de torsion par unité de longueur du barreau et $\phi(x_1, x_2)$ la fonction de déformation qui caractérise le déplacement transversal de la section du barre selon Ox_3 .

Compte tenu de l'expression du champ de déplacement, les composantes non nulles du tenseur de déformation ϵ_{ij} sont les déformations de cisaillement et s'écrivent :

$$\begin{aligned} \epsilon_{13} &= \frac{1}{2} \omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - x_2 \right) \\ \epsilon_{23} &= \frac{1}{2} \omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} + x_1 \right) \end{aligned} \quad (2)$$

En faisant intervenir la loi de comportement en élasticité linéaire, on obtient les contraintes de cisaillement σ_{13} et σ_{23} en fonction de ϕ sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \omega G(x_1, x_2) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - x_2 \right) \\ \sigma_{23} &= \omega G(x_1, x_2) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} + x_1 \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Ce champ de contrainte est équivalent à des efforts résultants nuls dans la section (S), et au couple de torsion :

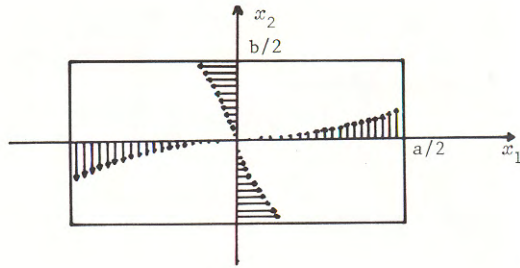
$$m_3 = \iint_S (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dx_1 dx_2 = \omega D \quad (4)$$

avec
$$D = \iint_S G(x_1, x_2) \left\{ x_1^2 + x_2^2 + x_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right\} dx_1 dx_2$$

D est la rigidité à la torsion du barreau.

ANNEXE 2 - DEFINITION ET CALCUL D'UNE DEFORMATION MOYENNE DE CISAILLEMENT
ET DETERMINATION DU MODULE DE CISAILLEMENT.

Il a été montré (5), (6), (7) que la contrainte de cisaillement maximale se produit au centre de la facette du plus grand côté de la section du barreau (fig.AII.1).



(figure AII.1) diagramme des contraintes dans la section de l'éprouvette

La technique expérimentale retenue utilise des jauges à trame pelliculaire qui ne peuvent pas donner une valeur ponctuelle mais une valeur moyenne sur leur base. Bien qu'il existe des jauges à base très faible qui permettent de se rapprocher d'une valeur ponctuelle le caractère hétérogène du matériau composite nous conduit à utiliser une jauge de base assez grande (3mm x 1,4). Pour avoir des résultats précis il est donc nécessaire de calculer une valeur moyenne pour les déformations de cisaillement. La valeur moyenne obtenue par la mesure de la variation relative de la résistance électrique de la jauge peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{\epsilon}_{13 \text{ mes}} = \frac{1}{S_R} \iint_{S_R} \epsilon_{13} \left| x_1(s, t), \frac{b}{2} \right| ds dt$$

où S_R est la surface de la jauge ($S_R = L_R \times \ell_R$). (o, s, t) est le nouveau repère (fig.I.2). En exprimant la première relation de (2) de l'annexe I dans la relation précédente et en utilisant ϕ sous la forme d'une série rapidement convergente (11).

$$\phi(x_1, x_2) = -x_1 x_2 + \sqrt{\frac{C_{1313}}{C_{2323}}} \frac{8}{\pi^3} b^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \times \frac{\text{sh}(2\lambda_n \frac{x_1}{b}) \sqrt{\frac{C_{2323}}{C_{1313}}}}{\text{ch}(\lambda_n \frac{a}{b}) \sqrt{\frac{C_{2323}}{C_{1313}}}} \times \sin(2\lambda_n \frac{x_2}{b}) \right\}$$

où $\lambda_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$

L'expression de la déformation de cisaillement ϵ_{13} , s'écrit sous la forme

$$\epsilon_{13}(s, t, \frac{b}{2}) = -\frac{1}{2} \omega b \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \text{ch}(\lambda_n \frac{a}{b})} \cdot \text{ch} \left| \frac{\lambda_n}{b} \sqrt{2} (s - t) \right| \right\}$$

en calculant l'intégrale on obtient :

$$\bar{\epsilon}_{13 \text{ mes}} = \frac{1}{2} \omega b \left\{ 1 - \frac{64b^2}{\pi^4 L_R \ell_R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4 \text{ch}(\lambda_n \frac{a}{b})} \cdot \text{sh} \left(\frac{\lambda_n \sqrt{2}}{b} L_R \right) \cdot \text{sh} \left(\frac{\lambda_n \sqrt{2}}{b} \ell_R \right) \right\}$$

On détermine le module de cisaillement G et la résistance au cisaillement en fonction de cette valeur moyenne de la déformation de cisaillement $\bar{\epsilon}_{13 \text{ mes}}$ et du couple de torsion m_3 de la relation (4) de l'annexe I et de la relation précédente. Ainsi on obtient le module de cisaillement G sous la forme suivante :

$$G_{\text{mes}} = \frac{1}{2} \frac{m_3}{\bar{\epsilon}_{13 \text{ mes}}} \frac{k_1 \left(\frac{a}{b}, \frac{L_R}{b}, \frac{\ell_R}{b} \right)}{ab^2}$$

où k_1 est un coefficient dépendant des dimensions de la jauge et de celles du barreau.

ANNEXE 3 - MODELISATION A L'AIDE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Selon la théorie classique de la torsion (8) (9), l'énergie potentielle de déformation peut s'écrire :

$$\pi = \int_S (\sigma_{xz} \epsilon_{xz} + \sigma_{yz} \epsilon_{yz}) dv - M\omega L$$

les constantes de torsion d'un barreau à module variable s'écrivent :

$$\sigma_{xz}(x,y) = 2G(x,y) \epsilon_{xz}(x,y)$$

$$\sigma_{yz}(x,y) = 2G(x,y) \epsilon_{yz}(x,y)$$

D'où l'équilibre pour le minimum d'énergie potentielle $\delta\pi = 0$

$$\delta\pi = 2L \int_S G(x,y) \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + x \right)^2 - \bar{M} \right] \delta(\omega) + 2L \frac{\omega^2}{4} \int_S \left[G(x,y) \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - y \right) \frac{\partial}{\partial x} (\delta\phi) + G(x,y) \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + x \right) \frac{\partial}{\partial y} (\delta\phi) \right] d\delta$$

D'où en utilisant le lemme fondamental de la physique des milieux continus (10)

$$\int_S G(x,y) \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + x \right)^2 \right] d\delta = M$$

$$\int_S \left\{ G(x,y) \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - y \right) \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial x} + G(x,y) \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + x \right) \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial y} \right\} d\delta = 0$$

D'où en discrétisant en surfaces élémentaires V_e on obtient :

$$\sum_{V_e} \int_{V_e} \left\{ G_{V_e}(x,y) \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - y \right) \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial x} + G_{V_e}(x,y) \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + x \right) \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial y} \right\} = 0$$

si ϕ_i sont les déplacements aux noeuds des éléments en tout point à l'intérieur de l'élément $\phi = N_i \phi_i$. De même le vecteur gradant $\Delta\phi$ s'exprime par

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = [B] \{\phi_i\}$$

l'expression devient :

$$\sum_{V_e} G_{V_e} \int_{V_e} \left\{ \delta\phi_i > [B]^T [B] \{\phi_i\} d\delta + \int_{V_e} \delta\phi_i > [B]^T \begin{Bmatrix} -y \\ +x \end{Bmatrix} d\delta \right\} = 0$$

D'où en choisissant des triangles comme surface élémentaire il vient

$$\sum_{V_e} \delta\phi_i > G_{V_e} \left\{ \frac{|ke|}{4\Delta_{V_e}} \{\phi_i\} + \frac{1}{6} \left| Q \right| \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \right\} = 0$$

Δ_{V_e} est la surface de l'élément

$|ke|$ matrice de rigidité élémentaire de l'élément

la matrice $|Q|$ s'exprime à l'aide des coordonnées des noeuds du triangle

$$|Q| = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_1 & -b_1 & c_1 & c_1 & c_1 \\ -b_2 & -b_2 & -b_2 & c_2 & c_2 & c_2 \\ -b_3 & -b_3 & -b_3 & c_3 & c_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} b_i = y_j - y_k \\ c_i = x_k - x_j \end{matrix} \quad \begin{matrix} i, j, k = 1, 2, 3 \\ i, k, j = 1, 3, 2 \end{matrix}$$

Calcul de la déformation

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \omega \begin{Bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} - y \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} + x \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \omega [B] \{\phi_i\} + \frac{1}{2} \omega \begin{Bmatrix} -y \\ x \end{Bmatrix}$$

La déformation moyenne de cisaillement donnée par la jauge est calculée par une intégrale sur toute la surface de la jauge

Elle s'exprime par :

$$\bar{\epsilon} = \omega E(\phi)$$

Par ailleurs à l'aide des fonctions de déplacements est calculée la rigidité à la torsion.

$$D = \int_S G(x,y) \left\{ x_1^2 + y_2^2 + x_1 \frac{\partial\phi}{\partial y_2} - x_2 \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \right\} dx_1 dx_2$$

D'où en discrétisant cette expression

$$D = \sum_{V_e} G_{V_e} \int_{V_e} \delta (x_1^2 + x_2^2) d\delta + \int_S \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \right\rangle \begin{Bmatrix} -y \\ x \end{Bmatrix} d\delta$$

si $\delta(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3$

On obtient

$$D = \sum_{V_e} G_{V_e} \frac{|\Delta_{V_e}|}{6} \left\{ \delta(x_1, x_2) + \frac{1}{\Delta} \langle \phi \rangle \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 & c_1 & c_2 & c_3 \\ -b_2 & -b_2 & -b_2 & c_2 & c_2 & c_2 \\ -b_3 & -b_3 & -b_3 & c_3 & c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \right\}$$

D'où l'expression du moment en fonction des déplacements : $M = \omega D(\phi)$

BIBLIOGRAPHIE

- (1) G.VERCHERY, "Le calcul des contraintes à l'interface entre les couches d'un matériau stratifié", 4ème Colloque de Mécanique et Métallurgie de Tarbes, 4-6 novembre 1980, tome 1, 1ère partie.
- (2) C.PHANG, T.S.VONG & G.VERCHERY "Etude des tests de cisaillement d'un matériau composite à renforcement unidirectionnel", Premières Journées Nationales sur les Composites "J.N.C.1", 19-20 septembre 1978, Vol.1, pp.182-189.
- (3) L.M.KACHANOV, Izv.Akad.Nauk S.S.R, Otd.Tekh. Nauk, n°8, pp. 26-31, 1958.
- (4) Y.N.RABOTNOV, Proc. 12th Inter Congress Appl. Mech., pp.342-349, Springer, 1968.
- (5) I.S.SOKOLNIKOFF, "Mathematical Theory of Elasticity", (2ème édition), Mc Graw Hill, New York, 1956, pp. 109-197.
- (6) V.FEDDOSSIEV, "Résistance des Matériaux" (traduit du russe), Editions de Moscou, 1971, p.94.
- (7) L.SOLOMON, "Elasticité linéaire", Masson, Paris, 1968, pp. 195-219.
- (8) C.DYME & I.SHAMES, "Solid Mechanics : A variational Approach", Mc Graw-Hill, New York, 1973.
- (9) S.TIMOSHENKO & J.N.GOODIER, "Théorie de l'élasticité" (traduit de l'Anglais), Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris, 1981.
- (10) P.GERMAIN, "Cours de Mécanique des milieux continus", Tome 1, Masson, Paris, 1973.
- (11) A.E.H.LOVE, "A treatise on the mathematical theory of Elasticity" Cambridge University Press, London. 4ème édition, 1959, pp. 324-325.

INTERACTION ENTRE L'ECROUISSAGE ET L'ENDOMMAGEMENT EN FATIGUE PLASTIQUE

INTERACTION BETWEEN STRAIN-HARDENING AND DAMAGE DURING PLASTIC FATIGUE

G. CORDIER et K. DANG VAN

Laboratoire de Mécanique des Solides - Ecole Polytechnique - Palaiseau - France

RESUME

On présente un nouveau modèle physique de fatigue plastique qui tient compte de l'interaction entre l'écrouissage et l'endommagement. Ce modèle permet de décrire l'évolution de la vie en fatigue en fonction des sollicitations, ainsi que les effets de sur ou sous-chargement. Une nouvelle interprétation de la notion de dommage est suggérée.

ABSTRACT

A new physical model of fatigue damage is presented. It takes into account the effect, on the behaviour of the material, of strain hardening and rupture of the constitutive grains on one hand and average value of stress on the other. The model enables us to describe the evolution of fatigue life with applied loads and also the effects of temporary over- and under-loadings. It can suggest another interpretation of damage.

La plupart des études sur la fatigue sont basées sur le concept de dommage. Kachanov [1] et Rabotnov [2], il y a une vingtaine d'années, ont proposé, pour décrire le processus d'endommagement par fluage, d'introduire la notion de "contrainte effective" : si on considère la contrainte Σ s'exerçant sur un élément de surface ds , du fait de l'apparition de microvides, la surface résistante se réduit à \tilde{ds} et par suite la contrainte effective $\tilde{\Sigma}$ peut être définie de telle manière que $\Sigma ds = \tilde{\Sigma} \tilde{ds}$ (fig. 1). En écrivant $\tilde{ds} = (1 - D) ds$, on trouve $\tilde{\Sigma} = \Sigma / (1 - D)$.

La généralisation d'une telle définition au cas tridimensionnel est malaisée puisque, en général, l'endommagement d'un élément de volume est anisotrope (fig. 2). En étendant la démarche précédente, Murakami et Ohno [3] ont donné une définition de l'endommagement tridimensionnel caractérisé par un tenseur du second ordre, en utilisant des raisonnements de nature géométrique et statique. Cependant, des difficultés d'ordre mécanique et physique subsistent : le tenseur de contrainte effectif ainsi introduit n'est pas symétrique et ne vérifie pas les équations d'équilibre locale.

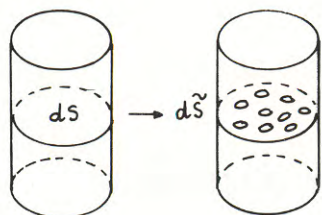


Figure 1



Figure 2

Lemaitre et Chaboche [4] ont développé une théorie sur l'évolution en fatigue en reprenant la notion de contrainte effective et en considérant D comme un scalaire. Toutefois, en plus de cette importante restriction, ils n'ont pas pris en compte, dans leur modèle, l'interaction entre les processus d'endommagement et d'écrouissage, ce qui, à notre avis, est nécessaire pour retrouver les augmentations de durée de vie obtenues expérimentalement grâce à des préchargements à faible niveau de sollicitation.

Dans cette étude, nous présentons un modèle qui décrit cette interaction : l'élément de volume élémentaire (grain monocristallin) subit un écrouissage qui provoque une augmentation des contraintes locales pouvant entraîner sa rupture. Au niveau local, il s'agit d'un comportement à endommagement total déjà utilisé par Dang Van [5] pour étudier l'endurance et par Bui [6] et Bui-Ehrlacher [7] pour proposer une nouvelle approche de la Mécanique de la Rupture. Dans ce type de comportement, le paramètre de Kachanov d ne peut prendre que les valeurs zéro (ici, grain non rompu) ou un (grain rompu). En fatigue plastique, au niveau global, l'évolution sera cependant continue.

Plus précisément, examinons ce qui se produit dans un volume élémentaire de matériau soumis à la fatigue de plasticité, suffisamment petit pour qu'au sens de la Mécanique des Milieux Continus, on puisse considérer que règnent des champs de déformation et de contrainte homogènes. Ce volume $\delta\Omega$ peut être regardé comme un polycristal constitué de monocristaux d'orientations variées. Sous l'action des sollicitations cycliques qui s'appliquent sur cet élément, les grains se plastifient peu à peu au fur et à mesure des cycles, plus ou moins suivant leurs orientations ... Ensuite, sous l'effet des contraintes élevées qui apparaissent à l'intérieur, certains monocristaux se rompent, ce qui se traduit par une redistribution des efforts et donc une augmentation de l'écrouissage des grains encore intacts. D'autres cassures interviennent ultérieurement et ainsi créent une fissure qui se propage peu à peu de grain à grain jusqu'à ce que sa taille soit telle qu'elle entraîne une rupture brutale du volume $\delta\Omega$.

Dans le modèle exposé plus loin, nous nous sommes proposés de traduire ce processus de fatigue plastique, à l'aide d'hypothèses physiques simples, d'une part sur le comportement élastoplastique, d'autre part sur les conditions de rupture des grains, et cela afin de suivre à chaque instant de l'histoire de chargement le comportement du polycristal.

Les premières hypothèses portent sur la description du comportement élastoplastique.

-H1- Le polycristal est assimilé à une matrice homogène, où règnent des champs Σ , E homogènes, matrice dans laquelle chaque monocristal est considéré comme une inclusion isolée, σ , ϵ étant les champs de contrainte et de déformation homogènes associés.

-H2- par simplification, le modèle d'interaction matrice-inclusion retenu est le "modèle statique" (appelé parfois modèle de Sachs), qui s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij}$$

Un tel modèle, qui néglige les contraintes internes nées de l'incompatibilité des déformations plastiques de la matrice et de l'inclusion, est surtout valable lorsque les déformations plastiques deviennent notables.

-H3- Hill [8], Mandel [9], H.D. Bui [10] ont montré l'existence des relations de moyennation suivantes entre variables "macroscopiques" et "microscopiques" :

$$\Sigma = \frac{1}{\delta\Omega} \int_{\delta\Omega} \sigma \, dv \quad E = \frac{1}{\delta\Omega} \int_{\delta\Omega} \epsilon \, dv$$

Par contre, de telles relations ne sont pas applicables, en général, aux déformations plastiques E^P et ϵ^P , sauf dans le cas où matrice et inclusion ont même comportement élastique. Nous avons admis que c'était le cas non seulement au départ, mais ensuite au cours du processus de fissuration et par suite que :

$$E^P = \frac{1}{\delta\Omega} \int_{\delta\Omega} \epsilon^P \, dv$$

-H4- Les orientations des cristaux sont aléatoires (pas de textures). Cette hypothèse se justifie par le relativement faible niveau de déformation auquel on se situe.

-H5- Aux températures ordinaires, la déformation plastique des cristaux est due, presque exclusivement, au glissement de fractions du monocristal suivant des plans et directions dits denses.

Dans le cas d'un C.F.C., ces systèmes sont au nombre de vingt-quatre. En fait, les métallurgistes constatent, que pour de larges plages de déformation, le nombre de systèmes actifs est très réduit. Aussi, avons-nous admis qu'un seul système glisse, celui où le cisaillement τ est maximum : à partir de l'instant où ce système glisse, il continue à le faire tout au long du chargement. Ce système est défini par n_s et m_s , qui sont respectivement la normale au plan et la direction du glissement.

En introduisant α matrice d'orientation définie par $\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(n_i^s m_j^s + n_j^s m_i^s)$, on montre que

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^P &= \gamma \alpha_{ij} \\ \tau &= \alpha_{ij} \sigma^{ij} \end{aligned}$$

γ glissement plastique.

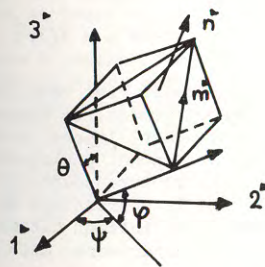


Figure 3

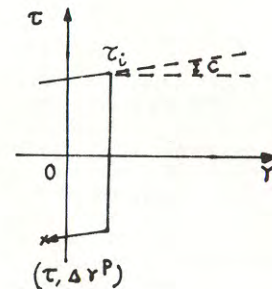


Figure 4

-H6- La dernière hypothèse nécessaire à la description du comportement élastoplastique porte sur la loi de comportement permettant de relier τ à γ .
 Nous avons admis l'existence d'un seuil τ_0 d'apparition du glissement, identique pour tous les grains : $\tau^s \geq \tau_0 \rightarrow$ glissement.

Nous avons choisi une loi de comportement isotrope :

$$\tau = -\tau_i + c \Delta \gamma$$

Si on applique une traction Σ_3 à la matrice on a (du fait que $\alpha_{ij} \alpha^{ij} = \frac{1}{2}$, $\alpha_i^i = 0$)

$$\tau = \alpha_{33} (\Psi, \theta, \varphi) \Sigma$$

On peut voir que pour chaque grain le système de glissement principal est défini par le maximum des facteurs d'orientation α_{33} . Dans le cas du matériau C.F.C., Zaoui [11] a montré que α_{33}^{\max} évoluait entre les valeurs $2/\sqrt{6}$ et 0,5. Cela veut dire que si τ_0 est le seuil de glissement, et si on applique une contrainte Σ au matériau vierge telle que $2 \tau_0 < \Sigma \leq 3 \sqrt{6} \tau_0/2$, alors il existe ν fonction de Σ tel que les systèmes où $\frac{1}{2} > \alpha_{33} > \nu$ glissent. Zaoui a aussi calculé la probabilité normée de α_{33} , appelée $P(\alpha_{33})$, c'est-à-dire la fraction du volume total de monocristaux qui ont un facteur d'orientation compris entre α_{33} et $\alpha_{33} + d\alpha_{33}$. Ainsi, on peut écrire que

$$E^D = \frac{1}{\delta \Omega} \int_{\delta \Omega} \epsilon^D \delta \Omega = \int_D \gamma P(\alpha_{33}) d\alpha_{33}$$

(ensemble des facteurs d'orientation des systèmes actifs).

Pour ce qui est des conditions d'endommagement nous avons supposé :

-H1- Les conditions de rupture sont identiques pour tous les grains. Nous avons retenu comme critère de rupture un critère introduisant un taux de cisaillement maximum, fonction décroissante de la tension hydrostatique. Pour des cycles en traction-compression alternée, la tension hydrostatique égale à $\Sigma/3$ est directement fonction de ΔEP .

Ainsi, à tout instant, existent dans le polycristal trois classes de grains qui sont caractérisés par leur facteur d'orientation :

- $2/3 \sqrt{6} < \alpha_{33} < \lambda(t)$ les grains ne glissent pas
- $\lambda(t) < \alpha_{33} < \mu(t)$ les grains glissent sans être cassés
- $\mu(t) < \alpha_{33} < 0.5$ les grains sont cassés.

DEFINITION DU DOMMAGE :

De prime abord, compte tenu de ce qui précède, on peut définir D ainsi :

$$D = \int_{\mu(t)}^{0.5} P(\alpha_{33}) d\alpha_{33} \quad \text{avec} \quad D = 1 \quad \text{quand} \quad \mu = 2/3\sqrt{6}$$

En fait, une définition plus précise est nécessaire. Les résultats obtenus montrent qu'à un instant donné du processus d'endommagement, le nombre de grains intacts devient insuffisant pour équilibrer le chargement imposé. Aussi, avons-nous choisi de considérer qu'à cet instant, qui correspond physiquement, au moment où la fissure croît brutalement et provoque la rupture soudaine du polycristal, $D = 1$. Auparavant, le dommage est défini comme le pourcentage de grains rompus par rapport au nombre total de grains cassés à cet instant ultime. Par cette définition, D ne dépend pas seulement de l'histoire antérieure, mais aussi du chargement postérieur, qui sera appliqué immédiatement.

Une telle définition est liée au modèle d'interaction adopté et aux relations de moyennation (en particulier, D est considéré ici comme une quantité scalaire, ce qui est suffisant pour les applications qui suivent).

Si on souhaite suivre pas à pas l'évolution du dommage, le système d'équations non linéaires à résoudre à chaque moment est :

$$\tau = \alpha_{33} \Sigma \quad E^D = \int_{\lambda}^{\mu} \gamma \alpha_{33} P(\alpha_{33}) d\alpha_{33}$$

$$|\tau| = |\tau|^i + c |\Delta \gamma| \quad \text{pour un grain déformé plastiquement.}$$

$$|\tau| = |\tau_0| \quad \text{pour un grain actif pour la première fois.}$$

$$\lambda = \text{Inf} (\lambda' \mid \lambda' \mid \Sigma| > \tau_0; 0,5) \quad \mu = \text{Inf} (\mu' \mid \mu' \mid \Sigma| > \tau_r; 0,5).$$

RESULTATS :

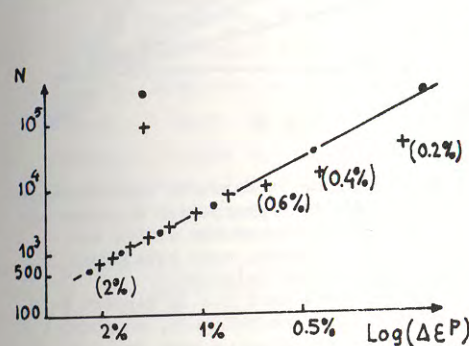


Figure 5

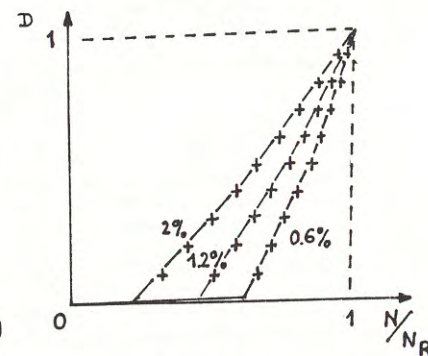


Figure 6

La figure 5 présente les résultats que nous avons obtenus dans des essais de traction-compression alternées. Les points sont les résultats expérimentaux pour l'acier 316. Les croix sont les résultats numériques dus au modèle. Les valeurs des paramètres choisies sont :

$$\tau_{0/c} = 400$$

$$\tau_r = \tau_0 (1 + 0,5 e^{-100 \Delta EP})$$

Pour $0.6\% < \Delta EP < 2\%$, nous retrouvons exactement les résultats expérimentaux. Pour $\Delta EP < 0.6\%$, la corrélation est mauvaise, sans doute parce que le modèle de Sachs ne donne de bons résultats que pour des déformations relativement importantes.

La figure 6 montre l'évolution de D en fonction de N/Nr pour différents ΔEP . La simulation des essais à deux niveaux est représentée sur la figure 6. La courbe 1 (resp. 2) représente l'évolution de D après 480 cycles à 0,6% (resp. après 640 cycles à 0,6%). Ces deux courbes sont très différentes de la courbe 3 correspondant à un chargement à un seul niveau à $\Delta EP = 2\%$. Ainsi, les courbes $(D, N/Nr)$ dépendent non seulement des chargements antérieurs, mais également de ceux qu'on appliquera par la suite. Ce point semble paradoxal : il provient en fait du choix que $D = 1$ quand la rupture se produit.

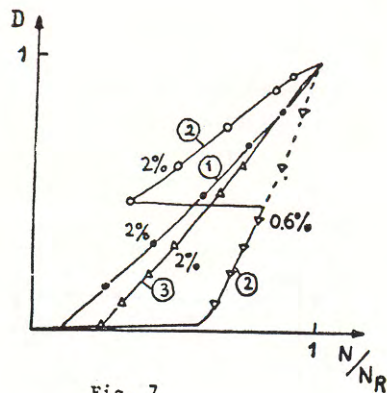


Fig. 7

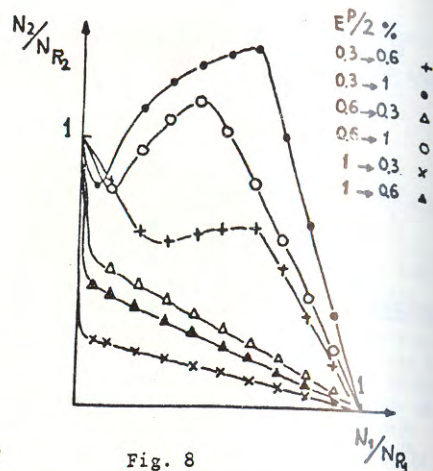


Fig. 8

La figure 8 représente les courbes de cumulation de durée de vie résiduelle pour des chargements à deux niveaux. Dans le cas d'un chargement à grande amplitude suivi d'un chargement plus faible, on obtient une courbe située en-dessous de la droite de Miner. Si la séquence est inversée, nous retrouvons la tendance classique d'une augmentation de la durée de vie relative.

Toutefois, il est intéressant de remarquer d'une part que le rapport N/N_R peut être plus grand que un ; cet effet, observé expérimentalement, ne pouvait être décrit par aucun modèle existant jusqu'à présent, d'autre part on voit que tous les préchargements à des niveaux d'amplitude faible ne se traduisent pas forcément par $N_1/N_{R_1} + N_2/N_{R_2} > 1$, ceci a aussi été constaté expérimentalement pour certains aciers

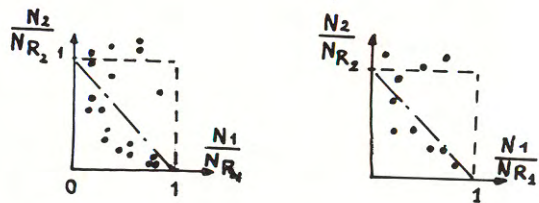


Fig. 9 - Résultats d'essais à deux niveaux

Acier maraging

En conclusion, nous soulignerons l'intérêt de ce type d'approche qui permet avec des hypothèses physiques simples d'interpréter le processus de fatigue du matériau et de restituer les principaux effets reconnus expérimentalement. D'un point de vue théorique, un tel modèle met en relief le rôle des différents paramètres et souligne l'importance du couplage entre écrouissage et endommagement. D'une telle démarche, on peut espérer pouvoir suggérer d'autres interprétations du dommage et formuler des lois d'endommagement au niveau macroscopique. Toutefois, un important effort reste à faire pour mieux définir et caractériser le ou les paramètres d'endommagement en tant que grandeur mécanique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KACHANOV L.M., Izv. Akad. Nauk., S.S.R. Otd Tekh. Nauk, n° 8, 1958
- [2] RABOTNOV Y.N., "Creep Rupture", Proc. XII Int Congress Appl. Mech., 1968, Springer.
- [3] MARAKAMI S., OHNO N., "A continuum theory of creep and creep damage", 3rd Symp. I.U.T.A.M. on Creep in Structures, Leicester 1980, Springer.
- [4] CHABOCHE J.L., LEMAITRE J., J. Mec. Appliquée, III, 3, 1978.
- [5] DANG VAN K., Séminaire de Plasticité et Viscoplasticité de l'Ecole Polytechnique, Paris, 1972, Sciences & Techniques de l'Armement, Edisciences, Mc. Grw Hill, pp. 113-116.
- [6] BUI H.D., C.R. Acad. Sci. 290, série B, 1980, p. 345.
- [7] BUI H.D., EHRLACHER A., C.R. Acad. Sci., 290, série B, 1980, p. 273.
- [8] HILL R., J. Mech. Phys. Solids, vol. 13, N° 2, 1965.
- [9] MANDEL J., Cahier du Groupe Français de Rhéologie, t. I, n° 1, 1965.
- [10] BUI H.D., "Etude de l'évolution de la frontière du domaine élastique avec l'écrouissage et relations de comportement élastoplastique des métaux cubiques", Thèse de Doctorat-ès-Sciences, Paris 1969.
- [11] ZAOUI A., "Etude l'influence propre de la désorientation du grain sur le comportement des métaux polycristallins (système C.F.C.)", Thèse de Doctorat-ès-Sciences, Paris 1970.

SESSION 5

La session est ouverte sous la présidence de
P. HABIB
Ancien Président du Groupe Français de Rhéologie

Sont intervenus MM. :

B. CAMBOU
M.P. LUONG et B. LORET
J.C. ROBINET, H. DI BENEDETTO et A. SMADI
J.C. FAUGERAS et R. GOURVES
F. DARVE et S. LABIANEH

STRUCTURE ET COMPORTEMENT DES MATERIAUX GRANULAIRES STRUCTURAL ANALYSIS AND BEHAVIOUR OF GRANULAR MEDIA

B. CAMBOU

Laboratoire de Mécanique des Solides - Ecole Centrale de Lyon - Ecully - France

RESUME

Le comportement complexe des matériaux granulaires tient à leur nature discontinue. Après avoir analysé la géométrie d'une structure granulaire, nous proposons deux approches partielles du comportement, l'une statique, l'autre cinématique.

Ces deux analyses basées sur une étude à l'échelle du grain permettent de proposer une interprétation discrète de certains phénomènes globaux.

ABSTRACT

The complicated behaviour of a granular material results from its discrete structure.

After an analysis of the geometry of a granular structure, two partial approaches to the behaviour are presented, the first one statical, the second kinematical.

These two analysis are based on a study at a microscopic scale and they allow us to present a discrete interpretation of some global phenomena.

1. INTRODUCTION

Le comportement complexe des milieux granulaires tient à leur nature discontinue.

Cette étude tente de faire le lien entre les phénomènes se produisant à l'échelle du grain et le comportement global des milieux granulaires.

Dans une première partie nous présentons l'analyse de la géométrie d'une structure granulaire.

Dans une deuxième partie nous proposons un modèle analogique permettant de définir dans la structure, des champs de forces statistiquement statiquement et plastiquement admissibles.

Dans une troisième partie nous proposons une analyse permettant de définir des champs de déplacements statistiquement cinématiquement admissibles ainsi qu'une condition variationnelle permettant d'approcher le champ solution. Ces différentes approches partielles, permettent cependant de proposer une interprétation discrète de certains phénomènes globaux.

2. ANALYSE GEOMETRIQUE DE LA STRUCTURE D'UN MILIEU GRANULAIRE

Cette analyse a été réalisée à partir d'un modèle analogique numérique qui permet de construire une structure granulaire à deux ou trois dimensions et de l'analyser (réfs.1 et 3).

La granulométrie des matériaux étudiés formés de particules cylindriques ou sphériques, est quelconque.

Le programme numérique construit la structure granulaire par déversement dans le champ de la pesanteur (fig.1), il peut simuler le compactage du milieu. Le milieu granulaire est discontinu, il est donc hétérogène à l'échelle du grain.

Pour les matériaux étudiés on constate que les dimensions minimales du volume assurant l'homogénéité globale du milieu sont égales à environ 10 fois la dimension de la plus grosse particule (fig.2).

Les conditions aux limites imposées au milieu granulaire perturbent les mesures globales de compacité, qui, pour les matériaux étudiés, ne seront représentatives que pour des dimensions d'échantillon supérieures à environ 15 à 20 fois la dimension de la plus grosse particule du milieu (fig.3).

Le programme numérique permet une analyse statistique très fine de la structure, tant au niveau des particules que des assemblages élémentaires. Nous avons retenu dans cette étude les trois distributions statistiques qui nous ont paru les plus caractéristiques de la géométrie de la structure, à savoir :

la distribution du nombre de contacts par particule, la distribution de l'orientation des contacts, la distribution des indices des vides des arrangements élémentaires (fig.1).

Nous avons étudié ces distributions en fonction des seuls paramètres dont on dispose dans la pratique courante pour définir une structure granulaire, à savoir la granulométrie et la densité du matériau.

2.1. Analyse de la géométrie d'une structure granulaire en fonction de la granulométrie du matériau.

Nous avons analysé 3 matériaux de granulométrie respectivement serrée (matériau 1, de coefficient d'uniformité $C_u = 1,35$), peu étalée (matériau 2, $C_u = 2,5$) et étalée (matériau 3, $C_u = 5$). Les trois distributions analysées dépendent de façon très nette de la granulométrie du matériau (figs 4,5). On peut donc conclure que la granulométrie est un facteur fondamental de la géométrie d'une structure granulaire.

Représentativité du coefficient d'uniformité C_u .

L'étendue de la granulométrie d'un matériau est habituellement définie par le coefficient d'uniformité $C_u = D_{60} / D_{10}$. Pour que l'analyse soit plus probante, nous avons pris en compte deux matériaux supplémentaires (matériau 4 et matériau 5) ayant la même valeur de C_u que le matériau 2 ($C_u = 2,5$) mais dont les courbes granulométriques présentent des courbures différentes. On constate que le paramètre C_u n'est pas représentatif de la structure du matériau. En effet la corrélation de ce coefficient avec des paramètres de structure définis à partir des trois distributions mentionnées précédemment (indice des vides, coefficient d'anisotropie, pourcentage de particules ayant plus de 3 contacts) est mauvaise (fig. 6). Par contre il semble que des paramètres tels que D_{60}/D_{min} (D_{min} : diamètre minimal des particules) ou encore $|D_{60}/D_{10}|_n$ défini à partir de la courbe granulométrique en nombre soient beaucoup plus représentatifs (fig.6). La mauvaise représentativité de C_u tient au fait que ce paramètre ne prend pas en compte les particules les plus petites

Fig. 1 Structure granulaire bidimensionnelle

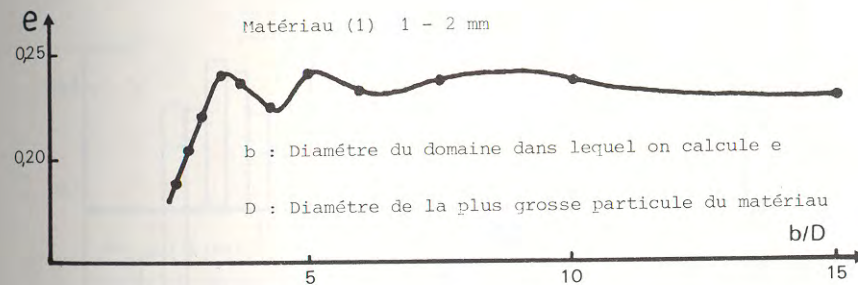
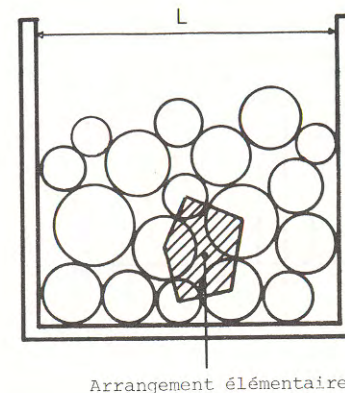


Fig. 2 Variation de l'indice des vides dans un cercle de diamètre b centré au centre de l'échantillon composé de 500 particules cylindriques simplement déversées.

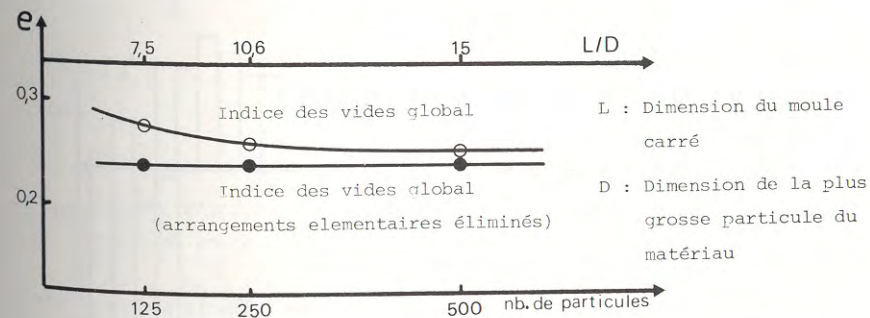


Fig. 3 Variation de l'indice des vides en fonction de la dimension de l'échantillon. Matériau bidimensionnel (1).

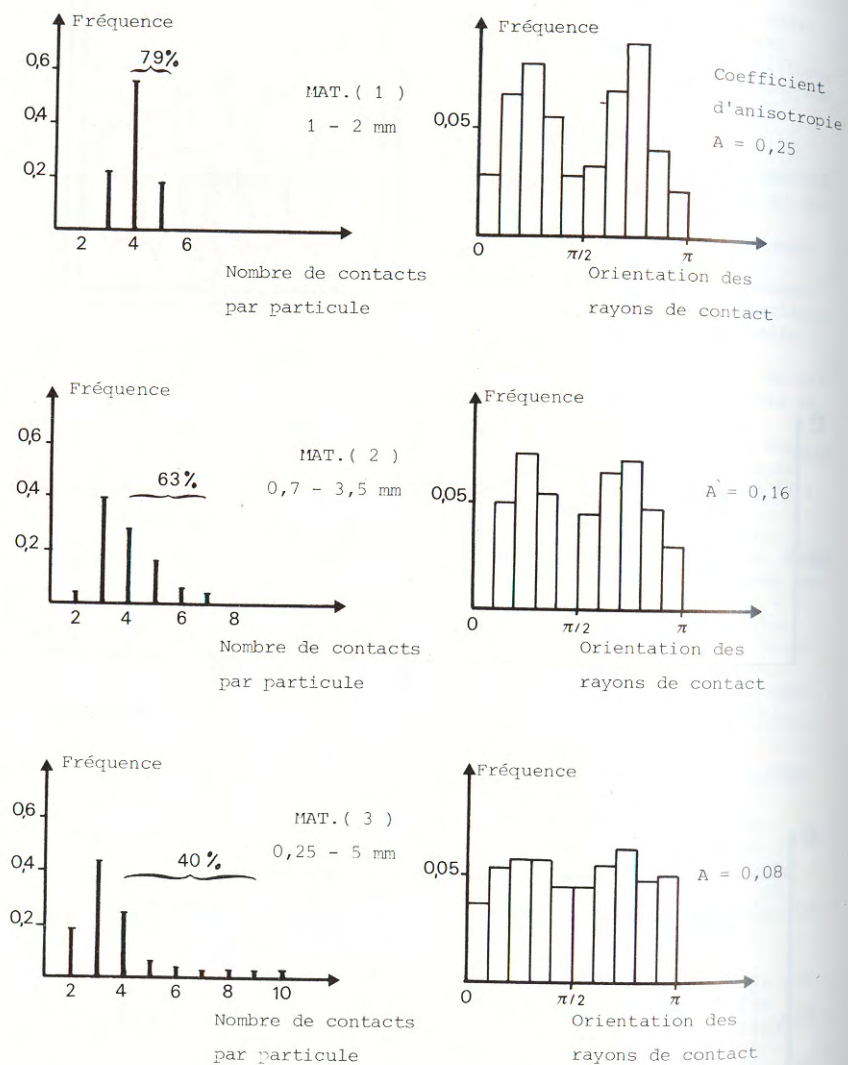


Fig. 4 Histogrammes de fréquence du nombre de contacts par particule et de leur orientation pour 3 matériaux composés de 500 particules cylindriques simplement déversées.

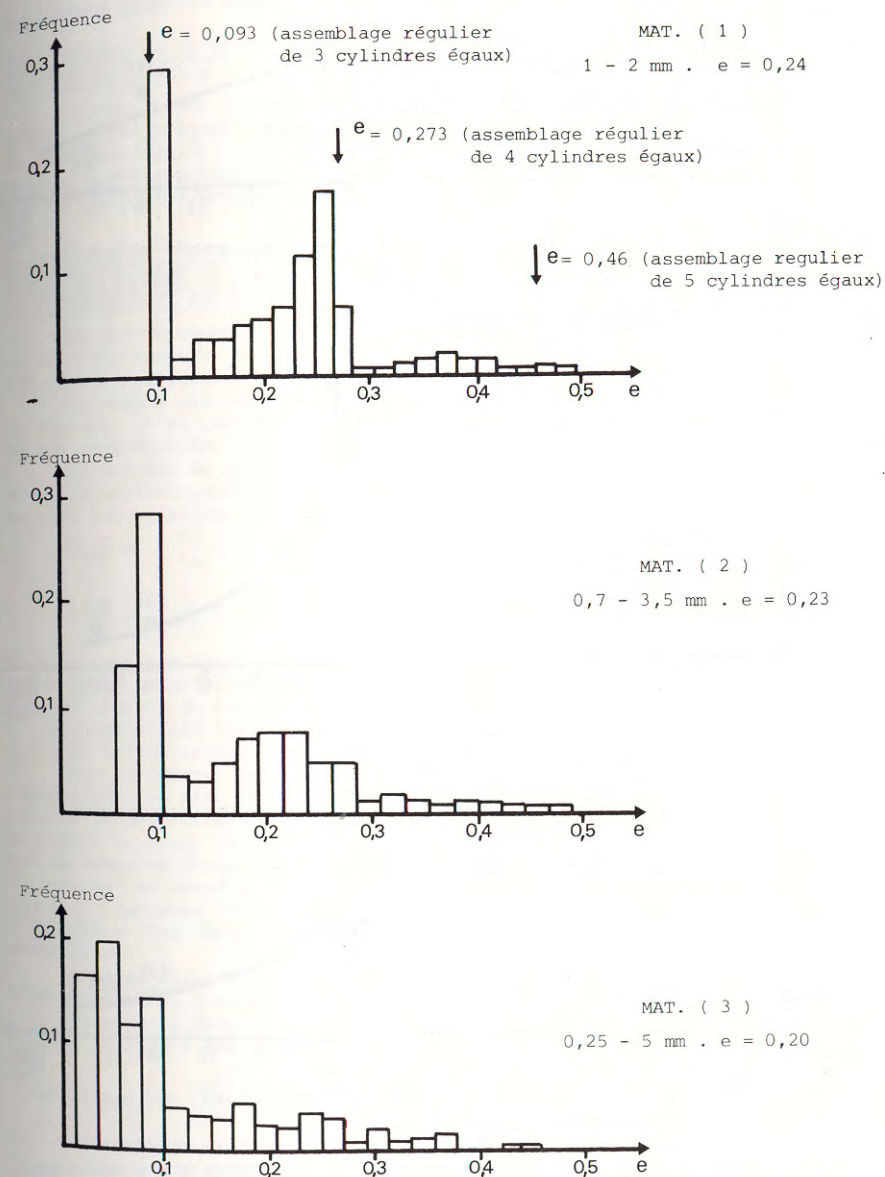


Fig. 5 Histogrammes de fréquence de l'indice des vides des arrangements élémentaires pour 3 matériaux composés de 500 particules cylindriques simplement déversées

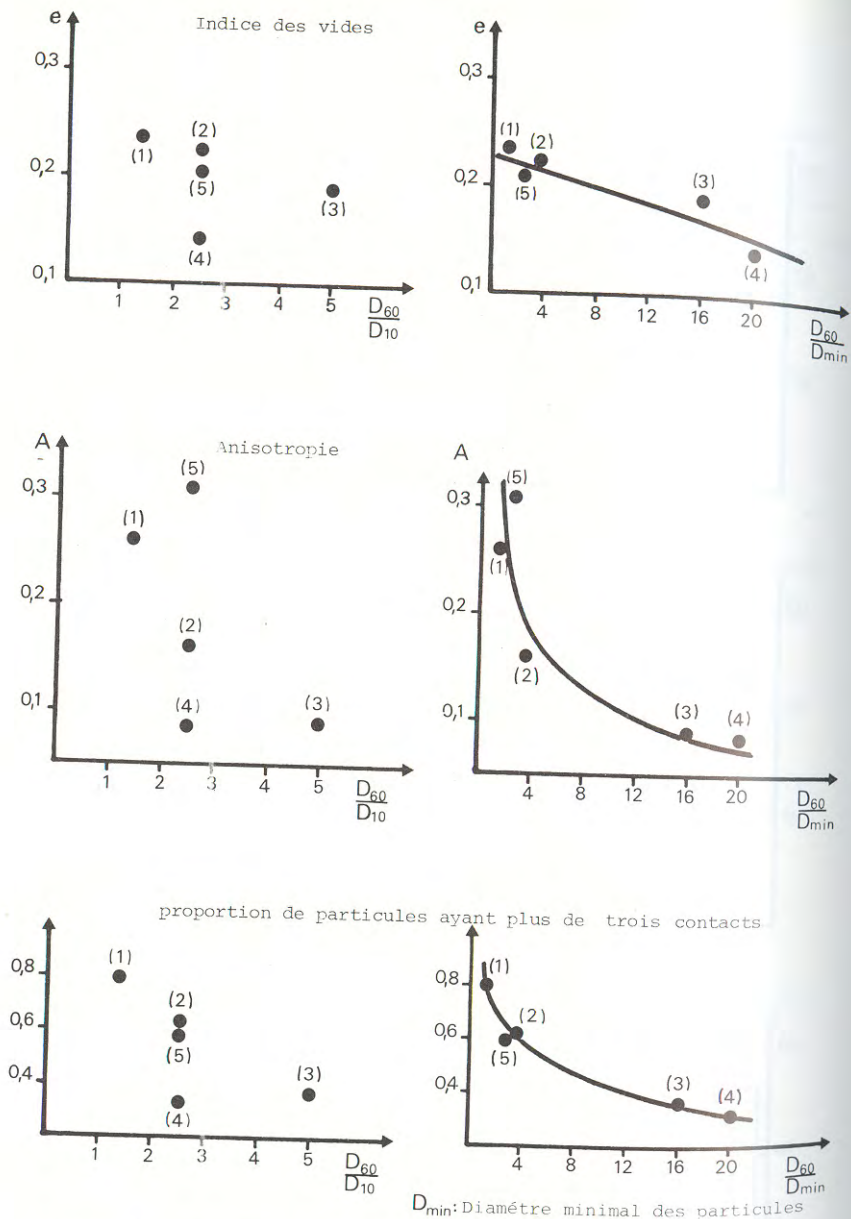


Fig. 6 Caractéristiques géométriques d'une structure granulaire en fonction de paramètres liés à la granulométrie du matériau*

qui peuvent jouer un rôle fondamental dans la structure granulaire.

2.2. Analyse de la géométrie d'une structure granulaire en fonction de la densité du matériau.

L'analyse des distributions caractérisant la structure géométrique du milieu semble montrer que cette dernière est assez peu sensible à la densité du matériau (fig.7). On peut cependant remarquer que les "queues" des distributions (correspondant aux assemblages les plus instables) sont très sensiblement modifiées par le compactage (fig.7).

3. APPROCHE DU COMPORTEMENT D'UN MILIEU GRANULAIRE BASEE SUR UN MODELE NUMERIQUE DEFINISSANT UN CHAMP DE FORCES DE CONTACT STATISTIQUEMENT STATIQUEMENT ET PLASTIQUEMENT ADMISSIBLES.

Le modèle numérique proposé, permet de simuler une sollicitation homogène en contrainte sur la structure granulaire définie numériquement, et analysée dans le paragraphe précédent.

Ce modèle est basé sur l'hypothèse que chacune des composantes des forces de contact est un processus stochastique spatial. La forme des distributions de ces processus est supposée normale.

La moyenne de ces distributions ne dépend que de la compacité du milieu et de la sollicitation imposée. Par exemple dans une étude bidimensionnelle, on aura les relations suivantes (fig.8) :

$$\overline{F_{i1\beta}} = \frac{\pi \sigma_1 S_1}{n_1} \cos\beta$$

$$\overline{F_{i2\beta}} = \frac{\pi \sigma_2 S_2}{n_2} \sin\beta$$

$\overline{F_{ij\beta}}$: moyenne des projections suivant l'axe j des forces de contact appliquées en un point d'orientation β .

n_j : nombre de particules interceptées par un plan de surface S_j , perpendiculaire à la contrainte principale σ_j .

La sollicitation est définie de façon incrémentale.

Les incréments des composantes des forces de contact sont déterminés de façon aléatoire dans les distributions définies précédemment. Pour chaque incrément de sollicitation le programme détermine les contacts glissants. Afin de rendre le champ des forces plastiquement admissible, le programme impose que la force en chaque contact glissant soit située sur le cône de frottement. L'incrément de force supplémentaire est reporté de façon aléatoire sur un autre contact. Plusieurs itérations sont effectuées pour chaque incrément, jusqu'à l'obtention d'un champ de forces globalement en équilibre et plastiquement admissible.

L'orientation du vecteur glissement est parfaitement définie à partir de l'orientation du contact glissant et de celle de la force de contact.

Nous avons proposé pour le module du vecteur glissement une relation empirique définie à une constante multiplicative près :

$$|\Delta U_i| = a (e_i + b) \frac{T_i}{N_i} \frac{|\vec{F}_i|}{F_M}$$

e_i : indice des vides dans le voisinage du point considéré.

T_i : composante tangentielle de la force de contact \vec{F}_i .

N_i : composante normale de la force de contact \vec{F}_i .

F_M : module de la force de contact moyenne dans le milieu.

La définition de chemins solides dans le milieu granulaire (fig.9), (réf.3) permet de calculer les déformations à partir des vecteurs glissements

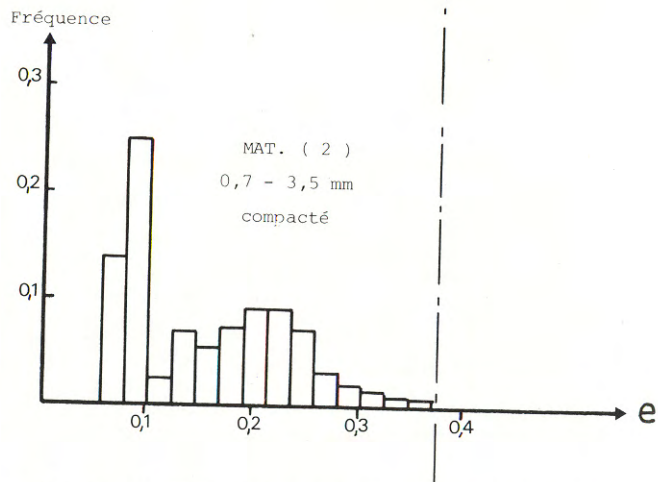
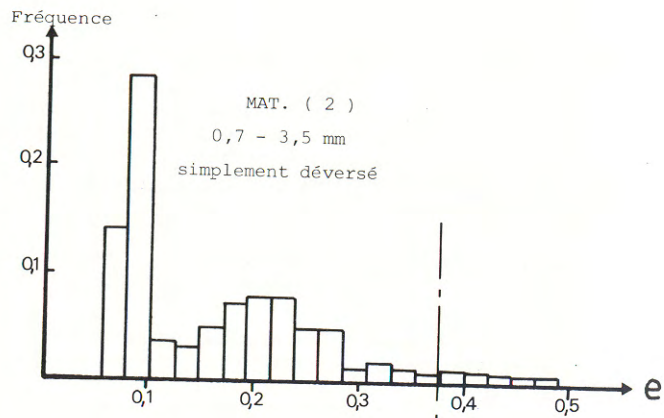


Fig. 7 Influence de la compacité sur la distribution de l'indice des vides des arrangements élémentaires dans un matériau formé de 500 particules cylindriques .

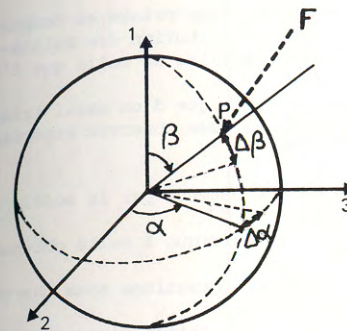


Fig. 8 Définition de l'orientation du contact P

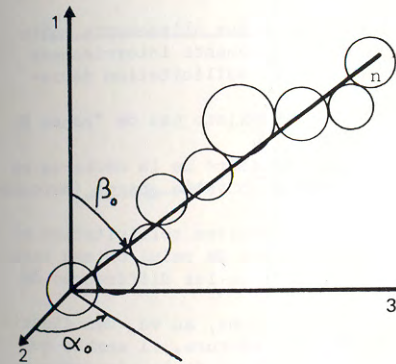


Fig. 9 Chemin solide d'orientation générale α_0, β_0 .

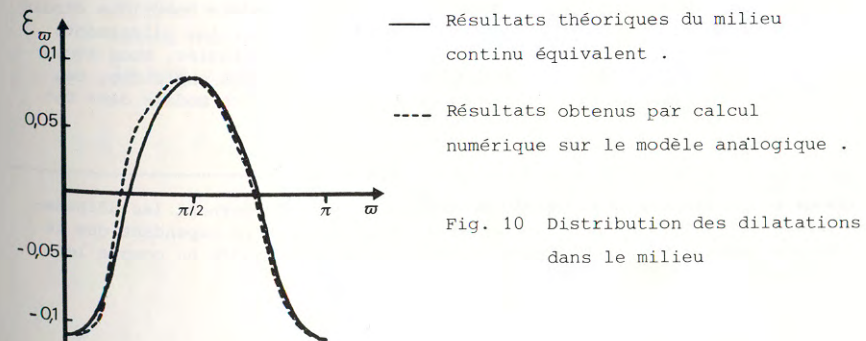


Fig. 10 Distribution des dilations dans le milieu

dans la structure .*

Pour analyser la validité des différentes hypothèses prises en compte dans ce modèle, nous avons représenté (fig.10) la distribution des dilata-tions dans le milieu granulaire. Celle-ci est très voisine de celle que l'on observerait dans un milieu continu.

Les résultats obtenus lors de la simulation numérique d'un essai triaxial de révolution présentent la même allure générale que ceux observés expérimentalement.

En particulier :

La courbe intrinsèque d'un matériau granulaire obtenue par le modèle ana-logique est une droite qui passe par l'origine.

L'allure des courbes $(\sigma_1 - \sigma_3) = f(\epsilon_1)$ est identique à celle obtenue expérimentalement (fig.11).

Lors d'une décharge on peut constater que les déformations sous charge sont essentiellement des déformations irréversibles.

Lors d'une deuxième charge on peut constater la création d'une zone es-sentiellement élastique (phénomène d'écrouissage).

Pour une sollicitation en extension suivant une première sollicitation en compression on observe un comportement différent de celui obtenu lors d'une première sollicitation en extension (écrouissage).

Les déformations irréversibles sont évidemment dues aux glissements entre les particules. On peut remarquer (fig.11) que ces glissements interviennent lors d'une sollicitation isotrope et dès le début de la sollicitation dévia-toire.

Pour une première sollicitation il semble qu'il n'existe pas de "zones de comportement élastique".

Il ne se produit aucun glissement sur la quasi totalité de la décharge, ce qui explique la création de la zone élastique pour une nouvelle charge (écrouis-sage).

Pour une sollicitation en extension suivant une première sollicitation en compression le nombre de contacts glissants est différent de celui obtenu lors d'une première sollicitation en extension, ce qui explique les différences de comportement.

Si l'on reste dans le domaine des petites déformations, au vu des distri-butions des différentes variables géométriques de la structure, il semble que le phénomène d'écrouissage ne soit pas du à la modification de la géométrie de la structure mais plutôt à la modification de l'orientation des forces de con-tact. (fig.12). Il semble donc qu'une partie importante de l'information cons-tituant la mémoire du matériau soit contenue dans ce paramètre.

Les déformations calculées par ce modèle analogique montrent toujours un comportement contractant du matériau quelle que soit sa densité, ce qui n'est pas conforme à la réalité. Ceci tient au fait que le modèle numérique étudié ne prend pas en compte les conditions supplémentaires sur les glissements liées à la compatibilité des déplacements entre les particules. Nous avons proposé un modèle qui tente de prendre en compte, de façon empirique, ces conditions cinématiques (réf.3) ; nous n'exposerons pas ce modèle dans cet article.

* Nous ne présentons ici que les résultats obtenus concernant les déforma-tions dues aux glissements entre particules, on notera cependant que le modèle analogique permet aussi de calculer et de prendre en compte les déformations des particules elles-mêmes.

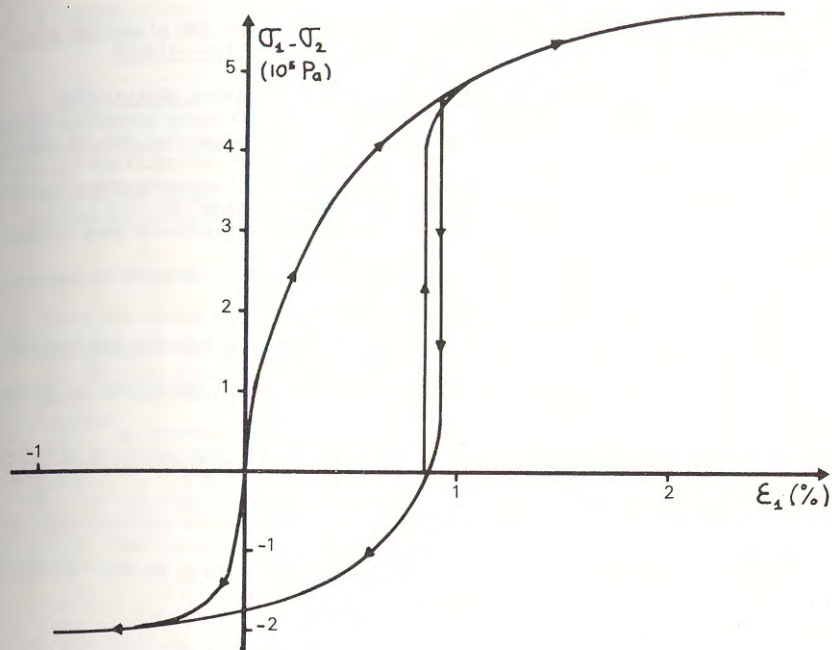
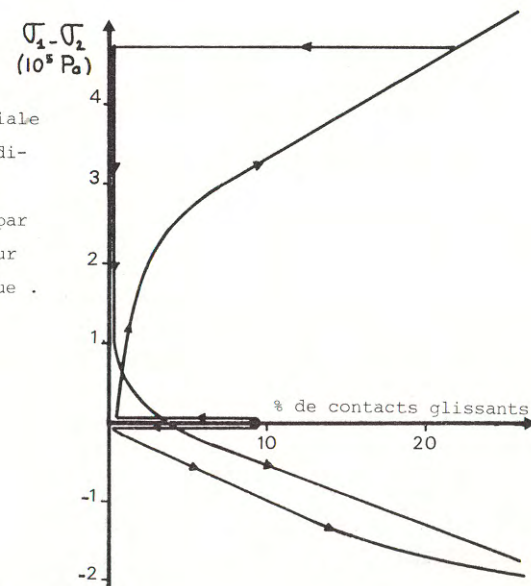


Fig. 11 Sollicitation biaxiale sur le matériau bidi-mensionnel (1) . Résultats obtenus par calcul numérique sur le modèle analogique .



4. APPROCHE DU COMPORTEMENT D'UN MILIEU GRANULAIRE BASEE SUR L'ANALYSE D'UN CHAMP DE DEPLACEMENTS STATISTIQUEMENT CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLES

4.1. Champs de déplacements statistiquement cinématiquement admissibles

Soit un échantillon cylindrique d'un matériau granulaire isotrope, globalement homogène, formé de particules sphériques, rigides soumis sur sa surface latérale à une contrainte σ_3 constante. On impose à cet échantillon un incrément de déformation verticale homogène noté \dot{b} . Nous supposons que l'incrément de déformation radiale est homogène, nous le noterons \dot{a} .

La cinématique locale dans un milieu granulaire est définie pour chaque couple de particules en contact par :

- . Un déplacement relatif des centres, les particules restant en contact, repéré par $\Delta\beta_i$ et $\Delta\alpha_i$ (fig.8).
- . Une rotation propre de chaque particule notée $\Delta\omega_i$.
- . Un écartement des particules suivant la direction reliant les centres noté ΔC_i .

Par souci de simplification nous nous plaçons dans l'hypothèse de petits déplacements au niveau des particules. *

Soit un ensemble de chemins solides d'orientation générale α_0 , β_0 , on démontre (réf. 5) les relations suivantes qui font le lien entre la cinématique globale (\dot{a} , \dot{b}) et la cinématique locale ($\Delta\beta$, ΔC) :

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}-\beta_0}^{\frac{\pi}{2}+\beta_0} \cos\beta \sin\beta \cos\alpha_1 \Delta\beta \, d\beta + \int_{\frac{\pi}{2}-\beta_0}^{\frac{\pi}{2}+\beta_0} \frac{1}{4 Rm} \sin^2\beta \cos\alpha_1 \Delta C \, d\beta = \dot{a} \sin\beta_0 \\ & \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\beta_0} \left(\sin\beta \Delta\beta - \frac{\Delta C}{4 Rm} \cos\beta \right) \sin\beta \, d\beta + \int_{\frac{\pi}{2}-\beta_0}^{\frac{\pi}{2}+\beta_0} \left(\frac{\pi + 2\alpha_1}{2} \right) (\sin\beta \Delta\beta - \frac{\Delta C}{4 Rm} \cos\beta) \sin\beta \, d\beta = \dot{b} \cos\beta_0 \end{aligned} \right.$$

$\Delta C(\beta)$: écartement moyen pour un contact d'orientation β .

$\Delta\beta(\beta)$: variation moyenne de β pour un contact d'orientation β .

α_1 est défini par $\sin\alpha_1 = \frac{1}{\text{tg}\beta_0 \text{tg}\beta}$

Les champs de déplacements statistiquement cinématiquement admissibles sont les champs définis à partir des fonctions $\Delta\beta$ et ΔC satisfaisant aux relations précédentes pour toutes valeurs de β_0 ($0 < \beta_0 < \pi/2$).

On notera que \dot{b} est une condition aux limites imposée, alors que \dot{a} est un paramètre qui dépend du comportement du matériau et qui est, en partie, définie par les relations (1).

Pour $\beta_0 = 0$ et $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ les relations (1) deviennent :

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & \pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin\beta \Delta\beta}{2} - \frac{\Delta C}{4 Rm} \cos\beta \right) \sin\beta \, d\beta = \dot{b} \\ & \int_0^{\pi/2} \left(\cos\beta \Delta\beta + \frac{\Delta C}{2 Rm} \sin\beta \right) \sin\beta \, d\beta = \dot{a} \end{aligned} \right.$$

* Cette hypothèse est suffisante pour l'analyse présentée ici, on notera cependant que l'analyse des déformations dans certaines directions particulières nécessite l'analyse en grande déformation (réf. 4)

La variation de volume de l'échantillon est égale à :

$$\frac{\Delta V}{V} = 2 \dot{a} - \dot{b}$$

On peut remarquer dans les relations (2) que les décollements ΔC interviennent de façon négative sur \dot{b} et positive sur \dot{a} . L'apparition de décollements entre particules entraîne une variation de volume positive du matériau.

4.2. Théorème des travaux virtuels dans un milieu granulaire

Dans un milieu granulaire le théorème des travaux virtuels s'exprime par (réf.5) :

$$\sum_k \vec{F}_k \cdot \vec{d}_k^* = \dot{W}_{ext}^*$$

\vec{F}_k : force au contact k entre les particules i et j.

\vec{d}_k^* : déplacement virtuel relatif du point de contact situé sur la particule i par rapport à celui situé sur la particule j.

\dot{W}_{ext}^* : travail des efforts extérieurs dans le champ des déplacements virtuels imposés.

4.3. Conditions variationnelles sur les champs de déplacements cinématiquement admissibles

Dans cette analyse les particules sont supposées rigides et le champ des composantes normales des forces de contact supposé connu.

Soit la fonctionnelle définie, pour un champ de déplacements cinématiquement admissibles par :

$$\tilde{\mathcal{B}} = \sum_k \vec{F}_k \cdot \vec{d}_k^* - \dot{W}_f^d$$

Les déplacements relatifs cinématiquement admissibles \vec{d}_k^* ont pour composantes :

\tilde{e}_k^* : composante normale cinématiquement admissible (écartement)

\tilde{g}_k^* : composante tangentielle cinématiquement admissible.

Les forces de contact \vec{F}_k sont définies à partir de leurs composantes :

$\tilde{N}_k = \vec{N}_k$: composante normale solution.

\tilde{T}_k : composante tangentielle définie par :

$$\text{si } \tilde{g}_k^* = 0 \quad |\tilde{T}_k| < \mu |\tilde{N}_k|$$

$$\text{si } \tilde{g}_k^* \neq 0 \quad \tilde{T}_k = \mu \frac{|\tilde{N}_k|}{|\tilde{g}_k^*|} \tilde{g}_k^*$$

μ est le coefficient de frottement entre 2 particules.

\tilde{W}_f^d : travail des forces données dans le champ \vec{d}_k^*

$$\tilde{\mathcal{B}} - \mathcal{B} = \sum_k \vec{F}_k \cdot \vec{d}_k^* - \sum_k \vec{F}_k \cdot \vec{d}_k - (\tilde{W}_f^d - W_f^d)$$

Soit : $W_{ext} = W_f^d + W_f^i$

W_f^i : travail des forces inconnues sur les limites où les conditions sont connues en déplacement

de même :

$$\tilde{W}_{\text{ext}} = \tilde{W}_f^d + \tilde{W}_f^i$$

$\tilde{W}_f^i = \tilde{W}_f^i$ car c'est le travail des forces normales connues dans un déplacement connu identique pour le champ cinématiquement admissible et le champ solution. On peut donc écrire :

$$(\tilde{W}_f^d - W_f^d) = \tilde{W}_{\text{ext}} - W_{\text{ext}}$$

d'après le théorème des travaux virtuels :

$$\tilde{W}_{\text{ext}} - W_{\text{ext}} = \sum_k \tilde{F}_k \cdot \tilde{d}_k - \sum_k F_k \cdot d_k$$

on pourra donc écrire :

$$\tilde{\mathcal{B}} - \mathcal{B} = \sum_k \tilde{F}_k \cdot \tilde{d}_k - \sum_k F_k \cdot d_k - \sum_k \tilde{F}_k \cdot d_k + \sum_k F_k \cdot \tilde{d}_k$$

$$\tilde{\mathcal{B}} - \mathcal{B} = \sum_k \tilde{F}_k \cdot \tilde{d}_k - \sum_k F_k \cdot \tilde{d}_k$$

$$\tilde{\mathcal{B}} - \mathcal{B} = \sum_k \tilde{N}_k \cdot \tilde{e}_k + \sum_k \tilde{T}_k \cdot \tilde{g}_k - \sum_k N_k \cdot e_k - \sum_k T_k \cdot g_k = \sum_k \tilde{g}_k (\tilde{T}_k - T_k) \geq 0$$

(fig.13)

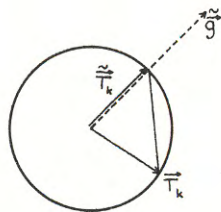


Fig. 13

donc : $\tilde{\mathcal{B}} - \mathcal{B} \geq 0$

donc le champ des déplacements solutions minimise la fonctionnelle :

$$\tilde{\mathcal{B}} = \sum_k \tilde{F}_k \cdot \tilde{d}_k - \tilde{W}_f^d$$

le champ des forces normales étant connu

Soit la fonctionnelle $\tilde{\mathcal{B}}_1$:

$$\tilde{\mathcal{B}}_1 = \sum_k \tilde{T}_k \cdot \tilde{g}_k - \tilde{W}_f^d$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = \sum_k \tilde{N}_k \cdot \tilde{e}_k + \sum_k \tilde{T}_k \cdot \tilde{g}_k - \tilde{W}_f^d$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{B}}_1 + \sum_k \tilde{N}_k \cdot \tilde{e}_k$$

$$\tilde{\mathcal{B}} - \mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}_1 - \mathcal{B}_1 + \sum_k \tilde{N}_k \cdot \tilde{e}_k - \sum_k N_k \cdot e_k$$

$\sum_k \tilde{N}_k \cdot e_k = 0$ car si il y a écartement, la force de contact s'annule.

$\sum_k \tilde{N}_k \cdot e_k \leq 0$ car \tilde{N}_k et e_k sont nécessairement d'orientation inverse.

$$\text{donc } \tilde{\mathcal{B}}_1 - \mathcal{B}_1 = \tilde{\mathcal{B}} - \mathcal{B} - \sum_k \tilde{N}_k \cdot e_k \geq 0$$

Donc le champ solution minimise aussi la fonctionnelle :

$$\tilde{\mathcal{B}}_1 = \sum_k \tilde{T}_k \cdot \tilde{g}_k - \tilde{W}_f^d = \sum_k \mu |\tilde{N}_k| |\tilde{g}_k| - \tilde{W}_f^d$$

4.4. Analyse d'une sollicitation triaxiale de révolution en compression et extension (déformation verticale contrôlée)

Les rotations des particules sont supposées faibles.

Pour les champs de déplacements statistiquement cinématiquement admissibles que nous avons définis précédemment la fonctionnelle $\tilde{\mathcal{B}}_1$ s'écrit dans un milieu isotrope :

$$\tilde{\mathcal{B}}_1 = n R_m \mu \int_0^{\pi/2} N(\beta) |\tilde{\Delta}\beta(\beta)| \sin\beta \, d\beta - \tilde{W}_f^d$$

$$-\tilde{W}_f^d = \dot{a} r \sigma_3 S$$

n : nombre de particules dans l'échantillon

r : rayon de l'échantillon cylindrique

S : surface latérale de l'échantillon cylindrique

Le champ solution est le champ $\Delta\beta, \Delta C$ qui minimise la fonctionnelle $\tilde{\mathcal{B}}_1$, compte tenu de la condition imposée par \dot{b} :

$$\tilde{\mathcal{B}}_1 = n R_m \mu \int_0^{\pi/2} N(\beta) |\tilde{\Delta}\beta(\beta)| \sin\beta \, d\beta +$$

$$+ r \sigma_3 S \int_0^{\pi/2} (\cos\beta \tilde{\Delta}\beta(\beta) + \frac{\sin\beta}{2 R_m} \tilde{\Delta}C(\beta)) \sin\beta \, d\beta$$

$$\dot{b} = \pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin\beta}{2} \tilde{\Delta}\beta - \frac{\cos\beta}{4 R_m} \tilde{\Delta}C \right) \sin\beta \, d\beta$$

4.4.1. Compression contrôlée en déformation verticale

$$\dot{b} \geq 0 \quad \dot{a} \geq 0 \quad \tilde{\Delta}\beta \geq 0 \quad \tilde{\Delta}C \geq 0$$

Soient les fonctionnelles $\tilde{\mathcal{B}}_1$ et $\tilde{\mathcal{B}}_1'$ définies respectivement à partir des fonctions $\tilde{\Delta}\beta, \tilde{\Delta}C$ et $\tilde{\Delta}\beta', \tilde{\Delta}C'$.

$$\text{avec } \begin{cases} \tilde{\Delta}C' = \lambda \tilde{\Delta}C \\ \tilde{\Delta}\beta' = \gamma \tilde{\Delta}\beta \\ \lambda < 1 \end{cases} \quad \forall \beta$$

$$\dot{b} = \pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin\beta}{2} \tilde{\Delta}\beta - \frac{\cos\beta}{4 R_m} \tilde{\Delta}C \right) \sin\beta \, d\beta$$

$$= \pi \gamma \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\beta}{2} \tilde{\Delta}\beta \sin\beta \, d\beta - \pi \lambda \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\beta}{4 R_m} \tilde{\Delta}C \sin\beta \, d\beta$$

on aura donc :

$$(1 - \gamma) \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \beta}{2} \tilde{\Delta \beta} \sin \beta \, d\beta = (1 - \lambda) \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \beta}{4 R_m} \tilde{\Delta C} \sin \beta \, d\beta$$

Les deux intégrales sont positives, $(1 - \lambda)$ est positif par définition donc : $\gamma < 1$.

Ecrivons la fonctionnelle $\tilde{\mathcal{B}}_1$ sous la forme :

$$\tilde{\mathcal{B}}_1 = A + B$$

$$A = n R_m \mu \int_0^{\pi/2} N(\beta) |\tilde{\Delta \beta}(\beta)| \sin \beta \, d\beta + r \sigma_3 S \int_0^{\pi/2} \cos \beta \tilde{\Delta \beta}(\beta) \sin \beta \, d\beta$$

$$B = r \sigma_3 S \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \beta}{2 R_m} \tilde{\Delta C}(\beta) \sin \beta \, d\beta$$

on aura de même :

$$\tilde{\mathcal{B}}_1 = \lambda A + \gamma B$$

$$\text{et donc } \tilde{\mathcal{B}}_1' - \tilde{\mathcal{B}}_1 = A(\lambda - 1) + B(\gamma - 1)$$

A et B sont toujours positifs, donc $\tilde{\mathcal{B}}_1' - \tilde{\mathcal{B}}_1 < 0$

Quelle que soit la fonction $\tilde{\Delta C} > 0$ on peut trouver une fonction $\tilde{\Delta C}' = \lambda \tilde{\Delta C}$ ($\lambda < 1$) telle que $\tilde{\mathcal{B}}_1' < \tilde{\mathcal{B}}_1$. La fonction $\tilde{\Delta C}$ qui rend minimum $\tilde{\mathcal{B}}_1$ est donc une fonction $\tilde{\Delta C}(\beta) = 0 \quad \forall \beta$. Plaçons nous dans l'hypothèse $\tilde{\Delta C} = 0$. Considérons un champ $\tilde{\Delta \beta}$ défini par :

$$\tilde{\Delta \beta} = 0 \quad \text{pour} \quad \beta \neq \pi/2$$

$$\tilde{\Delta \beta} = \tilde{\Delta \beta}(\frac{\pi}{2}) \neq 0 \quad \text{pour} \quad (\frac{\pi}{2} - d\beta) \leq \beta \leq \pi/2$$

Soit $\tilde{\Delta \beta}'$ un autre champ quelconque.

$$\dot{b} = \pi \frac{\tilde{\Delta \beta}(\pi/2)}{2} d\beta = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \beta}{2} \tilde{\Delta \beta}'(\beta) \, d\beta$$

$$\text{donc : } \int_0^{\pi/2} \sin \beta \tilde{\Delta \beta}'(\beta) \, d\beta > \tilde{\Delta \beta}(\pi/2) d\beta \quad (4)$$

Les fonctionnelles définies à partir des champs $\tilde{\Delta \beta}$ et $\tilde{\Delta \beta}'$ s'écrivent :

$$\tilde{\mathcal{B}}_1 = n R_m \mu N(\pi/2) |\tilde{\Delta \beta}(\pi/2)| \, d\beta$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_1' = n R_m \mu \int_0^{\pi/2} N(\beta) |\tilde{\Delta \beta}'(\beta)| \sin \beta \, d\beta + 2 r \sigma_3 S \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \beta}{2} \tilde{\Delta \beta}'(\beta) \sin \beta \, d\beta$$

On sait (réf.3) que $N(\frac{\pi}{2}) \leq N(\beta) \quad \forall \beta$

d'après la relation (4) le premier terme de $\tilde{\mathcal{B}}_1'$ est supérieur à $\tilde{\mathcal{B}}_1$, le deuxième terme de $\tilde{\mathcal{B}}_1'$ est positif donc :

$$\tilde{\mathcal{B}}_1' > \tilde{\mathcal{B}}_1$$

Le minimum de la fonctionnelle $\tilde{\mathcal{B}}_1$ correspond à des glissements orientés tous de $\pi/2$ par rapport à la verticale, ce qui correspond à $\dot{a} = 0$. Au début d'une sollicitation en compression, on peut donc s'attendre à avoir $\Delta C(\beta)$ proche de 0 ainsi que \dot{a} et donc :

$$\frac{\Delta V}{V} = (2 \dot{a} - \dot{b}) < 0$$

Le pseudo coefficient de Poisson présente donc une tangente à l'origine de pente nulle, et les variations de volume en début de sollicitation sont négatives, ce qui correspond bien à la réalité expérimentale (fig.14).

Pour de grandes déformations les compatibilités cinématiques locales entraînent nécessairement l'apparition de décollements d'autant plus importants que le matériau est dense.

ΔC intervient de façon négative sur \dot{b} et positive sur \dot{a} , donc l'apparition de décollements importants entre particules entraînera une variation de volume positive ($\Delta V/V = 2 \dot{a} - \dot{b}$), d'où l'apparition du phénomène de dilatance en grande déformation pour les matériaux denses.

4.4.2. Extension contrôlée en déformation verticale

$$\dot{b} \leq 0 \quad \dot{a} \leq 0 \quad \tilde{\Delta \beta} \leq 0 \quad \tilde{\Delta C} \geq 0$$

Le même type d'analyse que pour la compression conduit cette fois-ci à $\gamma > 1$ car $\tilde{\Delta C} \geq 0$ et $\tilde{\Delta \beta} \leq 0$, on obtient donc finalement :

$$\tilde{\mathcal{B}}_1' - \tilde{\mathcal{B}}_1 = A(\lambda - 1) + B(\gamma - 1)$$

avec $B > 0$, $(\gamma - 1) > 0$, $(\lambda - 1) < 0$

A est formé de 2 termes, l'un positif, l'autre négatif, son signe ne peut être défini de façon générale.

Il est donc impossible de conclure de façon précise, on peut cependant considérer que la minimisation de $\tilde{\mathcal{B}}_1$ conduit, dans ce cas de sollicitation, à une fonction $\tilde{\Delta C}(\beta) \neq 0$. (En particulier si $A < 0$ $\tilde{\mathcal{B}}_1' - \tilde{\mathcal{B}}_1 > 0$, ce qui conduit à une fonction $\tilde{\Delta C}(\beta)$ solution, prenant des valeurs très grandes, quel que soit β).

Au début d'une sollicitation en extension, on peut donc s'attendre à avoir $\Delta C(\beta)$ non nul ce qui peut conduire, dans certains cas, à l'existence d'une dilatance dès le début de la sollicitation.

Cette analyse montre l'existence d'une discontinuité du comportement du matériau au voisinage de l'état isotrope lors d'un essai classique de compression-extension en déformation contrôlée. Ces conclusions sont en accord avec les résultats expérimentaux, par exemple les essais de J.C. Robinet (réf.6) que nous avons repris sur la figure 14.

5. CONCLUSIONS

Les deux approches du comportement des milieux granulaires basées sur une analyse locale que nous avons présentées restent partielles, nous sommes conscients de leurs limites. Cependant chacune de ces analyses nous a permis d'éclairer l'aspect local de certains phénomènes connus au niveau global tels que l'écrouissage, l'anisotropie, la dilatance. Nous espérons ainsi pouvoir contribuer à une meilleure approche de ces phénomènes que les chercheurs tentent de modéliser dans les lois de comportement utilisables dans de grands codes numériques (M.E.F.).

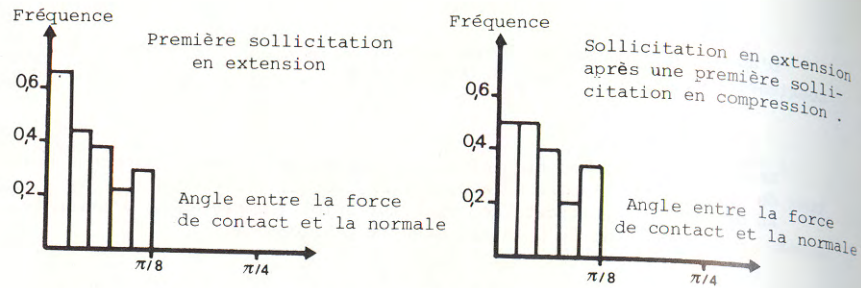
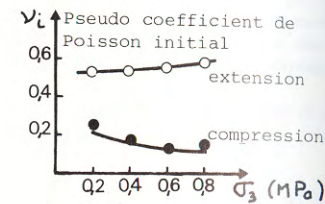
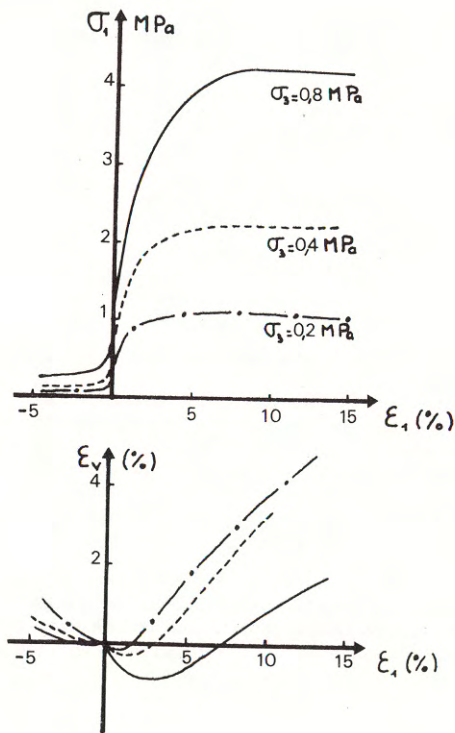


Fig. 12 Effet de l'écroûissage sur l'histogramme de fréquence de l'orientation des forces de contact. Résultats obtenus par calcul numérique sur le modèle analogique. Mat. (1) déversé

Remerciements : Je remercie François Sidoroff pour l'aide qu'il a bien voulu m'apporter dans cette étude.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) AUVINET G. (1978) : "Structure des milieux pulvérulents - IXe Congr. int. de méca. des sols et fond." Tokyo - vol.1 - p.23 à 26.
- (2) BIAREZ J. (1962) : " Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des sols et des matériaux pulvérulents" - Thèse de doctorat ès Sciences - Grenoble.
- (3) CAMBOU B. (1979) : "Approche du comportement d'un sol considéré comme un milieu non continu". - Thèse de doctorat ès Sciences - Lyon
- (4) CAMBOU B. (1980) : "Remarques à propos de la cinématique dans un milieu granulaire". - Colloque de Rhéologie E.N.T.P.E. - Lyon
- (5) CAMBOU B. (1980) : "Analyse de la cinématique d'un milieu granulaire soumis à une sollicitation biaxiale homogène". - Journées universitaires " Bilan et perspectives du génie civil ". INSA Lyon.
- (6) ROBINET J.C. (1980) : "Loi rhéologique en écriture incrémentale. Application aux sols et au béton". - Thèse de doctorat ès sciences - Grenoble.
- (7) ZARKA J. (1978) : "Formulations variationnelles des problèmes de mécanique des solides ". Cours E.N.S.T.A. Paris.



D'après J.C. Robinet (ref. 6)

Fig. 14 Essais triaxiaux de révolution C.D. sur sable d'Hostun . e = 0,56

MODELE RHEOLOGIQUE D'UN SABLE SOU MIS A DIVERS TRAJETS DE CHARGE A RHEOLOGICAL MODEL FOR SAND UNDER VARIOUS LOAD PATHS

M.P. LUONG et B. LORET

Laboratoire de Mécanique des Solides - Ecole Polytechnique - Palaiseau - France

RESUME

Un modèle de comportement des matériaux pulvérulents est présenté dans le cadre de la théorie de l'élastoplasticité. L'écrouissage est traduit à l'aide de deux mécanismes fondamentaux de déformation. Les relations non-linéaires en vitesse de déformation-vitesse de contrainte sont ainsi valablement transformées en relations multilinéaires. Cette méthode permet de traduire à l'aide du modèle proposé l'influence du trajet de contrainte suivi par le matériau. Les prédictions du modèle sont utilisables dans des conditions drainées et non drainées.

ABSTRACT

A constitutive law for cohesionless materials is proposed within the framework of the elastic-plastic theory. Hardening is based on two fundamental deformation mechanisms. Non-linear relationships between strain increment and stress increment are then written by multilinear relations. This method takes into account the influence of the stress path followed by material. Model predictions are available under drained and undrained conditions.

1. INTRODUCTION

Le comportement des milieux pulvérulents est complexe et ne peut être modélisé simplement par une loi élastique même non-linéaire ou par une loi de plasticité parfaite. Deux approches se sont développées depuis une vingtaine d'années dans la formulation de lois susceptibles de traduire ce comportement à partir d'expériences réalisées en laboratoire, qui consistent principalement en essais à l'appareil triaxial cylindrique ou cubique.

Les premières recherches à caractère fondamental sont dues à l'Ecole de Cambridge qui, à partir du concept de l'état critique, a montré que le comportement des sols pouvait dans certaines conditions être modélisé à l'aide d'une loi élastoplastique.

D'autres formulations ont été développées de façon indépendante pour traduire le comportement dans des conditions de chargement générales. Ce sont cependant des lois phénoménologiques qui décrivent la réalité expérimentale à l'aide d'un certain nombre de paramètres dont la signification physique n'est pas toujours évidente.

Dans cette étude le matériau a été considéré comme un corps élastoplastique ; cette hypothèse permet de rendre compte de manière plus physique des caractéristiques significatives du comportement du sol. Cependant, il a fallu modifier le schéma élastoplastique habituel et considérer deux surfaces de charge de façon à prendre en considération l'influence prépondérante du trajet de contrainte.

2. ANALYSE AU NIVEAU DES GRAINS

On examine les mécanismes de déformation qui se produisent dans un assemblage composé de grains en contact les uns avec les autres. Mais le but de cette étude n'est pas d'établir une loi "microscopique" en vue d'en déduire une loi "macroscopique", c'est-à-dire de donner la réponse d'un milieu granulaire à une sollicitation quelconque. Il s'agit plutôt de donner une interprétation physique aux formulations phénoménologiques proposées dans les paragraphes suivants.

2.1 Comportement sous faible rapport de contrainte

Il est admis et vérifié par l'expérience qu'un sol soumis à un faible rapport de contrainte $\eta = q/p$ a tendance à se contracter quelle que soit sa densité initiale (p étant la contrainte moyenne et q le déviateur de contrainte à l'appareil triaxial axisymétrique). Luong (1980) attribue ce phénomène à un enchevêtrement de la structure granulaire. Calladine (1971) explique ce comportement par analogie avec les surfaces métalliques, étudiées par Tabor (1959). Bien que les échelles soient différentes, ces résultats permettent d'interpréter les actions intergranulaires dans les sols pulvérulents. Pour deux surfaces adjacentes, les points de contact entre elles sont peu nombreux et les contraintes développées peuvent y être extrêmement élevées, voire suffisamment fortes pour que les grains se rompent. Néanmoins, cet aspect ne sera pas considéré dans cette étude.

Considérons une facette fictive dans un volume de sable sollicité soumise globalement à un effort normal N et à un effort tangentiel T . Soit A_λ la surface de contact initiale équivalente en projection sur la facette.

Si pour une valeur constante de N , la force tangentielle T est augmentée, la surface A croît avec le nombre de contacts et la contrainte normale décroît en conséquence. Tabor a proposé une loi décrivant l'évolution de la surface A à l'aide du critère de von Mises en fonction des contraintes normale σ et de cisaillement τ :

$$\left(\frac{A}{A_\lambda}\right)^2 = 1 + \eta \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^2,$$

η étant une constante positive.

L'effort normal étant constant ($N = \sigma A = \sigma_\lambda A_\lambda$) cette formule devient :

$$\sigma_\lambda^2 = \sigma^2 + \eta \tau^2.$$

La courbe du plan (σ, τ) à laquelle appartient le point représentatif de la contrainte est donc une ellipse d'équation :

$$\sigma_\lambda^2 (\sigma, \tau, \sigma_\lambda) = \sigma^2 + \eta \tau^2 - \sigma_\lambda^2 = 0.$$

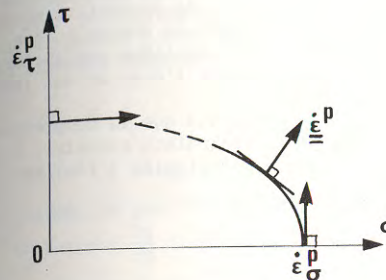


Figure 1 :
Courbe d'évolution des contraintes dans le plan (σ, τ) .

si l'on adopte la règle de normalité sur cette ellipse, on constate que le rapport \tilde{d} de la vitesse de déformation plastique $\dot{\epsilon}_\tau^p$ sur la vitesse de déformation plastique $\dot{\epsilon}_\sigma^p$ reste toujours positif, ce qui signifie dans le plan (p, q) que la variation de volume plastique est toujours positive, c'est-à-dire que le matériau est contractant :

$$\tilde{d} = \frac{1}{\eta} \frac{\sigma}{\tau} > 0$$

Ainsi, toute incursion dans le plan (σ, τ) à partir de l'axe $\tau = 0$ serait accompagnée d'une vitesse de déformation plastique $\dot{\epsilon}_\tau^p$ nulle ; de façon identique le modèle de l'Ecole de Cambridge, "Modified Cam-Clay", indique que la vitesse de déformation de cisaillement est nulle lorsque le point de contrainte actuel est situé sur l'axe hydrostatique. Cependant, il est clair qu'une règle d'écoulement telle que celle donnée par la formule précédente et interprétée dans le plan (p, q) ne peut représenter le comportement réel d'un matériau granulaire, car dans le cas des sables denses la rupture est généralement accompagnée d'une dilatance.

2.2 Comportement sous rapport de contrainte élevé

Le raisonnement précédent suppose une sollicitation T constante et faible. Dans le cas contraire, des cisaillements microscopiques τ importants se manifestent aux points de contact entraînant un "désenchevêtrement" des deux surfaces. Le rapport τ/σ correspondant à un tel état de sollicitation est important et le désenchevêtrement se traduit par une dilatance. Le comportement du sable devient alors frottant et les déformations se produisent principalement par glissement, comme le décrivent les théories de la dilatance de Rowe ou de l'Ecole de Cambridge.

Néanmoins, malgré les attraits de cette présentation qui schématise le comportement du sol en deux mécanismes purs (contraction de la structure granulaire pour les faibles valeurs du rapport de contrainte τ/σ ; glissement accompagné d'une augmentation de volume pour des valeurs plus élevées de τ/σ) sans tenir compte du trajet de contrainte suivi par un élément de sol, nous adoptons plutôt l'hypothèse que les deux phénomènes peuvent se produire simultanément, mais suivant des intensités différentes en fonction d'au moins deux paramètres : le rapport de contrainte et le trajet de chargement.

3. IMPORTANCE DU TRAJET DE CHARGEMENT

3.1 Données expérimentales

La méthode la plus utilisée dans l'étude en laboratoire du comportement des sols consiste à soumettre des échantillons de forme cylindrique aux sollicitations que permet l'appareil triaxial axisymétrique. L'état de contrainte moyen à l'intérieur de l'échantillon est supposé tel qu'un trajet de charge puisse être assimilé à un trajet de contrainte du matériau. Ceci implique une uniformité dans tout l'échantillon des paramètres qui caractérisent l'état du sol (contraintes, déformations, ...).

Pour des raisons de simplification, nous ne considérons que la compression triaxiale (contrainte axiale supérieure ou égale à la contrainte radiale). La figure 2 montre divers trajets de contrainte relativement simples à réaliser :

- 1- Trajet radial : σ_a/σ_h ou q/p constant
- 2- triaxial classique σ_h constant
- 3- à contrainte moyenne p constante
- 4- à contrainte axiale σ_a constante

Un chemin contrôlé en déformation est également étudié ; il s'agit du chemin à volume constant ou non drainé 5.

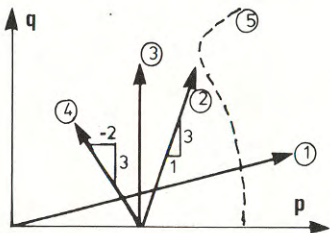


Figure 2 :
Trajets de contrainte étudiés.

3.2 Influence du trajet de contrainte

Le matériau étudié est supposé présenter un comportement élastoplastique avec écrouissage. La direction de la vitesse de déformation plastique $\dot{\underline{\epsilon}}^p$ est alors définie grâce à un potentiel plastique $g(\underline{\sigma})$:

$$\dot{\underline{\epsilon}}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}), \quad \lambda \geq 0 \quad (1)$$

Ainsi, quelle que soit la direction de la vitesse de contrainte $\dot{\underline{\sigma}}$ entraînant une plastification, la direction de la vitesse de déformation plastique $\dot{\underline{\epsilon}}^p$ ne dépend que de l'état de contrainte actuel $\underline{\sigma}$. Pour vérifier ou invalider cette hypothèse, il est possible :

- soit à partir d'un point $\underline{\sigma}_i$ situé sur la surface de charge actuelle de provoquer des incursions $\underline{\sigma}$ dans le domaine plastique de directions variées ;
- soit de réaliser des expériences de chargement monotone dans lesquelles la direction de la vitesse $\dot{\underline{\sigma}}$ est fixe.

Ce type d'expérience a été réalisé par Poorooshasb et al. (1967) et Stroud (1971). Pour un sable dense et un état de contrainte $\underline{\sigma}_i$ correspondant à un rapport $(q/p)_i$ élevé ces auteurs trouvent que la direction des incréments de déformation plastique est fonction de la contrainte $\underline{\sigma}_i$ uniquement. Néanmoins, ce résultat est de moins en moins vérifié lorsque le rapport $(q/p)_i$ diminue.

Ce phénomène est facilement mis en évidence lors des expériences de second type. Si l'on utilise le formalisme et les notations de l'Ecole de Cambridge, les déformations plastique volumique $\dot{\epsilon}_v^p$ et déviatorique $\dot{\epsilon}_q^p$ sont définies par leurs vitesses comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_v^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial p}(p, q) \\ \dot{\epsilon}_q^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial q}(p, q) \end{cases}, \quad \lambda \geq 0$$

Nous faisons de plus l'hypothèse supplémentaire H1 :

H1 Le rapport $\frac{\partial g}{\partial p} / \frac{\partial g}{\partial q}$ ne dépend que du rapport de contrainte $\eta = q/p$.

On peut ainsi écrire :

$$\frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_q^p} = \tilde{\alpha}(\eta)$$

Si nous traçons pour différents trajets de contrainte les courbes liant le rapport $\tilde{\alpha}$ au rapport η , la formule (1) implique que toutes ces courbes sont confondues. Or, l'expérience montre qu'il n'en est rien ; les fonctions $\tilde{\alpha}(\eta)$ dépendent fortement du chemin de contrainte, surtout pour de faibles valeurs du rapport η .

L'unicité du potentiel n'est vérifiée de façon approximative que pour des valeurs de η supérieures à l'unité. Les résultats d'un grand nombre d'essais sur de l'argile silteuse (Lewin-Burland, 1970) aussi bien que sur du sable (Tatsuoka, 1972, Luong, 1980) sont résumés dans la figure 3.

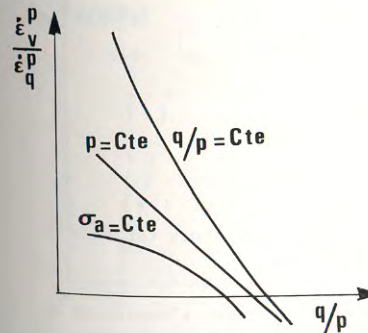


Figure 3 :
Dépendance du potentiel par rapport au chemin de contrainte.

La relation (1) doit donc être modifiée. Un choix possible consiste à écrire :

$$\dot{\underline{\epsilon}}^p = g_p(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\sigma}}) \underline{\dot{\sigma}}$$

où g_p est une fonction de degré σ de son second argument de sorte que la vitesse de déformation totale $\dot{\underline{\epsilon}}$ somme des vitesses de déformation élastique et plastique s'écrira :

$$\dot{\underline{\epsilon}} = g(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\sigma}}) \underline{\dot{\sigma}}$$

Il s'agit d'une équation non-linéaire traitée en particulier par Mroz, Norris, Zienkiewicz (1978).

Une autre possibilité consiste à postuler l'existence de plusieurs surfaces de charge, comme l'a exposé Mandel (1965) ; nous considérons seulement un cas simplifié de cette théorie en supposant deux mécanismes indépendants. La formule (1) s'écrira alors :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p &= \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p_d + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p_c \\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p_d &= \lambda_d \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} g_d(\underline{\underline{\sigma}}) \quad , \quad \lambda_d \geq 0 \\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p_c &= \lambda_c \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} g_c(\underline{\underline{\sigma}}) \quad , \quad \lambda_c \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

les indices c et d désignent respectivement les mécanismes de consolidation et de distorsion.

La justification de ces deux mécanismes peut être visualisée comme le montre l'expérience représentée en figure 4. Les flèches d'origine A_i , $i = 1, 7$ indiquent les déformations résiduelles dues aux chemins $XA_i - A_iX$. Le rapport $\varepsilon_p/\varepsilon_q$ prend des valeurs différentes suivant la direction de la vitesse de contrainte.

Nous appellerons surface de consolidation la surface qui ferme suivant l'axe des contraintes moyennes la première surface dite de distorsion (figure 7).

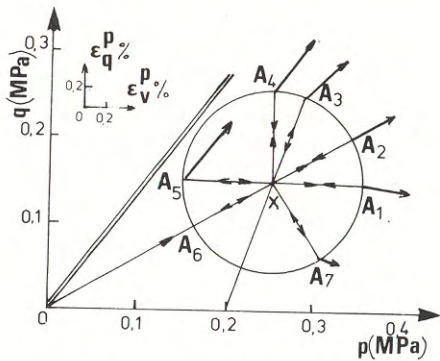


Figure 4 : Déformations résiduelles après charge XA_i -décharge A_iX . (d'après Tatsuoka-Ishihara, 1974).

4. DETERMINATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT

La vitesse de déformation totale $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ est donc la somme de trois termes :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p_c + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p_d \quad (3)$$

$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e$ étant la vitesse de déformation élastique il faut préciser l'évolution au cours d'un trajet de charge quelconque de chacune de ces trois quantités.

4.1 Déformations élastiques

Le module de déformation volumique K et le coefficient de Poisson ν suffisent à caractériser le comportement élastique d'un corps isotrope. La déformation élastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ peut alors s'écrire :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{1}{3(1-2\nu)K} [(1+\nu)\underline{\underline{\sigma}} - \nu p \underline{\underline{\delta}}] = \frac{\Lambda}{K} \underline{\underline{\sigma}} \quad , \quad (4)$$

$\underline{\underline{\delta}}$ désignant le tenseur de Kronecker.

Définissons l'élasticité par un état adapté : ceci peut être appréhendé avec le plus de facilité lors d'essais cycliques sous contrainte isotrope. L'expérience montre que le module K dépend de la contrainte moyenne p . Nous exprimerons cette dépendance comme suit :

$$K = K_i p_a \left(\frac{p}{p_a}\right)^{1-n} \quad (5)$$

p_a étant la pression atmosphérique, K_i et n deux constantes dépendant a priori de l'indice des vides initial.

L'expression de la déformation élastique donnée par l'équation (4) indique que la relation contrainte-déformation est unique, mais il se peut qu'au cours d'un cycle fermé en contrainte, de l'énergie soit dissipée. S'il existe une fonction de contrainte W dite énergie de déformation complémentaire telle que :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$$

il n'en est pas de même. Ceci restreint le choix des coefficients d'élasticité K et ν . L'hypothèse d'un coefficient de Poisson constant est justifiée dans Loret (1981). Elle implique la forme suivante du module K :

$$K = K_i p_a \left[\frac{\frac{\sigma}{p_a} \frac{\Lambda}{\delta} \frac{\sigma}{p_a}}{\frac{\delta}{p_a} \frac{\Lambda}{p_a} \frac{\delta}{p_a}} \right]^{\frac{1-n}{2}} \quad (6)$$

de sorte que (5) soit un cas particulier de (6). En conséquence, les lignes du plan (p, q) sur lesquelles le volume élastique garde une valeur constante ne sont plus des droites parallèles à l'axe $0q$ comme dans le cas de l'élasticité linéaire mais des courbes inclinées sur l'axe des contraintes moyennes comme le montre la figure 5.

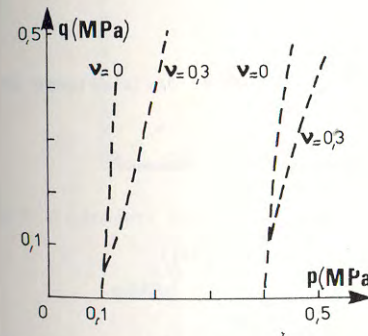


Figure 5 : Lignes d'isovaleur du volume élastique.

4.2 Déformations plastiques de consolidation et de distorsion

Les surfaces de charge de consolidation δ_c et de distorsion δ_d sont déterminées à l'aide des résultats expérimentaux et de l'hypothèse supplémentaire suivante : le comportement du sol peut être représenté par un modèle élastoplastique avec écrouissage en travail. Plus précisément, les expressions retenues pour les surfaces de charge sont les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \delta_d(\underline{\sigma}, S) &= F_d(\underline{\sigma}) - S \\ F_d(\underline{\sigma}) &= \varphi_1(\eta) \varphi_2(p) \\ S &= \int_0^t \frac{\underline{\sigma} \dot{\underline{\varepsilon}}^p}{p} dt \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_c(\underline{\sigma}, W_c^p) &= \Psi(p^2 + \kappa q^2) - W_c^p \\ W_c^p &= \int_0^t \frac{\underline{\sigma} \dot{\underline{\varepsilon}}^p}{\underline{\varepsilon}^p} dt \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$\varphi_1, \varphi_2, \Psi$ étant des fonctions à déterminer expérimentalement. L'argument de la fonction Ψ est déterminé par le raisonnement exposé au premier paragraphe.

Les potentiels plastiques de consolidation et de distorsion tiennent compte du concept d'état caractéristique défini par l'intermédiaire du rapport de contrainte η_c (Luong, 1980) : quel que soit le trajet fermé dans l'espace des contraintes tel que chaque point $\underline{\sigma}$ de ce trajet vérifie l'inégalité $\eta(\underline{\sigma}) \leq \eta_c$, la variation de volume résiduelle est positive, i.e. le matériau se contracte. Inversement pour tout trajet tel que $\eta(\underline{\sigma}) \geq \eta_c$ la variation de volume résiduelle est négative.

Cette hypothèse ne préjuge en rien du comportement du matériau lorsqu'au cours des trajets précédents la valeur $\eta(\underline{\sigma})$ est tantôt inférieure, tantôt supérieure à η_c .

Le potentiel plastique de consolidation g_c est associé, ce qui signifie au vu de la forme de la surface de charge (figurée 7) que les déformations volumiques plastiques de consolidation sont toujours positives quelle que soit la valeur du rapport η .

Le potentiel de distorsion g_d est défini de façon à décrire la réalité expérimentale sur des trajets tels que XA_5 (figure 4)

$$\frac{\dot{\underline{\varepsilon}}^p}{\underline{\varepsilon}^p} = \mu(\eta_c - \eta)$$

μ étant une constante positive.

Les expressions des déformations plastiques volumiques et déviatoriques sont donc maintenant totalement déterminées :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\underline{\varepsilon}}_v^p &= \frac{\mu(\eta_c - \eta)}{\mu\eta_c + (1-\mu)\eta} \frac{\dot{\underline{\varepsilon}}^p}{\underline{\varepsilon}^p} \\ \dot{\underline{\varepsilon}}_q^p &= \frac{1}{\mu\eta_c + (1-\mu)\eta} \frac{\dot{\underline{\varepsilon}}^p}{\underline{\varepsilon}^p} \end{aligned} \right. \quad \text{Mécanisme de distorsion}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\underline{\varepsilon}}_v^p &= 2 \frac{(p \dot{p} + \kappa q \dot{q})}{p^2 + \kappa q^2} p \dot{\Psi} \\ \dot{\underline{\varepsilon}}_q^p &= 2 \frac{(p \dot{p} + \kappa q \dot{q})}{p^2 + \kappa q^2} \kappa q \dot{\Psi} \end{aligned} \right. \quad \text{Mécanisme de consolidation}$$

5. APPLICATION DU MODELE A DES TRAJETS PARTICULIERS

5.1 Trajets radiaux

Un grand nombre d'expériences sur trajets radiaux en contrainte ont mis en évidence le phénomène suivant (El Sohby, 1973 ; Luong, 1980) :

Hypothèse H.2 :

A des trajets radiaux en déformation correspondent des trajets radiaux en contrainte pourvu que la contrainte initiale soit la contrainte nulle ou appartenne à la droite partant de l'origine qui correspond au trajet de déformation radial.

Cette hypothèse est vérifiée en charge comme en décharge. Nous y satisferons en imposant aux trois types de déformation élastique, plastique de consolidation plastique de distorsion de dépendre de la contrainte moyenne p de façon identique. Les modules de déformation élastique étant définis par la formule (6), les fonctions φ_2 et Ψ prendront la forme suivante :

$$\varphi_2(p) = \left(\frac{p}{p_a} \right)^n \quad (9)$$

$$\Psi(p^2 + \kappa q^2) = b p_a^{-n} (p^2 + \kappa q^2)^{\frac{1+n}{2}} \quad (10)$$

L'allure des fonctions de charge est indiquée en figure 7. La valeur du paramètre κ est imposée par l'hypothèse H.2, les équations (6) et (10), et est fonction du coefficient de Poisson ν :

$$\kappa = \frac{2(1+\nu)}{9(1-2\nu)}$$

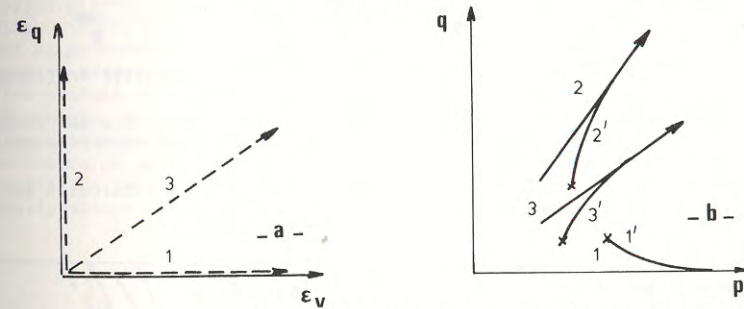


Figure 6 : Trajets radiaux en déformation (a) et contrainte correspondants (b).

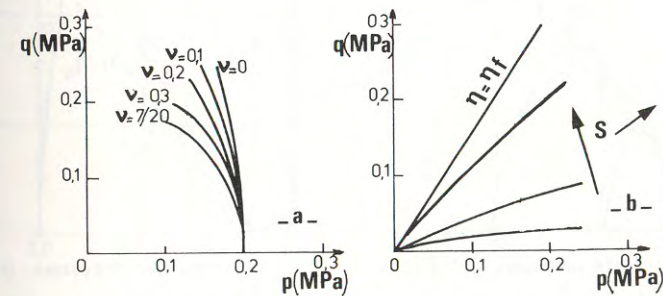


Figure 7 : Allure des surfaces de charge de consolidation -a- de distorsion -b-

5.2 Application au cas non drainé

Dans le cadre de l'hypothèse H.2 nous voudrions lever une difficulté apparente concernant le signe de la variation de volume lors de chemins radiaux.

En effet, les essais de plusieurs chercheurs montrent une différence qualitative de la variation de volume suivant la densité initiale lors de trajets radiaux: pour un sable dense, il existe un trajet déterminé par un rapport de contrainte $\eta = \eta_0^d$ le long duquel une charge radiale n'est accompagnée d'aucune variation de volume (trajet tireté figure 8b),

- pour un sable moyennement dense, ce rapport η_0^m est confondu avec le rapport limite η_f (trajet tireté figure 8a),
- pour certains sables lâches, le chemin non drainé montre un pic dans le plan (p, q) et on ne constate pas de "remontée" le long d'une ligne quelconque dans ce plan: tout se passe comme si la ligne η_0^l correspondant à la droite de variation de volume nulle était au-delà de la droite de rupture.

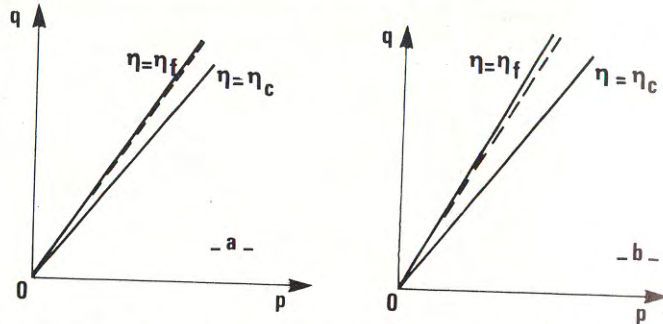


Figure 8 : Domaines de comportement différents suivant la densité initiale.

Les différences de comportement entre ces trois cas sont dues aux variations volumiques plastiques de consolidation dont l'amplitude fait varier la position de la droite η_0 par rapport à la droite η_f .

Le modèle établi dans le cas drainé (les paramètres étant calculés sur ce type de chemin) est apte à rendre compte de ces phénomènes.

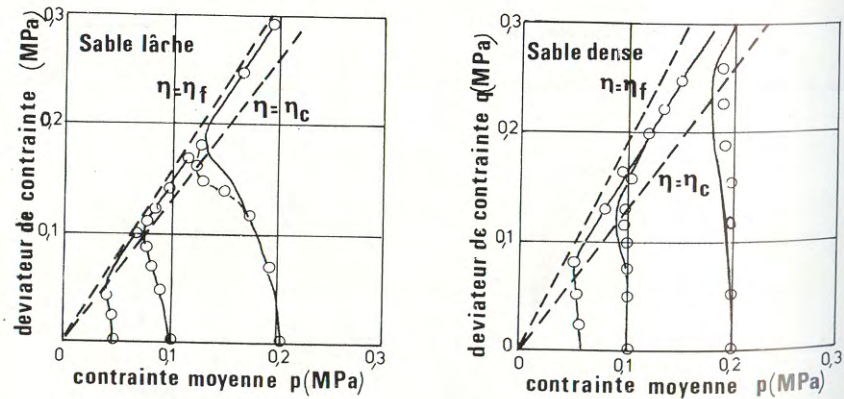


Figure 9 : Comparaison prédictions du modèle-résultats expérimentaux.

La forme des trajets non drainés est expliquée par le signe des vitesses des trois types de variations de volume dans des conditions drainées.

En effet, si après une charge radiale sur un matériau vierge nous effectuons une décharge, nous constatons qu'au cours de cycles radiaux suivants le volume diminue continuellement si le rapport η donnant l'inclinaison du chemin de contrainte est inférieur à η_c et croît si η est supérieur à η_c (Luong, 1980). Le modèle tient compte de ces résultats par l'intermédiaire du potentiel de distorsion. La vitesse de déformation volumique totale somme des vitesses de déformation volumique élastique $\dot{\epsilon}_V^e$, plastique de distorsion $\dot{\epsilon}_{Vd}^p$, plastique de consolidation $\dot{\epsilon}_{Vc}^p$ s'écrit dans des conditions non drainées :

$$\dot{\epsilon}_V = \dot{\epsilon}_V^e + \dot{\epsilon}_{Vd}^p + \dot{\epsilon}_{Vc}^p = 0$$

La forme dans le plan (p, q) du trajet de contrainte effective dépend du signe de chacun de ces trois termes :

- $\dot{\epsilon}_{Vc}^p$ est toujours positif,
- $\dot{\epsilon}_{Vd}^p$ est positif si $\eta < \eta_c$, ce qui implique que $\dot{\epsilon}_V^e$ est négatif, proposition entraînant pratiquement une diminution de la contrainte moyenne,
- $\dot{\epsilon}_{Vd}^p$ est négatif si $\eta > \eta_c$ et le trajet de contrainte effective dépend des amplitudes relatives de ces trois termes.

CONCLUSION

Le modèle élastoplastique avec double écrouissage a été construit à partir d'hypothèses simples aisément mises en évidence expérimentalement. La formulation élastoplastique permet d'associer des grandeurs globales (énergie complémentaire, travaux plastiques de consolidation et de distorsion) à des phénomènes qui se produisent au niveau des grains (déformation aux points de contact, glissements accompagnés d'un enchevêtrement ou d'un désenchevêtrement). Le modèle les traduit au niveau macroscopique (déformation réversible sans dissipation d'énergie, déformation irréversible avec dissipation d'énergie accompagnée d'une contractance ou d'une dilatance).

Le nombre de paramètres introduit est réduit au minimum de sorte que leur interprétation physique est relativement aisée: ceci constitue un avantage non négligeable sur d'autres formulations phénoménologiques.

REFERENCES

- CALLADINE C.R. (1971), *A microstructural view of the mechanical properties of saturated clay*, Géotechnique, 21, 4, pp. 391-415.
- EL SOHBY M.A., ANDRAWES K.Z., (1973), *Experimental examination of sand anisotropy*, 8th Int. Conf. Soil. Mech. Found. Eng., Moscou, 1, 1, pp. 103-109.
- LEWIN P.I., BURLAND J.B., (1970), *Stress probe Experiments on saturated normally consolidated Clays*, Géotechnique, 20, 1, pp. 38-56.
- LORET B., (1981), *Formulation d'une loi de comportement élastoplastique des milieux granulaires*, Thèse Docteur-Ingénieur, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, Février 1981.
- LUONG M.P., (1980), *Stress-strain aspects of cohesionless soils under cyclic and transient loading*, Int. Symp. on Soil under Cyclic and Transient Loading, Swansea, 1, pp. 353-376.
- MANDEL J., (1964), *Généralisation de la théorie de la plasticité de W.T. Koiter*, Int. J. Solids and Structures, 1, pp. 273-295.
- MROZ Z., NORRIS V.A., ZIENKIEWICZ O.C., (1978), *An anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading*, Int. J. on Num. Anal. Meth. Geom., 2, pp. 203-222.
- POOROOSHAB H.B., HOLUBEC I., SHERBOURNE A.N., *Yielding and flow of sand in triaxial compression*, Canadian Geotechnical Journal, 4, 4, pp. 376-388.
- STROUD M.A., (1971), *The behaviour of sand at low stress levels in the simple shear apparatus*, Ph. D. Thesis, Cambridge University.
- TABOR D., (1959), *Junction growth in metallic friction*, Proc. Roc. Soc., A 251, pp. 378-393.
- TATSUOKA F., (1972), *Shear tests in a triaxial apparatus. A fundamental research on the deformation of sand*, Ph. D. Thesis, Tokyo University.
- TATSUOKA F., ISHIHARA K., (1974), *Yielding of sand in triaxial compression*, Soils and Foundations, 14, 2, pp. 63-76.

COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE ET REARRANGEMENT DES GRAINS D'UN MATERIAU PULVERULENT RHEOLOGICAL BEHAVIOUR AND ROTATION OF THE GRAINS OF A GRANULAR MEDIUM

J.C. ROBINET, H. DI BENEDETTO et A. SMADI
Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat - Vaulx-en-Velin - France

RESUME

Dans cet article, nous proposons des exemples de comportement de matériaux pulvérulents à partir de l'intégration numérique d'une loi rhéologique. Cette loi, définie dans la première partie, présente une formulation globalement non linéaire pour traduire les mécanismes structuraux irréversibles du milieu. Nous effectuons ensuite une comparaison entre l'intégration numérique du modèle développé et les résultats expérimentaux sur des chemins sans rotation des axes principaux de sollicitation et sur des chemins avec rotation de ces axes.

ABSTRACT

This paper gives an example of the behavior of granular material through numerical integration of a constitutive law. This law, defined in the first section, presents a non linear global formulation in order to interpret the irreversible structural mechanisms of the medium. A comparison is then made between the numerical integration of the developed model and the experimental results over stress paths, with and without the rotation of the principal axes.

1. INTRODUCTION

Le comportement rhéologique d'un matériau pulvérulent est la conséquence des trois mécanismes suivants

- déformation des grains solides
- rupture et attrition des particules solides
- glissement et rotation de ces particules.

Dans le cas du matériau étudié (sable), pour les cas de chargement rencontrés classiquement en mécanique des sols, les deux premiers mécanismes ont une influence négligeable par rapport au 3ème. L'étude de la déformation d'un tel milieu revient donc à définir le mouvement des particules en considérant celles-ci indéformables. Deux méthodologies peuvent être envisagées pour décrire le phénomène.

- soit établir un modèle obtenu par extrapolation des propriétés observées à l'interface de 2 particules. De nombreux auteurs CAMBOU [1] CUNDALL et STRACK [2], AUVINET [3], NASCIMENTO [4] ... ont développé de tels modèles en utilisant les propriétés locales du milieu. Cette approche nécessite des moyens de calcul importants et ne s'applique actuellement qu'à des corps ne comportant que quelques milliers de particules.

- soit décrire les réactions globales du milieu, en utilisant les axiomes fondamentaux de la mécanique des milieux continus et des hypothèses physiquement justifiées [5] [6] [7] [8] [9]... Les réponses mesurées sur des chemins particuliers sont ensuite généralisées en utilisant la modélisation précédemment décrite.

Nous avons choisi d'utiliser au sein de l'équipe cette dernière approche. La loi développée [10], [11], [12], repose sur cinq hypothèses fondamentales ; la description des réactions de la partie indépendante de la vitesse de sollicitation (rate independent) nécessite 4 hypothèses.

Après un rappel sur la formulation du modèle, nous présentons dans cet article quelques intégrations numériques de la loi sur deux classes de chemin de sollicitation : des chemins sans rotation des axes principaux de sollicitation qui sont les plus étudiés expérimentalement puis des chemins avec rotation de ces axes. Ces derniers types de chemins, peu abordés dans la présentation de la plupart des lois rhéologiques, sont des tests très importants pour le modèle. En effet le dimensionnement de nombreux ouvrages de génie civil (pieux ...) nécessite la connaissance du comportement du matériau pour de telles sollicitations. Dans cette partie nous présentons une comparaison entre l'"intégration" de la loi rhéologique et les résultats expérimentaux en insistant sur l'évolution de l'enchevêtrement des grains qui est caractérisé par la contractance ou la dilatace du milieu.

2. LOI (R.A.B.S.L.I.C.)*

Pour prendre en compte les mécanismes d'irréversibilité des milieux pulvérulents nous proposons une formulation de loi globalement non linéaire. Les hypothèses nécessaires à la description de la partie indépendante de la vitesse de sollicitation sont au nombre de 4.

2.1 Hypothèses

H.1 Nous considérons que la matrice élasto-plastique M est orthotrope lorsqu'elle est exprimée dans le repère principal du tenseur des déformations de Cauchy-Euler (ϵ_r). Le choix d'un état de référence nécessaire à la description du tenseur est un point fondamental que nous développerons par la suite. En effet ce choix conditionne en partie la "simulation" de la mémoire (cf. H.2). M_r : est exprimé dans le repère principal du tenseur des déformations de Cauchy-Euler (après rotation).

Dans ces axes principaux (ϵ_r) la loi prend la forme suivante :

$$\delta \epsilon_{Ar} = M_r \delta \sigma_r$$

avec $\delta \epsilon_{Ar}$ accroissement du tenseur de déformation d'Almansi exprimé dans les axes principaux du tenseur de déformation de Cauchy-Euler ($\epsilon_r = -2 \epsilon_A + 1$).

$$M_r = \begin{bmatrix} A & F & E & & & \\ F' & B & D & 0 & & \\ E' & D' & C & & & \\ & & & 2G_1 & & \\ & 0 & & & 2G_2 & \\ & & & & & 2G_3 \end{bmatrix}$$

H.2 Nous supposons que des chemins de sollicitation simulent la mémoire du matériau s'ils amènent le milieu au même état (structural) qu'après une sollicitation quelconque. Nous développerons par la suite, les différents chemins ainsi que les paramètres utilisés pour "résumer" la mémoire du matériau.

H.3 Notre troisième hypothèse porte sur la détermination des pseudo-modules d'Young E_i et des pseudo-coefficients de Poisson ν_i^j relatifs à une direction quelconque de l'incrément de contrainte. Ces coefficients définissent la matrice M_r lorsque celle-ci est exprimée dans le repère d'orthotropie :

$$* \begin{pmatrix} A = \frac{1}{E_1} & F = \frac{\nu_2^1}{E_2} & E = \frac{\nu_3^1}{E_3} \\ F' = \frac{\nu_1^2}{E_1} & B = \frac{1}{E_2} & D = \frac{\nu_3^2}{E_3} \\ E' = \frac{\nu_1^3}{E_1} & D' = \frac{\nu_2^3}{E_2} & C = \frac{1}{E_3} \end{pmatrix}$$

La loi rhéologique dans ce repère prend la forme :

$$\begin{bmatrix} \delta \epsilon_{11} \\ \delta \epsilon_{22} \\ \delta \epsilon_{33} \\ \delta \epsilon_{23} \\ \delta \epsilon_{31} \\ \delta \epsilon_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{\nu_2^1}{E_2} & \frac{\nu_3^1}{E_3} \\ \frac{\nu_1^2}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{\nu_3^2}{E_3} \\ \frac{\nu_1^3}{E_1} & \frac{\nu_2^3}{E_2} & \frac{1}{E_3} \\ & & & 2G_1 \\ & 0 & & & 2G_2 \\ & & & & & 2G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \sigma_{11} \\ \delta \sigma_{22} \\ \delta \sigma_{33} \\ \delta \sigma_{23} \\ \delta \sigma_{31} \\ \delta \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

* R.A.B.S.L.I.C. - Rhéologie Appliquée aux Bétons et aux Sols : Loi instrumentale calcul, Groupe de Recherche de l'Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat.

La matrice M_I pour une "direction" quelconque de $\delta\sigma$ est définie en choisissant des variations linéaires de E_i et V_i^J en fonction des trois angles θ_i de $\delta\sigma$ par rapport aux directions d'orthotropie (figures 1 et 2). Dans ces directions les modules d'Young et les pseudo-coefficients de Poisson (*) prennent les valeurs E_I et V_I^J affectées de l'indice + si $\theta_i = 0$ et - si $\theta_i = \pi$.

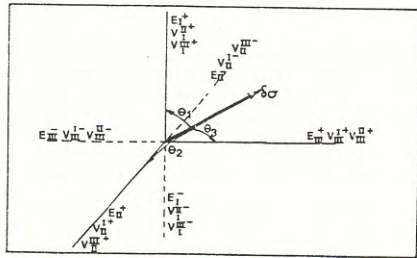


Figure 1 : - Définition des valeurs particulières des fonctions E et V dans les axes d'orthotropie.

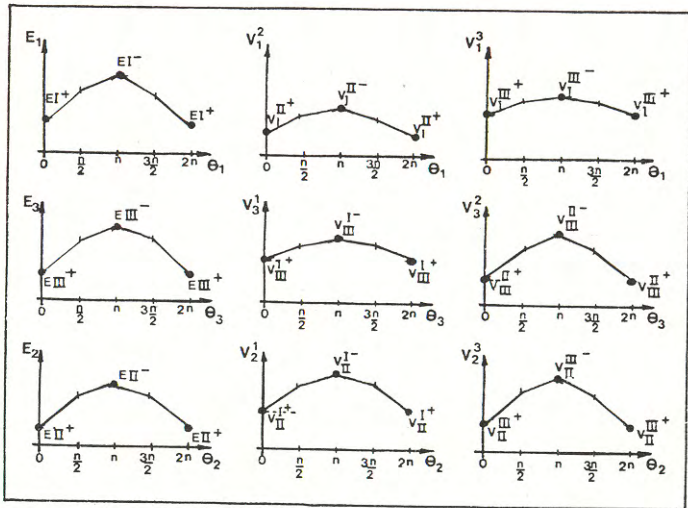


Figure 2 : - Variation des pseudo-modules d'Young et des pseudo-coefficients de Poisson en fonction de θ_1, θ_2 et θ_3 .

H.4 La quatrième hypothèse permet de définir les fonctions G_1, G_2, G_3 qui déterminent les distortions du matériau. Ces fonctions s'obtiennent en considérant que les inverses des modules d'Young suivent une loi ellipsoïdale lorsque l'on fait tourner le repère principal de l'incrément de contrainte et que ceux-ci sont exprimés dans ce repère ($\frac{1}{E_I}$). Cette hypothèse est en accord avec les résultats expérimentaux de Boehler [13], Lefevre [14].

(*) Nous avons utilisé pour les pseudo-coefficients de Poisson le signe opposé à celui utilisé traditionnellement.

La figure 3 est une illustration du mode de variation choisi.

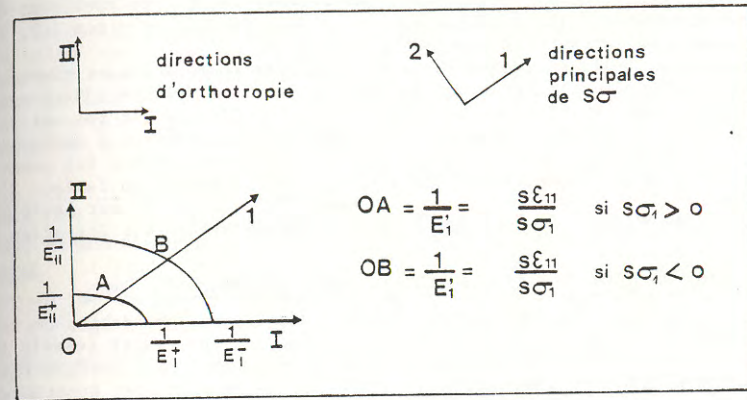


Figure 3 : - Mode de variation de E' en dimension 2.

2.2 Détermination quantitative de la matrice élastoplastique

Il ressort des hypothèses précédentes que la détermination quantitative de la loi nécessite la connaissance des pseudo-modules d'Young et pseudo-coefficients de Poisson définis dans les directions d'orthotropie ($E_I^+, V_I^J, E_I^-, V_I^J$). La définition de ces 18 valeurs pour un état du matériau qui est en général inconnu, doit faire intervenir l'histoire qu'a subi le milieu à partir du dernier état structural totalement défini, car nous raisonnons sur des valeurs globales. Dans cette partie, l'hypothèse qui introduit la notion de mémoire du milieu est fondamentale. En effet, devant l'impossibilité de tester le matériau réel, nous obtenons les valeurs désirées à partir d'essais de laboratoire sur un échantillon du corps considéré qui simulera l'état (anisotropie) de celui-ci.

La démarche suivie est schématisée dans la figure 4, nous avons choisi comme état structural de référence l'état isotrope et comme chemin de laboratoire le "chemin élémentaire" qui est composé - d'un essai isotrope - d'un essai triaxial de révolution - d'un essai triaxial (avec ou sans inversion du sens de sollicitation).

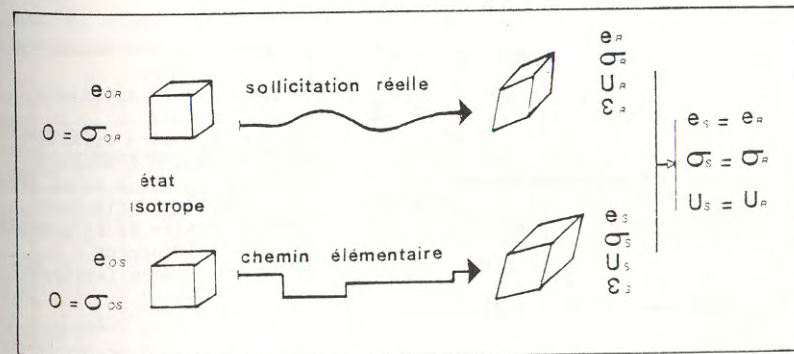


Figure 4 : - Simulation de la mémoire du milieu

Les paramètres de simulation de la mémoire retenus sont l'indice des vides (e), la contrainte (σ) et le paramètre U caractérisant la tendance à l'enchevêtrement ou au désenchevêtrement des grains. Les réponses du milieu réel sont définies par celles du matériau simulé qui se trouve au même indice des vides (e), à la même contrainte (σ) et au même U que celui-ci.

Nous avons défini dans ce paragraphe les bases qualitatives et quantitatives nécessaires à l'application pratique du modèle développé à l'Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat. Il ressort, de ce qui précède, que la loi est un modèle non linéaire à domaine d'expression continu, l'association à cette loi d'un domaine de validité [1], [5], confère à celle-ci un aspect global lui permettant d'être intégré dans un code éléments finis. Afin de permettre au lecteur d'apprécier la potentialité du modèle, nous proposons dans la suite de cet article des intégrations numériques sur différentes classes de chemin de sollicitation homogène.

3. CHEMIN SANS ROTATION DES AXES PRINCIPAUX DE SOLLICITATION

Ces chemins de sollicitation sont les plus facilement abordables en raison du développement des moyens expérimentaux permettant de les tester (essais triaxiaux de révolution et tridimensionnels, essais oedométriques, ...) l'intégration théorique de ce type de chemin ne fait intervenir que les 3 premières hypothèses du modèle. Nous avons toujours utilisé pour les intégrations numériques les paramètres du sable de silice d'Hostun utilisé au laboratoire et dont la courbe granulométrique est présentée sur la figure 5.

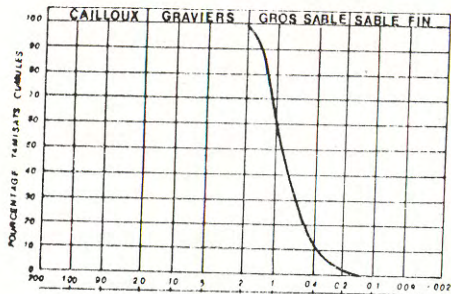
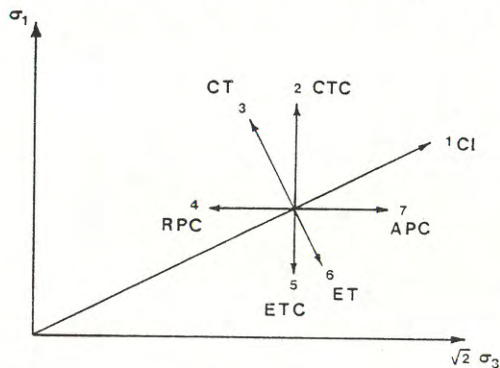


Figure 5 : - Courbe granulométrique du sable d'Hostun.

3.1 Chemin avec symétrie de révolution

Nous avons simulé des chemins linéaires dans le plan (p, q) ($p = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}$, $q = \sigma_1 - \sigma_3$) après une compression isotrope à 6 bars, figure 6.



- CTC compression triaxiale classique
- ETC extension triaxiale classique
- CT compression triaxiale
- ET extension triaxiale
- APC augmentation de la pression de confinement
- RPC réduction de la pression de confinement
- CI compression isotrope.

Figure 6 : - Chemin de contrainte dans le plan triaxial.

3.1.2 Compression triaxiale conventionnelle (CTC) et extension triaxiale conventionnelle (ETC) sur sable dense $e = 0,56$

En charge et en décharge on constate figure 7, une contractance (diminution de volume des vides du matériau) suivi d'une dilatance (augmentation de volume des vides). Après inversion du sens de sollicitation pour le cas du chargement étudié on observe le même type de variation de volume (contractance puis dilatance). Les points expérimentaux représentés sur cette figure montrent que ce comportement est en accord avec l'expérience.

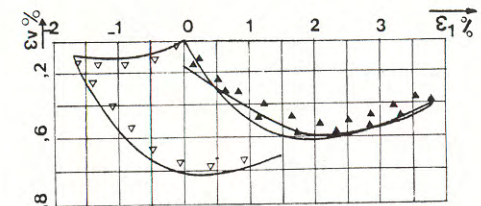
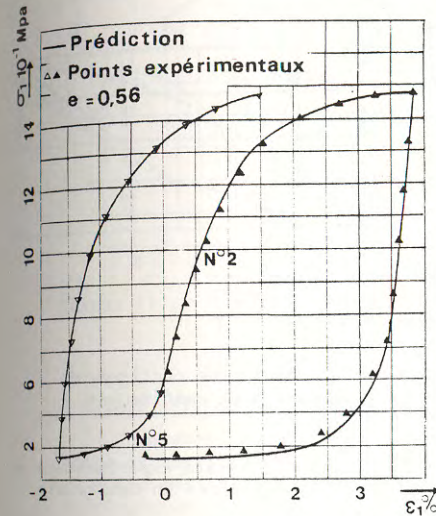


Figure 7 : - Compression triaxiale conventionnelle et extension triaxiale conventionnelle. (comparaison théorie expérience)

3.1.3 Compression triaxiale (CT) et extension triaxiale (ET) sur sable dense $e = 0,56$

Ces chemins correspondent à des chemins à pression moyenne constante ($p = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2}{3} = \text{cst}$). Ces essais représentés figure 8 ont les mêmes allures de variation de volume que les chemins CTC et ETC, avec toutefois une contractance et une dilatance moins marquées.

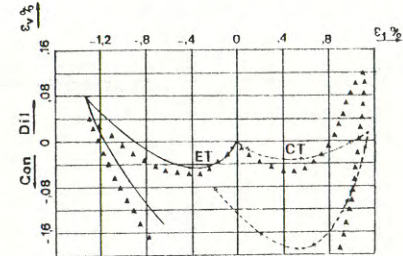
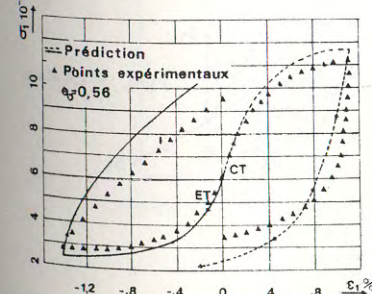


Figure 8 : - Compression triaxiale et extension triaxiale. (comparaison théorie expérience)

3.1.4 Compression avec augmentation de la pression de confinement (APC) et extension avec réduction de la pression de confinement (RPC) sur sable dense $e = 0,56$

Nous observons une réponse quasiment linéaire dans les axes σ_2 , ϵ_2 , figure 9, mais non réversible après inversion du sens de sollicitation.

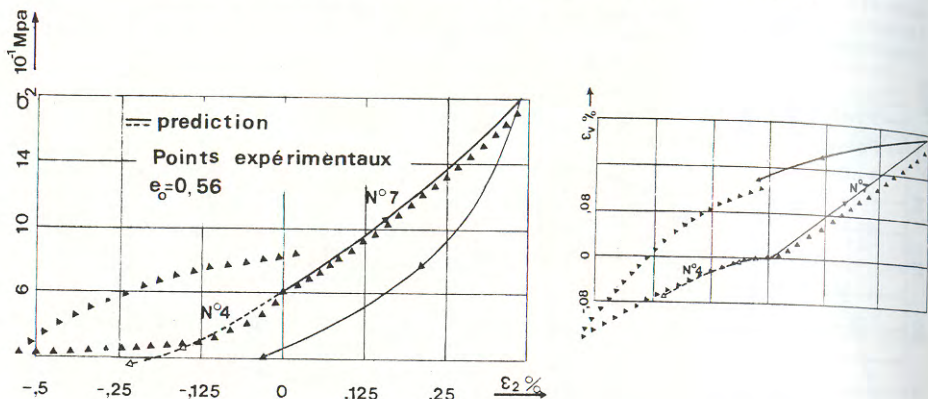


Figure 9 : - Compression avec augmentation de la pression de confinement et extension avec réduction de la pression de confinement. (comparaison théorie expérience)

3.2 Chemin véritablement triaxial

Nous avons effectué "l'intégration" numérique du type d'essais expérimentaux effectués par Desai [16] à Blaksburg, qui sont des chemins linéaires en contrainte dans le plan déviatoire, figure 12.

3.2.1 Chemin linéaire en contrainte dans le plan déviatoire sur sable dense $e = 0,56$

On constate une diminution de longueur dans la direction 1, une augmentation de longueur dans la direction 3 et une faible variation dans la direction 2. Ceci se traduit par une contractance suivie d'une légère dilatance du milieu, figure 10.

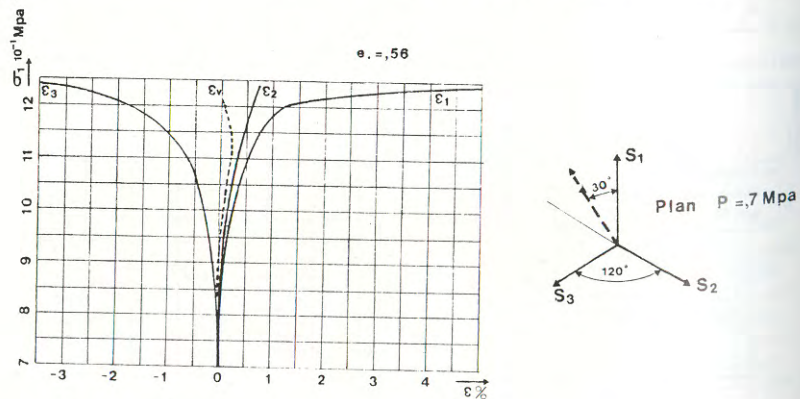


Figure 10 : - Chemin linéaire dans le plan déviatoire sur sable dense $e = 0,56$. (prédiction).

3.2.2 Chemin linéaire en contrainte dans le plan déviatoire sur sable lâche $e = 0,72$

Nous observons le même type de variation que sur du sable dense,

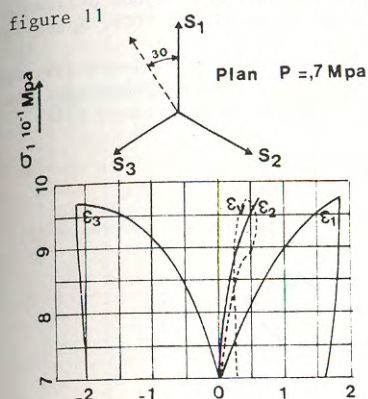


Figure 11 : - Chemin linéaire dans le plan déviatoire sur sable lâche $e = 0,72$ (prédiction)

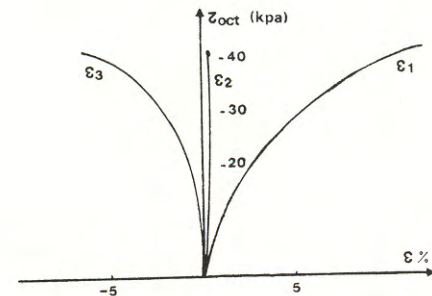


Figure 12 : - Résultats expérimentaux de DESAI [16] pour $p = 69 \text{ Kpa}$

4 CHEMIN AVEC ROTATION DES AXES PRINCIPAUX DE SOLLICITATION

Nous avons simulé les essais de cisaillement effectués par Wood [17] sur la boîte de cisaillement mis au point par Roscoe à Cambridge, (figure 16).

Ces essais nous paraissent les plus représentatifs des caractéristiques rhéologiques du matériau en raison de leur homogénéité pour ce type de sollicitation.

L'essai représenté figure 13, se compose d'une compression oedométrique ($\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$) suivie d'une augmentation de contrainte dans la direction 1 et d'un cisaillement dans le plan 1.3.

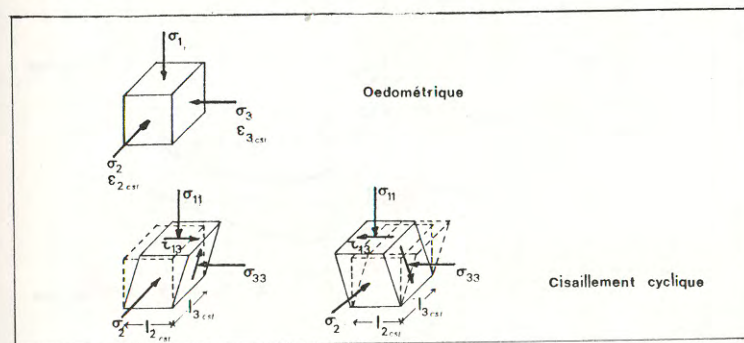


Figure 13 : - Chemin de sollicitation imposé au matériau dans la boîte de cisaillement de Roscoe.

4.1 Essais de cisaillement simple sur sable lâche $e = 0,72$

En premier lieu on constate, figure 14, sur sable lâche une irréversibilité du matériau quelque soit le niveau de charge considéré.

La variation de volume présente une phase de contractance et une dilatance identiques à celles observées sur chemin triaxial classique (CTC et ETC). Après inversion du cisaillement le milieu est contractant.

Sur la partie gauche de la figure 14 sont représentées les valeurs par rapport à un repère fixe des angles de ce repère par rapport aux repères principaux des tenseurs contrainte (ψ), incréments de déformation (ξ) et des incréments de contrainte (α).

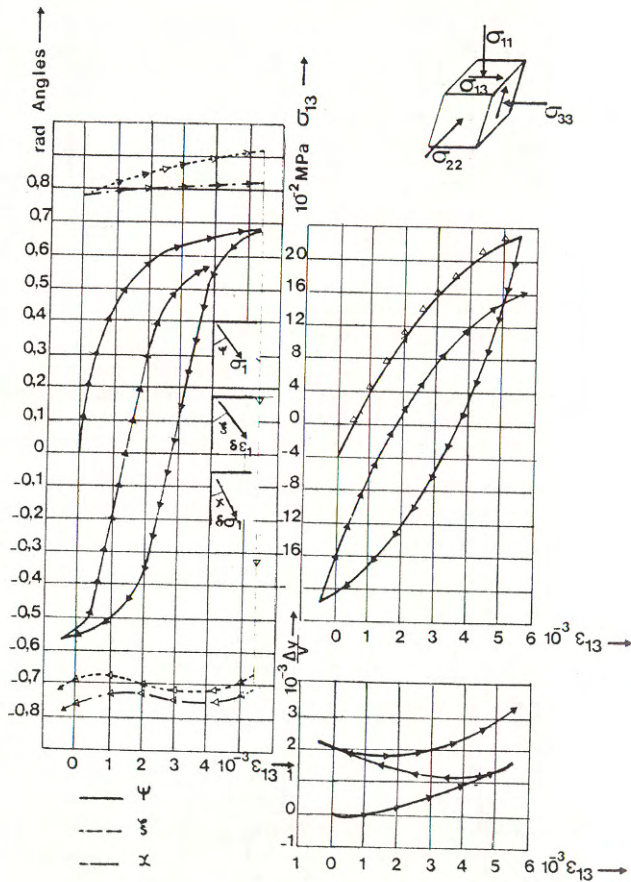


Figure 14 : - Essai de cisaillement simple sur sable dense. (prédiction)

4.2 Essais de cisaillement simple sur sable dense $e = 0,56$

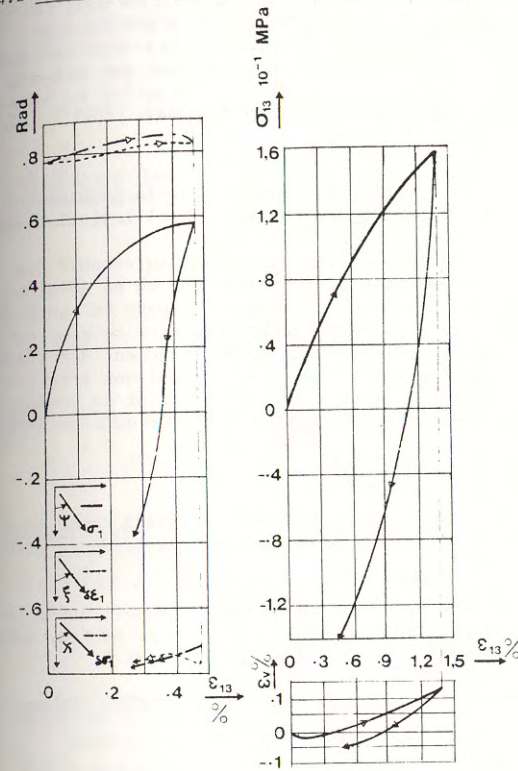
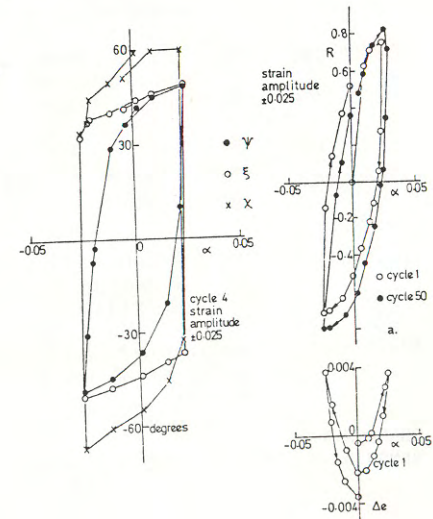


Figure 15 : - Essai de cisaillement simple sur sable lâche (prédiction)

Figure 16 : - Résultats expérimentaux de cisaillement simple effectué par WOOD et BUDHU [17]



On remarque sur la figure 15 représentant les résultats de la simulation effectuée, et la figure 16 représentant les essais expérimentaux de WOOD et BUDHU [17] une bonne concordance qualitative. Les divergences quantitatives peuvent s'expliquer par la différence des matériaux utilisés. Les résultats présentés sur ces deux figures montrent que la phase de contractance est beaucoup moins importante que pour les sables laches, par contre la diminution du volume des vides du matériau croit avec le nombre de cycles représentés.

5 CONCLUSION

Dans de nombreux cas pratiques on constate l'importance de la connaissance de l'évolution du comportement du matériau sur des chemins de sollicitation complexe.

Par exemple, le calcul des plate-formes en mer ou peuvent intervenir des phénomènes de liquéfaction, ou encore les interactions pieu-sol où se développent des cisaillements importants avec rotation des axes principaux de contrainte et de déformation. Un des phénomènes physiques importants à décrire pour expliquer le comportement des matériaux est l'évolution du réarrangement des grains qui se traduit par la variation du volume des vides. Les comparaisons présentées dans cet article entre les résultats expérimentaux et la prédiction du comportement du milieu à l'aide du modèle rhéologique montrent l'aptitude qu'a ce dernier à traduire ce phénomène.

6 REFERENCES

- [1] CAMBOU B. - 1979 - Approche du comportement d'un sol considéré comme un milieu non continu. Thèse de doctorat ès-Sciences - Lyon
- [2] CONDALL P. -
STRACK O. - 1979 - The development of constitutive laws for soil using the distinct element method, third. Int. Conf. on Num. Meth. Geomechanics, Aachen - vol. 1 - pp. 289-298
- [3] AUVINET - 1977 - Structure des milieux pulvérulents - IX ICSMFE - Tokyo vol. 1 - pp. 23-26.
- [4] NASCIMENTO - 1973 - Contribution to a theory of internal friction - VIII ICSMFE - Moscou - vol. 2 - pp. 299-304.
- [5] LADE DUNCAN - 1973 - Elasto-plastic stress strain theory for cohesion-less soils. Journal of the geotechnical engineering division - ASCE vol. 101 - n° GT 10 - pp. 1037-1053.
- [6] STUTZ - 1972 - Contribution à l'étude de la loi rhéologique des milieux pulvérulents - Thèse d'Etat - Institut de Mécanique - Grenoble.
- [7] GUDEHUS G. -
KOLYMBAS D. - 1979 - A constitutive law of the rate type for soils, 3rd - Int. Conf. Numer. Meth. Geotech. Proceeding edited by W WITTKÉ
- [8] DARVE - 1978 - Une formulation incrémentale des lois rhéologiques - Application aux sols - Thèse d'Etat - Institut de Mécanique - Grenoble.
- [9] CHAMBON R. -
RENOU D. - LIAS B. - 1979 - Incremental non linear stress-strain relationship for soil and integration by finite element method. Third International Conference on Numerical Methods in Geomechanics - Aachen - pp. 405-413.

- [10] ROBINET J.C. -
DI BENEDETTO H. - 1980 - Etude de la partie visqueuse de la loi rhéologique Journée de Rhéologie - Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat - Vaulx-en-Velin
- [11] ROBINET J.C. - 1980 - Loi rhéologique en écriture incrémentale - Application aux sols et au béton - Thèse d'Etat - Grenoble.
- [12] ROBINET J.C. -
DI BENEDETTO H. - 1980 - Présentation d'une loi rhéologique non linéaire en écriture incrémentale pour les sols et comparaison avec différents modèles existants - Cahier du Groupe Français de Rhéologie - tome V - n° 4 - pp. 167-201.
- [13] BOEHLER - 1968 - Contribution à l'étude de l'équilibre limite des sols anisotrope - Thèse de Doctorat de spécialité - Grenoble.
- [14] LEFEVRE F. - 1980 - Correlations quantitatives entre l'anisotropie de structure et l'anisotropie mécanique d'un Kaolin. Evolutions au cours d'une déformation irréversible. Thèse de Docteur Ingénieur - Institut de Mécanique de Grenoble.
- [15] ROBINET J.C. -
DI BENEDETTO H. -
COMTET A. - MATHIEU P. - 1979 - Loi de comportement non linéaire en écriture incrémentale pour les sols - Journée de Rhéologie - Cycles dans les sols - Rupture instabilités - Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat - Vaulx-en-Velin.
- [16] STURE S. - DESAI S.C. -
JANARDHANAM R. - 1979 - Development of a constitutive law for an artificial soil - Third International conference in numerical in Geomechanics - Aachen - vol. 1 - pp. 309-317.
- [17] WOOD D.M. - BUDHU M. - 1980 - The behaviour of leighton buzzard sand in cyclic simple shear tests - International symposium on soil under cyclic and transient loading - Swansea - vol. 1 - pp. 9-21.

**DISTRIBUTION DES EFFORTS
SUR LES PARTICULES D'UN MILIEU GRANULAIRE
SOUMIS A UN CHAMP ISOTROPE**

**DISTRIBUTION OF THE CONTACT FORCES
BETWEEN THE PARTICLES OF A GRANULAR MEDIUM
UNDER ISOTROPIC PRESSURE**

J.C. FAUGERAS et R. GOURVES

Groupe de Recherche Génie Civil de l'Université de Clermont II -
Clermont-Ferrand - France

RESUME

Ce travail consiste en l'étude des relations liant les forces extérieures appliquées aux forces de contact interparticulaires d'un milieu granulaire.

Faisons l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie d'un milieu constitué de sphères dont les diamètres sont distribués selon une courbe granulométrique donnée. Cela revient à faire l'hypothèse d'équirépartition des centres des particules dans l'espace. Si le matériau est soumis à une pression isotrope sur son contour, les déplacements élastiques des centres seront tels que le milieu déformé sera lui aussi homogène et isotrope. Il est alors possible d'établir une loi donnant la répartition des forces de contact entre les particules, en fonction de la pression extérieure exercée ainsi que des caractéristiques élastiques et granulométriques du matériau. Cette loi a également été déterminée dans le cas bidimensionnel et des comparaisons expérimentales ont été effectuées à l'aide d'un massif analogique de Schneebeli. La concordance des résultats théoriques et expérimentaux montre le bien-fondé des hypothèses émises.

ABSTRACT

This work studies the relation between external and intragranular forces in a granular material.

Homogeneity and isotropy have been assumed for a material constituted of spheres whose diameters are distributed according to a given granulometric curve. This is equivalent to the assumption of equidistribution of centres of particles in space. If the material is subjected to an isotropic pressure along its outward surface, the elastic displacements of centres will be such that the deformed material will also be homogeneous and isotropic. It is then possible to set a law giving the distribution of contact forces between particles under the external pressure as well as the elastic and granulometric characteristics. This law is also determined in the bidimensional case. Comparisons are then carried out with the help of Schneebeli's analogical material. The concordance between theoretical and experimental results shows the soundness of the hypothesis mentioned above.

1. INTRODUCTION

Les milieux granulaires sont constitués par un ensemble de particules solides de dimensions et de formes quelconques. Le comportement mécanique de ces matériaux est en général étudié en les assimilant à des milieux continus. Cette approximation qui a donné de bons résultats pratiques ne permet cependant pas de comprendre certains phénomènes inhérents à leur structure discontinue.

Les résultats présentés ici concernent la relation qui existe entre les forces intergranulaires et les forces extérieures appliquées au matériau. Le problème est abordé à partir d'une modélisation du milieu en le considérant composé de particules sphériques constituées d'un matériau parfaitement élastique. La formulation est donnée dans les deux cas tri et bidimensionnel, ce qui permet une vérification expérimentale sur le matériau analogique de Schneebeli [1].

2. MODELISATION DU MATERIAU GRANULAIRE

Nous supposons le matériau non pesant, ce qui revient à dire que les forces de volume sont considérées comme faibles par rapport aux forces de surface.

Le matériau sera constitué de sphères de diamètres X distribué selon la fonction de répartition $F(x)$ telle que :

$$\forall x, 0 \leq F(x) \leq 1$$

$$\forall x \text{ et } x', x \leq x' \quad F(x) \leq F(x')$$

X est la variable aléatoire représentant le diamètre d'une particule et x une réalisation de cette variable aléatoire. $F(x)$ représente la probabilité pour que la variable aléatoire X soit inférieure à la valeur x . Pour ce qui nous concerne, $F(x)$ est le volume cumulé des particules ayant un diamètre inférieur à x . Dans ces conditions, la courbe représentative de cette fonction est la courbe granulométrique obtenue expérimentalement par tamisage.

Le milieu granulaire est supposé homogène et isotrope. Ceci revient à dire que si l'on prélève au hasard un nombre suffisamment grand de particules dans le mélange, la granulométrie de l'ensemble de celles-ci sera identique à celle du mélange pris dans son ensemble. Le milieu sera isotrope si les forces appliquées sont elles-mêmes isotropes.

Dans ce qui suit, nous ne considérons que le cas d'un matériau soumis sur son contour à une pression isotrope p .

L'homogénéité et l'isotropie se traduisent par une distribution uniformément dense des centres des particules dans l'espace.

Nous appellerons C la compacité du matériau telle que :

$$C = \frac{V_s}{V_t}$$

E et ν seront respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du matériau constitutif des particules.

3. DEFORMATION DU MATERIAU

Si un matériau isotrope et homogène est soumis à un champ de forces isotropes, le milieu déformé sera lui-même homogène et isotrope. Nous nous plaçons naturellement dans le domaine des petites déformations.

Les particules étant des sphères élastiques, les forces de contact sont uniquement radiales et le rapprochement entre les centres des sphères est obtenu à partir de la loi de Hertz [2], qui s'exprime par l'égalité :

$$h = \phi^{2/3} \left[D^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right]^{1/3}$$

où h est le rapprochement entre les centres, R et R' sont les rayons des deux sphères en contact.

$$D = \frac{3}{2} \frac{1 - \nu^2}{E}$$

ϕ est la force de contact intergranulaire.

Si x et y sont les diamètres respectifs des deux sphères et t la distance entre leurs centres, l'expression précédente s'écrit :

$$2(D\phi)^2 = \left[\frac{(x+y)^2}{8} - 3t \frac{x+y}{4} + \frac{3t^2}{2} - \frac{t^3}{x+y} \right] xy \quad (1)$$

3. DISTRIBUTION DES FORCES DE CONTACT ENTRE PARTICULES

La dérivée par rapport à x de la fonction $F(x)$ est la densité de probabilité, soit :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

La densité de probabilité en nombre de particules sera :

$$g(x) = \frac{6Cf(x)}{\pi x^3} / \frac{6C}{\pi} \int_{d_0}^{d_1} \frac{f(x)}{x^3} dx$$

d_1 et d_0 représentent le plus petit et le plus grand diamètre des particules.

Considérons une sphère de diamètre y . La probabilité pour qu'une autre sphère de diamètre x ait son centre situé à une distance T comprise entre t et $t + dt$ d'elle est :

$$P(t \leq T \leq t + dt) = Kt^2 dt$$

t varie de t_0 à 1. Nous verrons ultérieurement comment déterminer cette borne t_0 .

$$K \text{ est tel que } \int_{t_0}^1 Kt^2 dt = 1$$

$$\text{soit : } K = \frac{3}{1-t_0^3}$$

Il y aura contact entre les particules si l'on a :

$$t \leq \frac{x+y}{2}$$

Dans ce cas existera une force de contact (x, y, t) définie précédemment (égalité 1).

X et T sont des variables aléatoires indépendantes de densités de probabilités respectives :

$$f_X(x) = \frac{f(x)}{x^3} / \int_{d_0}^{d_1} \frac{f(x)}{x^3} dx$$

$$f_T(t) = \frac{3t^2}{1-t_0^3}$$

La densité conjointe du couple aléatoire (X, T) s'écrit alors :

$$f_{X,T}(x,t) = f_X(x) \cdot f_T(t)$$

La force de contact $\phi(x,y,t)$ est une variable aléatoire obtenue à partir de la densité de probabilité conjointe des variables aléatoires X et T .

$$f_{X,T}(x,t) = \left[\frac{3t^2}{1-t_0^3} \frac{f(x)}{x^3} / \int_{d_0}^{d_1} \frac{f(x)}{x^3} \cdot dx \right]$$

La probabilité pour que la force de contact ϕ soit inférieure à une valeur ϕ fixée sera donc :

$$F_{\phi}(\phi) = P(\phi \leq \phi) = \iint_{\Delta} f_{X,T}(x,t) \, dx \, dt$$

soit :

$$F_{\phi}(\phi) = \lambda \iint_{\Delta} \frac{t^2 f(x)}{x^3} \, dx \, dt \quad (2)$$

avec :

$$\lambda = \frac{3}{(1-t_0^3) \int_{d_0}^{d_1} \frac{f(x)}{x^3} \, dx}$$

λ est en fait une constante dépendant des conditions aux limites.

Le domaine d'intégration Δ est défini comme l'ensemble des couples (x,t) tels que $\phi(x,y,t)$ soit inférieur à ϕ , soit :

$$\frac{\sqrt{xy}}{D\sqrt{2}} \left[\frac{(x+y)^2}{8} - 3t \frac{x+y}{4} + \frac{3t^2}{2} - \frac{t^3}{x+y} \right]^{1/2} \leq \phi \quad (3)$$

La solution de ce problème ne peut être que numérique, mais le programme informatique à utiliser est très simple. Cette technique de résolution est très courante en calcul des probabilités. Elle consiste à se fixer une valeur de ϕ et à rechercher pour cette valeur les bornes du domaine d'intégration à l'aide de l'inégalité (3). Une fois ces bornes déterminées, on entreprend le calcul de l'intégrale (2) de façon classique.

4. CONDITION AUX LIMITES. DETERMINATION DE λ

Le calcul précédent est effectué à la constante multiplicative λ près.

Soit une sphère de diamètre y soumise à un système de forces radiales ϕ_i . Nous appellerons pression équivalente la valeur p_e telle que :

$$p_e = \frac{\sum \phi_i}{\pi y^2}$$

Cette pression équivalente est variable suivant les particules, mais sa valeur moyenne dans tout le mélange est égale à la pression isotrope s'exerçant sur le contour du milieu granulaire. Cette égalité nous permet de définir la valeur de t_0 et donc de λ .

En effet, si p est la pression isotrope exercée sur le matériau on a :

$$\lambda \iint_{\Delta} \frac{t^2 f(x)}{x^3} \phi(x,y,t) \, dx \, dt = \pi p y^2$$

Δ étant défini par :

$$x \in [d_0, d_1]$$

$$t \in [t_0, \frac{x+y}{2}]$$

5. VERIFICATION EXPERIMENTALE

La théorie exposée précédemment peut également être appliquée au cas des milieux bidimensionnels (rouleaux cylindriques pressés les uns contre les autres suivant leurs génératrices). L'avantage d'une telle formulation est de pouvoir être vérifiée expérimentalement. Nous nous contenterons de donner ici, sans les démontrer, les résultats soit :

$$F_{\phi}(\phi) = \lambda \iint_{\Delta} \frac{t f(x)}{x^2} \, dx \, dt \quad (4)$$

Le domaine d'intégration est alors défini par :

$$\frac{3\pi}{8D} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \left(-\frac{t^2}{4} + \frac{x^2 + y^2}{8} - \frac{(x^2 - y^2)^2}{64t^2} \right) \leq \phi \quad (5)$$

La pression isotrope équivalente est ici :

$$p_e = \frac{\sum \phi_i}{\pi y} \quad (6)$$

5.1 Appareillage expérimental

SCHNEEBELI a montré la possibilité de réaliser un milieu pulvérulent obéissant à la loi de COULOMB par un empilage de petits cylindres parallèles et de même longueur. Un tel modèle permet l'étude de problèmes à deux dimensions et de nombreux auteurs l'ont utilisé pour mieux comprendre les schémas de rupture du sol. Récemment, FAUGERAS [3, 4] a mis au point une technique permettant de déterminer l'état de contrainte en tous points d'un tel massif analogique. La technique expérimentale utilisée dans le cadre de cette étude s'appuie sur les mêmes principes.

Considérons un ensemble de rouleaux cylindriques pressés les uns contre les autres à l'intérieur d'un appareil de compression biaxial (figure 1) de telle sorte que les rouleaux aient leur génératrice verticale. Si nous appliquons deux efforts de compression identiques selon les deux axes de l'appareil, le matériau granulaire est soumis à un champ de contrainte isotrope.

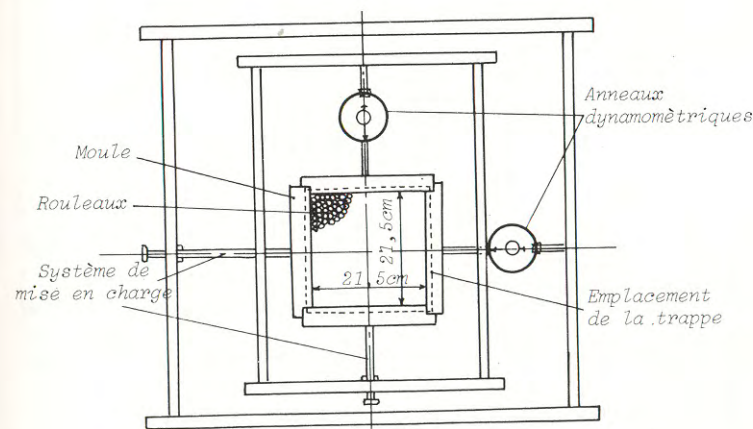


Figure 1. Appareil de compression biaxiale.

La pression appliquée sera élevée par rapport à leur poids propre de façon que celui-ci puisse être négligé.

Une trappe placée sous l'appareil est ouverte. Il est alors possible, pour chaque rouleau, de mesurer la force ϕ_1 nécessaire à son déplacement longitudinal. Cette force est proportionnelle à la somme des forces radiales s'exerçant sur le rouleau, soit :

$$\phi_1 = \text{tg } \delta \sum \phi_i, \delta \text{ étant l'angle de frottement longitudinal des rouleaux.}$$

Compte tenu de l'expression (6), il est possible de connaître ainsi la pression équivalente s'exerçant sur le rouleau, soit :

$$P_e = \frac{\phi_1}{y \text{ tg } \delta}$$

On peut donc construire, grâce à cette expérience, l'histogramme des fréquences relatives de la pression équivalente pour chaque diamètre de rouleau.

Le matériau utilisé est constitué de rouleaux en P.V.C. de 6 cm de longueur et de diamètres 2, 3 et 4 mm dont la granulométrie est donnée par le tableau suivant :

Diamètre y des rouleaux	Surface cumulée [f(y)]
2 mm	0,184
3 mm	0,296
4 mm	0,520

Les caractéristiques élastiques du P.V.C. utilisé sont les suivantes :

$$E = 1100 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,36$$

La comparaison entre les résultats expérimentaux et un calcul mené à partir des expressions 4, 5 et 6 est donnée par les figures 2, 3 et 4.

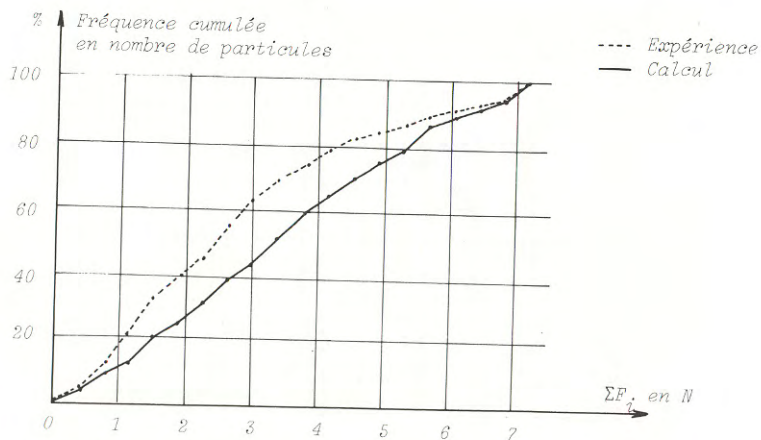


Figure 2. Fréquence cumulée des forces radiales appliquées sur les rouleaux (rouleaux de 2mm).

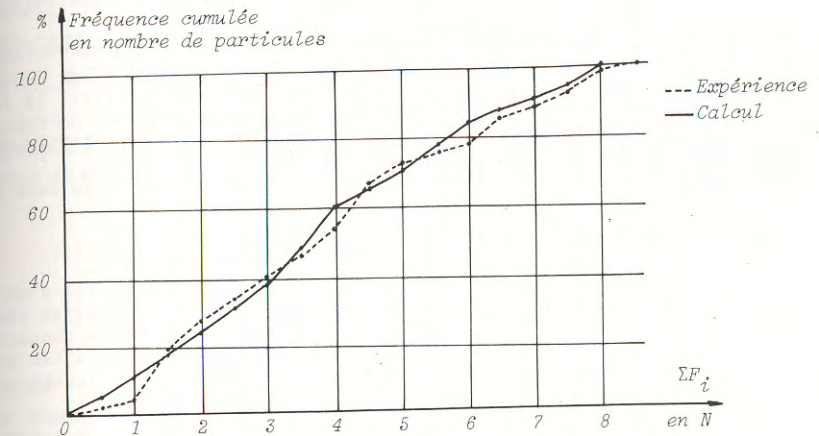


Figure 3. Fréquence cumulée des forces radiales appliquées sur les rouleaux (rouleaux de 3mm).

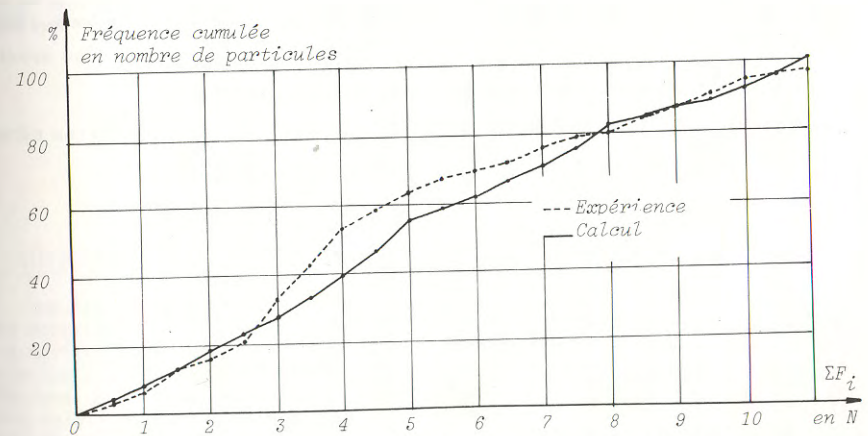


Figure 4. Fréquence cumulée des forces radiales appliquées sur les rouleaux (rouleaux de 4mm).

5.2 Résultats et analyse

Les résultats correspondent à des échantillons statistiques de 128 particules pour chaque diamètre. La comparaison entre résultats expérimentaux et théoriques est extrêmement satisfaisante.

Dans le cas traité ici, on voit que la répartition des forces de contact est très proche de la répartition uniforme, ce qui explique nettement l'une des raisons qui différencie un matériau granulaire d'un matériau continu. En effet, la pression équivalente, et donc les forces de contact intergranulaires, varient de façon considérable d'un point à un autre du matériau alors que le matériau continu équivalent est supposé être soumis à un état de contrainte constant.

On voit apparaître ainsi l'explication des dispersions constatées dans les mesures de contraintes au sein des matériaux pulvérulents.

6. CONCLUSION

Les résultats obtenus dans le cadre de cette étude nous permettent d'envisager, à partir du calcul des probabilités et toujours dans le cas d'un matériau isotrope, un certain nombre de développements théoriques et en particulier ceux concernant les lois de comportement mécanique. Il nous semble en effet possible de relier la loi de comportement du matériau aux propriétés mécaniques du matériau constitutif des grains, du moins en faisant l'hypothèse d'élasto-fragilité pour ceux-ci.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] G. SCHNEEBELI : "Une analogie mécanique pour les terres sans cohésion." Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences, Tome 243, Paris 1956.
- [2] LANDAU L. et LIFCHITZ E. : "Théorie de l'Elasticité". Editions Mir, pages 42 à 49, Moscou 1967.
- [3] FAUGERAS J.C. : "L'essai de compressibilité des sols au pénétromètre statique et son interprétation sur modèle analogique". Thèse de Doctorat de 3ème cycle, Université Paul Sabatier, Toulouse 1979.
- [4] FAUGERAS J.C. et GOURVES R. : "Mesure des contraintes au sein d'un massif analogique de Schneebeli". Revue Française de Géotechnique, n°11, Paris mai 1980.
- [5] GOURVES R. : "Etude probabiliste de la morphologie et des propriétés mécaniques d'un mélange granulaire non pesant". Thèse de Doctorat d'Etat, Clermont-Ferrand (à paraître).

COMPORTEMENT MECANIQUE DES MILIEUX GRANULAIRES EN LIAISON AVEC LEUR STRUCTURE

MECHANICAL BEHAVIOUR OF GRANULAR MEDIA IN RELATION WITH THEIR STRUCTURE

F. DARVE et S. LABIANEH

Institut de Mécanique - Saint-Martin-d'Hères - France

RESUME

Nous dégageons d'abord les principales implications rhéologiques des caractéristiques du comportement structural d'un milieu granulaire : irréversibilité plastique, anisotropie, dilatace, non-linéarité incrémentale. Puis nous présentons une loi rhéologique incrémentale non linéaire du second ordre, prenant en compte ces caractéristiques. Enfin, nous donnons quelques exemples d'application.

ABSTRACT

First, in this paper we draw the principal rheological inferences from the characteristics of the structural behaviour of a granular medium, i.e. plastic irreversibility, anisotropy, dilatancy, incremental constitutive non-linearity. Next, we present an incremental non-linear of second order constitutive law, taking into account these characteristics. Finally, we give some examples of how this can be applied.

1. INTRODUCTION

Une loi rhéologique est une fonctionnelle reliant des grandeurs macroscopiques ponctuelles (contraintes, déformations, leurs dérivées, ...) permettant de caractériser le comportement mécanique d'un milieu donné. Des principes généraux (principe d'isotropie de l'espace, principe d'objectivité, premier et deuxième principes de la thermodynamique) permettent de limiter les formes possibles de cette relation, mais l'imagination du chercheur peut s'exercer sur un (trop ?) vaste domaine puisqu'il peut choisir - en apparence - diverses classes de formulations (hypoélasticité, élasto-plasticité à simple potentiel, à potentiel multiple, etc...) pour décrire un même comportement. Une autre démarche consiste à partir du comportement microstructural pour aboutir par construction à la loi

macroscopique. Nous voudrions montrer ici comment une analyse qualitative approfondie des comportements micro et macro-structural permet de choisir, dans une large mesure, une classe donnée de lois constitutives sur des bases physiques clairement dégagées.

Nous prendrons comme exemple le sable, mais cette démarche a été appliquée aux argiles (DARVE et al. [1]) et à la neige (DESRUES et al. [2]), elle pourrait être appliquée aux autres comportements "solides".

2. COMPORTEMENT STRUCTURAL ET CARACTERISTIQUES RHEOLOGIQUES DES MILIEUX GRANULAIRES

Un sable sec est un assemblage de grains de silice, visibles à l'oeil nu, en contact les uns avec les autres. La dimension des grains impose immédiatement que les forces d'attraction-répulsion du type Van der Waals vont être négligeables par rapport aux autres forces mises en jeu : le milieu ne sera donc pas cohérent (notons qu'un sable humide, non saturé, devient cohérent grâce aux forces de tension superficielle qui "collent" les grains les uns aux autres : les enfants sur les plages savent bien qu'ils ne peuvent construire leurs châteaux ni avec le sable sec des dunes, ni avec le sable saturé sous l'eau).

Au niveau structural, les mécanismes provoquant la déformation sont de deux types : d'une part, il se produit des glissements-rotations inter-granulaires, d'autre part les grains eux-mêmes se déforment élastiquement aux points de contact et des aspérités et des grains se rompent. Dans cette liste de mécanismes, ne figure que des processus élastiques - par définition, réversibles - ou plastiques - par définition, irréversibles et indépendants des vitesses de sollicitation - : le milieu considéré sera donc dénué de viscosité. BIAREZ [3] a vérifié expérimentalement qu'un changement de la vitesse de sollicitation était sans influence sur le comportement du milieu.

Au cours de la mise en place du matériau, certaines forces de contact inter-granulaires seront dirigées suivant le cône de frottement local. Dès la plus petite sollicitation, il se produira des glissements-rotations irréversibles : il n'existe donc pas de domaine élastique (HABIB [4]) (par exemple, essais oedométriques et triaxiaux cycliques de CAMBOU [5] et AL-ISSA [6]). Cependant une partie de la déformation peut être élastique.

La déformation d'une structure constituée par un assemblage de grains induit un réarrangement anisotrope de cette structure : apparition d'une anisotropie géométrique qui se traduit par une anisotropie mécanique. Les plans tangents aux points de contact inter-granulaires vont avoir tendance à s'orienter perpendiculairement à la direction de déformation principale la plus forte et le nombre de points de contact dans cette direction va augmenter (par exemple, mesures de WIENCIECK [7]). Si un milieu granulaire vierge a un comportement sensiblement isotrope, ce n'est plus du tout le cas du milieu déformé. Des cycles de compression isotrope effectués sur un échantillon de sol, préalablement déformé, produisent des déformations qui ne sont pas du tout isotropes (BIAREZ [3]), confirmant ainsi l'apparition d'une anisotropie induite par le chemin de déformation antérieure.

Si on impose un déviateur de contrainte à une structure granulaire très lâche, les glissements-rotation des grains vont produire un tassement global de la structure. Mais, dans le cas général d'une structure moyennement lâche ou plus dense, tout mouvement relatif important d'un grain par rapport à un autre induit plutôt un désenchevêtrement de l'assemblage, c'est-à-dire une dilatance globale. Cette variation de volume (premier invariant des déformations) liée au deuxième invariant des contraintes a été très généralement observée dans les milieux granulaires (par exemple, BIAREZ [3], AL-ISSA [6]). Par rapport à elle, la variation de volume induite par des variations du premier invariant des contraintes reste faible.

Le mécanisme principal produisant la déformation est, nous l'avons vu le frottement inter-granulaire : il s'agit donc d'un frottement solide caractérisé par un cône de frottement. La résistance tangentielle au glissement est donc proportionnelle à la composante normale de la force de contact. Par suite, la con-

trainte de cisaillement à la rupture va être nécessairement influencée par la valeur de la contrainte normale. L'expression du critère de plasticité dépend de la contrainte moyenne, c'est-à-dire du premier invariant des contraintes (on sait qu'une bonne approximation de ce critère de plasticité est fournie par la pyramide hexagonale irrégulière de MOHR-COULOMB).

L'existence du phénomène de dilatance et la sensibilité du critère de plasticité par rapport au premier invariant implique aussitôt qu'un milieu granulaire est non-standard, c'est-à-dire que la règle de normalité ne peut pas lui être appliquée (règle d'écoulement et critère de plasticité ne coïncident pas). Comme ordre de grandeur, l'expérience peut fournir pour un sable dense un "angle de frottement" (au sens du critère de MOHR-COULOMB) de 38° pour un "angle de dilatance" (la définition en est rappelée, par exemple, dans DARVE et al. [8]) de 17° , alors qu'un sable standard verrait ses deux angles égaux (pour un sable lâche, on pourrait trouver respectivement 30° et 8°).

Rappelons que le caractère standard de la plasticité d'un métal vient de deux approximations souvent légitimes : non-variation de volume plastique et critère de plasticité insensible au premier invariant.

Dans le cas de mono-cristaux métalliques dont la disposition régulière fait apparaître des directions de plans de micro-glissement privilégiés, la théorie de "la plasticité à potentiels multiples" (MANDEL [9], HILL [10]) permet de décrire leur rupture plastique. L'écoulement est caractérisé par une singularité de la surface d'écoulement, qui se déforme localement en pyramide. Au contraire, dans un assemblage de grains aux formes quelconques il n'existe aucune direction de glissement privilégiée ni un nombre fini de mécanismes de glissement. A priori, la direction de l'écoulement plastique incrémental du milieu granulaire n'est pas seulement fonction de l'état de contrainte courant (cas d'une surface d'écoulement régulière) mais aussi de la direction du tenseur de contrainte incrémental : la surface d'écoulement sera singulière à singularité non plus seulement pyramidale mais quelconque. Dans le cas de singularités pyramidales, le tenseur reliant la déformation incrémentale à la contrainte incrémentale a un nombre fini de déterminations différentes (c'est le cas des lois "multi-linéaires" ou "linéaires par branches"). Pour une singularité quelconque, cela signifie que la loi incrémentale d'un milieu granulaire est complètement non-linéaire.

En conclusion, nous venons de voir qu'une structure composée d'un assemblage de grains, visibles à l'oeil nu, en contact les uns avec les autres, a un comportement rhéologique nécessairement caractérisé par :

- une absence de cohésion et de viscosité
- l'inexistence d'un domaine de comportement élastique
- une anisotropie induite par l'histoire de la déformation
- la dilatance sous cisaillement
- un critère de plasticité sensible à la contrainte moyenne
- une règle d'écoulement non-associée et, en outre, singulière
- une loi rhéologique incrémentale non-linéaire.

La loi que nous présentons dans le prochain paragraphe tente de prendre en compte ces caractéristiques.

3. UNE LOI RHEOLOGIQUE INCREMENTALE NON-LINEAIRE POUR LES MILIEUX GRANULAIRES

3.1. Préliminaires

Le comportement mécanique de ces milieux est insensible aux vitesses de sollicitation (dans le domaine statique, nous venons de le voir) et à la température. Nous négligerons donc les effets de temps et de température. Nous noterons $d\epsilon$ la petite déformation pure courante et $d\sigma$ l'incrément de contraintes de CAUCHY, pris en axes co-rotationnels (si l'on veut rattacher ces quantités aux vitesses, ce sont les produits des vitesses correspondantes par l'incrément de temps). En outre, aux tenseurs $[d\epsilon_{ij}]$ et $[d\sigma_{kl}]$, nous associerons les vecteurs à six composantes $\{d\epsilon_\alpha\}$ et $\{d\sigma_\beta\}$ par :

$$\{d\epsilon_{\alpha}\} = \{d\epsilon_{11}, d\epsilon_{22}, d\epsilon_{33}, \sqrt{2} d\epsilon_{23}, \sqrt{2} d\epsilon_{31}, \sqrt{2} d\epsilon_{12}\}, \text{ repéré dans un espace noté } E_6$$

$$\{d\sigma_{\beta}\} = \{d\sigma_{11}, d\sigma_{22}, d\sigma_{33}, \sqrt{2} d\sigma_{23}, \sqrt{2} d\sigma_{31}, \sqrt{2} d\sigma_{12}\}, \text{ repéré dans un espace noté } S_6$$

A tout instant, ces deux vecteurs sont liés par une certaine fonction vectorielle G , dépendant de l'histoire de la sollicitation et des valeurs courantes des contraintes et des déformations :

$$d\epsilon = G(d\sigma) \quad (1)$$

Nous avons vu dans le paragraphe 2 que le comportement est indépendant des vitesses de sollicitation. Cette condition implique que : quel que soit le réel λ positif ou nul :

$$G(\lambda d\sigma) = \lambda G(d\sigma) \quad (2)$$

La fonction G est donc homogène d'ordre 1 (dans un sens restreint aux valeurs positives du paramètre multiplicatif). Mais d'après le paragraphe 2, G est par ailleurs non-linéaire. Plus précisément, la condition d'homogénéité (2) n'impose qu'à la restriction G^* de G , à l'hyper-cône infiniment petit entourant $\{d\sigma\}$, d'être linéaire :

$$\text{ainsi : } d\epsilon_{\alpha} = G^*(d\sigma_{\beta}) \equiv M_{\alpha\beta} d\sigma_{\beta} \quad (3)$$

Notons que, si, en tant que restriction de G , la Matrice M est définie unique, par contre la donnée d'un couple $(\{d\epsilon_{\alpha}\}, \{d\sigma_{\beta}\})$ ne suffit pas pour la déterminer - on sait qu'il faudrait exactement six couples linéairement indépendants. Par exemple, on peut ajouter à M toute matrice de la forme $n \otimes n$, où $\{n\}$ est un vecteur orthogonal à $\{d\sigma\}$ et où le signe \otimes représente le produit extérieur, sans changer la valeur de $\{d\epsilon\}$ (CHRISTOFFERSEN et HUTCHINSON [11]).

Soit $\{u_{\beta}\}$ le vecteur unitaire dans la direction de $\{d\sigma_{\beta}\}$. La matrice M , caractérisant la restriction de G à l'hyper-cône infiniment petit entourant le vecteur $\{d\sigma\}$ courant, est donc fonction de $\{u\}$:

$$d\epsilon_{\alpha} = M_{\alpha\beta}(u_{\beta}) d\sigma_{\beta} \quad (4)$$

$M(u)$ représente la génération tangentielle de G ; elle caractérise la dépendance directionnelle de M , c'est-à-dire la non-linéarité incrémentale de la loi rhéologique.

Conformément aux résultats du paragraphe 2, nous rejetterons tout autant les modèles élasto-plastiques classiques du type "bi-linéaire" pour lesquels on définit deux matrices M^E et M^P correspondant aux domaines élastique et élasto-plastique (que ces lois soient d'ailleurs du type standard ou non-standard) que les modèles élasto-plastiques à plusieurs potentiels qui mènent à des lois "multi-linéaires". Nous nous intéressons ici à une loi complètement non-linéaire c'est-à-dire à une matrice M variant continuellement avec u .

3.2. Une loi rhéologique incrémentale non-linéaire

La première hypothèse consiste à supposer qu'il existe un repère dans lequel la loi incrémentale est orthotrope. Une conséquence de cette hypothèse est que la matrice M ne peut plus varier qu'avec la direction de la projection \bar{u} de u sur le sous-espace S_3 de dimension 3, défini par les trois premiers axes de l'espace S_6 . En effet, la loi, exprimée dans le repère d'orthotropie, doit rester invariante par symétrie par rapport aux trois plans de coordonnées. Une autre conséquence (classique) de l'hypothèse d'orthotropie est l'apparition d'un certain nombre de zéros dans l'expression de la matrice M dans le repère d'orthotropie :

$$\begin{bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\epsilon_{22} \\ d\epsilon_{33} \\ d\epsilon_{23} \\ d\epsilon_{31} \\ d\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & F & E & & & \\ F' & B & D & & & \\ E' & D' & C & & & \\ & & & 2G & & \\ & & & & 2H & \\ & & 0 & & & 2J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ d\sigma_{23} \\ d\sigma_{31} \\ d\sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Lié à l'hypothèse d'orthotropie est le problème de la définition du repère d'orthotropie. Pour un matériau isotrope, les repères principaux des contraintes totales et des déformations totales coïncident et constituent le repère d'orthotropie de la loi incrémentale. Dans le cas général, ces deux trièdres ne coïncident plus et il semble préférable de considérer le repère principal des déformations totales - et même des déformations totales irréversibles (discussion plus détaillée dans DARVE [12]). Cette hypothèse permet de décrire l'anisotropie, analysée dans le paragraphe 2 et rencontrée dans les essais de laboratoire existants (c'est-à-dire tous les essais triaxiaux sans rotation d'axes et le cisaillement simple cyclique).

Des hypothèses supplémentaires, portant sur une variation quasi-ellipsoïdale de certaines propriétés mécaniques, nous ont permis (DARVE [13]) d'expliquer les trois éléments G, H, J en fonction des neuf autres :

$$G = \sqrt{\frac{B^2 + C^2}{2}} - \frac{B + C}{4} - \frac{D + D'}{4} \quad (6)$$

Nous sommes ainsi ramenés à étudier une loi de la forme :

$$\begin{bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\epsilon_{22} \\ d\epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & F & E \\ F' & B & D \\ E' & D' & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (7)$$

soit : $\{d\epsilon\} = [N(\bar{u})] \{d\sigma\}$, où toutes les grandeurs sont exprimées dans le repère d'orthotropie courant.

Par définition de $\{\bar{u}\}$, ses composantes sont égales à :

$$u_i = \frac{d\sigma_{ii}}{\|d\sigma\|} \quad (\text{sans sommation sur les indices}) \quad (8),$$

où $\|d\sigma\|$ est une norme de $\{d\sigma\}$, par exemple :

$$\|d\sigma\| = \sqrt{(d\sigma_{11})^2 + (d\sigma_{22})^2 + (d\sigma_{33})^2 + (d\sigma_{23})^2 + (d\sigma_{31})^2 + (d\sigma_{12})^2}$$

Dans le cadre d'une expression polynomiale du tenseur $[d\epsilon_{ij}]$ en fonction du tenseur $[d\sigma_{kl}]$, l'identité de CAYLEY-HAMILTON permet de ne faire intervenir que des termes du premier et du second ordre, les ordres plus élevés étant fonctions des deux premiers. Nous avons donc choisi une variation linéaire de N avec \bar{u} , de la forme :

$$[N(\bar{u})] = [A] + [B] [\delta_{ij} u_j] \quad (9)$$

où A et B représentent 2 matrices carrées 3×3 , δ_{ij} le symbole de KRONECKER et où il n'y a pas de sommation sur les indices.

En reportant (9) dans (7) et en tenant compte de (8), nous obtenons :

$$\{d\epsilon\} = [A] \{d\sigma\} + \frac{[B]}{\|d\sigma\|} \{d\sigma^2\} \quad (10)$$

expression d'une loi non-linéaire du second ordre, dans laquelle il nous reste à identifier les matrices A et B .

Pour une loi linéaire, nous savons qu'il nous faudrait nous donner les transformées dans E_3 de trois vecteurs linéairement indépendants de S_3 . Dans notre cas, puisque nous avons deux matrices à identifier, il nous faut connaître les transformées de six vecteurs de S_3 dans E_3 . Nous avons choisi les trois vecteurs de base de S_3 et leurs opposés : nous allons voir comment nous allons les associer à des essais conventionnels de mécanique des sols.

3.3. Données nécessaires

Soient i_1, i_2, i_3 trois vecteurs, formant une base orthonormée de S_3 . Nous nous donnons le comportement du matériau pour les sollicitations incrémentales correspondant aux six vecteurs $\pm i_1, \pm i_2$ et $\pm i_3$. Pour cela, nous supposons que l'expérience nous a permis d'identifier les trois familles de fonctions f, g, h pour la classe de chemins de sollicitation tels qu'une seule

contrainte principale varie (notée σ_k), les deux autres étant constantes non nécessairement égales (σ_j et σ_l) et toutes les directions principales restant fixes et confondues :

$$\begin{aligned} \sigma_k &= f(\varepsilon_k, \sigma_j, \sigma_l) & (\sigma_j, \sigma_l \text{ constants}) \\ \varepsilon_j &= g(\varepsilon_k, \sigma_j, \sigma_l) & ; \quad \varepsilon_l = h(\varepsilon_k, \sigma_j, \sigma_l) \\ k, j, l &= 1, 2, 3 & ; \quad k \neq j \neq l \end{aligned}$$

Ces trois familles de fonctions sont supposées connues en compression (σ_k croissant) : nous les noterons f^+, g^+, h^+ ; et en extension (σ_k décroissant) : nous les noterons f^-, g^-, h^- .

Nous posons, par définition :

$$\begin{cases} U_k = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_k} \right)_{\sigma_j, \sigma_l} \\ V_k^j = - \left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_k} \right)_{\sigma_j, \sigma_l} & ; \quad V_k^l = - \left(\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_k} \right)_{\sigma_j, \sigma_l} \end{cases} \quad (12)$$

en notant U_k^+, V_k^{j+} et V_k^{l+} les dérivées correspondant à f^+, g^+, h^+ et U_k^-, V_k^{j-} et V_k^{l-} celles correspondant à f^-, g^-, h^- .

Par définition (11) des fonctions f, g, h et par construction (12) des dérivées U_k, V_k^j, V_k^l , la réponse incrémentale du matériau à la sollicitation $\pm i_k$ est donnée dans l'espace E_3 , par :

$$\begin{cases} d\varepsilon_{kk} = 1/U_k \\ d\varepsilon_{jj} = -V_k^j/U_k \\ d\varepsilon_{ll} = -V_k^l/U_k \end{cases} \quad (\text{sans sommation sur les indices}) \quad (13)$$

($\bar{a} + i_k$ doivent être associés $U_k^+, V_k^{j+}, V_k^{l+}$; $\bar{a} - i_k, U_k^-, V_k^{j-}, V_k^{l-}$).

Posons enfin :

$$[N^+] = \begin{bmatrix} 1 & -V_2^{1+} & -V_3^{1+} \\ U_1^+ & U_2^+ & U_3^+ \\ -V_1^{2+} & 1 & -V_3^{2+} \\ U_1^+ & U_2^+ & U_3^+ \\ -V_1^{3+} & -V_2^{3+} & 1 \\ U_1^+ & U_2^+ & U_3^+ \end{bmatrix} \quad (14)$$

et $[N^-]$ de manière semblable.

On peut maintenant identifier le comportement du matériau donné par la relation (10) avec le comportement connu pour les sollicitations $\pm i_1, \pm i_2, \pm i_3$ en faisant successivement :

$$\{d\sigma\} = \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Nous en tirons : } \begin{cases} A + B = N^+ \\ A - B = N^- \end{cases}$$

$$\text{Soit : } A = (N^+ + N^-) / 2 \quad \text{et} \quad B = (N^+ - N^-) / 2$$

D'où finalement :

$$\{d\varepsilon\} = \frac{1}{2} [N^+ + N^-] \{d\sigma\} + \frac{1}{2 \|d\sigma\|} [N^+ - N^-] \{d\sigma^2\} \quad (15)$$

Les relations (15) et (6) fournissent l'expression générale de la loi non-linéaire du second ordre.

Nous retrouvons le cas limite du matériau purement élastique pour lequel N^+ et N^- sont identiques à tout instant.

Pour les calculs qui suivent, nous allons nous restreindre au cas où les différents repères principaux et d'orthotropie sont confondus et fixes.

La partie plastique de la petite déformation se calcule alors facilement et est égale à :

$$\{d\varepsilon^p\} = \frac{1}{\|d\sigma\|} [N^+ - N^-] \{d\sigma^2\} \quad (16)$$

Le calcul de la dissipation, égale au produit scalaire du vecteur contrainte principale par le vecteur déformation plastique principale (16) donne une somme de trois termes dont le terme générique est :

$$\frac{\sigma_k}{\|d\sigma\|} \left[\left(-\frac{1}{U_k^+} - \frac{1}{U_k^-} \right) (d\sigma_k)^2 + \left(-\frac{V_j^{k+}}{U_j^+} + \frac{V_j^{k-}}{U_j^-} \right) (d\sigma_j)^2 + \left(-\frac{V_l^{k+}}{U_l^+} + \frac{V_l^{k-}}{U_l^-} \right) (d\sigma_l)^2 \right]$$

les indices k, j, l permutant circulairement parmi $\{1, 2, 3\}$.

Sachant que le second principe de la thermodynamique impose à la dissipation d'être strictement positive quels que soient $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ (qui représentent trois valeurs propres indépendantes) et en ordonnant l'expression de la dissipation en $(d\sigma_1)^2, (d\sigma_2)^2, (d\sigma_3)^2$, nous en déduisons les trois inégalités suivantes (avec permutation circulaire de $\{k, j, l\}$ parmi $\{1, 2, 3\}$) :

$$\sigma_k \left(\frac{1}{U_k^+} - \frac{1}{U_k^-} \right) - \sigma_j \left(\frac{V_k^{j+}}{U_k^+} - \frac{V_k^{j-}}{U_k^-} \right) - \sigma_l \left(\frac{V_k^{l+}}{U_k^+} - \frac{V_k^{l-}}{U_k^-} \right) > 0 \quad (17)$$

En conclusion, nous avons complètement explicité la loi rhéologique non-linéaire, à partir de la connaissance du comportement du matériau pour des chemins de sollicitation que l'on pourrait qualifier de "triaxiaux généralisés", puisque deux contraintes principales restent constantes en étant éventuellement distinctes. La formulation analytique des fonctions f, g, h que nous proposons sera détaillée dans le paragraphe suivant ; ces expressions font intervenir certaines constantes qui représentent "les paramètres constitutifs" du matériau considéré.

En tant que loi non-linéaire du second ordre, cette loi se rapproche du modèle de KOLYMBAS et GUDEHUS [14] et en tant qu'extrapolation du comportement du matériau pour des chemins triaxiaux généralisés, elle est comparable aux lois de CHAMBON [15] et ROBINET [16]. Elle généralise la loi octo-linéaire que nous avons précédemment développée (DARVE et al. [18, 17, 8, 1, 19]) ; elle permet de prendre en compte l'ensemble des caractéristiques auxquelles nous avons abouti dans le paragraphe 2.

4. CALCUL DES PARAMETRES CONSTITUTIFS ET APPLICATIONS

4.1. Expressions analytiques des fonctions f, g, h dans le cas des sols

Nous voulons préciser dans ce paragraphe les formulations que nous avons

choisies pour exprimer f, g, h :

$$\sigma_1 = f(\varepsilon_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$\varepsilon_2 = g(\varepsilon_1, \sigma_2, \sigma_3) ; \varepsilon_3 = h(\varepsilon_1, \sigma_2, \sigma_3),$$

où σ_2 et σ_3 restent constants, non nécessairement égaux, et où ces fonctions doivent être définies pour des compressions ($\varepsilon_1 > 0$) et des extensions ($\varepsilon_1 < 0$).

Dans un premier temps, nous nous limiterons à décrire le comportement du matériau pour des chemins triaxiaux de révolution ($\sigma_2 = \sigma_3$), c'est-à-dire à exprimer les fonctions f^* et k :

$$\sigma_1 = f^*(\varepsilon_1, \sigma_3) ; e = k(\varepsilon_1, \sigma_3),$$

où e représente l'indice des vides courant.

Précédemment (DARVE et al [13, 17, 18]), la formulation choisie pour la fonction f^* permettait de décrire un "pic" de résistance, tandis que la fonction k admettait une asymptote horizontale (indice des vides "critique") en grandes déformations. Des théories récentes (VARDOULAKIS et al [20], DARVE et al. [8]) ont montré qu'il pourrait y avoir bifurcation d'un mode de déformation diffus sensiblement homogène vers un mode localisé avec développement d'une ou plusieurs surface de rupture. Si l'on admet cette formation de surfaces de cisaillement (le plus souvent visibles expérimentalement), qui produisent une chute d'une part de la résistance de l'échantillon et d'autre part du taux de variation de volume, il faut conclure que la diminution de la résistance après le "pic" - et le "pic" lui-même si les hétérogénéités sont apparues avant - ainsi que l'existence d'un indice des vides "critique" ne sont pas des phénomènes rhéologiques proprement dits mais les produits d'un comportement macrostructural. Dès lors, par les expressions de f^* et k, il nous suffit de décrire un comportement sans chute de résistance et à dilataance indéfinie (pour les sols denses) - cette dilataance indéfinie produisant, dans un échantillon réel, une instabilité du mode de déformations qui se localisent, par exemple, en surfaces de rupture.

L'expression de f^* est la suivante :

$$\sigma_1 = f^*(\varepsilon_1, \sigma_3) = \sigma_i + \sigma_3 C_N \frac{\exp \left[\frac{A_1 |\varepsilon_1 - \varepsilon_i|}{A_1 |\varepsilon_1 - \varepsilon_i| + A_s} \right] - 1}{\exp \left[\frac{A_1 |\varepsilon_1 - \varepsilon_i|}{A_1 |\varepsilon_1 - \varepsilon_i| + A_s} \right] + A_s}$$

où, pour un chargement monotone, ε_i représente la déformation isotrope sous $\sigma_i = \sigma_1 = \sigma_3$ et, pour un chargement cyclique, σ_i et ε_i représentent les valeurs de σ_1 et ε_1 au dernier changement de sens de la sollicitation.

C_N et A_s s'expriment en fonction de l'angle de frottement à la rupture (constant égal à θ , ou fonction de σ_3) et du "module de Young" initial U_i (pour $\sigma_1 = \sigma_i$).

A_1 est un paramètre constant pour un chargement monotone et fonction de la déformation au dernier changement de sens de la sollicitation en cyclique.

La fonction k utilisée a pour expression :

$$e = k(\varepsilon_1, \sigma_3) = e_i - Y_m (1 - \exp [-A_Y (\varepsilon_1 - \varepsilon_i)]) + B_Y (\varepsilon_1 - \varepsilon_i) - C_Y (\varepsilon_1 - \varepsilon_i)^2 \exp [-D_Y (\varepsilon_1 - \varepsilon_i)],$$

où, pour un chargement monotone, e_i représente l'indice des vides sous la contrainte isotrope $\sigma_i = \sigma_1 = \sigma_3$ et, pour un chargement cyclique, l'indice des vides au dernier changement de sens de la sollicitation.

A_Y, B_Y, C_Y, D_Y sont fonctions du "coefficient de Poisson" initial ν_i (pour $\sigma_1 = \sigma_i$), de la dilataance du matériau (caractérisée par un "coefficient de Poisson" de dilataance ν_M), de l'angle de frottement caractéristique θ_C (au sens de HABILB et LUONG [21]) et de l'amplitude de la contractance (en compression) notée Y_m .

Le passage de la fonction f^* à la fonction f se fait principalement par l'introduction de la contrainte intermédiaire dans le critère de plasticité

(DARVE [13]). L'expression des fonctions g et h s'obtient à partir de k en ajoutant une relation supplémentaire entre ε_2 et ε_3 (DARVE [13]).

4.2. Les paramètres constitutifs d'un matériau

Il apparaissent successivement pour exprimer :

- l'angle de frottement : constant et égal à θ
ou fonction de σ_3 : $\tan \theta = \frac{A_4}{A_5 + \sigma_3} + \tan \theta_C$
- le module initial : $U_i = K \sqrt{\sigma_m}$ (σ_m : contrainte moyenne initiale)
- le coefficient de Poisson initial : ν_i constant
- le coefficient de dilataance (en compression) :
 $\nu_{11} = 0.5 + B_1 / (\sigma_m + 1)$ (σ_m : contrainte moyenne en plasticité)
- l'angle de frottement caractéristique : θ_C constant
- l'amplitude de la contractance, fonction du rapport B_2 entre les pentes de la tangente initiale de la courbe $e(\varepsilon_1)$ et la droite joignant l'origine au minimum de cette courbe.

Les paramètres $A_4, A_5, \theta_C, K, \nu_i, B_1, B_2$ (avec en outre A_2 et A_3 caractérisant la dilataance en extension) sont fonctions du matériau et de sa densité à l'état de référence.

Une série d'expériences de compressions et d'extensions sous différentes étreintes latérales suffit pour les déterminer par calage des courbes expérimentales avec les formulations proposées.

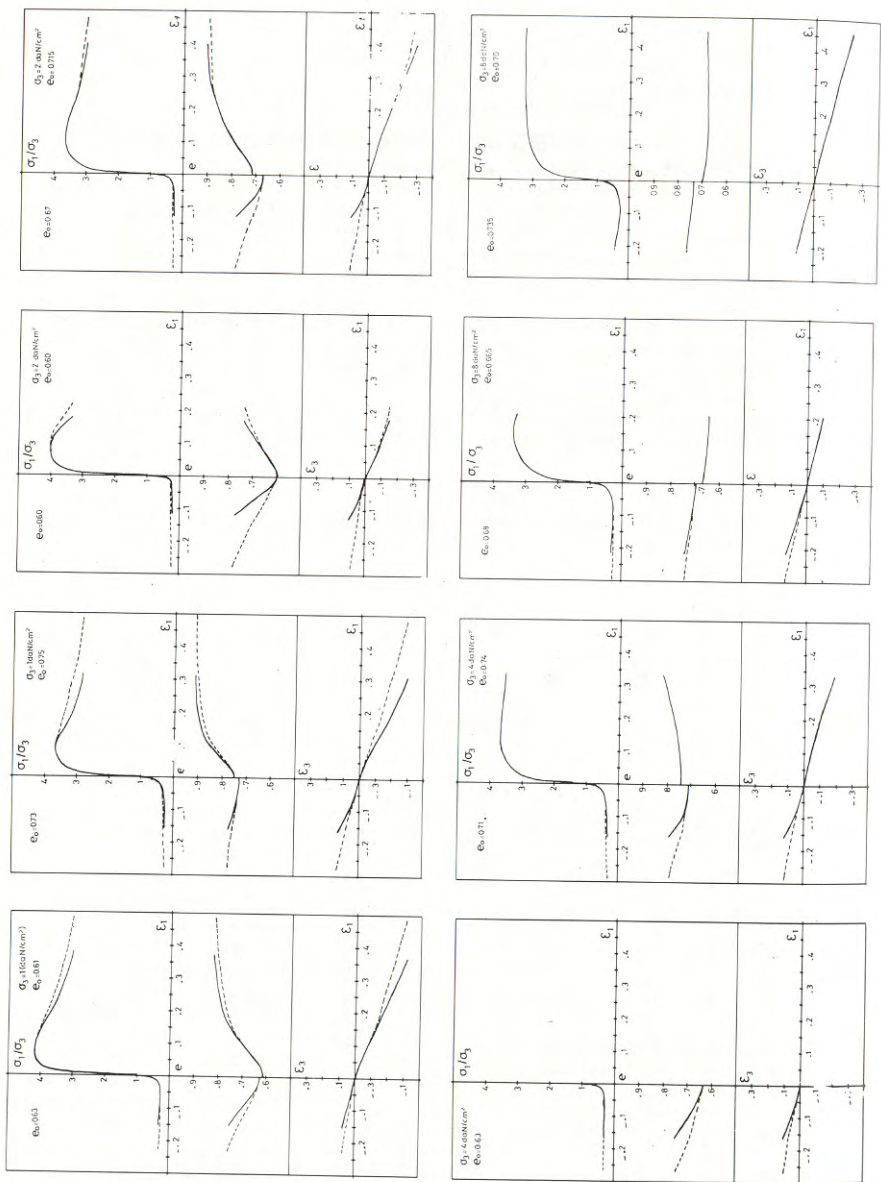
4.3. Exemple d'application au sable d'HOSTUN

Dans le cadre de cet article et pour concrétiser un peu les dernières relations données, nous allons présenter des résultats d'essais de compressions et d'extension triaxiales, réalisées par LABANIEH [19]. Ces essais nous permettront de mettre en évidence l'influence des hétérogénéités (créées par la localisation des déformations), qui rendent les mesures globales sur échantillon, généralement effectuées, sans rapport parfois avec les valeurs locales. Rappelons que les caractéristiques du comportement d'un sable déjaagées dans le paragraphe 2 (en particulier, singularités de la surface d'écoulement et non-linéarité de la loi incrémentale) impliquent que la localisation des déformations par instabilité et bifurcation doit être un phénomène très général dans le cas des sables denses - ceci contrairement aux matériaux élasto-plastiques bilinéaires standards (voir, par exemple, RICE [22]).

L'appareil PHOGADENSE (développé par WACK [23] et complété par LABANIEH [24]), avec lequel ont été effectués ces essais, permet de mesurer à la fois la densité moyenne le long d'une corde traversant l'échantillon et la variation relative de longueur de cette corde. Nous mesurons donc en même temps l'indice des vides local e et la déformation latérale locale ε_3 : nous pouvons en déduire par une simple relation géométrique la valeur locale de la déformation axiale ε_1 , qui doit être comparée à la valeur globale ε_1 calculée à partir de la mesure des déplacements de la tête de l'échantillon (comme dans les procédures classiques). Ainsi, nous pouvons tirer de ces essais d'une part un test d'homogénéité de l'échantillon par comparaison de ε_1 local et de ε_1 global et d'autre part des courbes $\sigma_1 - \varepsilon_1$ et $e - \varepsilon_1$ reliant les valeurs locales de ces variables, qui sont les seules valeurs probantes pour une interprétation rhéologique d'essais réalisés sur des échantillons de taille nécessairement finie.

Les figures suivantes présentent les résultats de ces essais en compression et en extension pour quatre valeurs de la contrainte latérale et différentes valeurs de l'indice des vides. Sur ces figures nous présentons les courbes $\sigma - \varepsilon_1$, $e - \varepsilon_1$ et $\varepsilon_3 - \varepsilon_1$ avec les mesures totales et les mesures locales correspondantes de la déformation axiale obtenues par la relation géométrique :

$$L_n \frac{1 + e}{1 + e_i} = - (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3)$$



Essais de compressions et d'extension triaxiales :
 — ϵ_1 déformations totales, - - - ϵ_2 déformations locales.

Ces courbes ont été obtenues par lissage à partir des points expérimentaux. Nous remarquons sur ces résultats que l'homogénéité de l'échantillon est plus important en compression qu'en extension et que cette homogénéité est sensiblement assurée jusqu'au pic, au-delà duquel les valeurs totales des déformations deviennent peu probantes pour l'interprétation rhéologique.

5. CONCLUSION

Nous voudrions insister en conclusions sur quelques aspects méthodologiques que nous avons tenté d'illustrer à l'occasion de cet article.

À la base de toute loi physique et des relations mathématiques qui l'expriment existe une certaine classe d'expériences, dont on estime qu'elles caractérisent le phénomène que l'on cherche à décrire. La question : "sur quelles expériences vos hypothèses fondamentales reposent-elles ?" nous paraît être d'une particulière importance en rhéologie où il existe un très vaste catalogue de lois de comportement diverses dans lequel il faut puiser en les confrontant à l'expérience dans une succession d'allers-retours résultats théoriques - mesures expérimentales. Mais, dans le choix de ces expériences caractéristiques, il faut bien se garder de se limiter a priori à une description de la réalité micro-structurale ou bien macroscopique. Ces deux niveaux d'expériences - qui s'éclairent l'un l'autre - sont indispensables pour guider le chercheur vers les hypothèses qui seront cruciales pour décrire le comportement d'un matériau réel. C'est dans une liaison active entre les analyses des réalités expérimentales micro-structurale (le grain) et macroscopique (l'échantillon) que pourront émerger des lois de comportement simples mais réalistes.

REMERCIEMENTS

Une partie de cet article a été écrite au cours d'un séjour au sein du Département de Génie Civil de la Faculté des Sciences Appliquées de Sherbrooke (Canada). Nous tenons à remercier le Directeur de ce Département, Guy LEFEBVRE, pour son accueil.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 DARVE F., FLAVIGNY E., VUAILLAT P., "Une loi rhéologique complète pour matériaux argileux", Congrès Européen de Mécanique des Sols et des Travaux de Fondations, vol.1, 1979, p.119-124.
- 2 DESRUES J. et al., "An incremental formulation of constitutive equations for deposited snow", Journal of Glaciology, vol.25, No.92, 1980.
- 3 BIAIREZ J., "Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des sols et des matériaux pulvérulents", Thèse de doctorat d'état, Institut de Mécanique de Grenoble, 1962.
- 4 HABIB, "La résistance au cisaillement des sols", Thèse d'Etat, Annales de l'I.T.B.T.P., n°61, p.1-40, janvier 1953.
- 5 CAMBOU B., "Approche du comportement d'un sol considéré comme un milieu non continu", Thèse de doctorat ès sciences. Lyon, 1979
- 6 AL-ISSA M., "Recherche de lois contraintes-déformation des milieux pulvérulents. Analyse de la validité des lois hyperboliques. Application aux pieux et barrages". Thèse de docteur-ingénieur, Institut de Mécanique de Grenoble, 1973.
- 7 WIENDIECK M., "L'anisotropie des milieux pulvérulents et son influence sur les tassements", Thèse de docteur-ingénieur, Institut de Mécanique de Grenoble, 1964.
- 8 DARVE F., DESRUES J., JACQUET M., "Les surfaces de rupture en mécanique des sols en tant qu'instabilité de déformation", Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, vol. 5, n°3, 1980, p.93-106.
- 9 MANDEL J., "Généralisation de la théorie de plasticité de W.T. KOITER", Int. Journ. Solids and Structures, vol.1, 1965, p.273-295.
- 10 HILL R., "Eigenmodal deformations in elastic-plastic continua", J. Mech. Phys. Solids, vol.15, 1967, p.371-386.
- 11 CHRISTOFFERSEN J., HUTCHINSON J.W., "A class of phenomenological corner theories of plasticity", J. Mech. Phys. Solids, vol.27, 1979, p.465-487.
- 12 DARVE F., "Une description du comportement cyclique hystérétique des solides", Colloque franco-polonais de Mécanique non-linéaire, Marseille, 1980, à paraître.
- 13 DARVE F., "Une formulation incrémentale des lois rhéologiques. Application aux sols", Thèse de doctorat d'état, Institut de Mécanique de Grenoble, 1978.
- 14 GUDEHUS G., KOLYMBAS D., "A constitutive law of the rate-type for soils" 3ème Int. Conf. on Num. Meth. in Geom., ed. W. WITKE, vol.1, 1979, p.319-329.
- 15 CHAMBON R., RENOUD-LIAS B., "Incremental non-linear stress-strain relationship for soil and integration by F.E.M.", 3ème Int. Conf. on Num. Meth. in Geomech., ed. W. WITKE, vol.1, 1979, p.405-413.
- 16 ROBINET J.C., "Loi rhéologique en écriture incrémentale. Application aux sols et au béton", Thèse de doctorat d'état, E.N.T.P.E., 1980.
- 17 DARVE F., BOULON M., CHAMBON R., "Loi rhéologique incrémentale des sols", Jour. de Mécanique, vol.17, n°5, 1978, p.679-716.
- 18 DARVE F., LABANIEH S., CHAMBON R., "Incremental stress-strain relationship for cohesionless soil", 2ème Int. Conf. on Num. Meth. in Geomech. ed. C.S. DESAI, 1976, p.264-269.
- 19 DARVE F., LABANIEH S., "Incremental constitutive law for sands and clays. Simulations of monotonic and cyclic tests". A paraître dans l'Int. Jour. for Num. and Anal. Meth. in Geomech., 1981.
- 20 VARDOULAKIS I., GOLDSCHIEDER M., GUDEHUS G., "Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem", Int. J. Num. Anal. Meth. in Geomech., Vol.2, p.99-128, 1978.
- 21 HABIB P., LUONG M.P., "Sols pulvérulents sous chargements cycliques", Compte-rendus du séminaire "Matériaux et Structures sous chargement cyclique", ed. par l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, p.49-79, 1978.
- 22 RICE J.R., "The localization of plastic deformation", Compte-rendus de "Theoretical and Applied Mechanics", ed. W.T. KOITER, Hollande, p.207-220, 1977.
- 23 WACK B., "Mesures par radioactivité en mécanique des sols". Thèse de doctorat d'état, Institut de Mécanique de Grenoble, 1968.
- 24 LABANIEH S., "Contribution à l'étude du comportement mécanique des sols : lois rhéologique incrémentale et applications par la méthode des éléments finis", Thèse de doctorat d'état, Institut de Mécanique de Grenoble, à paraître.

LISTE DES AUTEURS

LIST OF AUTHORS

AYTAC (C.)
BAUDELET (B.)
BERVEILLER (M.)
CAMBOU (B.)
CIMMINO (S.)
CORDIER (G.)
DANG VAN (K.)
DARVE (F.)
DI BENEDETTO (H.)
FAUGERAS (J.C.)
FAYOLLE (C.)
FRANCIOSI (P.)
GARZITTO (V.)
GOURVES (R.)
GRECO (R.)
HOMAND-ETIENNE (F.)
HOUPERT (R.)
HUET (C.)
KRÖNER (E.)
LABIANEH (S.)
LEGRAND (C.)
LE ROY (M.)
LORET (B.)
LUONG (M.P.)
MANDEL (J.)
MA RONG TANG
MARTIN (C.)
MATHIA (T.)
MAZET (R.)
PAPO (A.)
QUIDOT (M.)
RACIMOR (P.)
RAGOSTA (G.)
RENARD (J.)
REY (C.)
RIGO (J.M.)
ROBINET (J.C.)
SMADI (A.)
STURZI (F.)
SUERY (M.)
SUQUET (P.M.)
VERCHERY (G.)
ZAOUI (A.)

GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE

La RHEOLOGIE est la science des DEFORMATIONS et ECOULEMENTS de la matière, des CONTRAINTES qui en résultent et des EFFORTS qu'il faut lui appliquer pour les obtenir.

UNIVERSELLE, on la rencontre dans tous les domaines de l'activité humaine, et ses applications vont de la mise en forme des produits industriels quel qu'en soit le matériau, aux comportements de la matière vivante, en passant par la tenue des pneumatiques ou la durabilité des constructions. Son impact économique est donc considérable.

INTERDISCIPLINAIRE, elle fait appel à la MECANIQUE, à la PHYSIQUE, à la CHIMIE, à la BIOLOGIE, qui lui fournissent ses instruments de base, et se montre utile à chacune de ces disciplines.

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF à vocation purement scientifique fondée en 1964 et régie par la loi de 1901, le GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE a pour OBJECTIFS de contribuer au DEVELOPPEMENT des études et recherches relatives accomplis dans ses diverses branches.

Dans ce but, le Groupe Français de Rhéologie
- organise des REUNIONS où les chercheurs et les industriels peuvent présenter et discuter leurs résultats ou leurs préoccupations ;

- entretient des relations avec le COMITE INTERNATIONAL DE RHEOLOGIE et les SOCIETES DE RHEOLOGIE d'autres pays ;

- organise un COLLOQUE NATIONAL ANNUEL ;

- édite des CAHIERS consacrés aux exposés scientifiques (une cinquantaine de numéros édités à ce jour), et un BULLETIN consacré aux informations courantes ;

- contribue à la clarification du langage par l'établissement d'un DICTIONNAIRE ;

- etc...

Cette activité vous intéresse et vous souhaitez devenir membre :
SUIVEZ LES INDICATIONS DONNEES AU VERSO

Anciens Présidents du G.F.R. :

J. MANDEL (Président Fondateur, 1964-1967)

M. JOLY (1967-1970), B. PERSOZ (1970-73), P. HABIB (1973-76), R. COURTEL (1976-79)

GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE

Vous SOUHAITEZ PARTICIPER à l'activité du Groupe Français de Rhéologie en tant que membre :

- Individuel,
- Collectif,
- Correspondant,
- Bienfaiteur,
- ou à plusieurs de ces titres simultanément.

REPLISSEZ la formule de demande d'admission insérée dans cet ouvrage et envoyez la à l'adresse indiquée avec un chèque du montant de votre cotisation.

Vous voulez EN SAVOIR PLUS avant de prendre une décision, écrivez nous à l'adresse ci-dessous :

GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE
Secrétariat Général
C.E.B.T.P.
12, rue BRANCON
55737 PARIS CEDEX 15

Les Colloques annuels du G.F.R. :

1- Rhéologie des systèmes à 2 phases	1965
2- Aspects énergétiques en Rhéologie	1966
3- Progrès récents des effets du 1 ^{er} ordre	1967
4- Rhéologie en relation avec la structure	1968
5- Comportements mécaniques des matériaux composites	1968
6- Influence de la température et de la pression sur les comportements rhéologiques	1970
6 bis -Rhéologie et hydrotechnique	1970
7- Viscoplasticité	1971
8- Rhéologie des bétons	1973
9- Phénomènes de surface	1974
10- Influence de la température sur les comportements rhéologiques	1975
11- Rhéologie des corps mous	1976
12- Thermodynamique des comportements rhéologiques	1977
13- Aspects rhéologiques de la mécanique de la rupture	1978
14- Rhéologie des couches minces	1979
15- Comportements rhéologiques et structure des matériaux	1980
16- Applications de la rhéologie aux problèmes de fabrication industrielle.	1981

Les comptes-rendus de certains de ces Colloques sont encore disponibles. Un exemplaire peut être obtenu sur demande au Secrétariat Général moyennant une participation aux frais de F 80 par Colloque (adresser le chèque avec la demande).

ISBN 2-85978-034-3