

GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE  
17<sup>e</sup> Colloque Annuel – Paris 1982

**COMPORTEMENTS RHEOLOGIQUES  
SOUS SOLLICITATIONS  
RAPIDES OU DYNAMIQUES**

**RHEOLOGICAL BEHAVIOURS UNDER  
DYNAMICAL OR QUICK LOADINGS**

Textes réunis par  
Christian HUET et Stéphane RICHEMOND

CAHIERS DU GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

t. VI n° 3

17<sup>e</sup> Colloque Annuel du Groupe Français de Rhéologie

Paris — 1<sup>er</sup> et 2 décembre 1982

**COMPORTEMENTS RHEOLOGIQUES  
SOUS SOLLICITATIONS  
RAPIDES OU DYNAMIQUES**

**RHEOLOGICAL BEHAVIOURS UNDER  
DYNAMICAL OR QUICK LOADINGS**

Textes réunis par

Christian HUET

Directeur du Centre d'Enseignement et de Recherches  
en Matériaux de Construction

Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

Président du Groupe Français de Rhéologie

et

Stéphane RICHEMOND

Maître de Conférences à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées  
Secrétaire-Adjoint du Groupe Français de Rhéologie

COMPTES RENDUS  
DE LA SOCIÉTÉ  
FRANÇAISE DE RHEOLOGIE  
1907-1982

CET OUVRAGE EST DEDIE A

Jean MANDEL

Président Fondateur  
et  
Membre d'Honneur

du

GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

1907-1982

SOMMAIRE  
CONTENTS

ALLOCATION D'UN  
OPENING SPACE  
C. H. L.

PREMIER

CONF

AVIE

GENA

J. AD

AUTO

JEAN

LISTE

LISTE

PRIX

JEAN

DEUS

1<sup>er</sup> J

COM

MON

SEAN

IND

CY

INFL

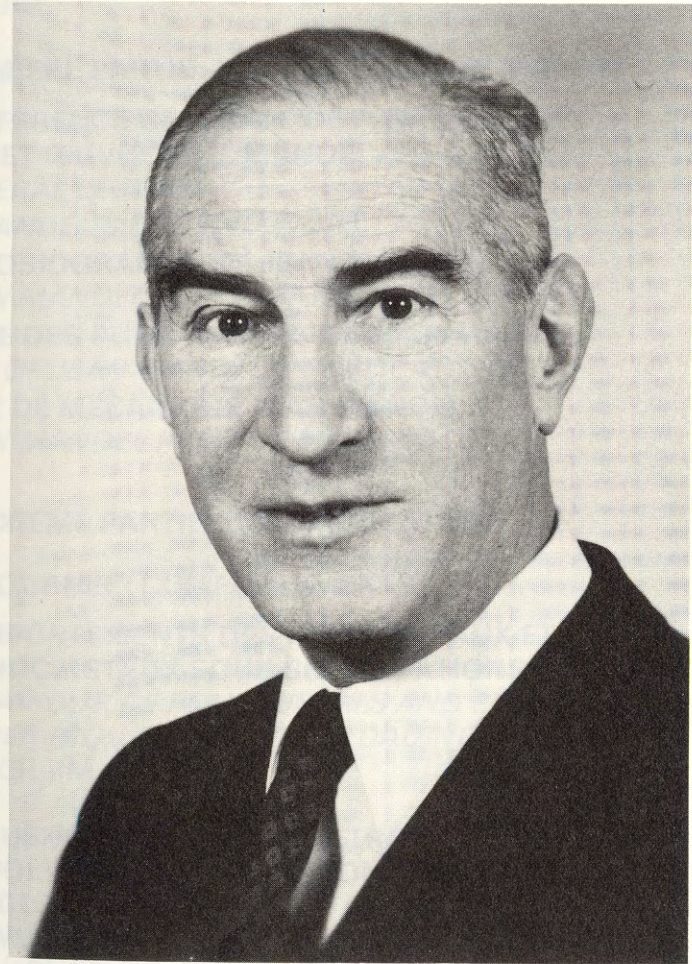
DE P

RHO

BREY

INFLU

PEN



Jean MANDEL  
1907 - 1982

## SOMMAIRE CONTENTS

### ALLOCUTION D'OUVERTURE

*OPENING SPEECH*

C. HUET

13

### PREMIERE PARTIE : HOMMAGE A JEAN MANDEL

#### CONFERENCE GENERALE DE P. HABIB :

« VIE ET ŒUVRE DE J. MANDEL »

*GENERAL LECTURE*

*J. MANDEL'S LIFE AND WORK*

19

#### AUTOBIOGRAPHIE DE JEAN MANDEL

*JEAN MANDEL'S AUTOBIOGRAPHY*

29

#### LISTE DES PUBLICATIONS DE JEAN MANDEL

*LIST OF JEAN MANDEL'S PUBLICATIONS*

32

#### PRIX DE MECANIQUE JEAN MANDEL

*JEAN MANDEL PRIZE OF MECHANICS*

43

### DEUXIEME PARTIE : COMMUNICATIONS

#### 1<sup>re</sup> JOURNEE : COMPORTEMENTS

#### COMPORTEMENTS DES POLYCRISTAUX ET MONOCRISTAUX SOUS SOLLICITATIONS RAPIDES

*BEHAVIOUR OF POLYCRISTALS AND SINGLE-CRISTALS*

*UNDER HIGH STRAIN-RATE LOADING*

C.Y. CHIEM

49

#### INFLUENCE DE L'INTERPENETRATION D'UN ALLIAGE DE POLYMERES SUR SON COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE EN SOLLICITATIONS TRANSITOIRES BREVES

*INFLUENCE OF THE CROSSLINK DENSITY OF AN INTER-  
PENETRATING NETWORK ON ITS RHEOLOGICAL  
BEHAVIOUR UNDER IMPACT RATE LOADING*

J.L. LATAILLADE, A. MARCHAND, J. POUYET

ET D. POUSSIN

71

- APPROCHE MOLECULAIRE DE LA RHEOLOGIE DE SYSTEMES DE CHAINES POLYMERIQUES ENCHEVETREES. APPLICATION AUX GRANDES VITESSES D'ETIREMENT DU POLYSTYRENE FONDU**  
*A MOLECULAR APPROACH OF THE RHEOLOGY OF ENTANGLED POLYMER CHAINS. APPLICATION TO POLYSTYRENE MELTS STRETCHED AT HIGH STRAIN RATES.*  
 J. F. TASSIN, P. THIRION, L. MONNERIE ET GODET, HOARAU, TAUDIN, CAPET. 85
- RHEOLOGIE D'UN POLYMERE A HAUTE VITESSE DE DEFORMATION: TUBE PARCOURU PAR UNE ONDE DE DETONATION (\*)**  
*POLYMER RHEOLOGY UNDER HIGH RATE OF DEFORMATION: TUBE CONFINING A DETONATION WAVE*  
 J. RENARD, M. AMINALLAH, M. TRONEL, J. BROSSARD 99
- CONCENTRATION TRANSITOIRE D'ONDES VISCOELASTIQUES LINEAIRES**  
*SPIKING OF LINEAR VISCOELASTIC WAVES*  
 R. H. BLANC 119
- MODELISATION DU COMPORTEMENT THIXOTROPE ET/OU VISCOELASTIQUE DE MILIEUX DISPERSES CONCENTRES**  
*A MODEL FOR THE THIXOTROPIC AND/OR VISCOELASTIC BEHAVIOR OF DISPERSE CONCENTRATED MEDIA*  
 D. QUEMADA, J.C. LELIEVRE, C. LACOMBE 135
- DETERMINATION DE L'INFLUENCE DE L'HUMIDITE ET DE LA TEMPERATURE SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE D'ADHESIFS EPOXY PAR DES METHODES DYNAMIQUES**  
*STUDY OF THE INFLUENCE OF MOISTURE AND TEMPERATURE ON THE MECHANICAL BEHAVIOUR OF EPOXY ADHESIVES WITH DYNAMICAL MEASUREMENT TECHNIQUES*  
 A. CARDON, F. BOULPAEP 147
- ECOULEMENTS POLYMERIQUES NON VISCOSIMETRIQUES**  
*NON-VISCOSIMETRIC POLYMERIC FLOWS*  
 M. FRIAS 155
- PHENOMENES DE PROPAGATION D'ONDES DE TRAFIC ROUTIER DANS UN SOL A COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE**  
*PROPAGATION OF ROAD TRAFFIC WAVES IN A VISCO-ELASTIC MEDIUM*  
 D. LE HOUEDDEC 165
- COMPRESSION PAR CHOC ET RUPTURE PAR ECAILLAGE D'UN VERRE DE BOROSILICATE**  
*SHOCK-WAVE COMPRESSION AND SPALLING OF A BOROSILICATE GLASS*  
 J. CAGNOUX 175
- 2<sup>e</sup> JOURNEE: METHODES**
- SUR LE MOUVEMENT D'UN MILIEU INFINI, PERIODIQUE, ELASTIQUE OU VISCOELASTIQUE**  
*ON THE MOTION OF AN UNBOUNDED PERIODIC ELASTIC OR VISCOELASTIC MEDIUM*  
 N. TURBE 193
- CONTRIBUTION A L'INTERPRETATION DES ESSAIS DE TRACTION A GRANDE VITESSE**  
*ON THE INTERPRETATION OF HIGH STRAIN RATE TENSILE TESTS*  
 G. REGAZZONI, J. C. GIANNOTTA, F. MONTHEILLET, R. DORMEVAL 205
- COUPLAGE DYNAMIQUE PAR CHOC**  
*COUPLING OF STRUCTURES THROUGH IMPACT PHENOMENON*  
 F. SIDOROFF, J. P. LAINE 215

**MESURE DE PROPRIETES MECANQUES DES SOLS  
PAR L'INTERPRETATION DU SPECTRE DES  
RESONANCES AXIALES**

*MEASUREMENT OF MECHANICAL PROPERTIES OF  
SOILS THROUGH THE INTERPRETATION OF THE  
LONGITUDINAL RESONANT SPECTRUM OF A  
CYLINDRICAL SAMPLE*

J. L. BOELLE, J. BIAREZ, J. MEUNIER

231

**ANALYSE DYNAMIQUE DE SYSTEMES NON LINEAIRES:  
COMPARAISON DE METHODES INCREMENTALES  
ET HARMONIQUES**

*DYNAMICAL ANALYSIS OF NON LINEAR SYSTEMS:  
COMPARISON BETWEEN INCREMENTAL AND  
HARMONIC EXPERIMENTS*

C. JODER, P. FLAUD, D. TREVISAN, D. GEIGER

243

**SPECTROSCOPIE MECANIQUE DANS LE DOMAINE  
TEMPOREL**

*TIME DOMAIN MECHANICAL SPECTROSCOPY (T.D.M.S.)*

G. MARIN

253

**MESURE DES CONSTANTES ELASTIQUES DES  
MATERIAUX PAR GONIOMETRIE ULTRASONORE**  
*ULTRASONIC GONIOMETRY MEASUREMENTS OF  
ELASTIC CONSTANTS OF MATERIALS*

M. MUDRY, J. LAUNAY, C. PREZIOSA, F. GILLETTA

261

**ALLOCUTION D'OUVERTURE**

C. HUET, Président du Groupe Français de Rhéologie  
Opening speech

Mes Chers Collègues,

Cette année, le Colloque annuel du Groupe Français de Rhéologie est le 17<sup>e</sup> de la série inaugurée en 1965, un an après la création du Groupe.

Le thème retenu pour ce 17<sup>e</sup> Colloque est "Comportements rhéologiques sous sollicitations rapides ou dynamiques".

Il est inutile de souligner l'importance de ce thème, attestée par le nombre et la diversité des communications reçues, et dont c'est cependant la première fois qu'il est traité en tant que tel dans nos Colloques.

Ce thème va en effet nous entraîner de la réponse des cristaux sous sollicitations rapides aux méthodes ultrasonores de mesure des constantes élastiques anisotropes, en passant par l'effet d'une détonation sur un polymère, d'un choc sur un verre ou l'influence de la vitesse sur la ténacité des matériaux.

Mais qu'entend-on par sollicitations rapides ou dynamiques ?

Le deuxième terme est clair et parfaitement défini : il s'agit des cas où l'on ne peut éviter de mettre en jeu au sein des matériaux, de façon expérimentalement appréciable, les forces d'inertie.

Les sollicitations rapides sont plus malaisées à définir et on peut donner de cette expression plusieurs acceptions suivant que l'on considère par exemple les rampes produisant de grandes vitesses de déformation au sein du matériau, les impulsions provoquant de grandes accélérations se traduisant par des discontinuités telles que les ondes de choc, ou, plus prosaïquement, les sollicitations mettant en jeu des temps de réponse du matériau plus courts que ceux de

l'appareillage dont on dispose.

Tout ceci peut donner lieu à d'amples développements qui apparaîtront peu à peu au cours du déroulement du Colloque.

Mais ce 17e Colloque n'est pas tout à fait comme les précédents, et je dois vous parler maintenant du triste événement qui a assombri la vie du Groupe au cours de cette année 1982. Cet événement dramatique a endeuillé, non seulement notre Groupe, mais l'ensemble de la communauté scientifique française et internationale. Je veux parler du décès du regretté Professeur Jean MANDEL, survenu accidentellement le 19 juillet dernier dans sa 76e année.

Pour ceux d'entre nous, et nous étions nombreux tant étaient grandes son audience et son influence, qui étions proches de lui par la pensée, par le coeur, par la lecture, par l'étude lorsque ce n'était pas par le contact direct et quotidien, cela fût un choc brutal.

Nous savions que sa santé était devenue délicate, nous savions qu'il supportait mal l'idée d'avoir à se ménager, et que cette force intérieure, cette passion de la recherche, une des formes du daïmon socratique dont il nous avouait dans une récente correspondance avoir toujours été habité, pourrait bien un jour surpasser ce qui lui restait de résistance physique.

Mais nul ne pouvait imaginer cette issue proche de l'absurde d'un accident de baignade, survenu lors qu'il prenait du repos dans sa maison de Fontainebleau.

Quelques semaines auparavant, nous lui avons écrit au nom du Groupe pour lui demander, par référence aux travaux considérables qu'il avait produits sur les divers sous-thèmes de ce Colloque, et malgré nos scrupules à exiger de lui ce nouvel effort, une conférence générale d'ouverture.

Le destin devait en décider autrement.

C'est donc à plusieurs titres, et non seulement en sa qualité, avec quelques collègues et amis dont certains sont dans cette salle, de fondateur de notre Groupe en tant qu'Association munie d'une personnalité juridique et dont il fût le 1er Président de 1964 à 1967, que ce 17e Colloque lui est dédié.

Pierre HABIB, qui fût à la fois son collaborateur le plus proche, son successeur à la tête du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique qu'il avait fondé avec lui peu avant le Groupe, son ami et le 4e Président du Groupe, va nous exposer maintenant ce que furent sa vie et son oeuvre.

Mais avant d'ouvrir ce Colloque, je voudrais, mes Chers Collègues, que vous vous joigniez à moi pour rendre, à la mémoire d'un homme qui avait érigé la pudeur et la discrétion en loi de son comportement personnel au point de refuser d'avance que lui soient manifestés les honneurs dont il était digne, l'hommage discret d'un moment de silence.

.....

Mes Chers Collègues, je vous remercie comme je remercie Madame Jean MANDEL et ses enfants, d'avoir tenu à être présents ce matin dans cette salle, et je déclare ouvert le 17e Colloque National Annuel du Groupe Français de Rhéologie.



Centre National de la Recherche Scientifique  
Centre de Recherches Françaises

LES ŒUVRES DE  
JEAN MANDEL

ÉDITIONS  
L'ARCHE

**PREMIERE PARTIE**

**HOMMAGE A JEAN MANDEL**

Préface de Jean Mandel

Introduction de Jean Mandel

Le premier livre

Le deuxième livre

Le troisième livre

Le quatrième livre

Le cinquième livre

Le sixième livre

Le septième livre

Le huitième livre

Le neuvième livre

Le dixième livre

Le onzième livre

Le douzième livre

quelques notes  
sur le groupe  
de la rue de la Harpe

## **VIE ET ŒUVRE DE JEAN MANDEL** *JEAN MANDEL'S LIFE AND WORK*

P. HABIB  
Directeur du Laboratoire de Mécanique des Solides

Lors de la préparation de ce 17<sup>ème</sup> Colloque du Groupe Français de Rhéologie, nous avons pensé que celui qui ferait la meilleure Conférence Générale d'introduction aux "Comportements Rhéologiques sous sollicitations rapides ou dynamiques", c'était le Professeur Jean MANDEL, et il avait accepté.

Après cet accident du mois de Juillet dernier, qui nous a privé d'un Maître et moi d'un ami bienveillant, lorsqu'il m'a été demandé, en Septembre, de rappeler sa vie et son oeuvre à ce Colloque en prenant son temps de parole, j'ai eu l'impression qu'on me proposait une sorte de sacrilège et j'en ai été profondément navré. Je me suis cependant rendu aux raisons amicalement insistantes du Président HUET car, ayant été très proche du Professeur MANDEL pendant près de 25 ans et le connaissant depuis près de 35 ans, j'étais à peu près certainement le plus apte à parler de son oeuvre et de sa vie scientifique.

Je n'ai probablement pas été son plus proche collaborateur : je sais en effet que dans l'enseignement il était en liaison complète avec ses maîtres de conférences et je sais aussi que ses élèves dans la recherche trouvaient en lui un Maître qui partageait avec eux sa pensée sur le sujet étudié. Mais, j'ai participé à ses travaux pendant plus de 20 ans au Laboratoire de Mécanique des Solides et nous avons fait si souvent le point des activités du Laboratoire que j'ai recueilli beaucoup de ses confidences et cela me permet de situer son oeuvre dans sa véritable perspective.

Sa vie a été partagée entre la Recherche et l'Enseignement ; il entre à l' X à 19 ans en 1926, puis à l'Ecole des Mines en 1929. En service à Saint-Etienne, il est nommé Professeur à l'Ecole des Mines de Saint-Etienne en 1932. Je lui demandais un jour :

"Monsieur, comment êtes-vous venu à l'enseignement ?"

"Eh bien, me dit-il, Habib, par la contrainte, mon patron m'ayant dit : Mandel, vous allez faire le cours de Résistance des Matériaux !"

Voilà un patron qui avait le sens de l'orientation et voici une contrainte, un dirigisme bien intelligent !

Mais, c'est maintenant la guerre. Il est Artilleur. Il est blessé en 1940 et conservera sa vie durant le morceau d'acier d'un éclat d'obus dans sa chair. Il a la Croix de Guerre.

De retour à la vie civile, il enseigne de nouveau à Saint-Etienne ; puis, en 1942, il est Maître de Conférences à l'Ecole Polytechnique. Il est nommé Professeur à l'Ecole des Mines de Paris en 1948, enfin Professeur à l'Ecole Polytechnique, de 1951 à 1973. Il a laissé un cours de Construction, des cours de Résistance des Matériaux, des cours de Mécanique, un cours de Science des Matériaux. En 1966, il crée le Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique, devenu depuis Laboratoire commun à l'Ecole Polytechnique, à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris et à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, dans le but de grouper expérimentateurs et théoriciens autour de travaux qui intéressent les ingénieurs, bien entendu dans le domaine de la Mécanique des Solides.

Malgré sa réserve et sa discrétion, il reçoit de nombreux Honneurs :

Trois Prix de l'Académie des Sciences, le Prix Gaston Julia de la Fondation de l'Industrie Sidérurgique, le Prix Louis Baes de l'Académie Royale de Belgique, trois médailles d'or, la médaille Vaucanson du GAMI, la Grande Médaille de l'Enseignement de la Société d'Encouragement de la Société de l'Industrie Nationale. Il est Officier de la Légion d'Honneur et Commandeur de l'Ordre du Mérite.

J'ai parlé de sa réserve. Il était d'apparence froide, il le savait et il le déplorait. Mais, tous ceux qui l'ont approché savent la capacité de travail qu'il pouvait dépenser pour ceux qui venaient lui demander ses conseils, et connaissent aussi son aptitude à indiquer la meilleure marche à suivre pour résoudre au mieux le problème scientifique ou technique posé. Je l'ai vu donner son temps et ses idées à certains de mes élèves, à une époque où nous n'avions d'autres liens que le goût de la Mécanique des Sols. Sa rigueur mathématique et sa rigueur morale étaient un exemple pour tous ses élèves.

Son oeuvre est protéiforme ; elle touche de très nombreux aspects de la Mécanique des Solides ; elle est tellement vaste que je doute que quelqu'un la saisisse dans sa totalité. Je n'ai pas la prétention de tout en connaître ; mais je pense que ceux qui connaissent ce que je ne connais pas, ne parleront pas comme moi de l'importance de ce qu'il a apporté par exemple à la Mécanique des Sols ou à la Mécanique des Roches. J'ai relevé près de 160 titres dans sa bibliographie et je ne suis pas sûr d'avoir tout retrouvé, dont 50 notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences. Ce nombre élevé est en soi très significatif. Il montre d'une part l'aspect fondamentalement original de l'oeuvre de MANDEL, toute de rigueur et de précision, toute de concision et de nouveauté, et d'autre part cet aspect de chercheur et de découvreur solitaire, à une époque où l'on ne cesse de parler de pluridisciplinarité et malgré l'existence du L.M.S., ce magnifique outil qu'il avait créé. Effectivement, dans sa bibliographie, il a peut-être, au plus, une vingtaine d'articles rédigés avec des co-auteurs.

Il est facile de classer les travaux de Mécanique du Continu en Mécanique Générale, en Loi de Comportement, en Calcul des Structures. Ces grandes catégories ont été toutes abordées par Jean MANDEL, mais parfois d'une façon si mélangée qu'il est difficile de classer telle publication dans une de ces rubriques. Ses travaux sur les lois de comportement l'ont amené très tôt à réfléchir sur la notion de Rhéologie et ce n'est pas par hasard s'il fonda en 1964 le Groupe Français de Rhéologie, avec l'appui du Professeur WEISS, et s'il en fut le premier Président de 1964 à 1967, de même que son activité d'Ingénieur des Mines l'a amené ensuite à présider, de 1967 à 1970, le Comité Français de Mécanique des Roches. Je rappelle que nous l'avons nommé Membre d'Honneur du G.F.R. en Décembre 1980.

Je vais maintenant parler de ses travaux en prenant la Mécanique des Sols comme ligne directrice. Il a fait faire des avancées décisives dans la plupart des domaines d'intérêt de cette discipline et on peut voir, dès le début de ses travaux, son souci de l'application.

Dès avant-guerre, il s'intéresse aux écoulements des infiltrations dans les sols. On sait qu'ils sont gouvernés par une équation de Laplace. A cette époque, le calcul numérique se faisait à la main et les techniques expérimentales et analogiques en étaient à leur début. Il était donc très important d'avoir des solutions explicites. Il donne la formulation de l'écoulement émis par une source à l'extrémité d'un tube avec différentes géométries, et ces résultats sont à la base d'un essai technologique encore utilisé actuellement pour la mesure de la perméabilité des sols in situ et appelé "l'essai Mandel-Lefranc". Il donne une condition de renard pour les fouilles ceinturées de palplanches, c'est-à-dire les conditions de profondeur de la fiche pour éviter la formation de sables mouvants dans les fonds de fouilles. La connaissance des écoulements laminaires lui sera utile pour la théorie de la consolidation des sols, dont je parlerai plus loin.

Mais, son oeuvre majeure, c'est la publication en 1942 de sa Thèse de Doctorat sur les "Equilibres par tranches planes des solides à la limite d'écoulement". C'est un travail de pionnier et un travail capital. C'est un travail qui est largement en avance sur son temps. MANDEL y a traité de l'équilibre plastique des corps à courbe intrinsèque quelconque, ce qui contient évidemment aussi le critère de Coulomb et celui de Tresca. Il en déduira, au cours de sa vie, un ensemble d'applications pratiques correspondant d'abord à des problèmes immédiatement résolubles à partir de son premier travail, ensuite à des problèmes nouveaux que la technique apporte, enfin à des problèmes où le traitement numérique est tel que seule la puissance des ordinateurs permet d'en donner une solution utile parce que complète et ramenée au niveau des abaques. Je cite :

- le problème de la filière,
- l'écrasement entre les plateaux d'une presse,
- l'équilibre des silos,
- l'interférence des fondations superficielles,
- la force portante des fondations sur milieux bi-couches, (avec J. Salençon),
- l'équilibre des tunnels et des cavités souterraines, (avec B. Halphen puis avec Y. d'Escatha).

En Mécanique des Sols, on ne s'occupe pas que de la rupture, mais aussi des déformations avant la rupture. Il s'agit là de problème d'élasticité un peu compliqué parce que les conditions aux limites ne sont pas toujours très simples. MANDEL a résolu le problème de la charge ponctuelle -ce qui ouvre la porte par des intégrations plus ou moins difficiles à différentes répartitions de charge sur des surfaces de formes diverses- sur un milieu composé de deux couches, ce qui est une situation plus réaliste en Génie Civil que le corps semi-infini qu'avait étudié Boussinesq. La solution proposée permet de traiter les problèmes de propagation d'ondes dans de tels milieux qui, je le rappelle, sont un bon modèle pour une chaussée. Le tassement, c'est-à-dire l'expulsion de l'eau interstitielle sous l'effet de la charge, est alors simplement la différence entre le déplacement instantané et le déplacement au bout d'un champ infini. C'est, je crois, pour MANDEL le premier contact avec un écoulement solide, fonction du temps.

Mais, les propriétés des sols ne sont pas toujours très pures et se prêtent mal à la comparaison théorie-expérience. MANDEL devient alors expérimentateur ; c'est un aspect peu connu de MANDEL, mais je peux dire que c'était un expérimentateur rusé. Il prend le plexiglass comme sujet d'étude et nous montons une expérience de fluage en flexion-torsion d'un barreau. Le montage est tel que si un certain spot lumineux bouge en fonction du temps, on en tire  $E(t)$ . Si le spot décrit une droite, c'est que  $\nu$  est constant. Si une charge double donne des déplacements doubles, c'est que la viscoélasticité est linéaire et on peut définir le domaine de validité de la linéarité puis examiner les problèmes cycliques, les problèmes de vibration et leur amortissement. Il était alors raisonnable de construire une théorie des corps viscoélastiques boltzmaniens. Utilisant la transformation

de Carson, MANDEL montre que la théorie de la viscoélasticité linéaire peut être ramenée à la théorie de l'élasticité linéaire : c'est le chapitre 5 du livre de Persoz : "Introduction à l'étude de la Rhéologie".

Lorsque les propriétés de viscoélasticité dépendent de l'âge, c'est-à-dire lorsque les corps vieillissent, mais toujours en restant dans le domaine linéaire, et c'est par exemple le cas du béton, MANDEL a introduit des opérateurs qui permettent de se ramener à nouveau aux équations de l'élasticité.

Les thèmes que j'ai cités, l'écoulement de l'eau, la déformation, la rupture, sont les thèmes majeurs de la Mécanique des Sols ; mais l'oeuvre de MANDEL fourmille d'études ponctuelles ou générales, par exemple sur la thermodynamique des liaisons eau-sol dans le cas des milieux non saturés, ce qu'on a appelé ultérieurement la succion, sur les propagations d'ondes, sur les contacts dans les milieux granulaires, sur les bornes de l'élasticité des mélanges, sur l'anisotropie élastique, etc. En Mécanique des Roches, discipline voisine des Sols, il n'avait pas son pareil pour démêler, dans une situation physique donnée, quelle était la théorie qu'il fallait employer, c'est-à-dire la présence d'eau, comme en Mécanique des Sols, ou si certains éléments devaient être traités comme des poutres ou des dalles, c'est-à-dire en Résistance des Matériaux, ou encore si certains phénomènes devaient être traités comme des instabilités : c'est par exemple le cas du flambage dans certains coups de toit. Il a traité complètement l'équilibre des cavités souterraines servant au stockage des gaz (c'est-à-dire soumis à une pression interne) ou des liquides (pression hydrostatique). Enfin, il a étudié les conditions de similitude en Mécanique des Solides, sols, roches ou métal, avec ou sans fluide interstitiel, avec ou sans viscosité et ce travail a été à la base des nombreuses études sur modèles réduits réalisées au Laboratoire de Mécanique des Solides.

Le critère de von Mises ou le critère de Tresca, c'est-à-dire  $\varphi = 0$ , est un cas particulier de la plasticité et même un cas particulier beaucoup plus simple que le cas général. C'est dire que la plasticité s'applique particulièrement bien aux métaux. Une grande part des travaux de Mandel a été l'application de la théorie de la plasticité aux métaux.

J'ai parlé précédemment de MANDEL comme expérimentateur ; en plasticité, on lui doit la vérification expérimentale de la validité des relations de Prandtl-Reuss en opposition à la théorie de Hencky. Il avait étudié antérieurement la torsion et la flexion du cylindre élastoplastique en adoptant évidemment pour le métal un critère de Tresca et en calculant les déplacements. L'étude expérimentale a consisté à superposer traction et torsion d'un fil à différent niveau de chargement relatif et de vérifier que les accroissements de déformations étaient fonction du tenseur des contraintes et non pas de l'accroissement des contraintes. C'est une des très rares publications que j'ai faites avec lui (et avec H.D. BUI). En plasticité théorique, MANDEL a aussi étudié les propagations d'ondes et des surfaces de discontinuité avec des conditions très larges d'anisotropie et d'écrouissage. Il a montré l'existence de trois célérités séparées par les célérités des ondes élastiques auxquelles elles sont au plus égales et il a étendu pour le milieu parfaitement plastique la théorie classique de Hugoniot pour les fluides.

MANDEL a fait de nombreuses autres applications de la plasticité parfaite à l'écoulement des métaux, mais, à plusieurs reprises au cours de ma collaboration avec lui, j'ai senti son regret de voir que la théorie de la plasticité n'était pas plus utilisée pour les métaux qu'elle ne l'était. Il est en effet clairement évident que si on veut étudier rapidement par exemple l'usinage d'un métal, on a plus vite fait d'essayer de mettre trois gouttes de lubrifiant sur un outil de coupe et même de changer de lubrifiant que d'étudier le problème plastique correspondant en faisant varier toutes les conditions aux limites. Ce n'est que sur la fin de sa vie, que des études de ce genre, comme par exemple celles du Centre de Mise en Forme de l'Ecole des Mines maintenant à Sophia Antipolis, ont pu être entreprises en France et appliquées aux métaux. Mais, il est de fait

que le travail du métal, le filage, le tournage, etc. était plus une question de pratique que de théorie en France, entre 1945 et 1965. Il en ressentait évidemment un certain agacement. Voici, par exemple, le cas du frottement de roulement. Ce cas est exemplaire à plus d'un titre. En particulier de par la façon magistrale de MANDEL de traiter un problème : avant qu'il n'entreprene une étude, on se trouve en présence d'un sujet pâteux, informe, qu'on ne sait par quel bout prendre ; MANDEL l'examine, le traite et l'expose complètement et tout devient très simple. Le problème du frottement de roulement est manifestement un problème très compliqué. Après les explications que je vais donner, d'après une étude de MANDEL, il va paraître tout simple : sous le rouleau trois régimes d'écoulement peuvent se produire qui correspondent au freinage avec un écoulement plastique vers l'avant, à l'accélération avec un écoulement vers l'arrière et enfin au régime normal, comme on le voit avec un rouleau à pâtisserie, où l'on chasse un bourrelet plastique devant soi. Le cas du frottement de rouleau est exemplaire aussi parce que pour le métal, c'est évidemment un phénomène qui n'a pas une grande importance ; par contre, à nouveau en Mécanique des Sols, c'est un sujet important puisque c'est le roulement du véhicule en tout terrain.

Mais, c'est avec les problèmes posés par la crise de l'énergie et les sollicitations répétées dans les centrales nucléaires que les applications de la plasticité aux métaux ont donné aux travaux de MANDEL de nouveaux développements. Dans le domaine "élastique", la rupture par fatigue se produit après  $10^6$  ou  $10^7$  cycles ; cela n'a rien de commun avec ce qui peut se produire pour 10, 100 ou 1000 cycles. Or, le fonctionnement de nombreux ouvrages, que ce soit le coeur du réacteur nucléaire ou les plateformes en mer -le haut de la tempête, c'est 200 vagues de période 20s- se situe dans ce domaine ; si on dépasse l'élasticité, il peut y avoir adaptation, ou accommodation si le cycle effort-déformation se boucle. S'il y a rochet on va évidemment à la ruine ; mais, s'il n'y a pas rochet et que le cycle a une certaine aire, le métal chauffe puis casse.

Kofter avait examiné ces problèmes. MANDEL les a repris, avec J. ZARKA, dans le cas de l'adaptation pour une structure écrouissable avec l'idée seconde que le cycle de chargement est thermomécanique et que le calcul d'une approximation est indispensable aux ingénieurs qui ne peuvent pas suivre par un calcul pas à pas l'évolution d'une structure, cycle après cycle.

Comme on a pu le voir, la Rhéologie a été une part importante de son activité. La réflexion sur les lois de comportement a fait l'objet d'un mouvement scientifique important dans cette deuxième partie du XXème siècle ; MANDEL y a évidemment beaucoup participé et cela dans deux directions : la thermodynamique d'une part et d'autre part le rattachement du comportement à la structure de la matière, ce qu'on appelle parfois le passage du microscopique au macroscopique.

En thermodynamique, il a donné les relations générales liant les déformations et l'entropie aux dérivées de l'enthalpie libre. Il a exploité le principe de non-dualité entre les forces et les déformations : il n'y a pas de phénomène dual de la viscosité ; ou encore un changement brusque de la vitesse de chargement ne provoque pas de déformation instantanée. Il a alors étudié (avec L. BRUN) les ondes ordinaires de discontinuité dans les milieux viscoélastiques. En viscoplasticité, dans un domaine où les connaissances relèvent de l'empirisme, il a établi un cadre physiquement correct et mathématiquement cohérent où la plasticité classique s'insère comme un cas particulier. Enfin, je rappelle qu'il a proposé une distinction entre solide et liquide d'après l'effet à longue échéance, évanescence ou non, d'un échelon de déformation.

Pour le rattachement du comportement à la micro-structure, il s'est essentiellement intéressé au cas des métaux. On sait que la plasticité du métal doit être recherchée dans les glissements intracristallins qui suivent la loi de Schmidt et plus généralement la théorie des dislocations. MANDEL a montré comment passer du monocristal au polycristal et a donné des relations entre la déformation permanente globale du polycristal

et les déformations plastiques des monocristaux. Le travail absorbé dans la déformation plastique est divisé en deux parties, l'une dissipée en chaleur, l'autre transformée en énergie élastique bloquée dans les cristallites. Une partie de l'écroutissement peut alors être due aux contraintes résiduelles, comme dans une structure, et les équations de comportement doivent en tenir compte.

En viscoplasticité, il décompose la transformation complète en transformation plastique et transformation élastique et introduit une configuration intermédiaire relâchée, il utilise un trièdre directeur qui permet de savoir où l'on se trouve dans un milieu matériel qui s'écoule et qui, éventuellement, ne reste pas isotrope. Enfin, il utilise des variables cachées pour caractériser l'écroutissement, ce qui permet de présenter des relations de comportement de formes différentielles en évitant ainsi les difficultés de la représentation fonctionnelle. Ses tout derniers travaux portaient sur les grandes transformations.

Je n'ai pas parlé du Calcul des Structures. Je signale cependant qu'il avait fait des travaux remarquables sur les instabilités, sur le flambage des poutres et des plaques dans ou sur un solide élastique résistant, ce qui correspond au problème du pieu dans un terrain ou de la dalle sur le sol.

A la fin de ce court exposé sur l'oeuvre et la vie du Professeur Jean MANDEL, j'espère avoir réussi à en montrer la richesse. Pour moi, la grande leçon que je veux en tirer, c'est ce balancement qui va de la théorie vers l'application, du fondamental jusqu'au cas particulier, premier mouvement sans lequel la Mécanique ne serait que ruine de l'âme; mais aussi le deuxième mouvement qui part du cas particulier que la technique nous pose et qui est le mouvement de l'abstraction qui permet de définir un problème, une classe de problèmes, pour lequel l'effort théorique devient à nouveau indispensable avec toute la rigueur et la précision mathématique, laissant les approximations pour le niveau des applications. Enfin, cette nécessité constante de réunir l'expérimentation et la théorie; la théorie et le calcul; le calcul et la vérification expérimentale.

## AUTOBIOGRAPHIE DE JEAN MANDEL JEAN MANDEL'S AUTOBIOGRAPHY

Dans le courant de l'année 1980, nous avons été amenés à demander au Professeur Jean MANDEL, à l'occasion de sa nomination comme Membre d'Honneur du Groupe Français de Rhéologie, de nous communiquer quelques éléments de sa biographie.

Jean MANDEL voulut bien nous faire l'amitié de répondre à notre demande en nous adressant, sous forme d'un manuscrit autographe, le texte ci-après.

Dans sa forme résumée, et parfois même abrégée, ce texte renseigne sur les événements de sa vie et les éléments de son oeuvre antérieure à décembre 1980 auxquels Jean MANDEL accordait lui-même de l'importance. Il constitue donc en soi un document, qu'il nous a paru important de faire figurer ici dans la forme même où il a été établi par son auteur à l'intention de notre Groupe.

Christian HUET  
Président  
du Groupe Français de Rhéologie

## AUTOBIOGRAPHIE DE JEAN MANDEL

### JEAN MANDEL'S AUTOBIOGRAPHY

Né en 1907, entre à l'X en 1926 puis comme ingénieur élève du Corps des Mines à l'Ecole des Mines en 1929. Docteur ès-sciences 1942. Professeur à l'Ecole des Mines de St Etienne (1932) puis de Paris (1948). Maître de Conférences à l'X (1943), puis professeur de mécanique à l'X (1951-1973). Ingénieur général des Mines.

Son activité d'ingénieur s'oriente dès 1936 vers la recherche et l'enseignement dans le cadre de la Mécanique et de la Résistance des Matériaux. Il crée en 1961 le laboratoire de mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique (qui actuellement groupe aussi l'Ecole des Mines et l'Ecole des Ponts). En octobre 1964, avec l'appui de M. le professeur H. Weiss il fonde le G.F. de Rh qu'il préside jusqu'en 1967. Il assure dès 1965 la publication des Cahiers du G.F.R., d'accord avec le concours du Service documentation de l'Aéronautique, puis avec celui de la Revue de l'Industrie minière.

Ses recherches se portent sur la Mécanique des Milieux Continus en général et plus particulièrement sur les milieux viscoélastiques, plastiques ou viscoplastiques.

#### Principaux sujets :

- Equilibres par tranches planes des solides à la limite de l'écoulement (thèse 1942).
- Torsion d'un cylindre plastique (1946).
- Le tassement des sols (1950) (appelé consolidation) - premier contact avec un problème d'écoulement faisant intervenir le temps. Ceci l'amène à faire des expériences sur le fluage du plexiglas (quoique l'origine physique du phénomène soit très différente de celle du tassement de l'argile), puis à la
- Théorie des corps viscoélastiques boltzmaniens. En utilisant la transformation de Laplace il montre que la théorie de la viscoélasticité linéaire peut être ramenée (si les conditions à la limite s'y prêtent) à la théorie de l'élasticité linéaire (principe dit de correspondance - 1955 - également obtenu indépendamment par E.H. Lee à la même époque). C'est le Chap 5 du livre : Introduction ... de Persoz (1960).

- Corps viscoélastiques linéaires dont les propriétés dépendent de l'âge (1958) (introduction d'opérateurs qui permettent de se ramener aux équations de l'élasticité).
- Ondes plastiques dans un milieu indéfini à 3 dimensions (1961). Démonstration de l'existence de 3 ondes dont les célérités sont encadrées par les célérités des 3 ondes élastiques. Ondes de choc plastiques (1962, puis 1974)
- Equations fondamentales et théorie mathématique de la Viscoplasticité (Udine, 1971)
- Essai de définition de quelques comportements rhéologiques (Lyon, 1972)  
5 livres et une centaine d'articles.

2 prix de l'Académie des Sciences + Prix Gaston Julia de la Fondation de l'Industrie Siderurgique + Prix Louis Baes de l'Académie Royale de Belgique + 3 médailles d'Or + médaille Vaucanson du GAMI.



## LISTE DES PUBLICATIONS DE JEAN MANDEL

### LIST OF JEAN MANDEL'S PUBLICATIONS

- 1 - Note sur le flambage d'une tige en milieu résistant élastique.  
C.R. , t. 203, 20.7.1936.
- 2 - Mémoire sur le flambage en milieu résistant élastique.  
2 articles - Annales des Ponts et Chaussées - 1936.
- 3 - Sur une méthode de mesure des perméabilités des sols en place  
par application de la théorie des potentiels. (en collaboration  
avec A. Meyer).  
1er Congrès International de Mécanique des Sols, Harvard, 1936.
- 4 - Cours de Construction Ecole Nationale Supérieure des Mines de  
Saint-Etienne, 1936.
- 5 et 6 - 2 notes sur les Equilibres par tranches planes parallèles des  
milieux plastiques à la limite d'écoulement.  
C.R. , t. 206, 31.1 et 21.2.1938.
- 7 - Cours de Résistance des Matériaux - Ecole Nationale Supérieure des  
Mines de Saint-Etienne, 1938.
- 8 - Mémoire sur le Calcul des infiltrations dans les terrains perméables.  
Annales des Ponts et Chaussées, 1939.
- 9 - Equilibres par tranches planes des solides à la limite d'écoulement.  
Thèse de doctorat, Lyon, 1942.
- 10 - Application des équations intégrales à l'étude des vibrations et du  
flambage des corps minces élastiques.  
Seconde thèse - Annales de la Faculté de Lyon, 1943.
- 11 - Sur le Flambage des pièces dont l'inertie s'annule à l'une de leurs  
extrémités.  
C.R., t. 216, 15.2.1943.
- 12 - Mémoire sur le Flambage des pièces dont l'inertie s'annule à l'une  
de leurs extrémités.  
Annales des Ponts et Chaussées, Septembre 1943.
- 13 - Equilibres limites des milieux plastiques plans.  
Revue Travaux, Juin, Juillet, Novembre 1943.
- 14 - Sur l'Instabilité d'une tige par torsion avec ou sans effort longi-  
tudinal.  
C.R., t.217, 18.10.1943.
- 15 - Sur l'Instabilité d'une tige par torsion ou par flexion.  
C.R., t. 217, 27.12.1943.
- 16 - Mémoire sur Diverses instabilités d'une tige.  
Annales des Ponts et Chaussées, Septembre, Octobre 1943.
- 17 - Contribution à l'étude du silo indéfini.  
Revue Travaux, 1944.
- 18 - Sur l'onde de charge au voisinage des souterrains.  
C.R. 197/36 de la Station d'essai de Montluçon des Charbonnages de  
France, Mars 1944.
- 19 - Cours de Mécanique. Ecole Nationale Supérieure des Mines de  
Saint-Etienne, 1945.
- 20 - Sur quelques problèmes de la mécanique des milieux plastiques.  
Conférence polytechnicienne, 1945.
- 21 - Exercices de Mécanique avec solutions, Ecole Polytechnique.  
Cours de H. Beghin, 1945.
- 22 - Sur les déformations dans la torsion plastique.  
C.R., t. 220, 20.5.1946.
- 23 - Equilibres limites plans des milieux plastiques.
- 24 - Torsion plastique.  
2 communications au VIème Congrès International de Mécanique,  
Paris 1946.
- 25 - Mémoire sur la torsion plastique - Annales des Ponts & Chaussées,  
Janvier 1946.
- 26 - Propriétés mécaniques des milieux formés d'éléments solides laissant  
des vides entre eux.  
Conférence polytechnicienne, 1946.
- 27 - Exercices de Mécanique avec solutions. Ecole Polytechnique, cours  
de 1ère année de Ch. Platier, 1946.
- 28 - Sur les petites déformations des milieux doués de frottement  
interne.  
C.R., t. 225, 20.10.1947.
- 29 - Sur les lignes de glissement et le calcul des déplacements dans la  
déformation plastique.  
C.R., t. 225, 22.12.1947.
- 30 - Exercices de Mécanique avec solutions. Ecole Polytechnique,  
Cours de 2ème année de Ch. Platier, 1947.
- 31 - Déformations et contraintes dans les milieux à frottement interne.  
2ème Congrès International de Mécanique des Sols, Rotterdam, 1948.

.../...

.../...

- 32 - Sur la détermination du centre de torsion d'un cylindre à l'aide du théorème de réciprocité.  
7ème Congrès International de Mécanique - Londres 1948, et Note aux C.R., t. 226, 8.3.1948.
- 33 - Mémoire sur la détermination du centre de torsion.  
Annales des Ponts et Chaussées, Mai-Juin 1948.
- 34 - Sur l'invariance des équations de la mécanique dans un changement du système de référence.  
C.R., t.227, 2.8.1948.
- 35 - Le problème de l'équilibre limite des terres.  
Revue Travaux, Octobre 1948.
- 36 - Cours de Mécanique - Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1949.
- 37 - Sur la Réactivité des sols.  
C.R., t.230, 9.1.1950.
- 38 - Essai sur la Mécanique physique des pseudosolides.  
Annales des Ponts et Chaussées, Mai-Juin 1950.
- 39 - Etude mathématique de la consolidation des sols.  
Colloque International de Poitiers, 1950.
- 40 - Equilibre<sup>limite</sup>/des talus dans l'hypothèse d'un angle de frottement interne nul.  
Revue Travaux, Octobre 1950.
- 41 - Cours de Résistance des Matériaux, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1950.
- 42 - La Consolidation des sols.  
Conférence au Comité Français de Mécanique des Sols, 1950.  
Revue Géotechnique, Septembre 1953.
- 43 - Sur la Consolidation des Sols.  
C.R., t. 232, 15.1.1951.
- 44 - Ecoulement de l'eau sous une ligne de palplanches. Abaque pour la condition de renard.  
Revue Travaux, Mars 1951.
- 45 - Sur les points fondamentaux de la théorie de l'Elasticité.  
Ecole Polytechnique, 1951.
- 46 - Sur la Réactivité des solides.  
C.R., t. 233, 22.10.1951.
- 47 - Cours de Mécanique de 1ère Année, Ecole Polytechnique, 1952.

- 48 - Tassement d'une couche d'argile dans le cas d'une charge concentrée à la surface du sol.  
3ème Congrès International de Mécanique des Sols, 1952.
- 49 - Sur le Tassement d'une couche d'argile sous l'effet d'une force concentrée.  
C.R., t. 235, p. 1104-1106, 10.11.1952.
- 50 - Eléments de Résistance des Matériaux.  
Cours à l'Ecole d'Application des poudres, 1952.
- 51 - Cours de Mécanique de 2ème Année (Milieux Continus)  
Ecole Polytechnique, 1953.
- 52 - Sur le fluage du corps de Maxwell.  
C.R., t. 241, p. 1550-1552, 21.11.1955.
- 53 et 54 - 2 Notes sur les corps viscoélastiques à comportement linéaire.  
C.R., t. 241, p. 1910-1912, 19.12.1955.  
C.R., t. 242, p. 2803-2805, 11.6.1956.
- 55 - Les corps viscoélastiques à comportement linéaire.  
IXème Congrès International de Mécanique Appliquée, Bruxelles, 1956.
- 56 - Consolidation primaire d'une couche d'argile de grande épaisseur.
- 57 - Consolidation secondaire d'une couche d'argile.  
2 communications au IVème Congrès International de Mécanique des Sols, Londres, 1957.
- 58 - Problèmes actuels en mécanique des solides.  
Conférence polytechnicienne, Janvier 1957.
- 59 - Sur les vibrations des corps élastiques.  
C.R., t. 245, p. 2004-2006, 25.11.1957.
- 60 - Sur les vibrations des corps viscoélastiques.  
C.R., t. 245, p. 2176-2178, 25.11.1957.
- 61 - Sur les corps viscoélastiques linéaires dont les propriétés dépendent de l'âge.  
C.R., t. 247, p. 175-178, 7.7.1958.
- 62 - Les corps viscoélastiques boltzmanniens.  
IIIème Congrès International de Rhéologie, 1958.
- 63 - Application du calcul opérationnel à l'étude des corps viscoélastiques.  
Théorie de la viscoélasticité linéaire.  
2 conférences (Mai, Juin 1958) - Cahiers du Groupe Français d'Etudes de Rhéologie, tome III.

64 - Les calculs en matière de pressions de terrain.  
Revue de l'Industrie Minérale, Vol. 41, Janvier, Avril 1959,  
traduit en Anglais dans University Nottingham Mining Dept Magazine,  
et Zeitsch. Int. Gesellschaft für Felsmechanik.

65 - Bases physiques des théories mathématiques de la Plasticité.  
2 conférences (Novembre, Décembre 1959).  
Cahiers du Groupe Français d'Etudes de Rhéologie, Tome IV, N°2, 1959.

66 - Application du calcul symbolique à l'étude des corps viscoélastiques.  
Chap. 5 du livre : Introduction à l'étude de la Rhéologie.  
Dunod 1960.

67 - Généralisations non linéaires des corps de Maxwell et de Kelvin.  
Fluage et relaxation.  
Colloque international de Rhéologie, C.N.R.S., Paris, 1960.

68 - Vibrations des corps viscoélastiques linéaires.  
Xème Congrès International de Mécanique Appliquée, Stresa, 1961.

69 - Sur les ondes ordinaires dans un milieu indéfini élastoplastique.  
C.R., t. 252, p. 2174-2176, 10.4.1961.

70 - Sur les surfaces de discontinuité mobiles dans un milieu élastoplastique  
indéfini.  
C.R., t. 252, p. 2505-2507, 24.4.1961.

71 - Déplacements produits par une charge mobile à la surface d'un semi-  
espace élastique (collab. avec AVRAMESCO).  
C.R., t. 252, p. 3730-3732, 5.6.1961.

72 - Tassements produits par la consolidation d'une couche d'argile de  
grande épaisseur.  
Vème Congrès International de Mécanique des Sols, Paris, 1961.

73 - Sur les ondes de choc plastiques en milieu indéfini isotrope.  
C.R., t. 253, p. 2198-2200, 13.11.1961.  
et Acta Technica, Prague 1962, n° 1.

74 - Ondes plastiques dans un milieu indéfini à trois dimensions.  
Journal de Mécanique, Vol. I, n°1, Mars 1962. Traduit en Russe.

75 - Surfaces caractéristiques des équations de l'équilibre plastique  
dans le cas du critère de Tresca (Collab. avec F. PARSY).  
C.R., t. 254, p. 3971-3972, 28.5.1962.

76 - Essais sur modèles réduits en mécanique des sols et des roches.  
Etude des conditions de similitude.  
Revue de l'Industrie minérale, Oct. 1962.  
Traduit en Anglais dans Rock Mechanics and Mining Sc., 1964.

.../...

77 - Séminaire de Plasticité - Ecole Polytechnique, 1961.  
Publ. Sc. et Tech. du Ministère de l'Air.

78 - Confrontation des théories de la plasticité et de l'expérience.  
(Journées de la S.F.M., Oct. 1962)  
Revue Française de Mécanique, 1962, n°4, p. 51.

79 - Surfaces caractéristiques des équations de l'équilibre plastique,  
lorsque deux des contraintes principales sont égales, pour une  
courbe intrinsèque quelconque.  
C.R., t. 255, p. 255-257, 9.7.1962.

80 - Propagation des surfaces de discontinuité dans un milieu élastoplastique  
Symposium I.U.T.A.M. on Stress Waves in anelastic Solids -  
Springer 1963.

81 - Surfaces caractéristiques des équations de l'équilibre plastique pour  
une courbe intrinsèque quelconque, lorsque les trois contraintes  
principales sont différentes.  
C.R., t. 256, p. 3000-3002, 25 Mars 1963.

82 - Déplacements produits sur un semi-espace élastique par une charge  
en mouvement rectiligne uniforme - Annales des Ponts et Chaussées,  
Mars - Avril, 1963, p. 147-158.  
En collaboration avec A. AVRAMESCO.

83 - Contribution à l'étude théorique et expérimentale des coefficients  
d'élasticité d'un milieu hétérogène mais statistiquement homogène.  
Annales des Ponts et Chaussées, Mars Avril 1963.  
En collaboration avec P. DANTU.

84 - Surfaces caractéristiques des équations de l'équilibre plastique pour  
un milieu rigide-parfaitement plastique.  
Journal de Mécanique, Vol. 11, N°3, Sept. 1963,  
En collaboration avec F. PARSY.

85 - Essais de traction et torsion sur tubes et fils métalliques.  
4ème Congrès International de Rhéologie, Providence, 1963.  
Avec P. HABIB, et H.D. BUI.

86 - Interférence plastique de fondations superficielles.  
Congrès International de Mécanique des Sols de Budapest, 1963.  
Acta Technica, Budapest.

87 - Sur une généralisation de la théorie du potentiel plastique de  
Koiter.  
C.R., t. 258, p. 2007-2009, 10 Fév. 1964.

88 - Conditions de stabilité et postulat de Drucker.  
Symposium I.U.T.A.M. : Rhéologie et Mécanique des Sols.  
Grenoble, 1964.

89 - Contribution théorique à l'étude de l'érouissage et des lois de l'écrou-  
issement plastique.  
11ème Congrès International de Mécanique Appliquée, Munich 1964-  
Springer.

- 90 - Interférence plastique des semelles filantes.  
6ème Congrès International de Mécanique des Sols,  
Montréal, 1965.
- 91 - Généralisation de la théorie de plasticité de Koiter.  
International Journal of Solids and Structures, Vol.1,  
p. 273-295, 1965.
- 92 - Sur le calcul approché de l'extension du bourrelet frontal  
créé par le frottement à la surface d'un monocristal.  
C.R., t. 260, p. 3568, 22.3.1965. Avec F. LAGARDE, M. KENNEL, R. COU...
- 93 - Force concentrée agissant au sein d'un semi-espace élastique,  
homogène, isotrope, limité par un plan dont les points restent fixes  
(C.R., t. 260, p. 4417, 5.4.1965). En collaboration avec PHAM THE LU...
- 94 - Sur l'unicité du champ des contraintes, lors de l'équilibre limite,  
un milieu rigide-plastique obéissant au critère de la cission maximale  
C.R., t. 261, p. 35, 28.6.1965.
- 95 - Energie élastique et travail dissipé dans les modèles.  
Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, Tome 1, n°1, Sept. 1965.
- 96 - Sur les équations d'écoulement des sols idéaux en déformation plane  
et le concept du double glissement.  
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 14, N°6, p. 303
- 97 - Cours de Mécanique des milieux continus.  
Gauthier-Villars, 1966, 2 tomes.
- 98 - Application de la thermodynamique aux milieux viscoélastiques linéaires  
à paramètres cachés.  
Cahiers du groupe français de Rhéologie, t.1, N°4.
- 99 - Application de la thermodynamique aux milieux viscoélastiques à élasticités  
nulle ou restreinte.  
C.R., t. 264, p. 133, 9.1.1967.
- 100 - Sur les ondes ordinaires dans les milieux viscoélastiques.  
C.R., t. 264, p. 416, 20.2.1967, avec L. BRUN.
- 101 - Résistance au roulement d'un cylindre indéformable sur un massif  
parfaitement plastique.  
Journées sur le frottement. Journal du G.A.M.I., Mai 1967.
- 102 - Thermodynamique et Ondes dans les milieux viscoélastiques.  
Journal of the Mech. and Phys. of Solids, Vol. 16, p.33-58,  
Fév. 1968, avec L. BRUN .
- 103 - Application de la thermodynamique aux milieux viscoélastiques.  
Colloque de Bielsko-Biella, 1967.  
Arch. Mech. Stosowanej, Vol. 2.20, p. 181-188.
- 104 - Sur un principe restreignant les formes possibles pour les équations  
constitutives.  
12ème Congrès International de Mécanique Appliquée, Stanford, 1968.  
5ème Congrès International de Rhéologie, Kyoto, 1968.
- 105 - Thermodynamique et Ondes dans les milieux viscoplastiques.  
J. of the Mech. and Phys. of Solids, vol. 17, n° 3, 1969.
- 106 - Aperçu sur les principaux comportements rhéologiques.  
Chap. I du livre : La Rhéologie, Dunod, 1969.
- 107 - Poinçonnement d'un bicouche à interface lisse, en déformation plane,  
avec J. SALENÇON,  
C.R., t. 265, p. 417-420, 17.2.1969.
- 108 - Force portante d'une fondation sur un bicouche,  
avec J. SALENÇON,  
7ème Congrès International de Mécanique des Sols, Mexico, 1969.
- 109 - Une condition nécessaire pour l'existence d'ondes dans un milieu  
déformable.  
C.R., t. 270, p. 399-401, 09.02.1970.
- 110 - Conditions suffisantes pour l'existence d'ondes ordinaires dans un  
milieu déformable.  
C.R., t. 270, p. 1535, 08.06.1970.
- 111 - Sur la décomposition d'une transformation élastoplastique,  
C.R., t. 272, pp. 276-279, 04.01.1971.
- 112 - Introduction à la Mécanique des Milieux Continus Déformables,  
Cours à l'Ecole Polytechnique, 1971.
- 113 - Sur les relations de comportement d'un milieu élastique viscoplastique.  
114 - C.R., t. 273, pp. 1596-1598, 07.06.1971.  
C.R., t. 273, pp. 44-46, 14.06.1971.
- 115 - Profondeur critique d'éboulement en souterrain,  
avec Y. d'ESCATHA,  
C.R., t. 273, pp. 470-473, 13.09.1971.
- 116 - Plasticité classique et Viscoplasticité, dix conférences,  
Cours au Centre International des Sciences Mécaniques, Udine,  
Septembre-Octobre 1971.
- 117 - Distribution des contraintes et des vitesses dans un milieu rigide visco-  
plastique homogène en transformation quasi-statique isotherme.  
C.R., t. 273, pp. 816-819, 03.11.1971.
- 118 - Distribution des vitesses de contrainte et de déformation dans un milieu  
élastique viscoplastique en transformation quasi-statique, continue,  
isotherme,  
C.R., t. 273, pp. 1285-1288, 20.12.1971.

.../..

.../...

- 119 - Force portante d'un sol sur une assise rigide - Etude théorique.  
Avec J. SALENÇON.  
Géotechnique, vol. 22, n° 1, pp. 79-93, Mars 1972.
- 120 - Note sur l'application du critère de Tresca au problème de la flexion.  
Arch. Mech. Stosowanej, 24, n° 5-6, pp. 863-872, 1972.
- 121 - Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques.  
13ème Congrès International de Mécanique Théorique et Appliquée,  
Moscou, 19 au 27 Août 1972.  
Int. J. of Solids and Structures.
- 122 - Essai de définition de quelques comportements rhéologiques.  
6ème Congrès International de Rhéologie, Lyon 4-8 Septembre 1972.  
(conférence générale).
- 123 - Définition des fluides selon W. NOLL.  
Cahiers du Groupe Français de Rhéologie.  
Revue de l'Industrie Minérale, t. III, n° 1, pp. 3-20, 15.01.1973.
- 124 - Stabilité d'une galerie peu profonde en terrain meuble.  
avec Y. d'ESCATHA.  
Communication aux Journées de Mécanique des Roches, Paris, Février 1973.
- 125 - Les trois fonctions viscosimétriques d'un fluide incompressible.  
Cahiers du Groupe Français de Rhéologie.  
Revue de l'Industrie Minérale, t. III, n° 2, pp. 35-37, 15.04.1973.
- 126 - Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques.  
Int. J. Solids and Structures, vol. 9, n° 6, Juin 1973, pp. 725-740.
- 127 - Propriétés mécaniques des matériaux nouveaux.  
N° Spécial annuel de l'U.A. des Elèves de l'Ecole Sup. Phys. et  
Chimie, Juin 1973.
- 128 - Etude des cavités souterraines.  
avec Y. d'ESCATHA, P. HABIB, M.P. LUONG, Q.S. NGUYEN, J. SALENÇON,  
J. ZARKA.  
Publication du Commissariat à l'Energie Atomique (C.E. Vaujours),  
Rapport C.E.A. R 4426, Juin 1973.
- 129 - Plasticité et Viscoplasticité.  
Ibidem, 1er fascicule, pp. 117-127, 1973.
- 130 - Unicité et Principes variationnels en Viscoplasticité.  
Ibidem, 1er fascicule, pp. 229-246, 1973.
- 131 - Sur les relations entre fonctions fluage et relaxation en viscoélasticité non linéaire. avec C. HUET, J.M. SERVAS.  
C.R.A.S., t. 277, p. 1003, 19.11.1973.
- 132 - Relations de comportement des milieux élastiques-plastiques et élastiques viscoplastiques.  
Notions de trièdre directeur.  
Int. Symp. on Foundations of Plasticity, Varsovie, 3-8 au 3.9.1972.  
Noordhoff Int. Pub., Groningen, 1973.
- 133 - Sur les ondes d'accélération dans les milieux plastiques ou viscoplastiques.  
C.R. Ac. Sci., t. 278, pp. 1143-1145, 1974.
- 134 - Stabilité d'une galerie peu profonde en terrain meuble.  
Avec Y. d'ESCATHA.  
Revue de l'Industrie Minérale, 15 Avril 1974.
- 135 - Etude théorique et expérimentale de la stabilité des cavités souterraines.  
Avec Y. d'ESCATHA, B. HALPHEN, P. HABIB, M.P. LUONG, J. ZARKA,  
Symposium Franco-Polonais de Rhéologie et de Mécanique des Sols,  
Nice, Juillet 1974.
- 136 - Stabilité d'une cavité sphérique souterraine.  
Avec B. HALPHEN.  
3ème Congrès de la Société Internationale de Mécanique des Roches,  
Denver, Septembre 1974, Thème 4.
- 137 - Un principe de correspondance pour les corps viscoélastiques linéaires vieillissants.  
IUTAM Symposium on the Mechanics of viscoelastic Media, Göteborg, Suède,  
Septembre 1974.
- 138 - Introduction à la Mécanique des Milieux Continus Déformables.  
Académie Polonaise des Sciences,  
Edition P.W.N., Varsovie, (125 pages), 1974.
- 139 - Plasticité et Poussée des Terres.  
Cours de Sciences des Matériaux, Fascicule II, 1974.  
E.N.S.M.P.
- 140 - Notions générales sur les ondes - Ondes de discontinuité.  
Cours au C.I.S.M., Udine, "Mechanic Waves in Solids", Springer-Verlag,  
Vienne, 1976.
- 141 - Adaptation d'une structure plastique écouissable.  
Mechanics Research Communications, vol. 3, n° 6, pp. 251-256, 1976.
- 142 - Adaptation d'une structure plastique écouissable et Approximations.  
Mechanics Research Communications, vol. 3, n° 6, pp. 483-488, 1976.
- 143 - Equations de comportement d'un système élastoviscoplastique dont l'écouissage est dû à des contraintes résiduelles.  
C.R. Ac. Sci., tome 284, pp. 257-260, 24 Janvier 1977.

.../...

- 144 - Adaptation d'une structure élastoplastique à écrouissage cinématique. Avec J. ZARKA, B. HALPHEN. Mechanics Research Communications, vol. 4, n° 5, pp. 309-314, 1977.
- 145 - Variables cachées. Puissance dissipée. Dissipativité normale. Colloque annuel du Groupe Français de Rhéologie "Thermodynamique des Comportements Rhéologiques", Paris, Décembre 1977.
- 146 - Sur l'anisotropie des sols. Avec M. DAHAN, M.P. LUONG. C.R. Ac. Sci., t. 287, série B, pp. 179-181, 9 Octobre 1978.
- 147 - Dissipativité normale et variables cachées. Mechanics Research Communications, 1978.
- 148 - Propriétés mécaniques des matériaux - Rhéologie - Plasticité. (avec une annexe de P. HABIB), Eyrolles, 1978, (284 pages).
- 149 - Ondes de choc longitudinales dans un milieu élastoplastique. Mechanics Research Communications, vol. 5, n° 6, 1978.
- 150 - Généralisation dans  $\mathcal{R}^3$  de la règle du potentiel plastique pour un élément polycristallin. C.R. Ac. Sci., t. 290, série B, pp. 481-484, 16 Juin 1980.
- 151 - Sur la définition de la vitesse de déformation élastique et sa relation avec la vitesse de contrainte. C.R. Ac. Sci., t. 291, série B, pp. 5-7, 7 Juillet 1980.
- 152 - Relations de comportement d'un solide élastoplastique anisotrope en transformation finie. Colloque International du C.N.R.S. sur le Comportement Plastique des Solides Anisotropes, Villars de Lans, 16-23 Juin 1981.
- 153 - Sur la définition de la Vitesse de déformation élastique et sa Relation avec la vitesse de contrainte. Int. J. Solids and Structures, vol. 17, pp. 873-878, 1981.
- 154 - Définition d'un repère privilégié pour l'étude des transformations anélastiques du polycristal. Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, vol. 1, n° 1, pp. 7-23, 1982.
- 155 - "Sur la définition de la vitesse de déformation élastique en grande transformation élastoplastique". Int. J. Solids and Structures, volume 19, n°7, pp.573-578, 1983.

**PRIX DE MECANIQUE JEAN MANDEL  
DE LA FONDATION DES INDUSTRIES MINERALES,  
MINIERES ET METALLURGIQUES FRANÇAISES  
JEAN MANDEL PRIZE OF MECHANICS**

Le 14 décembre 1981, Jean MANDEL recevait le Prix du Commissariat à l'Energie Atomique qui lui était décerné par l'Académie des Sciences.

Il en versait le montant, de 180 000 Francs, à la Fondation des Industries Minérales, Minières et Métallurgiques Françaises pour la création par celle-ci d'un prix destiné à encourager la recherche scientifique dans le domaine de la Mécanique et de la Rhéologie des Matériaux.

Ce prix est attribué annuellement conformément au protocole ci-après.

Des renseignements concernant ce prix peuvent être obtenus auprès du Directeur de l'Ecole des Mines 60, boulevard Saint Michel, F 75006 PARIS.

# FONDATION

60, Boulevard Saint-Michel  
75006 PARIS

Téléphone : 329-21-05

DES INDUSTRIES MINÉRALES, MINIÈRES ET MÉTALLURGIQUES FRANÇAISES  
A L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

Établissement déclaré d'utilité publique (décret du 17 décembre 1947)

## PRIX DE LA FONDATION DES INDUSTRIES MINÉRALES, MINIÈRES ET MÉTALLURGIQUES FRANÇAISES (Prix de Mécanique Jean MANDEL)

oOo

Ce prix, d'un montant annuel de vingt mille francs, est destiné à encourager la recherche scientifique dans le domaine de la mécanique des solides ou de la mécanique et rhéologie des matériaux.

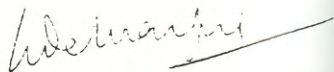
Il sera attribué à un jeune chercheur ou une équipe de jeunes chercheurs auteurs d'un travail original de caractère théorique ou expérimental du niveau de doctorat d'Etat ou d'une application originale de résultats connus à l'Art de l'Ingénieur.

Il sera décerné par un jury de cinq personnes dont trois membres des personnels enseignants des Ecoles d'Ingénieurs, un professeur d'Université et une personne appartenant aux laboratoires de recherche de l'industrie.

Le Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris est chargé par la Fondation des Industries Minérales, Minières et Métallurgiques Françaises de la constitution du jury et de son renouvellement dans le respect des intentions initiales de Jean MANDEL, fondateur du prix. Il organise le concours entre chercheurs ou équipes de chercheurs pour l'obtention du prix, convoque le jury et transmet la Fondation les résultats de ses délibérations.

Signé pour accord

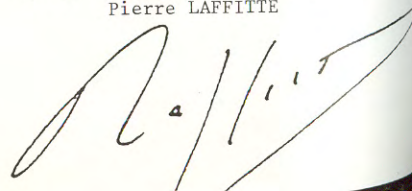
Le Président de la Fondation



Le Fondateur Jean MANDEL



Le Directeur de l'Ecole des Mines  
Pierre LAFFITTE



P. J. en annexe, une convention.-

## PRIX DE MECANIQUE JEAN MANDEL JEAN MANDEL PRIZE OF MECHANICS

Sessions 1982 et 1983

Composition du Jury :

Louis BRUN, Maître de Conférences à l'Ecole Polytechnique.

Christian HUET, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

René LABBENS, Conseiller Scientifique de Creusot-Loire.

Jean SALENÇON, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées  
et à l'Ecole Polytechnique.

André ZAOUI, Professeur à l'Université de Paris XIII.

## PRIX DE MECANIQUE JEAN MANDEL JEAN MANDEL PRIZE OF MECHANICS

### LAUREATS

#### Session 1982:

Bernard HALPHEN, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Docteur ès Sciences.  
Chef du Service de Mécanique du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

Pour ses travaux sur la plasticité et les comportements rhéologiques des Matériaux.

#### Session 1983:

François MUDRY, Ingénieur des Mines, Docteur ès Sciences.

Pour ses travaux sur la Mécanique de la Rupture appliquée aux aciers.

## DEUXIEME PARTIE

## COMMUNICATIONS



## COMPORTEMENTS DES POLYCRISTAUX ET MONOCRISTAUX SOUS SOLLICITATIONS RAPIDES (\*)

### BEHAVIOUR OF POLYCRYSTALS AND SINGLE-CRYSTALS UNDER HIGH STRAIN-RATE LOADING

Chi-Yuen CHIEM (\*\*)

#### RESUME

L'étude des lois de comportement des matériaux sous sollicitation dynamique retient, depuis quelques décades, l'attention des chercheurs en Mécanique et en Physique des Matériaux.

L'approche macroscopique des premiers, l'analyse microscopique des seconds, conduisent souvent à des développements divergents alors que l'aboutissement naturel des uns comme des autres est la détermination des paramètres vrais qui régissent le comportement des matériaux.

Cette communication tend à donner un aperçu sur quelques résultats expérimentaux spécifiques qui ont été effectués sur les polycristaux et les monocristaux déformés à grande vitesse et à faire le point des résultats tant au niveau macroscopique qu'au niveau microscopique. Conscient de la masse des résultats existants, nous nous limitons aux cas simples d'essais dans les conditions uniaxiales de contrainte ou de déformation.

#### ABSTRACT

Studies on constitutive equations for dynamic material behaviour have been of interest during some recent decades to researchers in mechanics and physics of materials.

The macroscopic approach of the ones and the microscopic approach of the others lead often to divergent developments while the aim of the ones as that of the others is the determination of true parameters which govern the behaviour of materials.

This communication tend to give a short review on some specific experimental results on polycrystals and single-crystals loaded at high strain-rate and to make a synthesis on the results in the macroscopic level as well as in the microscopic level. Conscious of the large amount of existant results, we will limit to simple cases where tests are done under conditions of uniaxial stress or uniaxial strain.

(\*) Communication présentée lors du 17<sup>e</sup> Colloque National Annuel du Groupe Français de Rhéologie (Paris, 1-2 décembre 1982).

(\*\*) Laboratoire de Physique du Métal, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, 1 rue de la Noë, 44072 NANTES CEDEX

## 1. INTRODUCTION

L'optimisation des matériaux dans les applications nécessite une description adéquate et une bonne connaissance de leurs propriétés mécaniques et physiques. Pour la plupart des matériaux qui subissent une déformation plastique, le facteur temps a quelques influences significatives sur la relation entre forces appliquées et déformation.

Les essais à grande vitesse sont donc liés à des phénomènes de mise en charge transitoire de durée très courte. En général, lorsque l'on parle de "grande vitesse de déformation", la déformation du matériau s'accomplit au bout de quelques secondes ou même quelques centaines de micro-secondes. Dans certains essais d'impact, la durée est de l'ordre de quelques nanosecondes.

Ainsi, un grand nombre de travaux expérimentaux nécessitent l'utilisation de techniques sophistiquées. Il n'est pas possible de rendre compte de l'ensemble des travaux réalisés jusqu'à présent, nous nous contenterons de ceux intéressant les métaux et alliages. De même, nous nous limiterons aux essais où les conditions de contrainte ou de déformation sont uniaxiales.

Deux types d'essais seront particulièrement mentionnés dans cette communication. Les résultats sont obtenus par les dispositifs de barres de Kolsky (ou barres de Hopkinson fendues) et par les dispositifs d'essais d'impact par canon à gaz. La vitesse de déformation peut atteindre  $10^3$ - $10^4$  s<sup>-1</sup> pour les premiers, elle dépasse  $10^4$  s<sup>-1</sup> pour les seconds.

La contrainte d'écoulement des métaux et alliages polycristallins ou monocristallins est influencée par la vitesse de déformation ou la température (1-4). Mais récemment, il est montré que les histoires de la vitesse de déformation et de la température au cours de la déformation jouent un rôle très important dans le comportement plastique des métaux et alliages, notamment dans les polycristaux et monocristaux CFC (5-8). Des essais sur des métaux C.C. présentent une réponse très complexe du matériau vis-à-vis de la vitesse de déformation et de la température (9).

Bien qu'il y ait de nombreuses études faites sur l'influence de la vitesse de déformation sur le comportement des monocristaux, peu ont été menées à des vitesses de déformation dynamiques dépassant  $10^2$  s<sup>-1</sup>. Les premiers résultats sont ceux de Lindholm et Yeakley [10] et de Mukherjee et al [11] sur les monocristaux d'aluminium. Ils sont suivis par des études sur les monocristaux de molybdène, zinc et Ag-Mg [12-15]. Les résultats d'Edington [16-17] sur les monocristaux de niobium et de cuivre ont le mérite d'être étendus aux observations de la microstructure par microscopie électronique à transmission.

Les influences de l'histoire de la vitesse de déformation ou celle de la température sont surtout mises en évidence par les essais de saut de vitesses ou de températures. Pour les monocristaux, il existe un nombre important de résultats dans le domaine des vitesses quasi-statiques ; les résultats en dynamique sont ceux de Dormeival et al [18] et de Stelly et Dormeival [19] qui sollicitent les monocristaux de cuivre jusqu'à  $8.10^3$  s<sup>-1</sup> par des barres de Kolsky en compression ; la vitesse de déformation est d'abord quasi-statique, suivie d'un déchargement et ensuite d'un rechargement à une vitesse de déformation dynamique. Chiem et Duffy [20-21] ont effectué leurs essais en saut de vitesses sur des monocristaux de Al et de LiF. Leurs essais sont menés sur un dispositif de Kolsky en cisaillement où le saut de vitesses de déformation se fait sans relâchement de contrainte. Chiem et Duffy ont également étendu leurs études aux observations de la microstructure par microscopie électronique à transmission en faisant apparaître certains paramètres cachés de la microstructure pour les relier aux paramètres mécaniques à l'échelle de l'ingénieur.

Les essais d'impact "plaque/plaque" sur les monocristaux (tenseur de déformation uniaxiale) offrent des perspectives intéressantes dans l'étude des mécanismes de l'écoulement plastique dynamique. Les premiers travaux ont été axés sur l'atténuation du précurseur élastique dans le but de déterminer la relation entre la vitesse moyenne des dislocations et la contrainte de cisaillement résolue [22]. Diverses explications ont été fournies à ce sujet telles que la multiplication des dislocations au niveau du front d'onde [23], les influences dues à la surface d'impact frontale [24] et la nucléation hétérogène des dislocations [25].

Un grand pas vers la compréhension de tels phénomènes est fait grâce au développement des essais d'impact avec récupération de l'échantillon. Les premiers résultats obtenus à grande vitesse d'impact sont ceux de Kim, Clifton et Kumar [26-28] sur les monocristaux de LiF et MgO ainsi que ceux de Chiem, Kumar, Blinot et Clifton [29] sur les monocristaux de Fe-3 % Si.

Malgré ces nombreux résultats, il reste encore un fossé important entre les études théoriques et celles expérimentales, c'est-à-dire entre les micromécanismes de l'écoulement et la formulation des lois de comportement macroscopique qui pourraient être applicables aux solutions des problèmes technologiques importants.

L'objet de cette communication est de résumer brièvement les bases théoriques pour l'étude de la plasticité dynamique, de discuter sur certains résultats acquis par les uns et les autres sur les métaux et alliages ainsi que leur interprétation par la théorie des dislocations. Enfin, nous indiquerons les domaines où des travaux ultérieurs seront requis pour obtenir une solution aux problèmes rencontrés dans la déformation à grande vitesse.

## 2. EXTENSION DES THEORIES DE LA PLASTICITE CLASSIQUE AUX PROBLEMES DE L'ECOULEMENT EN FONCTION DU TEMPS

Cette extension constitue une approche macroscopique des problèmes de la déformation plastique des matériaux. Elle est fondée sur le concept d'une fonction de charge :

$$F = \frac{(J_2)^{1/2}}{k} - 1 \quad (1)$$

$J_2$  = second invariant du déviateur de contraintes

$k$  = contrainte de limite élastique "statique" en cisaillement.

La vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}_{ij}$  est supposée :

$$\dot{\epsilon}_{ij} \propto \langle F \rangle \quad (2)$$

où  $F$  est la différence entre une mesure scalaire de l'état de contraintes instantané  $((J_2)^{1/2})$  dans l'équation (1) et la surface de charge  $((J_2)^{1/2} = k$  pour  $F > 0$ ). Cette différence de contraintes est usuellement appelée "surcontrainte".

Diverses étapes de l'évolution de cette approche macroscopique sont présentées dans le tableau suivant :

Tableau 1 : Evolution des relations dans l'approche macroscopique

### ① Cisaillement simple : Bingham E.C. 1922 [30]

$$\dot{\epsilon}_{12} = \lambda_1 \dot{\sigma}_{12} + \kappa_1 \langle F \rangle \frac{\sigma_{12}}{|\sigma_{12}|} \begin{cases} |\sigma_{12}| \leq k \rightarrow \langle F \rangle = 0 \\ |\sigma_{12}| > k \rightarrow \langle F \rangle = F \end{cases} \quad (3)$$

### ② Extension de (3) pour les états de contraintes généralisés : Hohenemser K., Prager W. 1932 [31]

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda_2 \dot{\sigma}_{ij} + \kappa_2 \langle F \rangle \frac{\sigma_{ij}}{(J_2)^{1/2}} \begin{cases} (J_2)^{1/2} \leq k \rightarrow \langle F \rangle = 0 \\ (J_2)^{1/2} > k \rightarrow \langle F \rangle = F \end{cases} \quad (4)$$

### ③ Propagation d'ondes viscoplastiques mono-dimensionnelles : solution générale : Malvern L.E. 1951 [32]

$$\dot{\epsilon}_{11} = \lambda_3 \dot{\sigma}_{11} + \underbrace{\psi(\sigma_{11}, \epsilon_{11})}_{\text{fonction}} \begin{cases} \sigma_{11} \leq F(\epsilon_{11}) \rightarrow \psi(\sigma_{11}, \epsilon_{11}) = 0 \\ \sigma_{11} > F(\epsilon_{11}) \rightarrow \psi(\sigma_{11}, \epsilon_{11}) \neq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$\dot{\epsilon}_{11}$  = valeur finie si  $\sigma > \sigma_{11}$  ( $\sigma_{11} = F(\epsilon_{11})$ ).

④. Extension de (5) pour les états de contraintes généralisés :

Perzina P. 1963 [33]

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda_4 \dot{\sigma}_{ij} + \kappa_4 \dot{\phi}_{(F)} \frac{\sigma_{ij}}{(J_2)^{1/2}} \begin{cases} (J_2)^{1/2} \leq k + \phi_{(F)} = 0 \\ (J_2)^{1/2} > k + \phi_{(F)} \neq 0 \end{cases} \quad (6)$$

$\lambda$  et  $\kappa$  sont respectivement les constantes élastiques et visqueuses du matériau,  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$  sont respectivement les tenseurs déviateurs des contraintes et des déformations.

Remarques

L'application de ces formules en plasticité dynamique est basée sur les mesures macroscopiques de l'écoulement plastique pour obtenir les constantes ou former les fonctions non définies.

A l'état actuel, le nombre de données expérimentales disponibles au sujet du comportement des matériaux dépendant de la vitesse de déformation reste encore insuffisant pour pouvoir prouver la validité de ces relations.

Les limites de la plasticité macroscopique

La théorie macroscopique de la plasticité n'est valable que dans un domaine assez grand devant le parcours moyen des dislocations ou la distance moyenne des bandes de glissement.

Toutes ces représentations macroscopiques ne permettent pas de bien distinguer la signification des constantes ou des fonctions introduites qui sont toujours obtenues par ajustement des courbes.

En réalité la taille du plus petit élément de volume fondamental à considérer macroscopiquement dépend de la microstructure et de la distribution des dislocations.

Afin de trouver une signification plus physique aux lois de comportement des matériaux, des travaux importants ont été développés dans le domaine de la plasticité microscopique.

3. APPROCHES MICROSCOPIQUES

L'état initial du matériau, l'évolution de sa microstructure au cours de la déformation et à diverses températures d'essai sont conditionnés par :

- la composition chimique du métal,
- l'état structural du métal,
- la texture du métal,
- la répartition des précipités et des inclusions,
- la densité des dislocations et défauts ponctuels,
- les divers modes de déformations plastiques.

3.1. Les deux types de représentations

a) Représentations du mécanicien du solide

Le "problème fondamental" est de trouver les relations entre les paramètres macroscopiques au niveau du polycristal à partir du comportement des grains contenus dans l'élément de volume et les paramètres microscopiques supposés connus.

Le "souci" est d'obtenir des relations simples capables de donner une représentation mathématique macroscopique cohérente valable pour une large gamme d'applications.

Deux modèles élémentaires peuvent être cités :

Modèles se basant sur des grains isolés :

- Loi de Schmid et Boas 1950 [34], micro-limite d'élasticité:  $\tau_c$

La déformation plastique d'un monocristal se produit quand la contrainte de cisaillement résolue dans le plan et la direction de glissement atteint une valeur de seuil critique  $\tau_c$  :

$$F = b_i \sigma_{ij} n_j = b \tau_c \quad (7)$$

où  $b_i$  sont les composantes du vecteur de Burgers,

$\sigma_{ij}$ , le tenseur de contraintes,

$n_j$ , les composantes de la normale au plan de glissement.

- Théorie du cristal moyen de Sachs 1928 [35] : limite élastique  $\sigma_c$  du polycristal :

Il faut atteindre une contrainte  $\sigma^* \gg \sigma_c$  pour que tous les grains soient soumis à une déformation plastique. Dans ce cas, la loi de Schmid et Boas se met sous la forme :

$$\tau_{ij}^* = m_{ij} \sigma_{ij} \quad (8)$$

où  $m_{ij}$  sont les facteurs de Schmid correspondant aux produits des composantes du vecteur de Burgers et des composantes de la normale au plan de glissement.

Dans les conditions de  $\sigma$  uniaxial et de cission critique  $\tau_c$  identiques pour tous les systèmes, la contrainte moyenne  $\bar{\sigma}$  pour le polycristal est :

$$\bar{\sigma} = \overline{(1/m)} \tau_c \quad (9)$$

Modèles tenant compte des interactions des grains :

- La théorie de Taylor 1938 (36) : Limite d'élasticité conventionnelle  $R_e$

Selon von Mises, il faut cinq systèmes de glissement indépendants pour accommoder n'importe quelle déformation  $d\varepsilon_{ij}^p$ .

Taylor suppose que la déformation plastique de l'ensemble est due à la combinaison des glissements de chaque grain qui donne la valeur minimale à  $\sum d\varepsilon_{rs}^p$ .

En supposant identique pour tous les systèmes de glissement la contrainte de cisaillement critique  $\tau_c$ , Taylor définit le rapport :

$$M = \frac{R_e}{\tau_c} = \frac{\sum d\varepsilon_{rs}^p}{d\varepsilon} \quad (10)$$

où  $M$  est le facteur de Taylor et  $R_e$ , la limite d'élasticité conventionnelle.

- Le modèle de Kochendorfer 1941 [37] :

Kochendorfer introduit une contrainte de joint de grains  $\sigma_j$  provenant uniquement de la désorientation entre grains voisins nécessaire pour maintenir leur cohésion dans l'agrégat polycristallin :

$$\tau_\ell = \underbrace{(\sigma - \sigma_j)}_{\sigma_a} \underbrace{\sin \chi_\ell \cos \lambda_\ell}_m \quad (11)$$

$\sigma_a \rightarrow$  contrainte appliquée

b) Représentations du physicien

Les physiciens tenant compte de la structure du matériau et du mouvement des atomes pendant la déformation ont mené leurs investigations selon deux axes :

- Par observation du processus de déformation dans les monocristaux, ils introduisent la notion de glissement dans les plans de glissement cristallographi-

ques les plus compacts selon des directions de glissement qui sont les directions cristallographiques les plus denses. Ils introduisent ainsi une valeur de cission critique et fournissent une explication du phénomène d'écrouissage.

Cependant, la théorie est incapable de prévoir la valeur de cette limite élastique ainsi que l'écrouissage qui s'en suit.

- L'introduction de la théorie des dislocations a permis de fournir certaines explications quantitatives satisfaisantes. Cette théorie est basée sur le mouvement des dislocations dans le cristal, lequel est responsable de la déformation plastique.

Il en résulte divers modèles d'écoulement plastique homogène; ces modèles sont résumés dans le tableau suivant :

Tableau 2 : - Evolution des modèles physiques (Approche microscopique)

① Relation d'Orowan 1940 [38] : - chargement unidimensionnel

$$\dot{\gamma}^P = \phi b N_m \bar{v}_d \quad (12)$$

où  $b$  est le module du vecteur de Burgers,  $N_m$ , la densité de dislocations mobiles,  $\phi$ , le facteur d'orientation et  $\bar{v}_d$ , la vitesse moyenne des dislocations.

② Modèle de Johnston-Gilman 1959 [39] :

$$\dot{\epsilon}^P = \alpha_s b f_m (N_i + M \dot{\gamma}^P) v_\infty \exp\{-(D_o + H_w \epsilon^P) / \sigma\} \quad (13)$$

où  $\alpha_s$  est le coefficient d'orientation statistique,

$f_m$ , la fraction de dislocations mobiles,

$b$ , le module du vecteur de Burgers,

$N_i$ , la densité totale initiale des dislocations,

$M$ , le coefficient de multiplication des dislocations,

$H_w$ , le coefficient d'écrouissage,

$D_o$ , la constante liée à la contrainte,

$v_\infty$ , la vitesse limite des dislocations qui est égale à la vitesse de l'onde de cisaillement.

③ Modèle basé sur les processus d'activation thermique : A. Seeger 1955 [40]

On distingue deux types d'obstacles bien distincts :

- obstacles à grande distance (précipités, dislocations dans d'autres plans, etc. ...),
- obstacles à courte distance (forces de Peierls-Nabarro, dislocations en forêts, crans, etc. ...).

$$\dot{\epsilon}^P = \dot{\epsilon}_o \exp\{-(\Delta H_o - 2 v^* \sigma^*) / k T\} \quad (14)$$

où  $\dot{\epsilon}_o$  est appelé terme pré-exponentiel,  $\Delta H_o$ , la hauteur totale des obstacles franchis;  $v^*$ , le volume d'activation thermique;  $k$ , la constante de Boltzman;  $T$ , la température absolue et  $\sigma^*$ , la contrainte effective interne due au champ de contrainte à longue distance.

④ Modèle basé sur la viscosité : W.P. Mason 1960 [41]

Le matériau est considéré comme un nuage d'électrons ou de phonons et les défauts tels que les dislocations etc... se déplacent dans un milieu visqueux.

Ce modèle définit un coefficient de viscosité :

$$\eta = \left( \frac{\partial \tau}{\partial \dot{\gamma}^P} \right) T = B/b^2 \cdot N_m \quad (15)$$

où  $B$  est le coefficient d'amortissement visqueux qui équivaut au taux de perte d'énergie par unité de longueur de la dislocation se déplaçant à la vitesse unité;

$N_m$ , la densité de dislocations mobiles;

$b$ , le module du vecteur de Burgers.

A l'ambiante et aux températures élevées, le mécanisme qui fournit la plus importante dissipation est celui de la viscosité phonique; aux très basses températures, c'est le mécanisme de viscosité électronique qui prédomine.

De nombreux résultats expérimentaux ont montré qu'au delà de  $\dot{\epsilon} = 10^3 \text{ s}^{-1}$ , le modèle de viscosité s'applique fort bien tandis qu'en dessous de  $10^3 \text{ s}^{-1}$ , les dislocations nécessitent une activation thermique pour dépasser les barrières. Les paragraphes suivants nous montrent quelques exemples des résultats sur les polycristaux et les monocristaux.

4. RESULTATS EXPERIMENTAUX

De nombreux essais ont montré que la vitesse de déformation dépendait de la structure cristallographique du matériau, de son état structural, de son histoire thermomécanique et de la température. La masse des résultats dans la littérature ne nous permet pas de tout dire; par conséquent, nous ne présenterons que quelques exemples pour illustrer la diversité du comportement des métaux et alliages aux grandes vitesses de déformation.

4.1. Influences de la vitesse de déformation et de la température :

Le comportement des métaux et alliages en fonction de la vitesse de déformation est assez varié selon leur structure cristallographique et leur texture. En outre, la température et l'état d'écrouissage du matériau influent sur la sensibilité à la vitesse de déformation. En réalisant des essais à vitesse de déformation imposée mais à différentes températures, on peut remarquer que dans certains domaines, plus la température est élevée plus la contrainte d'écoulement est faible; dans d'autres, la température n'influe pas du tout sur la contrainte d'écoulement. Dans les domaines où la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  et la température  $T$  jouent un rôle sur la contrainte d'écoulement, un accroissement de  $\dot{\epsilon}$  équivaut à une chute de température.

Les figures 1 et 2 montrent respectivement les courbes de contrainte de cisaillement en fonction du logarithme de la vitesse de déformation [42] pour l'aluminium et le cuivre; on remarque une influence peu marquée de la vitesse de déformation jusqu'à  $\dot{\gamma}$  entre  $10^2$  et  $10^3 \text{ s}^{-1}$ ; puis une sensibilité très nette apparaît au dessus de  $10^3 \text{ s}^{-1}$ .

Figure 1 : - Influence de  $\dot{\gamma}$  sur les contraintes d'écoulement à 5, 10, 15, 20 et 25% de déformation. Cas de l'aluminium polycristallin

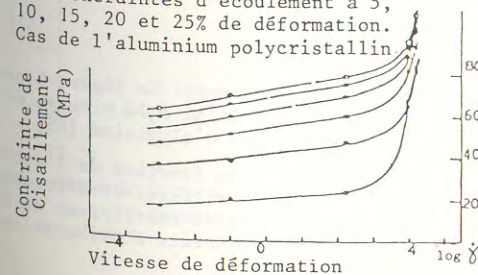
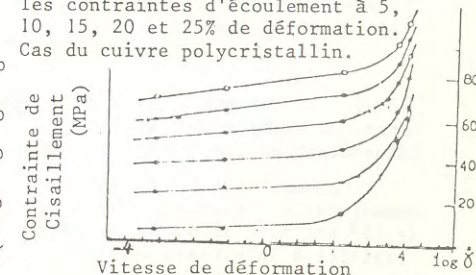


Figure 2 : - Influence de  $\dot{\gamma}$  sur les contraintes d'écoulement à 5, 10, 15, 20 et 25% de déformation. Cas du cuivre polycristallin.



Cette évolution est assez représentative des métaux et alliages CFC car l'on retrouve un comportement du même type pour d'autres métaux et alliages de même structure cristalline.

Prenons un matériau d'une structure cristalline différente; par exemple un acier doux de structure cubique centrée sollicité par traction [43]. La figure 3 nous montre une série de courbes contrainte-déformation obtenues à des vitesses de déformation allant de  $10^{-3}$  à  $10^2$  s $^{-1}$ . La figure 4 présente les courbes de contrainte en fonction du logarithme de la vitesse de déformation pour l'acier doux. Par cet exemple, on note que les métaux et alliages cubiques centrés sont très sensibles à la vitesse de déformation. L'augmentation de la contrainte maximale est particulièrement importante.

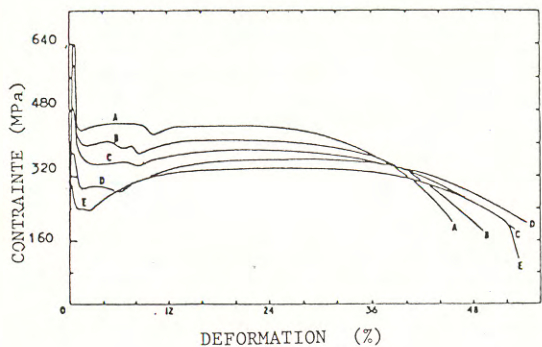


Figure 3 :

Traction sur un acier doux (A)  $106$  s $^{-1}$ , (B)  $55$  s $^{-1}$ , (C)  $2$  s $^{-1}$ , (D)  $0,22$  s $^{-1}$ , (E)  $0,001$  s $^{-1}$ . [43].

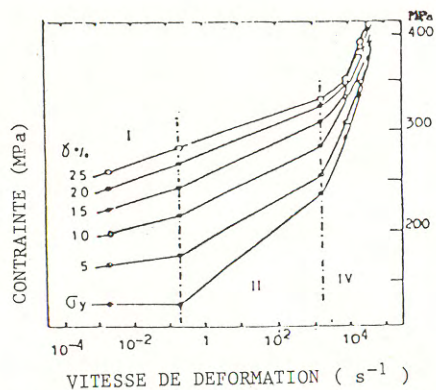


Figure 4 :

Courbes de contrainte en fonction du logarithme de la vitesse de déformation dans un acier doux sollicité par traction. [43].

La sensibilité à la vitesse de déformation a été définie par Lindholm dans le domaine des mécanismes thermiquement activés [44]. Le coefficient de sensibilité  $s'$  écrit sous la forme :

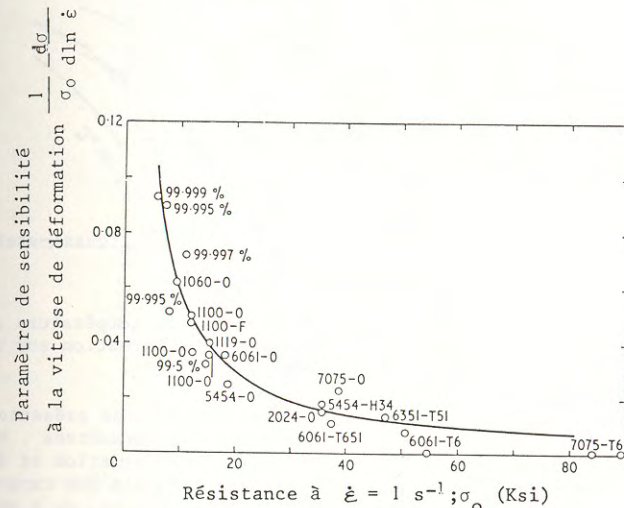
$$\frac{1}{\sigma_0} \times \frac{d\sigma}{d \log \dot{\epsilon}} \quad (16)$$

où  $\sigma_0$  est la contrainte d'écoulement pour une vitesse donnée. La figure 5 nous montre un exemple de l'évolution du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation en fonction de la résistance dans les alliages d'aluminium [45].

La sensibilité à la vitesse de déformation décroît en fonction de l'accroissement de la résistance moyenne de l'alliage. Aux grandes vitesses de déformation ( $> 10^3$  s $^{-1}$ ), l'aluminium présente un accroissement rapide du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation. La plupart des chercheurs attribuent ce

phénomène à une transition d'un mécanisme de vitesse petite tel que le mécanisme thermiquement activé à un mécanisme visqueux linéaire associé à des dislocations de très grandes vitesses.

Figure 5 : - Coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation en fonction de la résistance d'une gamme importante d'alliages d'aluminium. [45].



L'effet de la température est montré par la Figure 7 où des courbes de contrainte-déformation en cisaillement quasi-statique et dynamique pour l'acier 1020 laminé à chaud [46]. L'influence de la température sur les coefficients de sensibilité à la vitesse de déformation est aussi illustrée par la Figure 6. La sensibilité semble passer par un minimum à la température ambiante et croît avec la température d'essai [47].

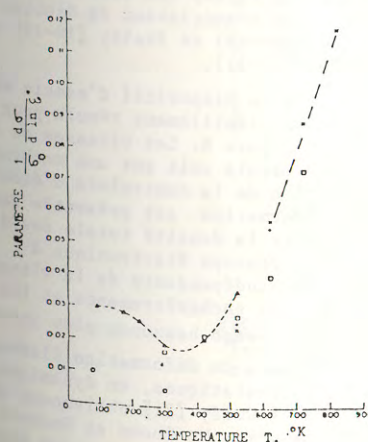


Figure 6 : - Influence de la température sur le paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation [47].

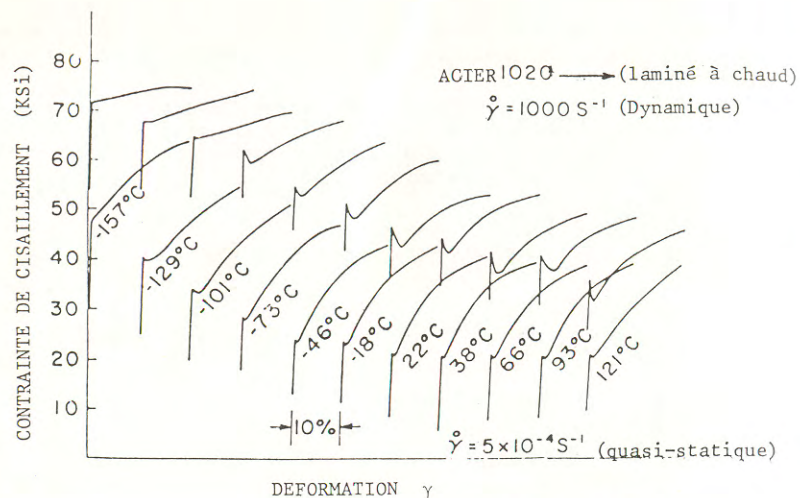


Figure 7 : - Influence de la température et du saut de vitesses de déformation sur un acier 1020 laminé à chaud [46] .

Les résultats sur les polycristaux que nous venons de présenter montrent déjà la complexité des problèmes et la diversité des paramètres . Mais il en ressort de ces quelques exemples que la vitesse de déformation et la température ont une très grande importance dans la détermination des caractéristiques mécaniques et physiques des matériaux ainsi que l'histoire de  $\dot{\epsilon}$  et de  $T$  .

#### 4.2. Quelques résultats sur les monocristaux

##### 4.2.1. Essais à tension de contrainte uni-axiale :

Les travaux décrits ci-dessus ne concernent que des résultats sur les polycristaux. A dater de ce jour, il y a eu très peu de résultats sur les influences de l'histoire de la déformation dans les monocristaux sollicités à des grandes vitesses de déformation. Dans le domaine des barres de Kolsky (ou barre de Hopkinson fendue), citons simplement trois exemples : les monocristaux de Niobium de Edington [16-17], les monocristaux de cuivre de Dormeival et Stelly [18-19] et les monocristaux de LiF et de Al de Chiem et Duffy [20-21].

Le dispositif de Kolsky utilisé par Edington est un dispositif d'essais en compression. Les courbes de contrainte-déformation en cisaillement résolu pour les monocristaux de niobium sont illustrées dans la figure 8. Les vitesses de déformation plus petites sont obtenues en faisant les essais soit sur une machine Instron soit sur le dispositif de Krafft. La variation de la contrainte d'écoulement en fonction du logarithme des vitesses de déformation est présentée dans la figure 9. Il en résulte une relation linéaire entre la densité totale des dislocations et la déformation, après observations au microscope électronique à transmission. Cette relation linéaire semblerait être indépendante de la vitesse de déformation; par contre, Edington a constaté que les enchevêtrements et les cellules de dislocations présentent un aspect d'écrouissage beaucoup plus important aux faibles vitesses de déformation qu'aux vitesses de déformation élevées. La structure cellulaire ne se forme qu'en essais quasi-statiques, en dynamique, les dislocations sont uniformément réparties; Chiem et Duffy [21] obtiennent des résultats semblables pour les monocristaux de Al. De même, Mc Queen et Hockett [48] et Korbel et Swiatkowski [49] ont eu des résultats similaires sur les échantillons d'aluminium polycristallins.

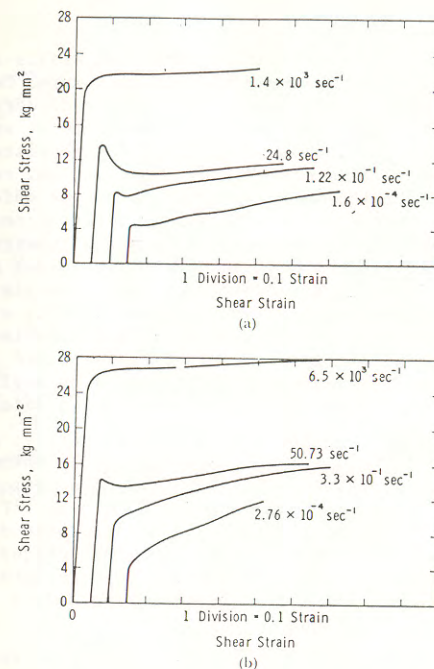


Figure 8 : - Courbes de contrainte/déformation en cisaillement résolues. (a) Echantillons longs; (b) Echantillons courts. [16-17]. (Monocristaux de niobium.).

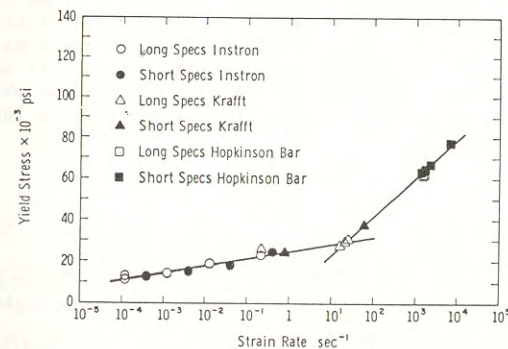


Figure 9 : - Variation de la contrainte d'écoulement en fonction du logarithme de la vitesse de déformation dans les monocristaux de niobium. [16-17].

Dormeval, Stelly et al. [18-19] ont effectué des essais quasi-statiques avec remise en charge dynamique sur les monocristaux de cuivre. Ce type d'essais consiste à pré-déformer l'échantillon jusqu'à une valeur de déformation à une vitesse de déformation imposée, puis décharger l'échantillon et enfin le remettre en charge dynamique. Leurs résultats montrent que les monocristaux de cuivre présentent un effet d'histoire de déformation très important qui ne s'efface pas lorsque l'on poursuit la sollicitation jusqu'à une valeur de déformation importante. La figure 10 montre donc ces résultats. Cependant, cette constatation est en contradiction avec les résultats de Klepaczko [50] qui a remarqué un effet d'atténuation de la mémoire dans le comportement des polycristaux de cuivre, comme illustrés par la figure 11. Mais, les essais sur les monocristaux de Al de Chiem et Duffy [21] confirment les résultats de Dormeval, Stelly et al. [18-19]. Il semblerait que le caractère anisotrope des monocristaux maintient l'effet mémoire du matériau alors que dans les polycristaux, la possibilité aux innombrables grains de se rééquilibrer aux grandes déformations aide à effacer ou à atténuer la mémoire du matériau sur l'histoire antérieure de sa déformation. (Figure 15).

Les résultats de Chiem et Duffy sont présentés par les figures 12-17. Pour les monocristaux de LiF (Figure 12), on remarque que le phénomène de limite élastique supérieure s'atténue dans les cas où la pré-déformation est très importante. Les résultats montrent que la contrainte d'écoulement de LiF est très sensible à la vitesse de déformation mais les effets dus à l'histoire de la vitesse de déformation sont peu prononcés. Les observations microscopiques par la méthode des piqûres d'attaque montrent que les dislocations sont uniformément réparties en essais quasi-statiques, mais elles se structurent en larges bandes après un saut de vitesse de déformation dynamique.

Les résultats sur les monocristaux de LiF aussi bien que ceux sur les monocristaux de Al ont été obtenus par les essais menés sur le dispositif de barres de Kolsky modifiés pour la torsion (cisaillement). Pour les monocristaux de Al, Chiem et al. ont effectué des observations au microscope électronique à transmission. La figure 16 présente les relations entre la densité totale des dislocations et la déformation; plus la vitesse de déformation est grande, plus la densité des dislocations est grande; par contre, pour une même valeur de déformation, l'accroissement de la valeur de prédéformation diminue la densité des dislocations observées à l'étape finale. La taille des cellules de dislocations après un essai dynamique est environ le quart de celles des cellules formées après un essai quasi-statique. On remarque aussi que le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation vraie varie inversement par rapport au carré de la taille des cellules. Comme dans les microstructures sous choc, on observe des boucles à l'intérieur des cellules; le nombre de ces boucles diminue lorsque la valeur de pré-déformation s'accroît.

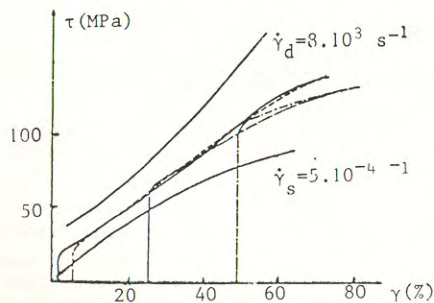


Figure 10 : - Essais cycliques sur les monocristaux de cuivre [18-19].

- Pré-déformation quasi-statique; décharge et remise en chargement dynamique.

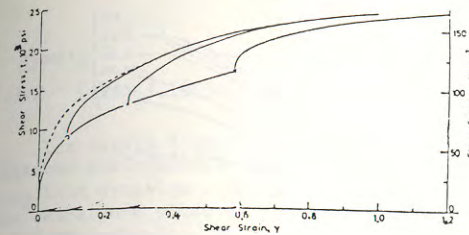


Figure 11 : - Exemple de courbes de contrainte - déformation du cuivre OFHC obtenu en essais avec saut de vitesses qui illustre bien le phénomène d'atténuation de la mémoire du matériau [50].

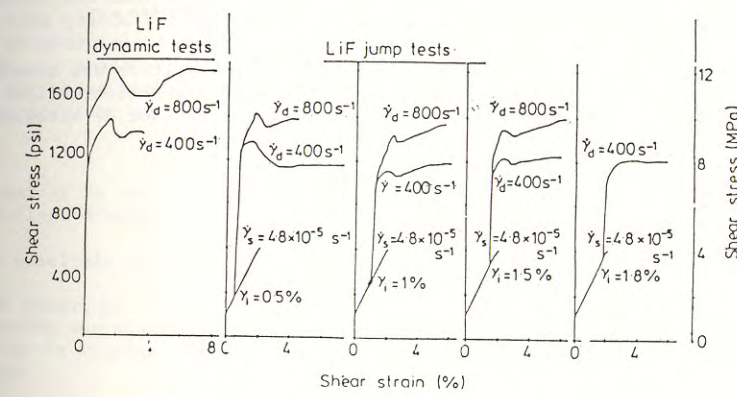


Figure 12 : Résultats des essais de saut de vitesses de déformation dans les monocristaux de LiF ( $\gamma_i$  = valeur de prédéformation) [20].

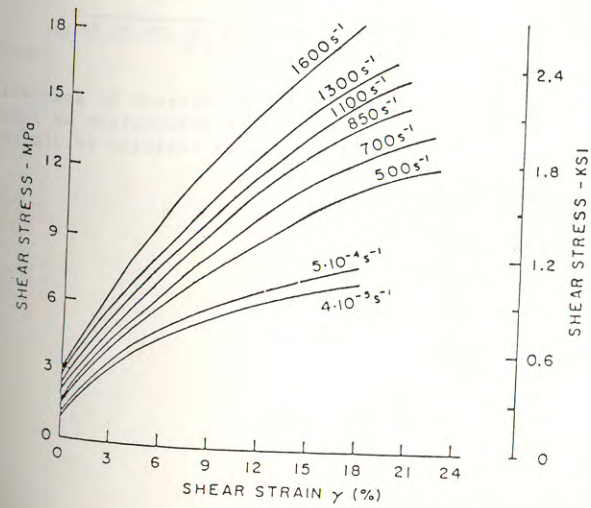


Figure 13 : Courbes de contrainte-déformation en cisaillement pour les monocristaux d'aluminium déformés à diverses vitesses de déformation [21].

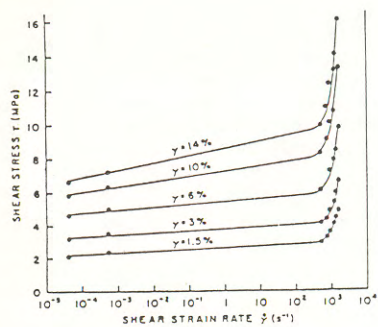


Figure 14 : Contrainte de cisaillement en fonction de la vitesse de déformation pour les monocristaux de Al [21].

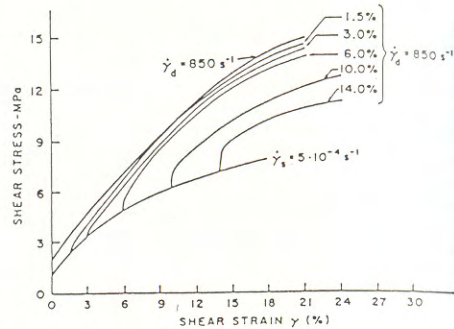


Figure 15 : Résultats des monocristaux de Al soumis aux sollicitations à vitesse constante et en saut de vitesses de déformation [21].

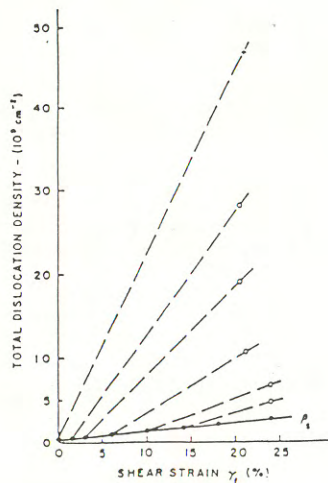


Figure 16 : Densité totale des dislocations en fonction de la déformation après observations des échantillons par microscopie électronique à transmission [21].

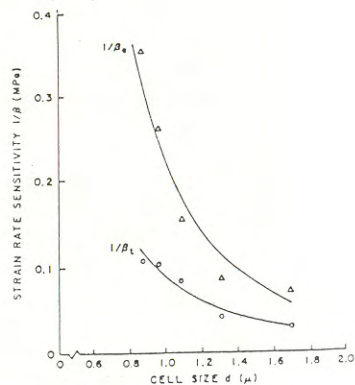


Figure 17 : Coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation en fonction de la taille des cellules de dislocations [21].

#### 4.2.2 - Essai à tenseur de déformation uniaxiale :

Les essais d'impact de plaque sur des monocristaux orientés offrent des perspectives intéressantes dans l'étude des mécanismes microscopiques de l'écoulement plastique dynamique. Ce type d'essais consiste à solliciter des monocristaux par une seule onde plane et monodimensionnelle dont la durée d'impulsion est inférieure à 200 nanosecondes. Cette onde plane monodimensionnelle déforme le matériau uniaxialement et à très grande vitesse (supérieure à  $10^6 \text{ s}^{-1}$ ). Le monocristal, ainsi sollicité, aura un ou plusieurs systèmes de glissement activés, et l'étude de la mobilité des dislocations dans ces systèmes permet la description du comportement des matériaux à très grande vitesse de déformation. Ces études ont permis de décrire le domaine du mécanisme d'amortissement visqueux pour certains matériaux. Nos études menées en collaboration avec R.J. CLIFTON se portent actuellement sur des monocristaux de fer phase alpha contenant trois pourcents en masse de silicium. Les résultats ainsi obtenus sont décrits par le modèle de viscosité linéaire :

$$\tau b = B \overline{v}_d$$

$\tau$  représentant la contrainte de cisaillement résolue,  $b$  le vecteur de Burgers,  $B$  le coefficient d'amortissement et  $\overline{v}_d$  la vitesse moyenne de dislocation.

Les résultats obtenus sont présentés dans les figures 18 et 19.

Nous remarquons que la courbe correspondant à un système de glissement  $\langle 111 \rangle \{123\}$  possède une discontinuité, ce qui pourrait s'interpréter comme étant une limite physique de la vitesse des dislocations dans le domaine des déformations à très grande vitesse.

Les courbes des autres systèmes de glissement sont linéaires et ne présentent pas de discontinuité. Mais, il est possible de penser qu'il existe aussi une limite de la vitesse des dislocations, à des contraintes de cisaillement plus importantes pour les deux autres systèmes de glissement.

Nous pouvons aussi remarquer que le système de glissement  $\langle 111 \rangle \{110\}$  possède la plus grande mobilité.

Une première estimation du coefficient d'amortissement  $B$  de la loi  $\tau b = B \overline{v}_d$  donne :

$$\text{système } \langle 111 \rangle \{110\} : B = 0,49 \times 10^5 \text{ N}_s/\text{m}^2$$

$$" \quad \langle 111 \rangle \{112\} : B = 1,07 \times 10^5 \text{ N}_s/\text{m}^2$$

$$" \quad \langle 111 \rangle \{123\} : \begin{cases} B' = 1,07 \times 10^5 \text{ N}_s/\text{m}^2 \\ B'' = 15,67 \times 10^5 \text{ N}_s/\text{m}^2 \end{cases}$$



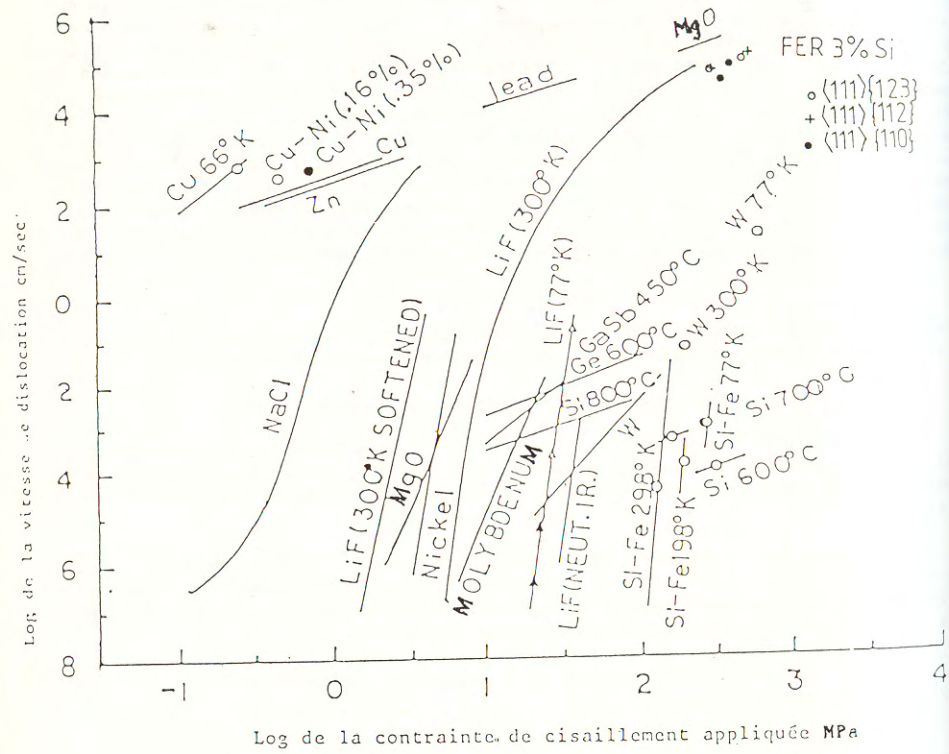


Figure 18. - Mobilité des dislocations dans différents matériaux. [29].

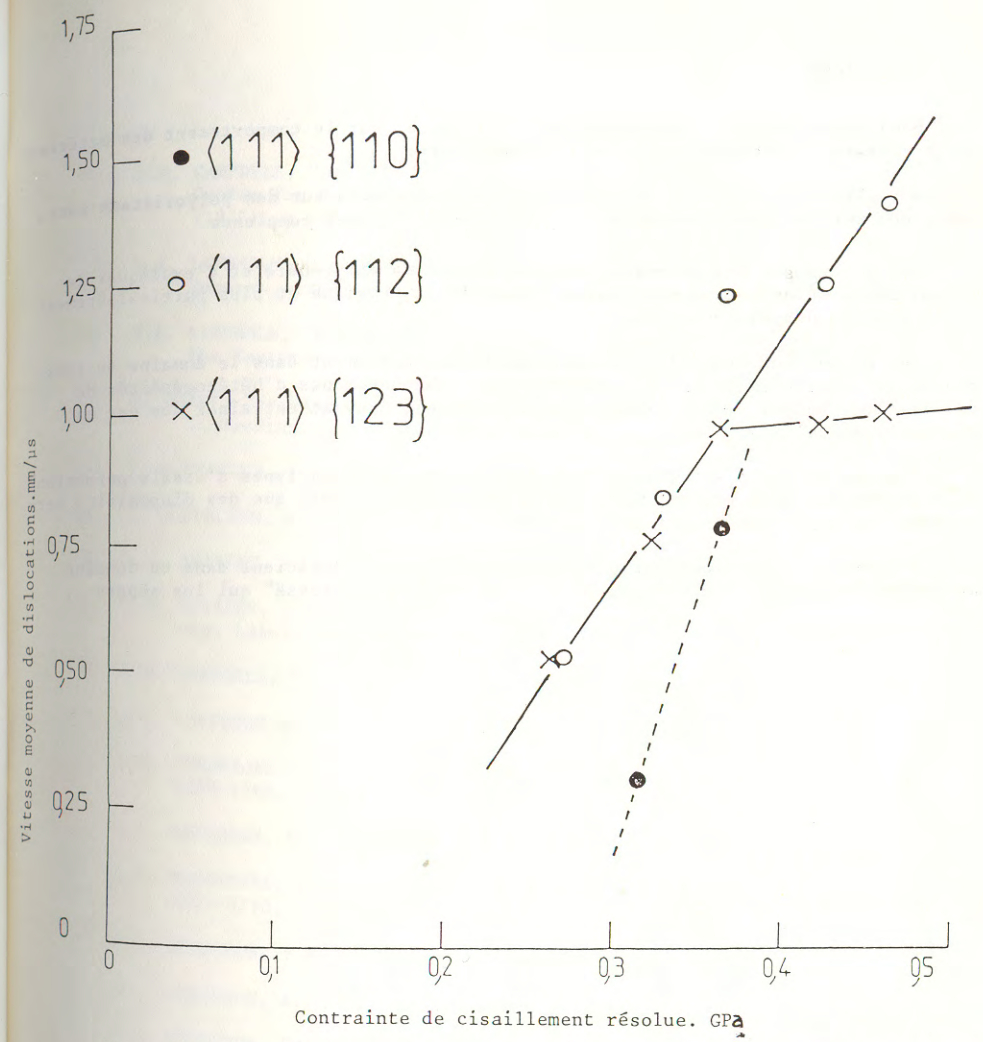


Figure 19 - Mobilité des dislocations dans le fer à 3 % Si monocristallin. [29].

## 5 - CONCLUSIONS

Nous avons montré l'importance de l'influence, sur le comportement des matériaux, de la vitesse de déformation et de la température.

Actuellement, beaucoup de travaux ont été effectués sur des polycristaux purs, mais, peu sur les monocristaux et polycristaux d'alliages complexes.

Les études sur les monocristaux permettront de comprendre et d'expliquer le comportement mécanique du matériau à l'aide de la physique et plus particulièrement de la théorie des dislocations.

Les études sur les polycristaux d'alliages, notamment dans le domaine de très grande vitesse, permettront la compréhension des phénomènes d'hétérogénéités de déformation (bandes de cisaillement adiabatiques), pouvant entraîner des cas de rupture particulière.

D'autre part, il est intéressant de créer de nouveaux types d'essais permettant d'atteindre des plus grandes vitesses de déformation, ainsi que des dispositifs permettant des expérimentations multiaxiales.

Désormais, la collaboration entre mécaniciens et physiciens dans ce domaine de recherche devient une nécessité, afin de réduire le "fossé" qui les sépare.

## REFERENCES

- [1] J.D. CAMPBELL, "Dynamic Plasticity of Metals" (Lectures at International Centre for Mechanical Sciences, Udine, Italy, 1970), Ed. J. Springer, (1972).
- [2] U.S. LINDHOLM, "Techniques of Metals Research", Vol. 5, Part 2, Ed. R.F. Bunshah, Interscience Publisher, N.Y., (1971).
- [3] U.S. LINDHOLM, "Mechanical Properties at High-Rate of Strain", Ed. J. Harding, The Institute of Physics, London-Bristol, (1979).
- [4] J. DUFFY, "Mechanical Properties at High-Rate of Strain", p. , Ed. J. Harding, The Institute of Physics, London-Bristol, (1979).
- [5] J. KLEPACZKO, Arch. Mech. Stas., 24, 187, (1972).
- [6] J. KLEPACZKO, Arch. Mech. Stas., 16, 255, (1968).
- [7] P.S. SENSENY, J. DUFFY et R.H. HAWLEY, J. Appl. Mech., 45, 60, (1978).
- [8] A.M. ELEICHE, J.D. CAMPBELL, Technical Report AFML-TR-76-90, Air Force Material Laboratory, Ohio, March (1976).
- [9] J.D. CAMPBELL, T.L. BRIGGS, J. of Less Common Metals, 40, 235, (1975).
- [10] U.S. LINDHOLM et L.M. YEAKLEY, J. Mech. Phys. Solids, 13, 41-53, (1965).
- [11] A.K. MUKHERJEE, J.D. MOTE et J.E. DORN, Trans. Metall. Soc. AIME, 233, 1559-1568, (1965).
- [12] D.L. DAVIDSON, U.S. LINDHOLM et L.M. YEAKLEY, Acta Met., 14, 703-710, (1966).
- [13] A.K. MUKHERJEE, W.G. FERGUSON, W.L. BARMORE et J.E. DORN, J. Appl. Phys., 37, 3707-3713, (1966).
- [14] W.G. FERGUSON, F.E. HAUSER et J.E. DORN, J. Appl. Phys., 18, 411-417, (1967).
- [15] W.G. FERGUSON, A. KUMAR et J.E. DORN, J. Appl. Phys., 38, 1863-1869, (1967).
- [16] J.W. EDINGTON, "Mechanical Behaviour of Materials under Dynamic Loads", Ed. U.S. Lindholm, Springer, Berlin, (1968).
- [17] J.W. EDINGTON, Phil. Mag. 19, 1189-1206, (1969).
- [18] R. DORMEVAL, M. STELLY et M. CAPUT, dans Proc. 4<sup>th</sup> Int. Conf. on the Strength of Metals and Alloys, Vol. 3, Nancy, August-September (1976) ; Ed. Ecole Nationale Supérieure de la Métallurgie et de l'Industrie des Mines, Nancy, (1976).
- [19] M. STELLY et R. DORMEVAL, "Proc. IUTAM Symposium on High Velocity Deformation of Solids", Tokyo, (1977), Ed. K. KAWATA et J. SHIORI, Springer, Berlin, (1977).

- [20] C.Y. CHIEM et J. DUFFY, *Mat. Sci. and Eng.*, 48, 207-222, (1981).
- [21] C.Y. CHIEM ET J. DUFFY, "Strain Rate History Effects and Observations of Dislocation Substructure in Aluminium Single-Crystals Following Dynamic Deformation", Technical Report Brown Univ., (Providence, R.I. U.S.A.) n° MEA-79-23742/3 and n° MRL-E-137, Octobre (1981).
- [22] J.N. JOHNSON, D.E. JONES et T.E. MICHAELS, *J. Appl. Phys.*, 41, 2230-2339, (1970).
- [23] W. HERMANN, D.L. HICKS et E.G. YOUNG, "Shock-Waves and the Mechanical Properties of Solids", Ed.: J.J. BURKE et V. WEISS, Syracuse Univ. Press, Syracuse, (1971).
- [24] P.L. STUDDT, E. NIDICK, F. URIBE, et A.K. MUKHERJEE, "Metallurgical Effects at High Strain-Rates", Ed.: Plenum, N.Y., (1973).
- [25] Y.M. GUPTA, G.E. DUVALL et G.R. FOWLES, *J. Appl. Phys.*, 46, 532-546, (1975).
- [25] K.S. KIM, P. KUMAR et R.J. CLIFTON, *J. Appl. Phys.*, 48, 4132 (1977).
- [27] P. KUMAR, et R.J. CLIFTON, *J. Appl. Phys.*, 48, 1366, (1977).
- [28] K.S. KIM et R.J. CLIFTON, *J. Appl. Mech.*, 47, 11, (1980).
- [29] C.Y. CHIEM, P. KUMAR, P. BLINOT, R.J. CLIFTON, "Essais d'impact en onde plane uniaxiale sur des monocristaux de Fe 3% Si", Rapport Technique E.N.S.M.-E.T.C.A. n° CMI-82-X/3, (1982).
- [30] E.C. BINGHAM, *Fluidity and Plasticity* (New York : Mc Graw-Hill), (1922).
- [31] K. HOHENEMSER and W. PRAGER, *Z. Aug. Math. Mech.* 12, 216, (1932).
- [32] L.E. MALVERN, *J. Appl. Mech.*, 18, 203, (1951).
- [33] P. PERZINA, *Quart. Appl. Math.*, 20, 321, (1963).
- [34] E. SCHMID et W. BOAS, *Plasticity of Crystals*, (éditions Hughes, Laudan, 1950), (Editions Chapman et Hall, London, 1968).
- [35] G. SACHS, *Z. Verien Devt. Ing.*, 72, 734, (1928).
- [36] G.I. TAYLOR, *J. Inst. Metals*, 62, 307 (1938).
- [37] A. KOCHENDORFER, *Plastische Eigenschaften von Kristallen*, (Springer-Verlag), Berlin, (1941).
- [38] E. OROWAN, *Proc. Phys. Soc., London*, 52, 8, (1940).
- [39] W.G. JOHNSTON and J.J. GILMAN, *J. Appl. Phys.*, 30, 129, (1959).
- [40] A. SEEGER, *Phil. Mag.*, 46, 1194, (1955).
- [41] W.P. MASON, *J. Acoust. Soc. Am.*, 32, 458, (1960)
- [42] A.R. DOWLING, J. HARDING, J.D. CAMPBELL, *J. Inst. of Metals*, 98, 215-224, (1970).
- [43] J.D. CAMPBELL et R.H. COOPER, Yield and flow of low carbon steel at medium strain-rates. Physical basis of yield and fracture. Conference London, 77-87, (1966).
- [44] U.S. LINDHOLM, R.L. BESSEY et G.V. SMITH, *J. of Materials*, 6 (1), 119-133, (1971).
- [45] F.E. HAUSER, J.A. SIMMONS et J.E. DORN, dans *Response of Metals to High Velocity Deformation*. Ed.: P.G. Shewmon et V.F. Zackay, N.Y. Interscience, (1961).
- [46] M.L. WILSON, R.H. HAWLEY et J. DUFFY, *Engineering Fracture Mechanics*, 13, 371-385, (1980).
- [47] A.M. ELEICHE et J. DUFFY, *Int. J. Mech. Science*, 17, 85-95, (1975).
- [48] H.J. MC QUEEN et J. HOCKETT, *Metall. Trans.*, 1, 2997-3004, (1970).
- [49] A. KORBEL et K. SWIATKOWSKI, *Mat. Sci. J.*, 6, 60-63, (1972).
- [50] J. KLEPACZKO et J. DUFFY, "Strain-Rate and Temperature Memory Effects in FCC Metals" Brown Univ., Providence, R.I., U.S.A., Technical Report n° GK-40123/5, March 1974.

## **INFLUENCE DE L'INTERPENETRATION D'UN ALLIAGE DE POLYMERES SUR SON COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE EN SOLLICITATIONS TRANSITOIRES BREVES (\*)**

*INFLUENCE OF THE CROSSLINK DENSITY OF AN  
INTERPENETRATING NETWORK ON ITS RHEOLOGICAL  
BEHAVIOUR UNDER IMPACT RATE LOADING*

Jean-Luc LATAILLADE, Alain MARCHAND et Jean POUYET  
Laboratoire de Mécanique Physique, E.R.A. CNRS 769,  
Université de Bordeaux I - France.  
Didier POUSSIN  
Institut du Pin, Université de Bordeaux I - France.

### RESUME

Dans la technologie des composites fibres résines, la nécessité d'obtenir de nouvelles matrices à caractéristiques thermomécaniques plus élevées que celles aujourd'hui disponibles amènent les concepteurs à chercher des solutions avec les alliages de polymères. En particulier l'une des voies, qui semble prometteuse, est celle de l'interpénétration entre deux réseaux, c'est-à-dire d'un enchevêtrement aussi total que possible. Cet enchevêtrement se traduit pas l'apparition de nouveaux "noeuds physiques" de réticulation dont la mise en évidence au sein de la masse du mélange reste difficile. Faute de pouvoir descendre au niveau de la molécule, et en l'absence de modèle satisfaisant, nous avons dans notre cas cherché à caractériser les produits par l'étude de leurs propriétés classiques mécaniques macroscopiques, et à rechercher des comportements anormaux par rapport à ce qu'on attendrait de simples mélanges. L'une des techniques que nous avons utilisée notamment est celle des barres de Hopkinson à la fois en compression et en torsion, permettant d'obtenir des vitesses de déformation élevées jusqu'à  $10^3 \text{ s}^{-1}$ .

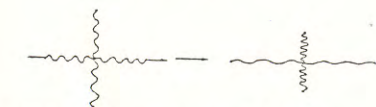
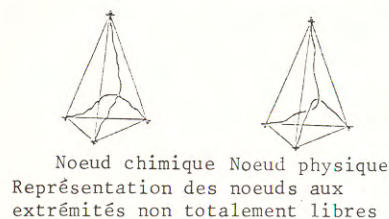
### ABSTRACT

In the field of the polymeric fibre composites, it becomes necessary to have at our disposal new matrix exhibiting thermomechanical properties better those known up to this day ; this scope loads the conceptors to solutions with poly-

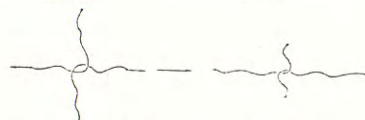
(\*) "Communication au Groupe Français de Rhéologie  
Le 1er décembre 1982"

meric alloys. In particular a promising way is the interpenetrating method, consisting in an entanglement of two networks as tight as possible. The resulting crosslink is very difficult to be evaluated : because it is impossible to deal at the microscopic scale and there is no satisfying model we tried to point out anormal behaviours in comparison to the predictions from the mixture's law. One of the experimental techniques has been the split Hopkinson pressure bar allowing us to reach high strain rates up to  $10^3 \text{ s}^{-1}$ .

## 1. INTRODUCTION



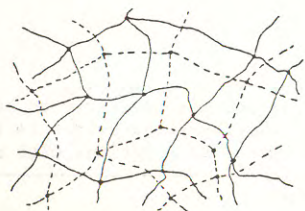
Noeud chimique avant déformation Noeud chimique après déformation



Noeud physique avant déformation Noeud chimique après déformation

Comparaison de la mobilité des chaînes dans un noeud physique et un noeud chimique sous l'effet d'une force de traction

Figure 1



L'enchevêtrement par noeuds physiques, créant des forces d'interaction non permanentes provoque de fortes modifications sur des propriétés telles que la viscosité, la température de transition vitreuse (TURNER (2)), les propriétés élastiques (ZIABICKI (3)), des mélanges de polymères. Mélanger deux polymères pour obtenir un produit possédant des caractéristiques intermédiaires de celle des constituants du mélange est une idée classique, mais les propriétés du produit obtenu sont étroitement liées à son homogénéité qu'il est difficile d'obtenir au plan de la synthèse si ce n'est par des artifices largement décrits et discutés (POUSSIN (4)). On pourra à ce stade se représenter un réseau interpénétré comme un ensemble de deux ou plusieurs polymères réticulés, totalement enchevêtrés sans liaison covalente entre eux ; la séparation des deux réseaux ne peut alors s'obtenir qu'en cassant des liaisons covalentes, l'enchevêtrement est dit mécanique (fig. 2). (Pour éviter de surcharger le schéma nous avons représenté un enchevêtrement à deux dimensions ; il faut bien sûr l'imaginer à trois dimensions).

Figure 2 : En trait plein, un polymère réticulé  
En trait pointillé, un autre polymère réticulé mais sans liaison covalente avec le premier  
Les points indiquent les noeuds de réticulation.

Il est clair qu'obtenir un enchevêtrement parfait est très difficile, voire illusoire ne serait-ce que parce qu'il faudrait que chaque réseau puisse se développer individuellement en présence de l'autre. Ceci étant on doit donc s'attendre aussi à une configuration partiellement hétérophasée du mélange, les enchevêtrements mécaniques assurant alors dans ce cas la cohésion entre microdomaines. En effet la grande majorité des IPN montre au microscope une structure cellulaire dont l'étude morphologique permet d'apprécier l'homogénéité.

Il est certain aussi que cette structure non uniforme doit être responsable de temps de retard assez largement distribués, en terme de spectre mécanique, et de toute façon distribués différemment qu'ils ne le seraient pour un simple copolymère.

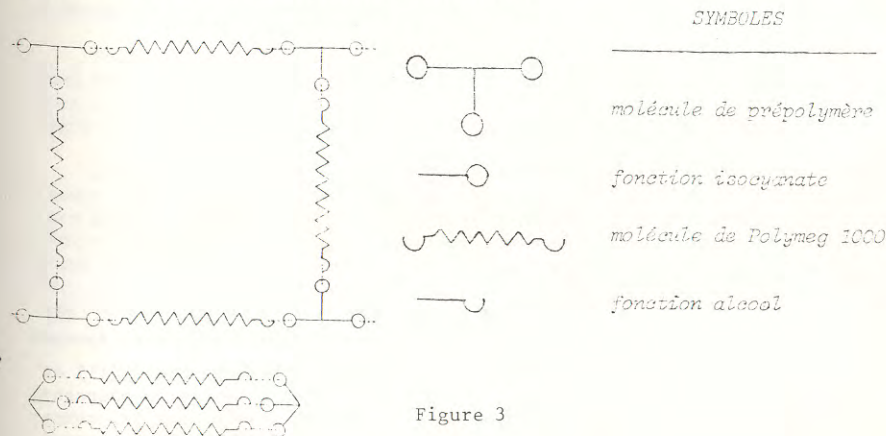
Dans ces conditions, il nous a semblé nécessaire d'une part de procéder à une spectrométrie classique par essais de relaxation pour mettre à contribution dans le matériau des mécanismes de retard sur des temps de l'ordre de la dizaine à la centaine de seconde, mais aussi de faire participer des mécanismes beaucoup plus rapides, en mettant en oeuvre des dispositifs à barre de HOPKINSON. Il paraît en effet légitime de supposer que le degré d'interpénétration entre les différents domaines puisse considérablement augmenter la résilience dynamique, l'accroissement du nombre des noeuds physiques ne pouvant qu'élever les propriétés visqueuses du milieu, qui interviennent dans les réponses du matériau aux grandes vitesses de déformation. Pour ce faire, nous avons eu recours à la technique de KOLSKY modifiée par HOPKINSON, en s'aidant le cas échéant d'une analyse par modélisation analogique exposée dans (5) ou (6).

## 2. LE MATERIAU

Il s'agit donc d'un alliage de polyépoxyde-polyuréthane, mis au point pour obtenir une amélioration de l'élasticité, de la contrainte à la rupture et des propriétés thermomécaniques d'une résine époxy. Nous avons choisi comme agent assouplissant de la résine le polyuréthane à cause de son caractère élastomérique à la température ambiante et de sa bonne compatibilité avec les fibres pouvant charger la matrice en particulier celles de Kevlar.

Le polyuréthane a été fabriqué en deux étapes :

- on réalise tout d'abord un prépolymère avec les constituants de base : diisocyanate de Toluène (TDI) et un triol TP 440. Pour le réseau réticulé, on peut imaginer les deux structures suivantes :



La résine a été obtenue à partir de la polymérisation de la monomère DGEBA, catalysée par le complexe  $BF_3 \cdot MEA$  Méthylethylacétone. On peut remarquer que la taille du réseau du polyuréthane est théoriquement de l'ordre de dix à vingt fois supérieure à celle du réseau de polyépoxyde. Les conditions expérimentales ont été choisies de manière à réaliser le système interpénétré de façon séquentielle in situ, car le prépolymère uréthane se polymérise à une température ( $65^\circ C$ ) inférieure à celle de l'époxyde ( $110^\circ C$ ) ; le cycle de polymérisation est le suivant :

10 h à  $65^\circ C$  : début de polymérisation du polyuréthane

7 h à  $85^\circ C$  : fin de polymérisation du polyuréthane et début de polymérisation de l'époxyde

10 h à  $140^\circ C$  : fin de polymérisation du mélange. Les différents mélanges (x epoxy - y polyuréthane) sont polymérisés en masse dans un moule cylindrique ou de type haltère.

### 3. QUELQUES RESULTATS SIGNIFICATIFS D'UNE INTERPENETRATION

Différents résultats ont déjà été rapportés dans la littérature illustrant les synergies dues à notre système d'interpénétration par rapport aux prévisions de la loi des mélanges (7), (8) ; nous pouvons rappeler ici certaines des caractéristiques et les compléter en indiquant quelques résultats significatifs tirés d'essais de relaxation notamment.

#### 3.1. Température de transition vitreuse

Dans les réseaux tridimensionnels il est bien connu que la température de transition vitreuse augmente avec la densité de réticulation ; cette propriété a pu être aussi vérifiée par de nombreux auteurs (9), (10) pour ce qui concerne les interpénétrés IPN, et semble être un bon critère pour déterminer la "qualité" de l'interpénétration. Pour différentes compositions la transition vitreuse a été mesurée par analyse thermique différentielle, technique qui consiste à déterminer la température pour laquelle apparaît une variation sensible de la chaleur spécifique, en suivant l'écart de température  $\Delta T$  entre le matériau étudié et le corps de référence lorsque l'enceinte est programmée pour une évolution de la température T. Ce faisant on obtient une courbe telle que celle indiquée sur la figure 4.

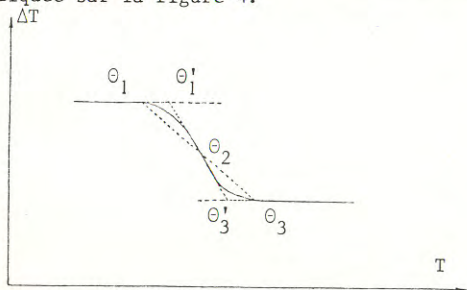


Fig. 4 :  $\theta_1$  et  $\theta_3$  sont les températures de début et de fin de transition ;  $\theta_2$  est la température au point d'inflexion (ou la moyenne de  $\theta'_1$  et  $\theta'_3$ ) ;  $\theta'_1$  et  $\theta'_3$  sont les températures définies par l'intersection des lignes de base avec la tangente en  $\theta_2$ .

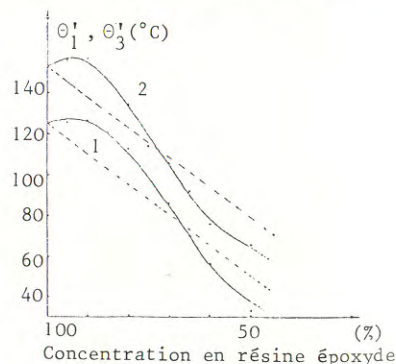


Fig. 5 : Evolution de  $\theta'_1$  (1) et  $\theta'_3$  (2) en fonction du pourcentage de résine époxyde, comparées aux droites des mélanges respectives.

Comme il n'est pas toujours facile d'apprécier la valeur  $\theta_2$ , nous avons rapporté sur la figure 5 les valeurs de  $\theta'_1$  et  $\theta'_3$  en fonction du pourcentage en résine époxy du mélange. Les compositions 95/5, 90/10, 85/15 et 80/20 montrent un comportement qui s'écarte de la droite des mélanges ; pour les compositions 90 et 95 on note même une Tg supérieure à celle de l'époxy pure. En particulier pour la composition 95/5, nous pensons que le volume libre de la résine époxyde est assez grand pour que le réseau accepte sans trop de modification structurale tout ou partie du réseau polyuréthane et la contribution de l'interpénétration à la Tg observée paraît pour cette composition à prendre en compte par rapport à celle de l'époxyde pure et non à une loi du type  $Tg^{-1} = m_1 \cdot Tg_1^{-1} + m_2 \cdot Tg_2^{-1}$

#### 3.2. Spectre de relaxation

En vertu de ce qui a été dit plus haut on peut présumer que l'interpénétration a pour conséquence de modifier les processus de relaxation puisque une augmentation de l'enchevêtrement ne peut provoquer toutes choses étant égales par ailleurs qu'une augmentation de la viscosité ; ceci est d'ailleurs en accord avec le résultat obtenu sur la température de transition vitreuse, compte tenu de la théorie du volume libre due à EYRING (11) et qui constitue une justification simple du principe d'équivalence des effets du temps et de la température (12), principe que nous avons en outre vérifié pratiquement sur nos produits dans le domaine du comportement linéaire.

Notre but a donc été de déterminer la fonction de distribution  $H(\tau)$  ou spectre de relaxation en sollicitation de traction définie par :

$$E(t) = E_\infty + \int_0^\infty H(\tau) \cdot \exp(-t/\tau) \cdot d \ln \tau \quad (1)$$

expression dans laquelle  $E(t)$  et  $E_\infty$  désignent respectivement le module à l'instant t et le module relaxé. Pour ce faire nous avons procédé à la mesure de fonction de relaxation à différentes températures T ( $T \in \{20^\circ C, 180^\circ C\}$ ), que nous avons par la suite pu ramener à la température de référence de  $20^\circ C$  par simple translation horizontale, la correction verticale prenant en compte les modifications d'élasticité entropique ayant été faite au préalable (12).

Nous avons pu par cet artifice étendre la plage temporelle de mesure de  $E(t)$  à 20 décades, alors que la plupart des essais s'effectuent environ sur 3 décades (1 heure environ).

Pour atteindre la fonction  $H(\tau)$  à partir des courbes maîtresses  $E(t)$ , nous avons utilisé la méthode simplificatrice d'ALFREY (13) au 1er ordre. Nous avons vérifié à posteriori que cette méthode n'introduisait pas d'erreurs significatives en reconstituant la courbe à partir de l'équation (1)

La figure 6 fournit les spectres de relaxation pour différents mélanges. Faut-il avoir pu encore réaliser des essais de relaxation à très basse température pour le polyuréthane pur nous ne pouvons faire de comparaison avec la droite des mélanges ; par ailleurs les temps de mise en charge des éprouvettes étant de l'ordre de la seconde, ces spectres perdent toute signification en deçà de la 1ère décade. Néanmoins on peut faire deux remarques intéressantes concernant l'interpénétration.

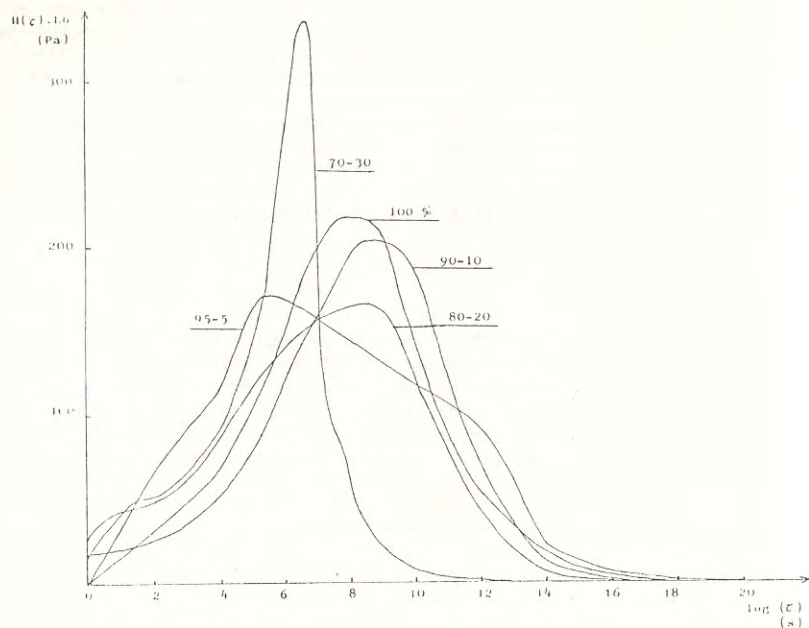


Figure 6

1°/ Les spectres ne font pas apparaître de temps privilégiant des mécanismes propres à l'un ou l'autre des constituants. Ceci semble constituer une bonne preuve d'homogénéité du produit et corrobore une observation faite à partir de mesures de transition mécanique, mettant en évidence une zone de transition légèrement marquée due au polyuréthane mais très sensiblement déplacée (environ une centaine de degrés centigrade).

2°/ Pour la composition 95/5 en particulier mais pour les compositions 90/10 et 80/20 également on note un étalement du spectre de relaxation, significatif de mécanismes supplémentaires, que nous attribuons à l'interpénétration.

#### 4. COMPORTEMENTS MECANIQUES AUX GRANDES VITESSES DE DEFORMATION

Ces essais ont été entrepris pour tenter de mettre en évidence une réponse originale des polymères interpénétrés par rapport à celle du constituant époxyde. Ce type d'alliage est, en effet, connu pour posséder des qualités amortissantes et de résistance au choc remarquables. Cependant, DUBUISSON (14) a montré que ces propriétés dépendaient sensiblement de la vitesse de déformation imposée. Pour une vitesse particulière, on observe un comportement qui peut s'expliquer (pour un essai de traction) par un glissement progressif des réseaux l'un par rapport à l'autre ; les noeuds physiques lâches avant application de la contrainte, se ressèrent pour se comporter à partir d'un certain niveau de contrainte comme un noeud chimique ; comportement voisin de celui d'un amortisseur. Ce phénomène ne sera pas observable pour des vitesses de déformation trop lentes ou trop rapides.

Aussi bien en torsion qu'en compression les dispositifs d'essai reposent sur un montage à barres de HOPKINSON, dont le principe consiste à prendre en sandwich une éprouvette courte entre deux barres élastiques.

Pour les ondes de cisaillement - ou celles de compression - l'éprouvette ainsi mise en place constitue une rupture d'impédance, qui provoque la réflexion d'une partie de l'onde incidente. De la mesure des ondes réfléchies et transmises, on en déduit la vitesse de déformation dans l'éprouvette ainsi que la contrainte moyenne en négligeant les effets d'inertie dans l'éprouvette : on pourra se rapporter à la référence (15) pour plus de détails.

#### 4.1. Cas de la distorsion à grande vitesse

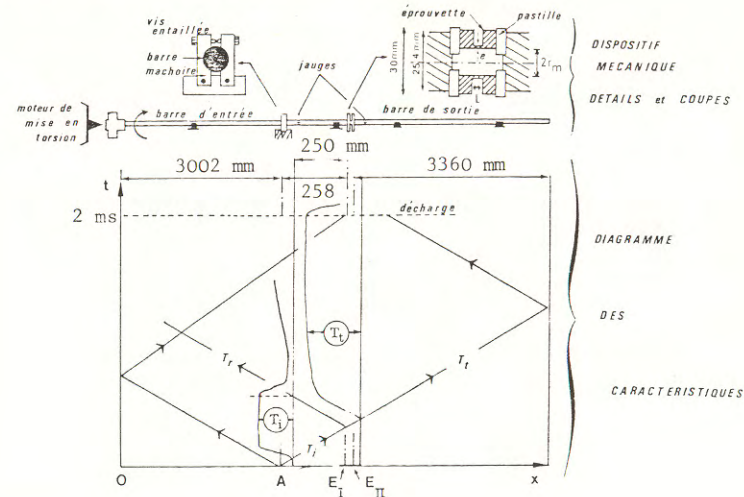


Figure 7

Le dispositif de torsion est celui indiqué sur la figure 7. L'énergie élastique emmagasinée par torsion statique de la portion OA de la barre d'entrée est libérée en un temps très court ( $\approx 30 \mu s$ ) par rupture de la vis entaillée qui serre au préalable les mâchoires de la bride A ; la durée de la sollicitation dépend de la longueur OA, elle est égale à  $2 \cdot 10^{-3}$  s.

Les caractéristiques du montage nous ont permis d'atteindre des valeurs de la vitesse de distorsion comprises entre  $10^2$  et  $1,5 \cdot 10^3 s^{-1}$ .

L'onde incidente d'amplitude  $T_i$  se réfléchit partiellement (onde  $T_r$ ) à l'interface d'entrée  $E_I$  de l'éprouvette. Un pont de torsion permet de mesurer les signaux correspondants qui sont enregistrés sur l'une des deux voies d'une mémoire circulante ; l'autre voie est affectée à la mesure de l'onde transmise  $T_t$  ; l'enregistreur est associé à un microordinateur pour le dépouillement automatique des données.

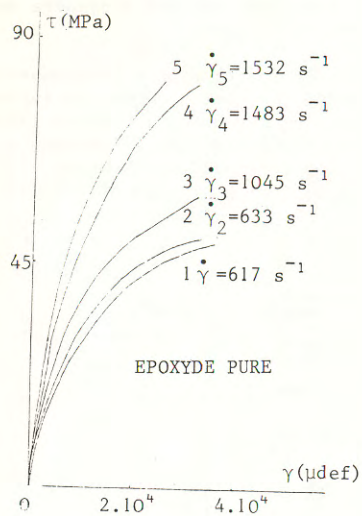


Figure 8-a

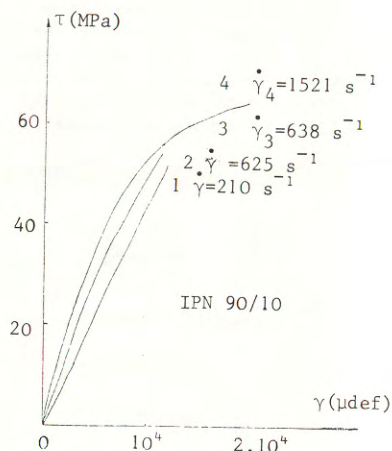


Figure 8-b

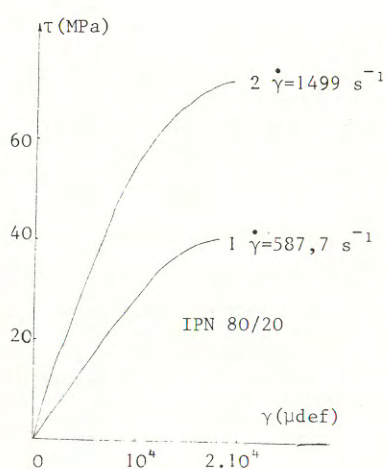


Figure 8-c

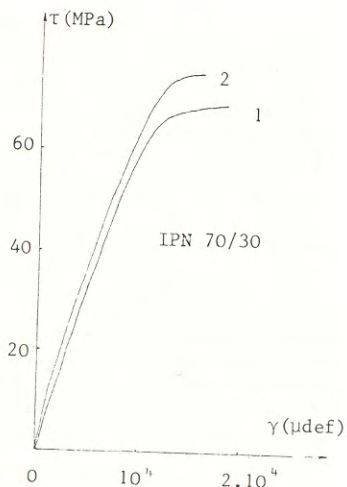


Figure 8-d

Les résultats sont consignés sur les figures 8 a,b,c,d ; on remarque que la contrainte de cisssion  $\tau$  de l'époxyde pur est très sensible à la vitesse de déformation, à l'inverse des autres compositions. C'est pourquoi, on peut comparer la courbe obtenue à  $633 \text{ s}^{-1}$  pour le cas 100/0 à celles obtenues à 640, 638 et  $588 \text{ s}^{-1}$  pour les compositions respectives 70/30, 90/10 et 80/20, et de même celles obtenues aux alentours de  $1500 \text{ s}^{-1}$  pour les compositions 100/0 et 90/10, 80/20 et 70/30 : figures 9 a,b.

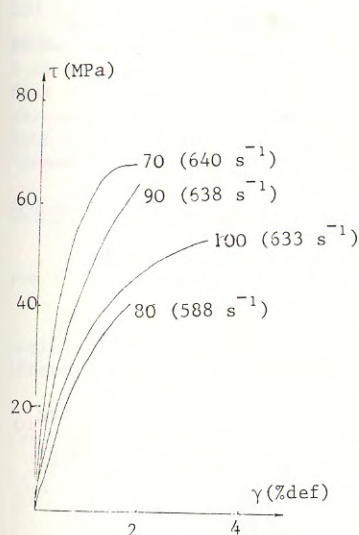


Figure 9-a

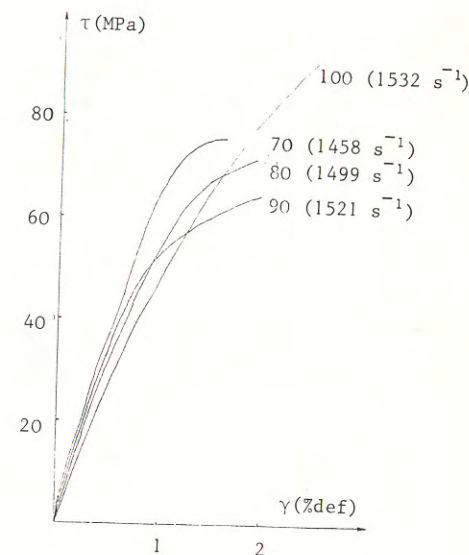


Figure 9-b

Il est intéressant de noter que toutes les courbes des mélanges se situent au-dessus de celle de l'époxyde pur (sauf dans le cas de la composition 80 à  $588 \text{ s}^{-1}$ ) pour les faibles déformations ; le module de torsion est donc plus élevé. Cependant les ruptures apparaissent pour des déformations moins importantes que pour l'époxyde pur. On voit, de plus, apparaître un seuil plastique pour la composition 70.

Aux grandes vitesses de distorsion, il semble donc que les enchevêtrements introduits par interpénétration jouent immédiatement leur rôle de noeuds physiques, et les matériaux ont un module plus élevé.

#### 4.2. Cas de la compression à grande vitesse

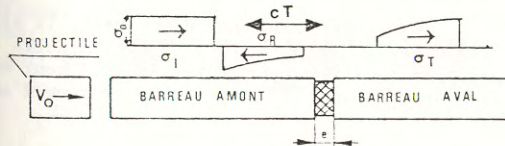


Figure 10

Le principe de la compression est identique à celui de la torsion. L'onde incidente est provoquée par l'impact d'un projectile (fig. 10) dont la vitesse détermine le niveau de l'onde incidente, et la longueur la durée. Comme pour la torsion, nous avons fait varier la vi-



tesse de déformation en agissant sur la vitesse d'impact. Les courbes contrainte-déformation font apparaître deux domaines, l'un élastique, l'autre plastique. Nous nous intéresserons, d'abord, au domaine élastique. Nous rapportons sur les figures 11 a,b,c, une comparaison entre les fonctions  $\sigma = f(\text{Log}_{10} \dot{\epsilon})$  obtenues pour chaque composition et cela pour des déformations de 2, 3 et 4 %.

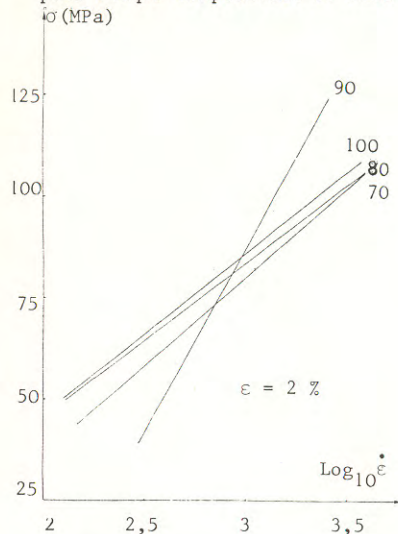


Figure 11-a

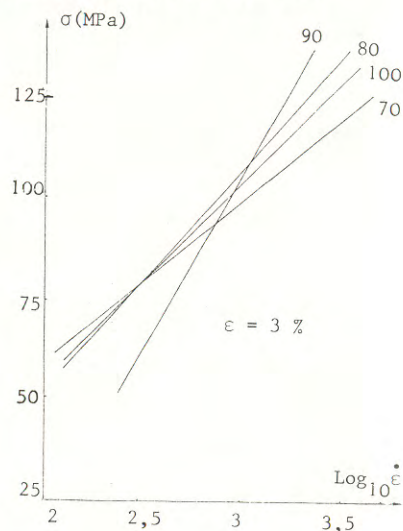


Figure 11-b

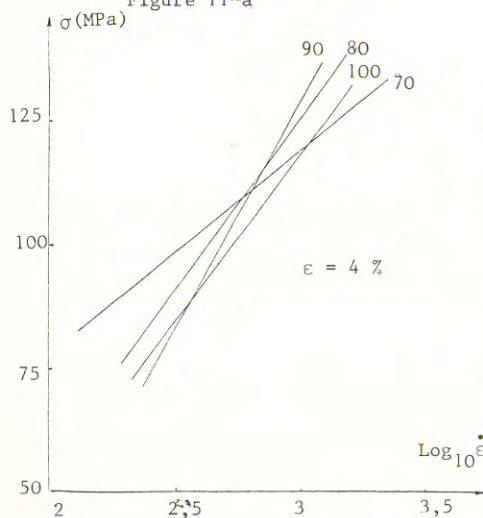


Figure 11-c

Ces essais montrent, d'une part, la différence de sensibilité des polymères à la vitesse de déformation et d'autre part, une évolution nette de la position relative des droites tracées pour chaque composition par rapport à celle caractérisant l'époxyde pure lorsque l'on fait varier la déformation.

On voit que pour les faibles déformations (2 %) la contrainte de compression de l'époxyde pur est plus élevée, quelle que soit la vitesse de déformation, que celle des autres compositions. Seule la composition 90 la dépasse à partir d'une valeur de  $\dot{\epsilon}$  de l'ordre de  $1000 \text{ s}^{-1}$ .

Pour 3 % de déformation (figure 11-b), on observe le même comportement relatif des compositions 100 et 90 alors que la contrainte de compression de la composition 80 dépasse celle de la composition 100 pour  $\dot{\epsilon} = 300 \text{ s}^{-1}$ .

Pour 4 % de déformation (figure 11-c) la plupart des contraintes de compression sont plus élevées pour les IPN 90,80,70 que pour la résine époxyde pure.

Il est très clair que les compositions 90,80 et 70 se "durcissent" davantage que la résine époxyde lorsqu'augmentent simultanément la déformation et la vitesse de déformation.

On peut penser que, au cours de ces essais, l'influence des enchevêtrements apparaît plus ou moins rapidement, à partir d'une certaine déformation et à une certaine vitesse de déformation.

Si l'on étudie le cas de la composition 80, on remarque que pour une déformation de 2 % les noeuds physiques créés ne sont pas encore en totalité mis à contribution, la droite se situe au-dessous de celle de la composition 100. Pour 3 %, les noeuds physiques interviennent plus tôt : la droite caractéristique coupe celle de l'époxyde pour une vitesse  $\dot{\epsilon}$  de  $300 \text{ s}^{-1}$ . Pour 4 %, la quantité d'enchevêtrements sollicités est telle que, même pour des vitesses de déformation de l'ordre de  $100 \text{ s}^{-1}$ ,  $\sigma(80)$  est supérieure à  $\sigma(100)$ .

### Grandes déformations

En ce qui concerne le domaine des grandes déformations, on peut remarquer que :

- la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  n'est pas constante, mais une fonction décroissante du temps qui tend vers une valeur asymptotique appelée vitesse de déformation plastique  $\dot{\epsilon}_p$ , cette valeur se situe dans la gamme suivante :

- 100 %	$\dot{\epsilon}_p \in (180, 1277) \text{ s}^{-1}$
- 90 % - 10 %	$\dot{\epsilon}_p \in (166, 1680) \text{ s}^{-1}$
- 80 % - 20 %	$\dot{\epsilon}_p \in (185, 2375) \text{ s}^{-1}$
- 70 % - 30 %	$\dot{\epsilon}_p \in (144, 2710) \text{ s}^{-1}$

La progression du signal  $\dot{\epsilon}(t)$  au cours du temps de montée met en évidence un caractère viscoélastique de chaque interpénétré.

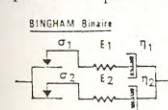
- la contrainte  $\sigma(t)$  au sein de l'échantillon croît progressivement vers un seuil plastique  $\sigma_p$  constant jusqu'à l'amorce de la rupture à partir de laquelle  $\sigma$  décroît légèrement. Cette contrainte d'écoulement augmente avec la vitesse de déformation plastique  $\dot{\epsilon}_p$ .

- la déformation  $\epsilon(t)$  évolue sous une forme de fonction croissante du temps jusqu'à la fin de l'essai et sa valeur augmente avec la vitesse de déformation.

Pour une valeur de la déformation fixée, l'évolution des courbes  $(\sigma_p, \text{Log}_{10} \dot{\epsilon}_p)$  nous montre que, pour chaque nuance, la contrainte d'écoulement plastique  $\sigma_p$  varie linéairement en fonction du logarithme de la vitesse de déformation plastique.

### Modélisation

Le comportement viscoplastique des réseaux interpénétrés étudiés peut, pour le cas de la compression dynamique, être approché de façon analogique. Compte tenu du fait que d'une part le système barre d'entrée-échantillon-barre de sortie obéit à une équation d'appareillage  $f(\sigma, \epsilon) = 0$  et que d'autre part on peut reconstruire pour un modèle de Maxwell-Bingham (ici modèle binaire)



l'évolution de la contrainte  $\sigma$  en fonction de la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$ , il est alors facile d'identifier les paramètres d'élasticité  $E_i$ , de viscosité  $\eta_i$  et de seuils plastiques  $\sigma_{i1}$ , à partir d'une méthode graphique.

Les valeurs des modules étant dérivées d'expressions littérales, elles sont obtenues avec trop d'imprécision pour donner lieu à une interpénétration spécifique de l'enchevêtrement. Le tableau suivant fournit les valeurs de  $\sigma_1$  et  $\eta_1$ .

	100	90/10	80/20	70/30
$\sigma_1$ (Pa) $10^6$	59	70	80	97
$\sigma_2$ (Pa)	125	108	100	68
$\eta_1$ ( $10^4 P_s$ )	18,61	21,94	27,08	37,1
$\eta_2$ ( $10^4 P_s$ )	8,06	8,57	6,25	5,2

#### CONCLUSION

Les résultats que nous avons rapportés ont un point commun :

- ils s'expliquent en faisant intervenir le concept d'interpénétration entre les réseaux.

Son rôle sur les propriétés mécaniques se précise.

En compression les noeuds physiques créés ont un comportement de noeuds chimiques pour une certaine valeur de la déformation et de la vitesse à laquelle elle est appliquée.

Si on laisse le temps aux chaînes de glisser, leur effet ne se fait sentir qu'à partir de 3 à 4 % de déformation (dans notre cas). Si par contre, la vitesse de déformation imposée est très élevée, l'influence de ces noeuds apparaît pour une déformation plus faible.

En torsion, il semble que les noeuds physiques interviennent dès l'application de la déformation aux vitesses les plus basses de notre intervalle d'étude. Il sera donc intéressant de compléter nos essais par des mesures à des vitesses de déformation inférieures à  $600 s^{-1}$ .

Les résultats des essais de relaxation montrent bien l'influence des noeuds physiques sur la mobilité des chaînes et sur le comportement sous contrainte quasi-statique des IPN.

L'interpénétration a pour effet d'augmenter le nombre des types de relaxation qui apparaissent à des valeurs de temps propres. Il s'en suit un élargissement très sensible du spectre de relaxation des compositions 95, 90 par rapport à celui de l'époxyde pure.

L'ensemble de ces résultats nous confirme dans l'idée de l'existence de l'interpénétration entre les réseaux polyépoxyde et polyuréthane. Après avoir étudié l'influence de la vitesse de polymérisation du réseau époxyde sur celle-ci, il sera très intéressant de faire varier la densité de réticulation du polyuréthane pour observer son effet.

Seul le paramètre  $\eta_2$  semble se comporter comme d'autres précédemment étudiés ; en particulier, on peut penser que la seconde cellule rend compte d'un mécanisme particulier de l'interpénétration optimale, nous l'avons pu pour des compositions voisines de 90/10 et pour laquelle nous observons effectivement une synergie quant à la viscosité  $\eta_2$ .

En augmentant la longueur du diol, nous allons obtenir un réseau polyuréthane aux mailles plus larges qui devraient faciliter l'interpénétration. De plus, il est probable que les propriétés du polyuréthane seront modifiées et notamment l'allongement à la rupture devrait augmenter.

Cette évolution aura probablement une influence intéressante sur le comportement mécanique des mélanges avec l'époxyde : nous pensons en effet obtenir des produits possédant un allongement relatif plus important tout en conservant une bonne contrainte à la rupture et une température de transition vitreuse élevée.

#### REFERENCES

- (1) BUSSE W.F. - J. Phys. Chem., 36, 2862, 1932.
- (2) TURNER D.T. - Polymer, 19, (7), 789, 1978.
- (3) ZIABICKI A. - J. Chem. Phys., 64, (10), 4100, 1976.
- (4) POUSSIN D. - Thèse de spécialité, 1982, Université de Bordeaux I, n° 1759.
- (5) LATAILLADE J.L., POUYET J., HAMDY A. - C.R. Ac. Sc. Paris, 1980, 291, B, 59.
- (6) LATAILLADE J.L., POUYET J., SIGNORET C. - C.R. Ac. Sc. Paris, 1980, 290, B, 219.
- (7) POUSSIN D., POMMIER J.C., DAVIAUD R. - "Macromolécules", 27e Symposium International, 1981, Strasbourg, vol. 2, 1287.
- (8) POUSSIN D. et al., LATAILLADE J.L. et al. - 6e Conf. Européenne Plastiques et Caoutchoucs, 1982, Paris, CR.IV, 2.
- (9) MEYER G.C. - Eur. Polym. J., 1977, 13 (5).
- (10) SUZUKI Y., FUJIMOTO T., TSONODA S., SHIBAYAMA K. - J. Macromol. Sc. Phys., 1980, B 17 (4), 787.
- (11) RITCHIE P.D. - Physics of Plastics, Illife Book Ltd, London, 1965.
- (12) FERRY J.D. - Viscoelastic properties of polymers, 2e Edit. J. Wiley Edit., New York, 1970.
- (13) ALFREY in J.M. PIERRARD - La Rhéologie, chap. 2, Masson Editeur, Paris, 1969.
- (14) DUBUISSON A., FONTANILLE M., ZAOUÏ A. - Macromolécules 27e Symposium International, 1981, Strasbourg, vol. 2, 1283.
- (15) LATAILLADE J.L., POUYET J. - Rheology Acta, 21, 1982, 431.
- (16) POUYET J., LATAILLADE J.L., SIGNORET C. - Cahiers du G.F.R., 5, 1982, 294.

**APPROCHE MOLECULAIRE DE LA RHEOLOGIE  
DE SYSTEMES DE CHAINES POLYMERIQUES  
ENCHEVETREES. APPLICATION AUX GRANDES VITESSES  
D'ETIREMENT DU POLYSTYRENE FONDU**

*A MOLECULAR APPROACH OF THE RHEOLOGY OF  
ENTANGLED POLYMER CHAINS. APPLICATION TO  
POLYSTYRENE MELTS STRETCHED AT HIGH STRAIN RATES*

J. F. TASSIN, P. THIRION, L. MONNERIE  
et Messieurs GODET, HOARAU, TAUDIN, CAPET  
Laboratoire de Physicochimie Structurale et Macromoléculaire  
Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de la Ville de Paris  
10, rue Vauquelin 75231 PARIS Cedex 05 (France).

RESUME

La fonction théorique de relaxation de la contrainte dans les polymères fondus est obtenue à partir d'une nouvelle solution à la réponse du modèle d'anneaux glissants de Doi dans la zone du plateau viscoélastique. Les résultats de ce traitement, basé sur l'application de la théorie statistique de l'élasticité à un réseau virtuel temporaire de chaînes de même longueur enchevêtrées, sont comparés à des courbes expérimentales contrainte-déformation obtenues avec des polystyrènes présentant une large gamme de masses moléculaires mais d'étroites distributions, étirés à 30°C au-dessus de T<sub>g</sub> à vitesse de déformation constante. Nous observons un bon accord et proposons une méthode de détermination des temps de relaxation.

ABSTRACT

The theoretical stress relaxation of polymer melts is derived from a new solution of the response of Doi's slip link model in the plateau zone of the rubberlike part of the spectrum. The results of this treatment, based on the application of the statistical elasticity theory to a virtual transient network of monodisperse entangled chains, are compared to experimental stress-strain curves, obtained on narrow distribution polystyrenes of various molecular weights, elongated at about 30°C above T<sub>g</sub> at constant strain rate. A good agreement is observed and a way of determining chain relaxation times is given.

1. INTRODUCTION

Les propriétés d'écoulement des polymères fondus présentent des caractères inhabituels et fascinants. Ainsi, suivant les conditions, ils peuvent se comporter comme des solides élastiques ou, au contraire, donner une réponse de type

\* Communication au Groupe Français de Rhéologie le 1er décembre 1982

visqueux.

La rhéologie de ces systèmes a fait l'objet de nombreuses études tant sur le plan théorique qu'expérimental. Il a, par exemple, été clairement mis en évidence que la contrainte est une fonction non linéaire de l'histoire de la déformation, le comportement rhéologique étant entièrement défini par l'équation, dite équation constitutive, reliant contrainte et déformation.

Lorsque les chaînes de polymère sont suffisamment longues (ce qui sera toujours le cas par la suite), l'existence d'enchevêtrements, c'est-à-dire de points où une chaîne ne peut en traverser une autre, joue un rôle fondamental dans la réponse de ces systèmes à une déformation donnée. Certaines théories moléculaires ont été proposées par LODGE, MEISSNER et WAGNER (1, 2) pour rendre compte de ces effets. Les enchevêtrements y sont représentés par des points de "réticulation" placés à des endroits fixes de la chaîne mais dont l'effet de liaison n'est pas permanent dans le temps.

Plus récemment, le modèle élaboré par DOI et EDWARDS (3, 4) utilise le concept de tube ou celui d'anneau glissant (slip-link). Dans le premier cas, la chaîne se trouve confinée à l'intérieur d'un tube fictif qui représente en fait les contraintes topologiques dues aux autres chaînes. Dans le modèle d'anneaux glissants, la chaîne passe à travers une série de petits anneaux (imaginaires eux aussi) dans lesquels elle peut glisser librement (fig. 1).



Fig. 1 - Le modèle du tube

Le modèle d'anneaux glissants

À l'équilibre ces anneaux sont séparés par une distance  $a$  (qui est aussi le diamètre du tube) et qui représente la distance moyenne entre enchevêtrements. Ces deux modèles décrivent la même réalité physique, et par la suite nous considérerons principalement le "modèle d'anneaux glissants".

Nous présentons ici, une modification de la rhéologie déduite du "modèle d'anneaux glissants" basée sur l'identification à chaque instant du système de chaînes enchevêtrées à un réseau temporaire. Ce traitement, contrairement à celui de Doi-Edwards, ne conduit pas à des fonctions de relaxation factorisables par rapport aux variables temps et déformation, et se rapproche davantage des résultats expérimentaux. Nous considérerons tout d'abord la réponse à un échelon de déformation puis nous l'étendrons au cas d'une elongation à vitesse de déformation constante et nous comparerons les prédictions théoriques avec des résultats expérimentaux obtenus sur des polystyrènes présentant une large gamme de masses moléculaires mais d'étroites distributions.

## II. Le modèle "d'anneaux glissants"

Nous utiliserons les mêmes notations que Doi-Edwards (3, 4). Soient  $C$  chaînes gaussiennes par unité de volume contenant chacune  $N_e$  monomères de longueur  $b$ . À l'équilibre, leur mouvement se trouve limité par la présence de  $N = N_e/N_e \gg 1$  points d'enchevêtrements, séparés chacun par  $N_e$  monomères.  $N_e$  est une caractéristique du polymère. La chaîne se trouve donc schématisée par un ensemble de  $N-1$  segments de longueur moyenne  $a = b \times N_e^{1/2}$  (fig. 2).

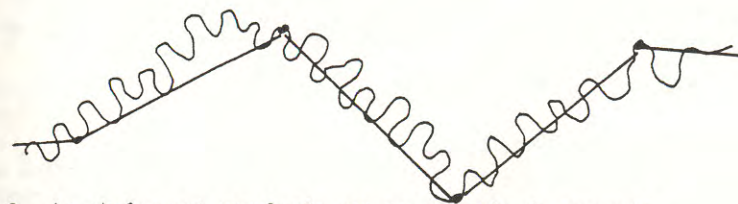


Fig. 2 - La chaîne est remplacée par un ensemble de segments.

Imposons maintenant une déformation infiniment rapide et maintenue par la suite, caractérisée par le tenseur de déplacement  $\underline{E}$ . Supposons que les points de jonctions se déplacent de façon affine et examinons la relaxation du système.

- Dans un premier temps, caractérisé par un temps très court  $\tau_A$ , les enchevêtrements sont bloqués (La chaîne ne peut glisser dans les anneaux) et le système s'équilibre par une diffusion transverse des monomères.
- Dans une deuxième étape, caractérisée par le temps  $\tau_B = 2N^2 \tau_A$  ils se comportent comme des anneaux glissants, permettant ainsi à la chaîne étendue de se rétracter pour passer de sa longueur étirée  $L' = L \langle |\underline{E} \cdot \underline{u}| \rangle$  à sa valeur d'équilibre  $L = N \frac{b}{a}$ . Ici,  $\langle \dots \rangle$  désigne une moyenne tensorielle sur toutes les orientations de  $\underline{u}$  vecteur unitaire.
- Dans une troisième étape, la chaîne se désengage de ces enchevêtrements restants pour retourner à une configuration d'équilibre par un processus de reptation. Le temps caractéristique est  $\tau_C = 6N^3 \tau_A$ .

## III. Expression de la contrainte

### III.1. Pendant la phase de rétraction

Cette phase correspond au plateau viscoélastique (5). Nous supposons que la réponse de l'ensemble du système est équivalente, à chaque instant, à celle que donnerait un réseau temporaire existant momentanément dans un état purement élastique de quasi-équilibre. Compte tenu de ce que nous avons vu plus haut, durant cette étape le nombre de monomères entre points d'enchevêtrements augmente avec le temps de  $N$  à  $N_c \langle |\underline{E} \cdot \underline{u}| \rangle$ , tandis que corrélativement le nombre de points de jonction diminue de  $N$  à  $N \cdot \langle |\underline{E} \cdot \underline{u}| \rangle$ .

D'après la théorie statistique de l'élasticité caoutchoutique, le tenseur de contrainte du réseau virtuel s'exprime à l'instant  $t$  par :

$$\nabla_{\alpha\beta}(\underline{E}, t) = 3(N(t) k_B T \langle \frac{r'_{i\alpha} \cdot r'_{j\beta}}{r'_{ij} b^2} \rangle + P \delta_{\alpha\beta})$$

$(\alpha, \beta) \in \{2, 3, 3\}$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $T$  est la température absolue,  $r'_{i\alpha}$  est la projection sur l'axe  $\alpha$  de référence du vecteur  $r'_{ij}$  joignant 2 points de jonctions consécutifs et  $P$  est la pression hydrostatique. Compte tenu de l'hypothèse de déformation affine on a :

$$r'_{i\alpha} \cdot r'_{j\beta} = a^2 (\underline{E} \cdot \underline{u})_{\alpha} (\underline{E} \cdot \underline{u})_{\beta}$$

Les valeurs du tenseur des contraintes s'expriment donc (en faisant abstraction du terme de pression) par :

$$\nabla_{\alpha\beta} = G_0 \langle (\underline{E} \cdot \underline{u})_{\alpha} (\underline{E} \cdot \underline{u})_{\beta} \rangle_{\underline{u}} \quad \text{pour} \quad \tau_A \ll t \ll \tau_B$$

et 
$$\sigma_{\alpha\beta}^* = G_0 \frac{1}{\langle |\underline{E} \cdot \underline{u}| \rangle_u} \left\langle \frac{(\underline{E} \cdot \underline{u})_\alpha (\underline{E} \cdot \underline{u})_\beta}{|\underline{E} \cdot \underline{u}|} \right\rangle_u \text{ pour } \underline{E} \gg t \gg \tau_0$$

avec  $G_0 = 3CNk_B T$  module à l'équilibre

La cinétique de décroissance de la contrainte au cours de cette étape est liée à la variation dans le temps du nombre de points de jonction et du nombre de monomères entre ces points. Les deux sont reliées car  $\langle n_i(t) \rangle = N_i/N(t)$ . La résolution de l'équation de diffusion régissant la chaîne conduit avec l'approximation d'une densité uniforme de monomères au début de la rétraction à : (6, 7).

$$N(\underline{E}, t) = \frac{N_0}{N_c} \frac{1}{\langle |\underline{E} \cdot \underline{u}| \rangle_u} \left[ 1 + (\langle |\underline{E} \cdot \underline{u}| \rangle_u - 1) \mu_B(t) \right]$$

où

$$\mu_B(t) = \sum_{p=1,3,5,\dots} \frac{\delta}{p^2 \pi^2} \exp\left(-\frac{t p^2}{\tau_B}\right)$$

On en déduit aisément :

$$\sigma_{\alpha\beta}(\underline{E}, t) = G_0 \frac{1}{\langle |\underline{E} \cdot \underline{u}| \rangle_u} \left[ 1 + (\langle |\underline{E} \cdot \underline{u}| \rangle_u - 1) \mu_B(t) \right] \left\langle \frac{(\underline{E} \cdot \underline{u})_\alpha (\underline{E} \cdot \underline{u})_\beta}{|\underline{E} \cdot \underline{u}|} \left[ 1 + (|\underline{E} \cdot \underline{u}| - 1) \mu_B(t) \right] \right\rangle_u$$

dont les formes limites sont données plus haut.

### III.2. Pendant la reptation

La fonction de relaxation est alors factorisable et s'exprime par

$$\sigma_{\alpha\beta}(\underline{E}, t) = \sigma_{\alpha\beta}^* \cdot \mu_c(t)$$

avec :

$$\mu_c(t) = \sum_{p=1,3,5,\dots} \frac{\delta}{p^2 \pi^2} \exp\left(-\frac{t p^2}{\tau_c}\right)$$

### IV. Relaxation de contrainte après un échelon de déformation

Le tenseur de déformation est évidemment dans le cas d'une élongation uniaxiale de rapport  $\lambda$  selon z

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Les moyennes tensorielles peuvent se calculer analytiquement et nous utiliserons les notations suivantes :

$$\alpha(\lambda) = \langle |\underline{E} \cdot \underline{u}| \rangle_u$$

$$f_{\alpha\beta}(\lambda) = \left\langle \frac{(\underline{E} \cdot \underline{u})_{\alpha\alpha}^2 - (\underline{E} \cdot \underline{u})_{\alpha\alpha}^2}{|\underline{E} \cdot \underline{u}|} \right\rangle_u \cdot \frac{1}{\langle |\underline{E} \cdot \underline{u}| \rangle_u}$$

d'où :

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{3\lambda^{-1} z}{2 \lambda^{1/2}} \right) \text{ avec } z = (\lambda^3 - 1)^{1/2}$$

$$\text{et : } f_{\alpha\beta}(\lambda) = \frac{z(2z^2+3)[(z^2+1)^{1/2}] - (4z^2+3)\lambda^{-1}z}{2z^2[z(z^2+1)^{1/2} + \lambda^{-1}z]}$$

En séparant les termes dépendant du temps et de la déformation on peut exprimer la contrainte par :

$$\sigma(\lambda, t) = G_0 \left[ f_{\alpha\beta}(\lambda) + \mu_B(t) F_1(\lambda) + \mu_B^2(t) F_2(\lambda) \right] \mu_c(t)$$

$$\text{avec : } F_1(\lambda) = \frac{1}{3\alpha(\lambda)} [\lambda^2 - \lambda^{-1}] + f_{\alpha\beta}(\lambda) (\alpha(\lambda) - 2)$$

$$F_2(\lambda) = \frac{1}{3} (1 - \alpha^{-1}(\lambda)) (\lambda^2 - \lambda^{-1}) + f_{\alpha\beta}(\lambda) (1 - \alpha(\lambda))$$

### V. Calcul de la contrainte dans le cas d'une élongation à vitesse de déformation constante

Dans ce qui suivra les fonctions de relaxation  $\mu_B(t)$  et  $\mu_c(t)$  seront remplacées par des exponentielles décroissantes du type  $\exp(-t/\tau_B)$  et  $\exp(-t/\tau_c)$  respectivement.

L'équation constitutive est obtenue par une extension du principe de Boltzmann à un système présentant un fort caractère non linéaire (8). Pour une extension de rapport  $\lambda$  à vitesse constante  $\dot{\epsilon}$ , débutant à  $t = 0$  après une période de repos infiniment longue on a :

$$\begin{cases} \lambda = 1 & \text{pour } t < 0 \\ \lambda = \exp \dot{\epsilon} t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

Dans le cas d'une fonction de relaxation qui s'exprime d'une manière générale :

$$\sigma(\lambda, t) = G_0 \sum_i F_i(\lambda) \exp(-t/\tau_i)$$

L'équation constitutive reliant la contrainte à la déformation est :

$$\sigma = G_0 \int_{-\infty}^t \sum_i dt' \left[ \frac{d}{dt'} (\exp(-\frac{t-t'}{\tau_i})) \right] \cdot F_i(\lambda(t, t'))$$

où

$$\lambda(t, t') = \exp\left(\int_{t'}^t \dot{\epsilon}(t'') dt''\right) = \exp \dot{\epsilon} (t - t')$$

En décomposant cette intégrale en deux intégrations de  $-\infty$  à 0 où  $\lambda(t) = \lambda(t') = 1$  et de 0 à t on obtient :

$$\sigma = G_0 \left( \left[ \sum_i F_i(\lambda) \exp(-\frac{t}{\tau_i}) \right] + \int_0^t \sum_i F_i(\exp \dot{\epsilon} s) \exp(-\frac{t-s}{\tau_i}) ds \right)$$

L'expression complète de la contrainte, faisant intervenir les processus moléculaires de relaxation dans la zone du plateau et la zone terminale est donnée ci-après :

$$\sigma_{\alpha\beta,c}(\lambda, \dot{\epsilon}) = G_0 \left[ \sigma_{\alpha\beta,c}(\lambda) + I_{1\alpha}(t, \dot{\epsilon}) + I_{2\beta}(t, \dot{\epsilon}) + I_{3c}(t, \dot{\epsilon}) \right]$$

où :

$$I_{i,j}(t, \dot{\epsilon}) = \frac{1}{\tau_j} \int_0^t ds \exp(-\frac{t-s}{\tau_j}) \cdot F_i(\exp \dot{\epsilon} s) ds \quad \begin{cases} (i,j) \\ = (1,\alpha) \\ = (2,\beta) \\ = (3,c) \\ F_3 = f_{\alpha\beta} \end{cases}$$

$$\sigma_{\alpha\beta,c}(\lambda) = f_{\alpha\beta}(\lambda) \exp(-\frac{t}{\tau_c}) + F_1(\lambda) \exp(-\frac{t}{\tau_B}) + F_2(\lambda) \exp(-\frac{t}{\tau_B})$$

$$\text{avec : } \frac{1}{\tau_a} = \frac{1}{\tau_B} + \frac{1}{\tau_c} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tau_B} = \frac{2}{\tau_B} + \frac{1}{\tau_c}$$

Il est intéressant à ce stade de transformer les équations avec les variables  $K_j = \dot{\epsilon} \tau_j$ , ( $j = \alpha, \beta$ ). On définit ainsi trois paramètres adimensionnels qui contrôlent totalement le système comme le prouve l'écriture de la contrainte ci-dessous :

$$\sigma_{Bc}(\lambda, \dot{\epsilon}) : G_0 \left[ \sum_{(i,j)} \lambda^{-K_j} F_i(\lambda) + \sum_{(i,j)} \int_0^1 F_i(y^{-K_j}) dy \right]$$

avec  $(i,j) = \{(1,\alpha), (2,\beta), (3,c)\}$

Ces équations montrent que les paramètres de ce modèle sont  $G_0$ ,  $\tau_B$  et  $N_e$ .  $G_0$  est le module du plateau viscoélastique, indépendant de la température et de la masse moléculaire du polymère.  $N_e$  est une caractéristique de la microstructure du polymère et peut être estimée à partir de  $G_0$  (5). En ce qui concerne  $\tau_B$ , sa valeur à une température donnée dépend de la longueur de la chaîne ( $\tau_B \sim M^c$ ) et sa dépendance en température est déterminée par une loi WLF (5). Tous les autres paramètres (hormis ceux spécifiques à la traction ( $\lambda, \dot{\epsilon}$ )) sont reliés à ces trois quantités de base.

Un test critique de cette théorie consiste à comparer des courbes de traction expérimentales avec l'évolution de la contrainte calculée numériquement. Un bon accord peut espérer conduire à la détermination des temps de relaxation moléculaires que nous avons introduits.

#### VI. Échantillons et expériences de traction

Nous avons examiné quatre polystyrènes de masses moléculaires différentes présentant une distribution étroite. Les caractéristiques de ces polymères sont données ci-dessous.

Polymère *	$\overline{M}_n$	$I = \overline{M}_w / \overline{M}_n$
PS 200	190 000	1,17
PS 400	420 000	1,24
PS 900	855 000	1,19
PS 1300	1 300 000	1,28

Les échantillons sont obtenus par moulage et recuit sous pression et ne présentent ni bulles, ni biréfringence. Leur dimension est de 8 cm de long, 2 cm de large et 0,2 cm d'épaisseur.

Ils ont été étirés à vitesse de déformation constante  $\dot{\epsilon}$ , à l'aide d'une machine de traction hydraulique (9), à une température de 135°C et à 150°C pour deux expériences. Trois vitesses furent choisies 0,029 s<sup>-1</sup>; 0,059 s<sup>-1</sup>; 0,115 s<sup>-1</sup>. La force fut enregistrée pendant l'étirage et celui-ci fut limité à  $\lambda = 4$ .

Nous considérerons la contrainte nominale (force divisée par la section initiale).

Un exemple des courbes contraintes-déformations à 135°C et à  $\dot{\epsilon} = 0,029$  s<sup>-1</sup> est donné fig. 3. L'influence de la vitesse pour le PS 200 et le PS 2000 est indiquée fig. 4 (a et b respectivement).

\* Ces polymères ont été synthétisés à l'E.A.H.P., 4 rue Boussingault 67000 Strasbourg.

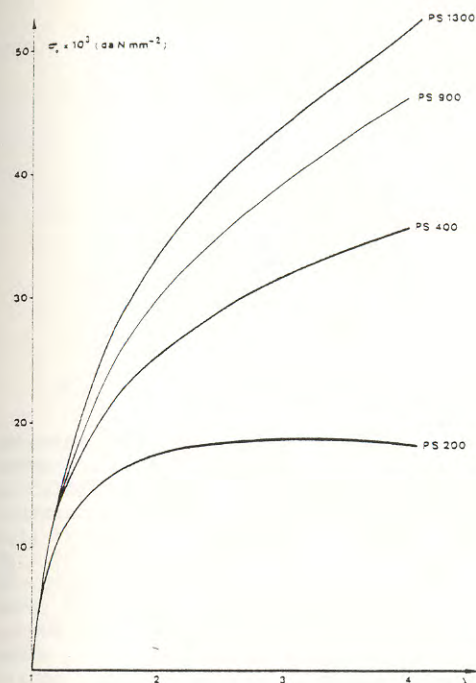


Fig.3-Courbes contrainte déformation pour les différents polymères à T = 135°C et  $\dot{\epsilon} = 0,029$  s<sup>-1</sup>

Il apparaît que ces courbes peuvent être qualitativement décomposées en deux parties, la première à faibles déformations ( $\lambda < 1,5$ ) présentant un accroissement nettement plus rapide de la force que la seconde.

Le comportement observé à  $\lambda > 1,5$  traduit une déformation caoutchoutique recouvrant des effets essentiellement entropiques. On peut noter que la force augmente avec la longueur de la chaîne bien qu'une limite semble être atteinte aux très fortes masses. L'effet de la vitesse est aussi fonction de la masse moléculaire. On constate qu'aucune influence n'apparaît pour le PS 900 tandis qu'elle est importante pour le PS 200. On remarque que, à faible vitesse, la contrainte augmente, passe par un maximum puis diminue à nouveau aux grandes extensions.

L'influence de la température est visible en comparant les fig. 3 et 5 pour le PS 400. On constate qu'à 150°C la contrainte commence à décroître en fin de traction ce qui n'était pas le cas à 135°C.

Le comportement à faibles déformations est dominé par des forces d'origine enthalpique. On constate sur les fig. 3 et 4 qu'elles augmentent avec la masse moléculaire du polymère et la vitesse de déformation. Leur origine moléculaire peut être attribuée à des déformations à l'échelle moléculaire (variation des angles de valence) ainsi qu'à des changements dans la structure moléculaire (comme des changements locaux de conformation (10)) qui apparaissent au seuil de plasticité.

L'influence de la température est prépondérante. On peut voir facilement que la contrainte pour le PS 400 à 150°C est environ 3 fois plus faible qu'à 135°C.

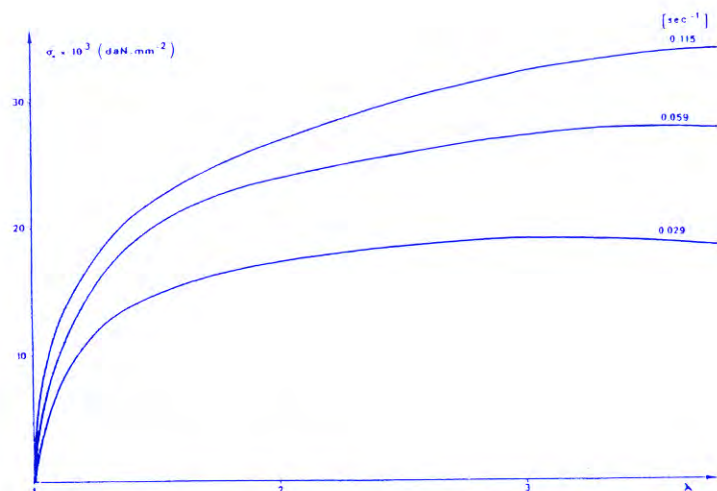


Fig.4a - Courbes contrainte-déformation pour le PS 200 à T = 135°C

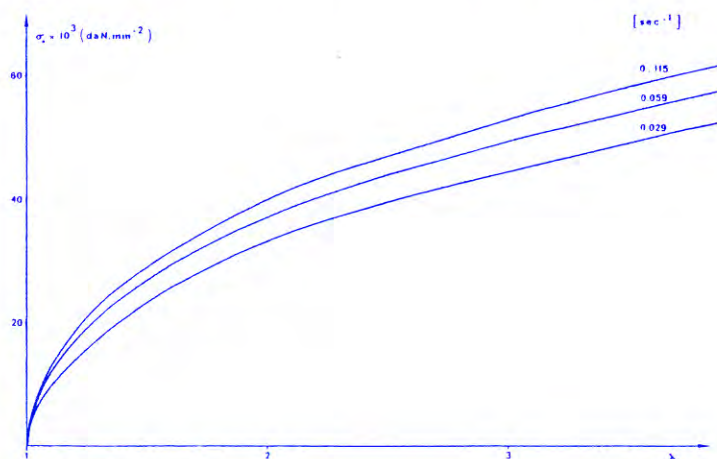


Fig.4b - Courbes contrainte-déformation pour le PS 900 à T = 135°C

## VII. Comparaison entre les courbes expérimentales et calculées

### VII.1. Détermination des paramètres

Compte tenu de ce que nous venons de voir, une telle comparaison ne peut être effectuée qu'au-delà de  $\lambda = 1,5$  puisque le modèle théorique ne tient compte que des effets entropiques. Elle nécessite d'autre part, l'évaluation de la composante enthalpique indépendante de la déformation et sa déduction des courbes expérimentales.

Pour simplifier, nous supposons tout d'abord que l'effet de la reptation est négligeable dans nos conditions expérimentales et de ce fait  $\tau_c$  devient infini dans les équations constitutives.

La comparaison entre courbes expérimentales et calculées ne peut s'effectuer qu'après détermination outre de la composante enthalpique mais aussi de  $\tau_B$  et  $G_0$ .  $G_0$  s'interprète comme un facteur d'homotétie entre ces courbes. La contribution enthalpique étant constante pour  $\lambda > 1,5$ , les pentes des courbes contrainte-

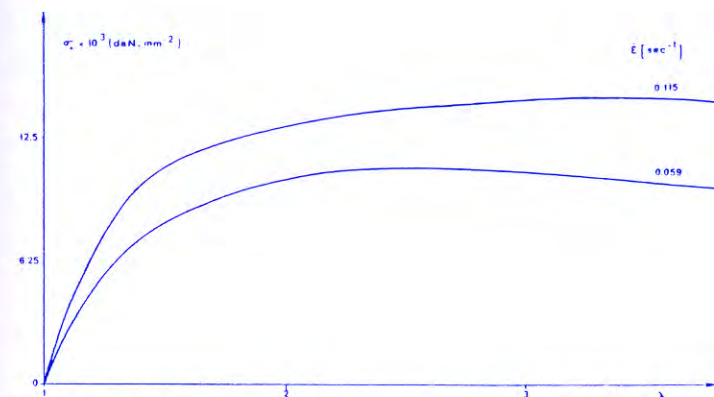


Fig. 5 - Courbes contrainte-déformation pour le PS 400 à T = 150°C

déformation à une vitesse donnée ne dépendent que de  $\tau_B$  et de  $G_0$ . Ainsi en comparant pour chaque valeur de  $\lambda$  la pente des courbes expérimentales et calculées, on peut déterminer le couple  $(G_0, \tau_B)$ .  $G_0$  devant être constant, indépendant de  $\lambda$  et de  $\dot{\epsilon}$ , du moins pour un polymère à une température donnée, cela facilite la détermination de  $\tau_B$ . Ainsi le couple  $(G_0 = 0,25 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-2}, \tau_B = 25 \text{ s})$  a été obtenu pour le PS 200 à 135°C à partir de comparaisons portant sur cinq valeurs de  $\lambda$ . Une telle procédure peut être appliquée à chaque polymère. Nous avons obtenu pour  $G_0$  une valeur moyenne de  $0,25 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-2}$  en accord avec les données de la littérature et qui conduit à une masse moyenne entre points d'enchevêtrements de 14 000 en accord avec le niveau du "plateau viscoélastique" déduit des propriétés dynamiques du polymère.

La contribution enthalpique peut ensuite être déduite par différence entre courbes calculées et expérimentales

Le tableau ci-dessous indique les valeurs de cette contribution pour les polymères étudiés aux différentes vitesses. Il est important de noter que cette contribution est effectivement constante au-delà de  $\lambda = 1,5$  ce qui corrobore notre hypothèse.

Polymère	0,115 s <sup>-1</sup>	0,059 s <sup>-1</sup>	0,029 s <sup>-1</sup>	$\tau_B$ (s)
PS 200	13	12	7	25
PS 400	15	13,5	11	125
PS 900	23	17,5	16	500
PS 1300	29,5	25,5	20	1 000

Valeur des contributions enthalpiques en  $\text{daN.mm}^{-2} \cdot 10^{-3}$  et des temps de relaxation  $\tau_B$  à 135°C.

La fig. 6 montre les courbes calculées avec  $\tau_B = 25 \text{ s}$  et les courbes expérimentales du PS 200. Un bon accord est obtenu et il est intéressant de noter que la théorie prévoit la décroissance de la contrainte à faible vitesse sans contribution de la zone terminale de reptation. A titre d'exemple nous donnons aussi les courbes calculées avec  $\tau_B = 500 \text{ s}$  ce qui correspond expérimentalement au PS 900 (fig. 7).

### VII.2. Influence de la zone terminale

Afin de tester l'influence de la reptation nous avons calculé les courbes obtenues avec  $\tau_B = 10 \text{ s}$  et un nombre d'enchevêtrements par chaîne de 10 (ce qui semble un minimum pour appliquer notre théorie) d'où  $\tau_c = 300 \text{ s}$ . La fig. 8

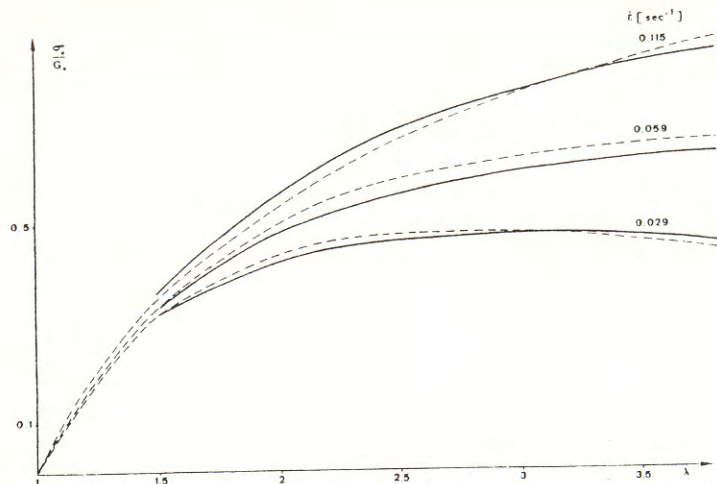


Fig. 6 - Comparaison PS 200 à 135°C (trait plein) et  $\zeta_B = 25$  s (pointillés)

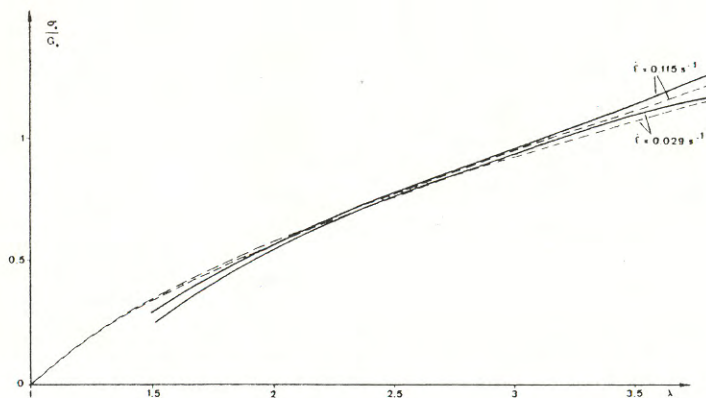


Fig. 7 - Idem Fig. 6 avec PS 900 à 135°C et  $\zeta_B = 500$  s.

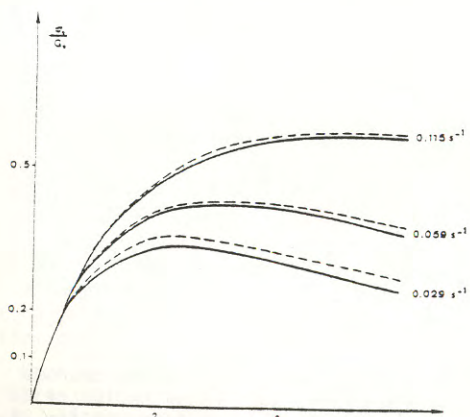


Fig. 8 - Influence de la reptation  
Courbes calculées avec  $\zeta_B = 10$  s  
pointillés  $\zeta_c = \infty$   
trait plein  $\zeta_c = 300$  s

montre que l'effet de la zone terminale sur la contrainte est faible et qu'il diminue si la vitesse augmente. Il en résulte que l'hypothèse que nous avons formulée au départ est raisonnable et que les valeurs de  $\zeta_B$  obtenues sont caractéristiques du processus de rétraction à lui seul.

### VIII.3. Dépendance de $\zeta_B$ avec la masse moléculaire

Les valeurs de  $\zeta_B$  étant obtenues indépendamment les unes des autres, on peut étudier leur dépendance avec la longueur des chaînes. En portant  $\log \zeta_B$  en fonction de  $\log M$ , on obtient une droite de pente 1,91 obtenue par regression linéaire (fig. 9). Malgré l'incertitude sur les valeurs élevées de  $\zeta_B$  pour lesquelles l'effet de vitesse est faible, ce résultat semble très proche de la prévision théorique d'une loi en  $M^2$ .

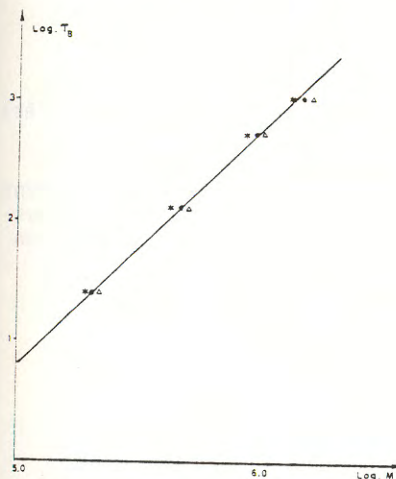


Fig. 9 - Variation de  $\zeta_B$  avec la masse moléculaire

- \*  $\overline{M}_n$
- $\sqrt{\overline{M}_n \overline{M}_w}$
- △  $\overline{M}_w$

La droite tracée est de pente 1,91

### VIII.4. Variation de $\zeta_B$ avec la température

L'effet de la température sur les temps de relaxation est habituellement traduit à l'aide d'une loi W.L.F. (11) (superposition temps-température)

$$\text{Ainsi } \frac{\zeta(T)}{\zeta(T_0)} = a_{T/T_0} \quad \text{et} \quad \log a_{T/T_0} = -\frac{12,7(T - T_0)}{49,8 + (T - T_0)}$$

Ces coefficients étant valables pour le polystyrène avec  $T_0 = 100^\circ\text{C}$ . On en déduit facilement  $\frac{\zeta(135^\circ\text{C})}{\zeta(150^\circ\text{C})} = 13,2$ .

Ainsi un temps de relaxation à  $150^\circ\text{C}$  peut être estimé à partir de la valeur à  $135^\circ\text{C}$ . Par exemple pour le PS 400,  $\zeta_B$  à  $150^\circ\text{C}$  est de l'ordre de 10 s.  $G_0$  étant indépendant de la température, nous avons utilisé la même valeur que précédemment et les résultats sont portés fig. 10. (Aucune contribution enthalpique n'a été déduite compte tenu de l'élévation de température). On constate qu'on obtient un très bon accord pour  $\dot{\epsilon} = 0,059 \text{ s}^{-1}$  tandis qu'une petite différence subsiste aux faibles déformations pour  $\dot{\epsilon} = 0,115 \text{ s}^{-1}$ .

### IX. Conclusion

Le comportement du modèle, pour un étirement à vitesse de déformation constante est schématisé sur la fig. 11. Nous avons calculé la contrainte et l'influence de la vitesse pour 3 valeurs de  $\zeta_B$  : 10, 100 et 1.000 s. Aux grandes valeurs de  $\zeta_B$ , nous observons une réponse de type purement caoutchoutique, indépendante de la vitesse. Le polymère non réticulé se comporte alors comme un élastomère réticulé ! L'effet visqueux apparaît au fur et à mesure que  $\zeta_B$  décroît.



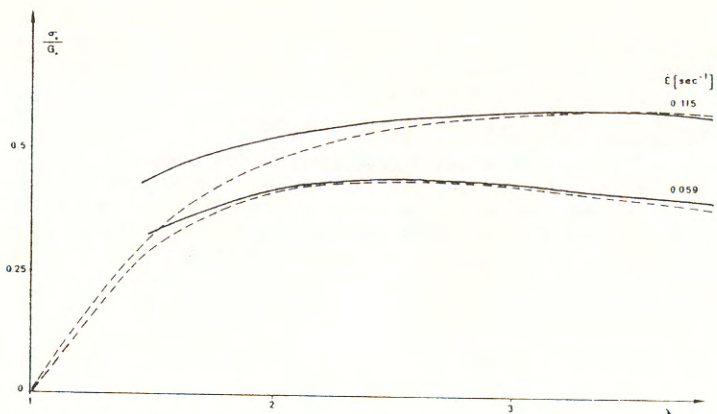


Fig. 10 - Comparaison PS 400 à 150°C (trait plein) et  $\tau_B = 10$  s (pointillés)

Malgré les approximations qu'il contient, le traitement proposé conduit à des courbes contrainte-déformation proches de celles obtenues expérimentalement sur des polystyrènes de distribution étroite étirés entre 30 et 50°C au-dessus de la température de transition vitreuse. Il permet en outre une détermination originale de temps de relaxation moléculaire.

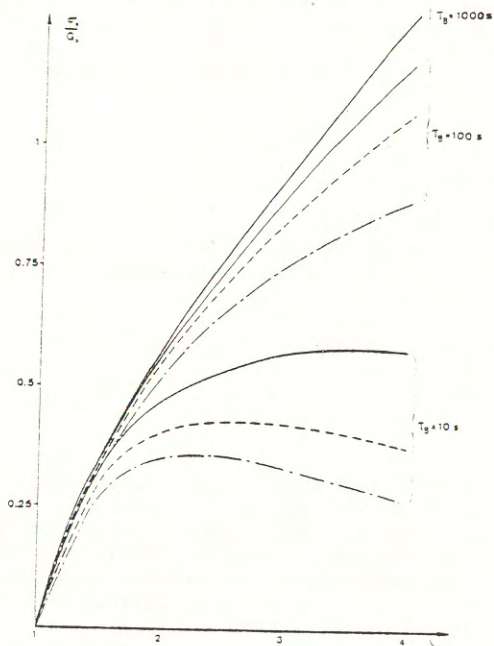


Fig.11-Courbes calculées pour différentes valeurs de  $\tau_B$  et de  $\dot{\epsilon}$

- · - · - = 0,029 s<sup>-1</sup>  
 - - - - = 0,059 s<sup>-1</sup>  
 — — — — = 0,115 s<sup>-1</sup>

#### BIBLIOGRAPHIE

- 1/ A.S. LODGE, J. MEISSNER, *Rhéal. Acta* **12**, 41 (1973)
- 2/ M.H. WAGNER, *J. non Newtonian Fluid Mech.*, **4**, 39, (1978)
- 3/ M. DOI, S.F. EDWARD, *J.C.S. Faraday II*, **74**, 1802 (1978)
- 4/ M. DOI, *J. Polym. Sci., Polym. Phys. Ed.*, **18**, 1005 (1980)
- 5/ J.D. FERRY, *Viscoelastic properties of polymers*, John Wiley Ed. 2e ed. 1970

- 6/ P. THIRION, *Polymer Bull.* **6**, 541 (1962)
- 7/ M. THIRION, J.F. TASSIN, à paraître
- 8/ M. DOI, S.F. EDWARDS, *J.C.S. Faraday II*, **75**, 38 (1979)
- 9/ J.F. TASSIN, R. FAJOLLE, P. SERGOT, C. PAMBRUN, L. MONNERIE, *Polymer* (sous presse)
- 10/ R.E. ROBERTSON, *J. Chem. Phys.* **44**, 3950, (1966)
- 11/ D.J. PLAZEK, *J. of Phys. Chem.*, **69**, 3480, (1965)

## RHEOLOGIE D'UN POLYMERE A HAUTE VITESSE DE DEFORMATION, TUBE PARCOURU PAR UNE ONDE DE DETONATION (\*)

*POLYMER RHEOLOGY UNDER HIGH RATE OF  
DEFORMATION: TUBE CONFINING A DETONATION WAVE*

J. RENARD - M. AMINALLAH - M. TRONEL - J. BROSSARD (\*\*)

### RESUME

Cette étude montre comment un mode expérimental nouveau peut permettre d'appréhender le comportement rhéologique d'un matériau à de hautes vitesses de déformations de l'ordre de  $10^3 \text{ s}^{-1}$ . La structure étudiée est un long tube circulaire mince confinant la détonation d'un mélange gazeux.

Une première partie consiste en l'étude dynamique du comportement du tube et présente une théorie simplifiée qui remplace avantageusement la théorie complète de Sing-chih Tang pour le domaine des ondes de pression à grande vitesse.

Une seconde partie montre comment la connaissance de la sollicitation de pression d'une part et des déformations du tube d'autre part permettent d'étudier la rhéologie du matériau constitutif grâce à la simplification apportée dans la théorie.

### ABSTRACT

This work presents a new experimental process which permits studying the rheological comportment of a material at a high rate of speed of deformation about  $10^3 \text{ s}^{-1}$ . The investigated structure is a long thin circular tube confining a gaseous detonation.

A first part consists in the dynamic study of the behaviour of the tube and displays a simplified theory which replaces with interest the complete theory of Sing-chih Tang in the range of the high velocity pressure waves.

A second part shows how the knowledge of the pressure profile on the one hand, and of the deformations of the tube, on the other permits studying the rheology of the constituent material thanks to the simplification introduced in the theory.

(\*) Communication au Groupe Français de Rhéologie le 1er Déc. 1982

(\*\*) Université d'Orléans - Laboratoire de Recherche Universitaire - 63, avenue de Lattre de Tassigny - 18028 BOURGES

## 1. INTRODUCTION

Pour prévoir la réponse dynamique d'un tube parcouru par une onde de pression il faut connaître le profil de cette onde  $p(x,t)$  à tout abscisse  $x$  du tube et à chaque instant  $t$ , d'une part, et d'autre part le comportement du matériau pour les vitesses de sollicitation correspondantes.

Dans l'hypothèse où le profil de la pression et les déformations du tube peuvent être mesurés expérimentalement, cette étude semble être un moyen intéressant pour appréhender la rhéologie des matériaux aux hautes vitesses de sollicitation et peut prendre place à côté d'autres méthodes connues [1], [2] telles que les excitations harmoniques, la barre d'Hopkinson, les impacts de projectiles sur les massifs, etc...

Plus précisément nous allons montrer comment des expériences sur la propagation de détonations gazeuses dans des tubes en PVC (polyvinyle chloré) peuvent nous renseigner sur le comportement du matériau pour des vitesses de l'ordre de  $10^3 \text{ s}^{-1}$  et des amplitudes de l'ordre de  $10^{-2}$  déformations.

## 2. DYNAMIQUE DE LA DEFORMATION D'UN TUBE PARCOURU PAR UNE ONDE DE PRESSION $p(x,t)$

### 2.1. Equations fondamentales

Plusieurs auteurs [3], [4], [5] ont proposé des modèles permettant de décrire la réponse des tubes minces soumis à des ondes de pression les parcourant.

Il sera souvent fait ici référence aux résultats qui sont les plus complets, à savoir ceux de Sing-chih Tang [4]. L'étude est faite pour des cylindres minces, d'épaisseur uniforme, parcourus par un front d'onde idéal (échelon d'Heaviside) se translatant à vitesse constante. Les équations du mouvement sont établies en se basant sur la théorie de l'élasticité linéaire, en incluant les termes dus aux déformations de cisaillement et à l'inertie de rotation.

L'hypothèse de l'axisymétrie ramène le problème à l'évolution seulement de trois fonctions fondamentales de déplacement :

$w_b(x,t)$  : déplacement radial dû à la flexion

$w_s(x,t)$  : déplacement radial dû au cisaillement

$u(x,t)$  : déplacement longitudinal

Le déplacement radial total est représenté par la somme  $w_b + w_s = w$ .

Nous rappelons les équations fondamentales du mouvement telles que nous pouvons les lire dans la publication de Tang, écrites pour des variables adimensionnelles.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + v \alpha \left[ \frac{\partial W_b}{\partial X} + \frac{\partial W_s}{\partial X} \right] - \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 W_s}{\partial X^2} - \frac{g^2}{1 - v^2} (W_b + W_s) - \frac{v g^2}{\alpha (1 - v^2)} \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{1}{\delta^2} \left[ \frac{\partial^2 W_b}{\partial T^2} + \frac{\partial^2 W_s}{\partial T^2} \right] &= -P(X,T) \\ \frac{\partial^2 W_b}{\partial X^2} + \delta^2 W_s - \frac{\partial^2 W_b}{\partial T^2} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Elles constituent un système d'équations aux dérivées partielles dont la résolution permet de décrire l'évolution des ondes se propageant le long du tube.

### 2.2. Régime quasi-stationnaire

Un cas particulier important est celui de l'état de propagation quasi-stationnaire. Il correspond à une déformation du tube figée dans un repère lié au front d'onde et décrit effectivement un comportement réaliste dans le cas d'un tube suffisamment long parcouru par une onde à profil fixe par rapport au front d'onde se déplaçant à vitesse constante.

Dans ce cas une seule des deux variables  $X$  ou  $T$  sera conservée en se plaçant dans les axes mobiles liés au front d'onde. Pour conserver la seule variable  $X$ , il suffira de remplacer  $\frac{\partial}{\partial T}$  par  $-v \frac{d}{dX}$  et  $\frac{\partial}{\partial X}$  par  $\frac{d}{dX}$ .

L'étude de ce cas apparaît comme fondamentale ; tout d'abord elle transforme le système d'équation aux dérivées partielles en système différentiel linéaire dont la solution pourra être essentiellement analytique, tout au moins pour des seconds membres idéalisés.

Ensuite elle permet dans le cas de fronts d'onde évoluant à vitesse lentement variable, à profils également lentement variables de se faire une idée approchée des déformations sans avoir recours aux résolutions des systèmes à dérivées partielles.

Les solutions pourront être cherchées dans le repère mobile sous la forme :

$$\begin{cases} W_b = A_1 e^{iNX} \\ W_s = A_2 e^{iNX} \\ U = A_3 e^{iNX} \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée au système s'écrit :

$$(v^2 - 1) \left( \frac{v^2}{\delta^2} - 1 \right) N^4 - \left( 1 + \frac{g^2}{1 - v^2} \right) v^2 - g^2 N^2 + \frac{\delta^2 g^2}{1 - v^2} \left( 1 + \frac{v^2}{v^2 - 1} \right) = 0$$

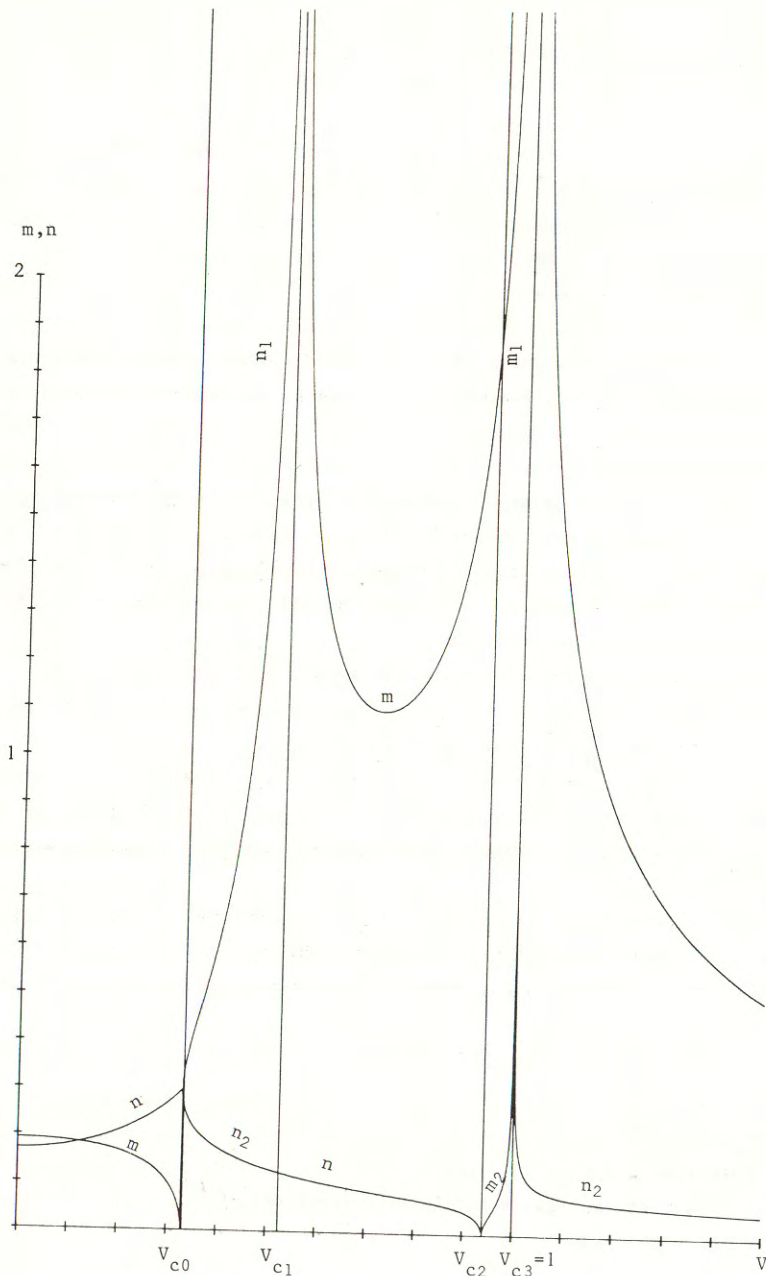


Fig. 1 : Spectre des vitesses ( $\nu = 0,34$  ;  $h/a = 0,24$ )

(n : nombre d'onde ; m : amortissement)

$$V_{c0} = \frac{1}{1 - \frac{g^2}{1 - \nu^2}} \left\{ -g^2 \left(1 + \frac{2\delta^2 - g^2}{1 - \nu^2}\right) + \left[ g^4 \left(1 + \frac{2\delta^2 - g^2}{1 - \nu^2}\right) + g^2 \left(1 - \frac{g^2}{1 - \nu^2}\right) (4\delta^2 - g^2) \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

$V_{c1} = \delta$  (Vitesse de propagation des ondes de cisailment dans une plaque mince)

$V_{c2} = \sqrt{1 - \nu^2}$  (Vitesse de propagation dans une barre)

$V_{c3} = 1$  (Vitesse de propagation dans une plaque)

Ces quatre vitesses partagent le plan en 5 régions où les solutions en  $N$  prennent des formes différentes qui peuvent s'écrire sous la forme  $N = n + im$  ;  $n$  caractérise une déformée oscillatoire tandis que  $m$  en caractérise un amortissement. La figure 1. donne les évolutions de  $m$  et  $n$  en fonction de la vitesse adimensionnelle.

Pour compléter cette étude et être concret, il est également intéressant d'observer l'évolution des déformées en fonction de  $V$ . Nous donnons figure 2 plusieurs exemples en échelle arbitraire des résultats du calcul de  $w$  pour chaque région, et en particulier illustrant le franchissement des vitesses critiques

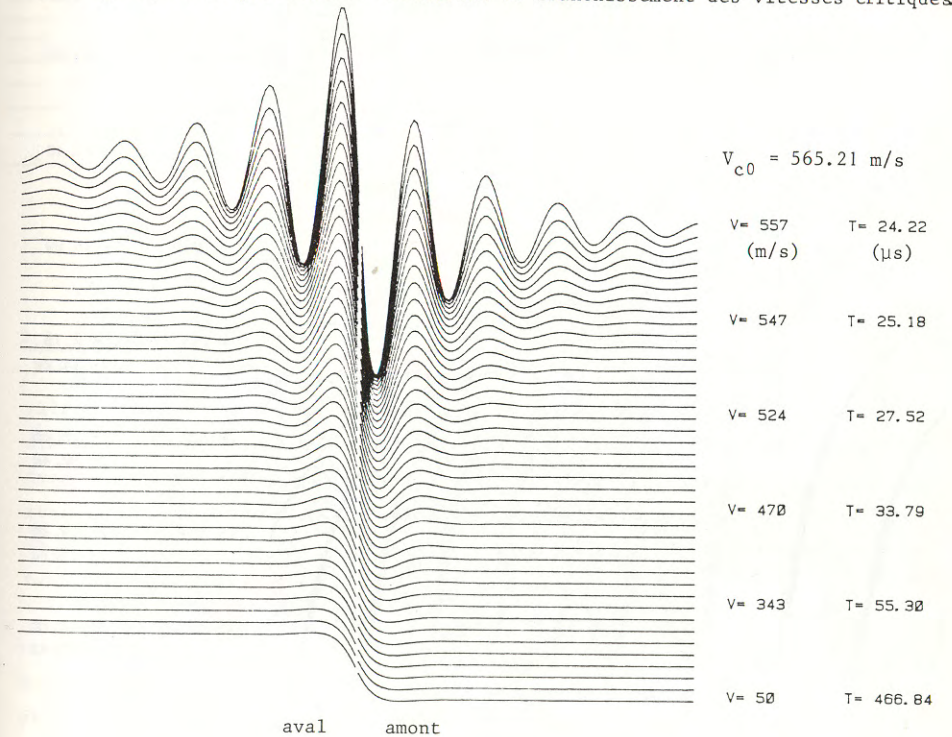


Fig. 2.a : Evolution de  $w$  en région I ( $V < V_{c0}$ )

Il est à remarquer d'ailleurs que ce franchissement des valeurs dites critiques se fait de façon continue sauf pour  $V_{c0}$  et  $V_{c2}$  qui elles seules méritent la qualification de "critiques" puisque la déformation augmente alors indéfiniment. Nous donnons également figure 3.l'évolution des déformations moyennes transversale ( $\epsilon_0$ ) et longitudinale ( $\epsilon_x$ ) en fonction de la vitesse  $V$ .

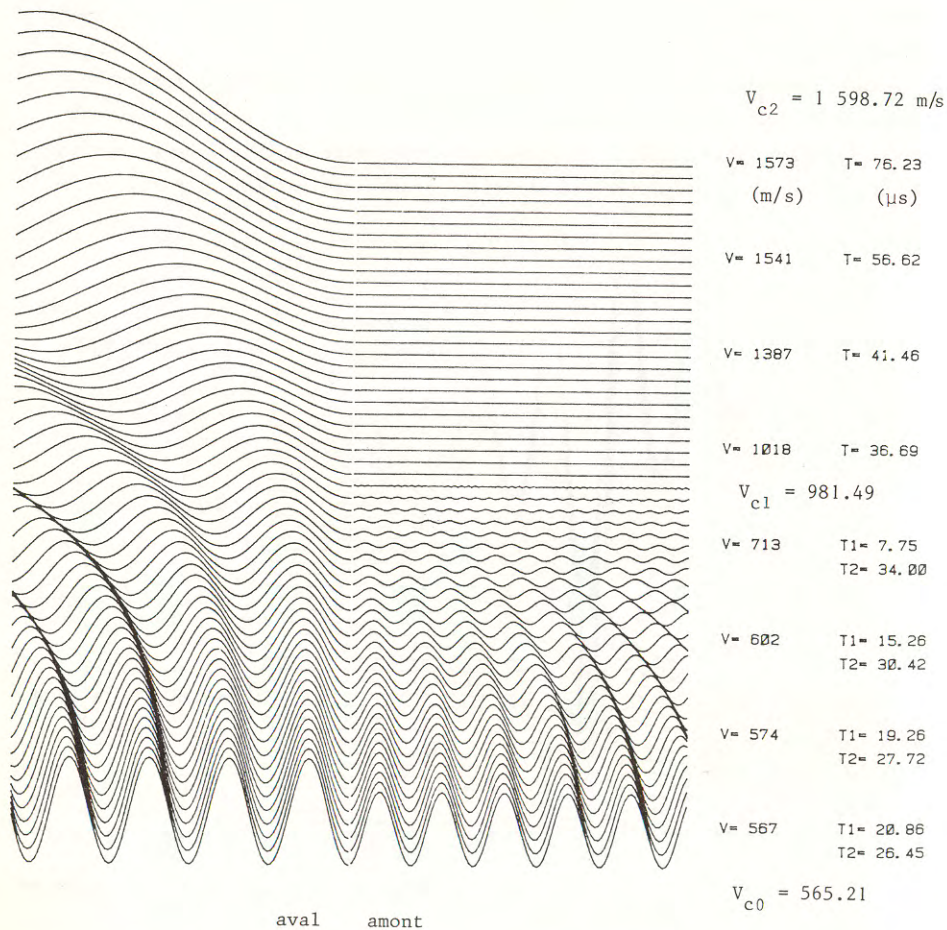


Fig. 2.b : Evolution de  $w$  en régions II et III ( $V_{c0} < V < V_{c2}$ )

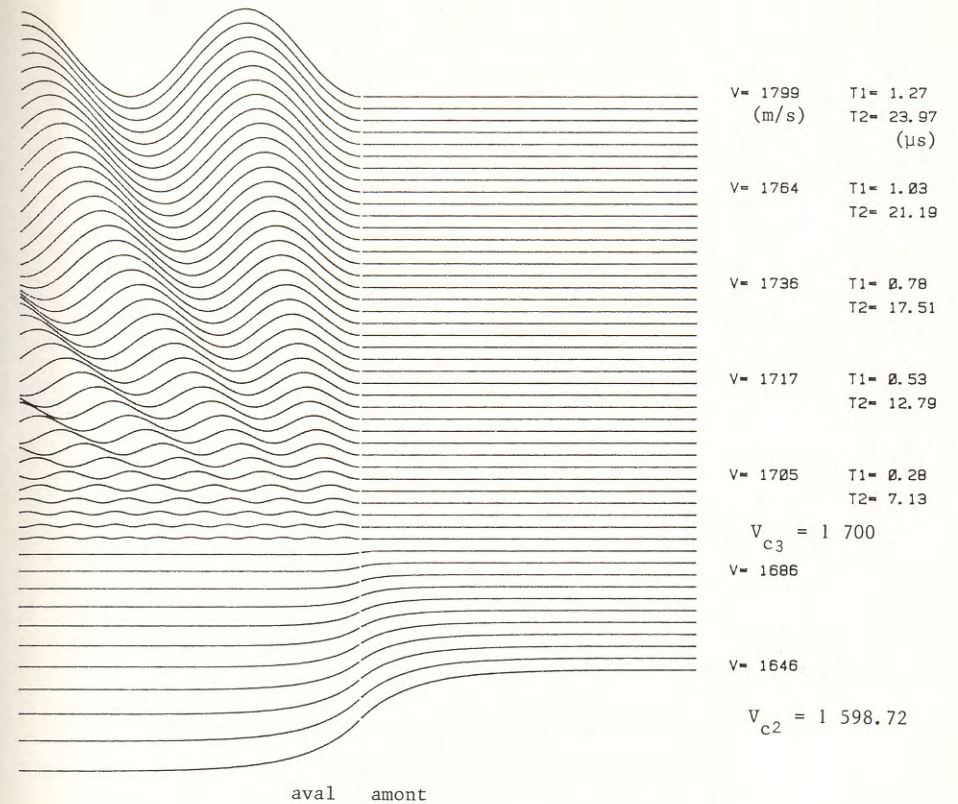


Fig. 2.c : Evolution de  $w$  en régions IV et V ( $V > V_{c2}$ )

### 2.3. Equations simplifiées

La figure 1 montre que dans l'expression de la déformée du tube vont apparaître simultanément, tout au moins pour les vitesses assez élevées ( $V > 0.5$ ) des amortissements faibles et des amortissements beaucoup plus élevés, des fréquences faibles et des fréquences beaucoup plus élevées. Les figures 1 et 2 nous renseignent sur l'importance comparée de ces manifestations, et en particulier on peut voir que dans les régions III, IV, et V l'effet des vibrations aux plus hautes fréquences est très faible.

Ces vibrations à hautes fréquences proviennent surtout de la prise en compte du moment de flexion et de l'inertie de rotation, nous allons donc chercher à apprécier l'influence de ces paramètres en mettant en oeuvre une théorie simplifiée qui considère le tube comme une membrane sans rigidité de flexion. Nous avons déjà effectué des travaux utilisant cette simplification [6]

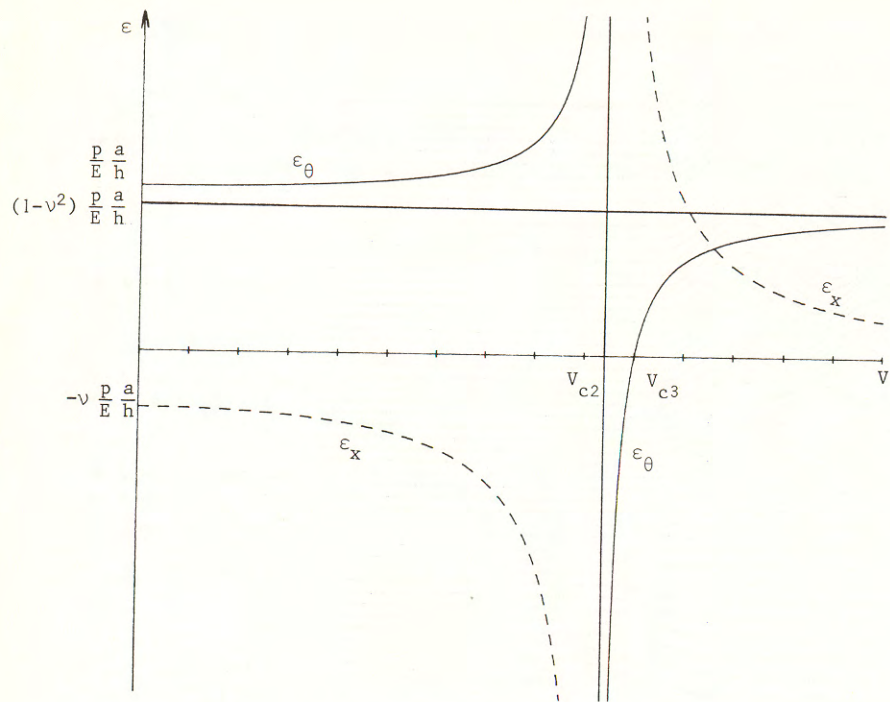


Fig. 3 : Evolutions des déformations circonférencielles ( $\epsilon_\theta$ ) et longitudinales ( $\epsilon_x$ ) en fonction de  $V$ .  
( $h = 2,21 \text{ mm}$  ,  $\alpha = 9,08 \text{ mm}$  ,  $\nu = 0,34$ )

Dans ce cas les variables se réduisent aux seuls déplacements radiaux  $W(X,T)$  et longitudinaux  $U(X,T)$  liés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \nu \alpha \frac{\partial W}{\partial X} - \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} = 0 \\ \frac{g^2}{1 - \nu^2} W + \frac{\nu g^2}{\alpha (1 - \nu^2)} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} = P(X,T) \end{cases}$$

Comme précédemment on considère le cas quasi-stationnaire. On est alors conduit au système d'équations différentielles linéaires :

$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dX^2} (1 - \nu^2) + \nu \alpha \frac{dW}{dX} = 0 \\ \frac{\nu^2}{\delta^2} \frac{d^2 W}{dX^2} + \frac{\nu g^2}{\alpha (1 - \nu^2)} \frac{dU}{dX} + \frac{g^2}{1 - \nu^2} W = P(X) \end{cases}$$

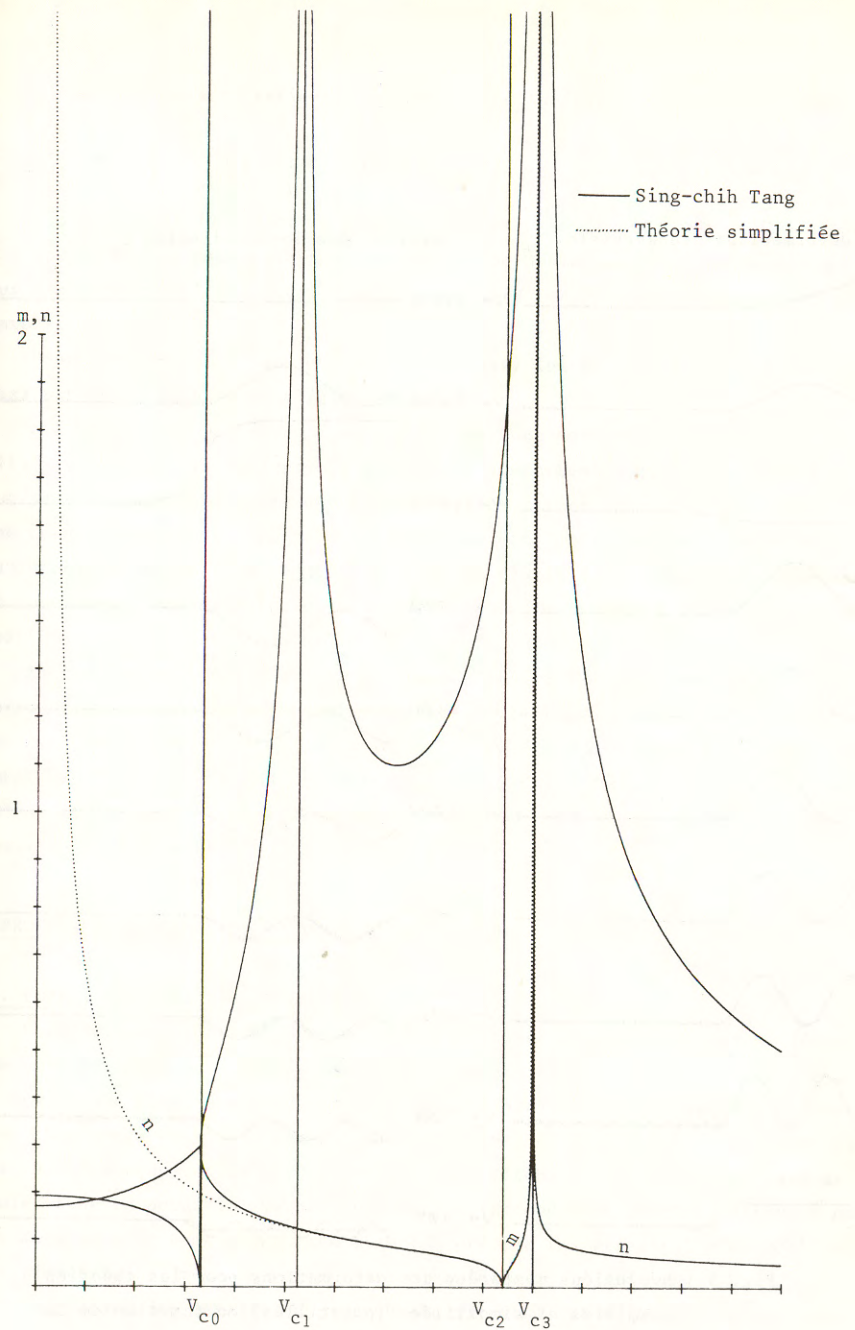


Fig. 4 : Spectres comparés des vitesses ( $\nu = 0,34$  ,  $h/a = 0,24$ )  
( $n$  : nombre d'onde ;  $m$  : amortissement)

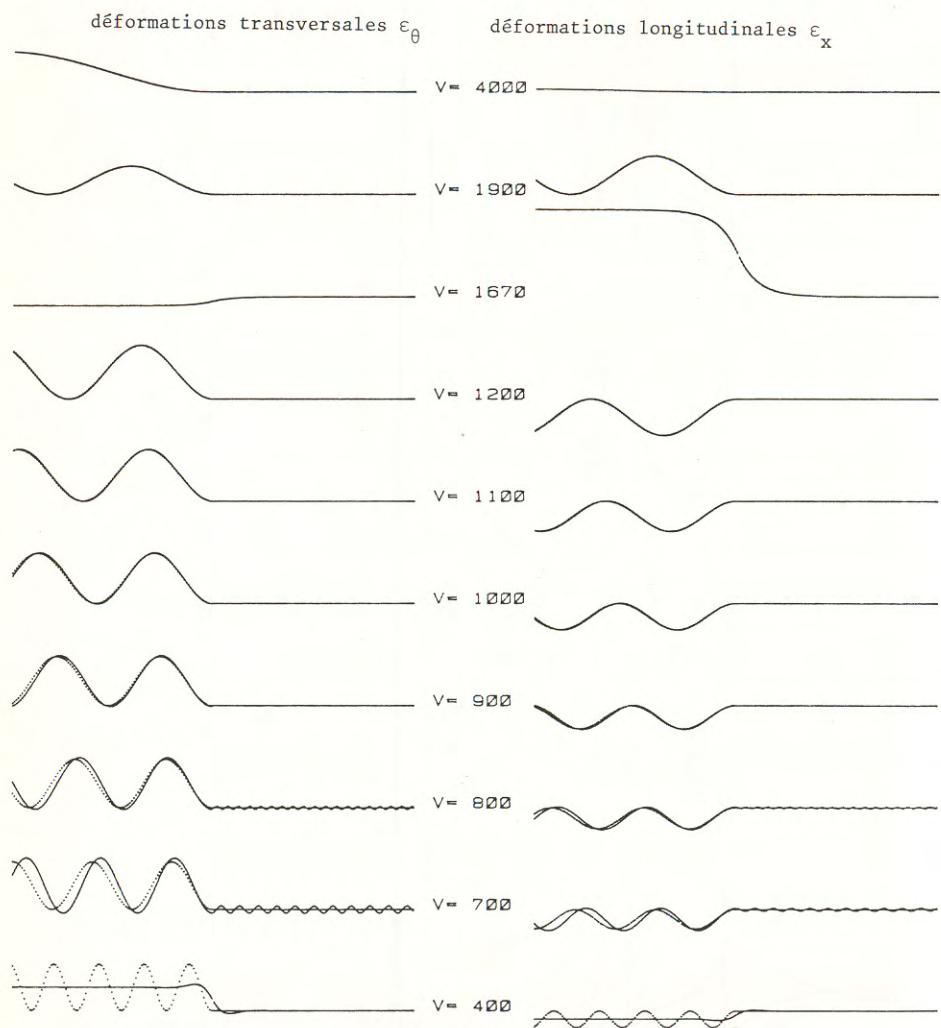


Fig. 5 : Evolutions comparées des déformations pour les théories complètes et simplifiées (pointillés) en fonction de la vitesse V (m/s)

L'équation caractéristique associée est cette fois de degré 2 uniquement :

$$-V^2 N^2 + \frac{g^2 \delta^2}{1 - V^2} \left[ 1 + \frac{V^2}{V^2 - 1} \right] = 0$$

Les solutions en N sont de la forme  $N=n$  ou  $im$  et il est possible d'effectuer la comparaison des valeurs obtenues avec celles de la théorie complète (fig. 4). Pour les vitesses d'onde suffisamment grandes ( $V > 0.5$ ) la concordance est très bonne.

Pour compléter l'étude sont examinées aussi les déformations du tube prédites par cette théorie simplifiée (fig. 5).

Les études comparées du comportement du tube montrent que la théorie simplifiée est tout à fait adaptée à décrire le comportement du tube pourvu que l'on se situe dans une gamme de vitesse limitée inférieurement à une valeur voisine de 0,6. Par contre, on peut affirmer que dans cette région le gain aux niveaux de la simplicité des équations et de la rapidité de calcul par conséquent est absolument considérable, et c'est bien là un des intérêts principaux de la démarche.

En conclusion à cette étude théorique simplifiée de la dynamique des tubes nous soulignons qu'elle permet d'appréhender avec plus de facilité le comportement réel des tubes. En effet nous avons commencé à l'appliquer pour prévoir les comportements non stationnaires (par exemple pour des vitesses d'onde non constantes) et également pour rechercher le comportement rhéologique du matériau constituant le tube aux hautes vitesses de déformation.

### 3. PROCESSUS EXPERIMENTAL ET ANALYSE RHEOLOGIQUE

#### 3.1. Présentation de l'expérience

L'expérimentation a été conduite sur des tubes minces rectilignes, de section circulaire en polyvinyle chloré (PVC commercial).

Les tubes sont parcourus par des ondes de pression créées par des détonations du mélange gazeux strict propane - oxygène, éventuellement dilué avec de l'azote. L'amorçage et la stabilisation de la détonation sont obtenus dans un premier tube en acier inoxydable puis par un raccordement la propagation se poursuit dans le tube test en PVC. La figure 6 précise les principales caractéristiques géométriques, mécaniques et thermodynamiques de l'expérience.

La plupart des détails du procédé expérimental ont déjà été exposés dans des publications antérieures

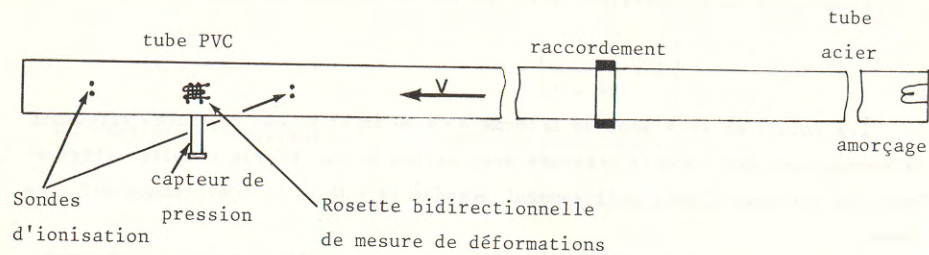


Fig. 6 Caractérisation schématique du processus expérimental

Caractéristiques géométriques et mécaniques :

(Longueur du tube PVC :  $l = 6$  m ; épaisseur :  $e = 2,2$  mm ;  
rayon moyen :  $a = 9,08$  mm ; masse volumique :  $\rho = 1\,414$  Kg/m<sup>3</sup>)

Caractéristiques thermodynamiques de la détonation (TIR 140)

(Mélange  $C_3H_8 + 5O_2 + 3N_2$ ,  $P_f = 1$  atm,  $T_f = 20^\circ C$ )

(Vitesse de l'onde  $V = 2\,176$  m/s)

Les principaux résultats expérimentaux sont les suivants :

- Vitesse de l'onde de détonation (mesurée à l'aide de sondes d'ionisation)
- Oscillogrammes des déformations longitudinales et transversales - Fig. 7 - (mesurées à l'aide de jauges d'extensométrie)
- Enregistrement des pressions s'exerçant sur la face interne du tube - Fig. 8 - (capteur de pression Kistler et acquisition de données numériques).

### 3.2. Coïncidence de la gamme expérimentale et de la zone de validité de la théorie simplifiée

Les vitesses atteintes dans les expériences sont voisines de 2 400 m/s. La vitesse de plaque  $V_{c3}$  pour notre matériau est de l'ordre de 1 700 m/s. Ces valeurs correspondent à une vitesse adimensionnelle de l'ordre de 1,4. Les figures 4 et 5 montrent dans cette zone une très bonne appréhension du problème à l'aide de la théorie simplifiée qui sera choisie à cause de sa grande facilité de mise en oeuvre pour expliquer le comportement du tube réel.

### 3.3. Justification du comportement boltzmannien

Le choix d'un modèle rhéologique passe par une critique fondamentale : le comportement est-il linéaire ou non ?

Le comportement linéaire apparaît comme une grande simplification par rapport à toutes les hypothèses pouvant être incluses dans la non-linéarité comme en témoigne la multiplicité des modèles (patins, butées, limiteurs de vitesse,

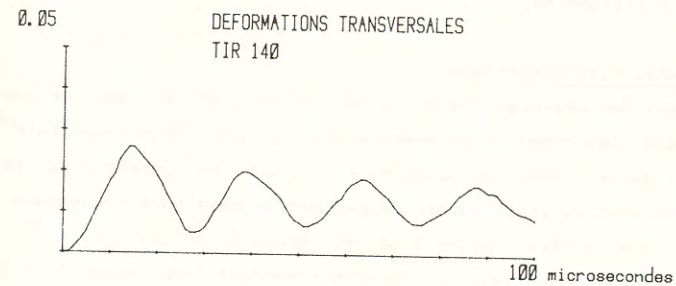
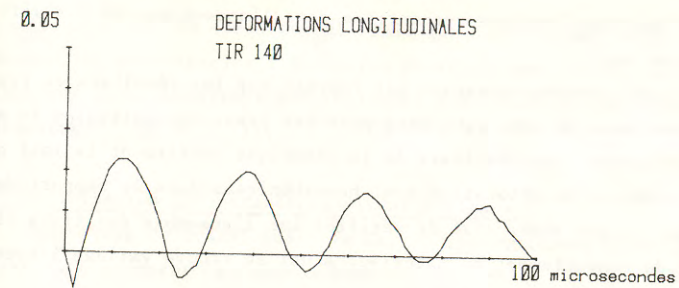


Fig. 7 : Enregistrement des déformations à la périphérie du tube

(Rayon moyen : 9,08 mm ; épaisseur : 2,2 mm ;  
vitesse de l'onde 2 176 m/s)

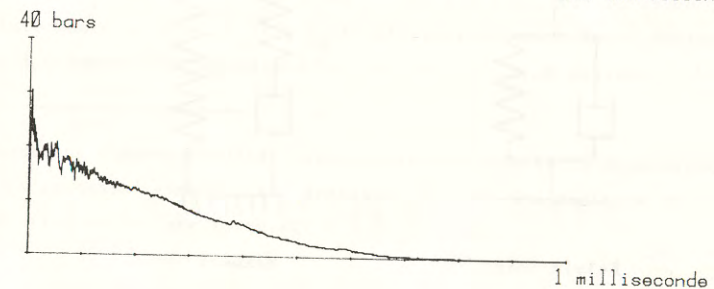
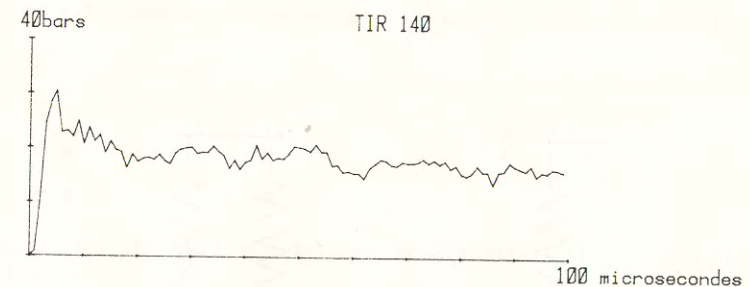


Fig. 8 : Enregistrement de pression (vitesse de l'onde 2 176 m/s)



etc ...) et les difficultés d'analyse rencontrées dans l'assemblage de ces différents modèles entre eux.

La réponse à cette première question est fournie par les résultats de trois expériences réalisées avec le même tube mais pour des pressions initiales du mélange détonant différentes. Les résultats de la détonique confirment le fait que les pressions des produits de détonation sont homothétiques dans le rapport des pressions initiales. Il est alors aisé de vérifier sur l'ensemble des trois tirs la bonne linéarité du comportement du matériau. Ainsi se trouve validée l'hypothèse du comportement boltzmannien.

### 3.4. Choix d'un modèle visco-élastique

L'unité de temps des mesures effectuées est faible (100  $\mu$ s). Nous ne pouvons prétendre étudier les temps de relaxation que dans une plage compatible avec la durée de la mesure. Dans une première étape, nous ne cherchons pas la précision en introduisant un grand nombre de paramètres mais nous essayerons d'ajuster au mieux des courbes simples à un seul temps de relaxation.

Il est deux facteurs essentiels qui doivent cependant être respectés : le comportement solide du matériau et l'élasticité instantanée. Ceci oriente vers des modèles simples de Kelvin Voigt ou de Maxwell généralisés qui seront représentés sous les formes symboliques équivalentes de la figure 9. De tels modèles ont le mérite de la simplicité pour illustrer le comportement unidirectionnel. Dans notre cas de tube mince le matériau doit être essentiellement considéré comme une plaque et les deux directions longitudinale et transversale sont couplées.

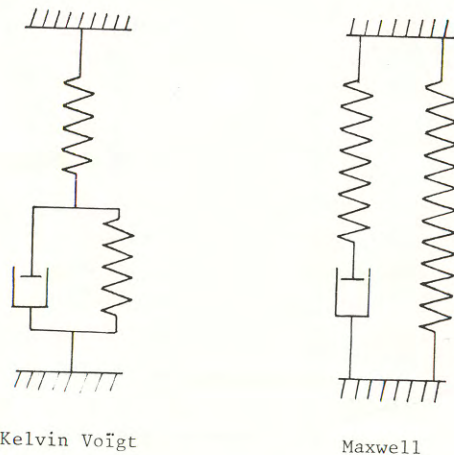


Fig. 9 : Modèles rhéologiques

Dans le cas du comportement élastique deux paramètres tels que E et  $\nu$  sont nécessaires pour décrire l'évolution du tube. Dans le cas du comportement visco-élastique nous choisirons naturellement les fonctions de relaxation de ces deux paramètres  $r_E(t)$  et  $r_\nu(t)$ .

### 3.5 Optimisation des paramètres viscoélastiques

En termes de transformées de Carson les équations classiques de la visco-élasticité prennent la forme suivante :

$$E \epsilon_{ij} = (1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu s \delta_{ij}$$

Les relations de E et de  $\nu$  étant notées  $r_E(t)$  et  $r_\nu(t)$ , elles seront recherchées sous la forme :

$$r_E(t) = E_0 + E_1 e^{-\alpha t} \quad r_\nu(t) = \nu_0 + \nu_1 e^{-\beta t}$$

Elles correspondent aux transformées :

$$E(p) = E_0 + \frac{E_1 p}{p + \alpha} \quad \nu(p) = \nu_0 + \frac{\nu_1 p}{p + \beta}$$

Les équations aux déformées du tube deviennent en termes de transformées : (\*)

$$\begin{cases} E \epsilon_\theta + \nu \left( -\rho v^2 \epsilon_x - \frac{p}{2} \right) = \frac{p a}{h} - \rho v^2 a^2 \epsilon_\theta'' \\ E \epsilon_x + \nu \left( \frac{p a}{h} - \rho v^2 a^2 \epsilon_\theta'' - \frac{p}{2} \right) = -\rho v^2 \epsilon_x'' \end{cases}$$

Un nouveau système est obtenu en remplaçant chaque produit de transformées par un produit de convolution des fonctions ; il prend la forme :

$$\begin{cases} r_E(t) * F_1(t) + r_\nu(t) * F_2(t) = F_3(t) \\ r_E(t) * F_4(t) + r_\nu(t) * F_5(t) = F_6(t) \end{cases}$$

$r_E(t)$  et  $r_\nu(t)$  sont cherchées sous les formes arbitraires décrites précédemment et les  $F_i(t)$  sont des fonctions tirées des résultats expérimentaux et faisant intervenir  $\nu$ ,  $p(t)$ ,  $\epsilon_x(t)$ ,  $\epsilon_\theta(t)$  et éventuellement leurs dérivées successives.

L'ajustement des paramètres  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $\nu_0$ ,  $\nu_1$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  devient l'objet du problème.

(\*) Equations dimensionnelles correspondant aux équations adimensionnelles simplifiées et tenant compte d'une épaisseur du tube non négligeable : entre autre introduction du facteur correctif  $-\frac{p}{2}$

Si nous désignons par  $G(t) = r_E * F_1 + r_V * F_2 - F_3$

$$H(t) = r_E * F_4 + r_V * F_5 - F_6$$

nous sommes conduits à minimiser entre deux dates  $t_1$  et  $t_2$  de l'intervalle du temps de la mesure expérimentale l'intégrale

$$I = \int_{t_1}^{t_2} [G^2(t) + H^2(t)] dt \quad [t_1, t_2] \subseteq [0, t]$$

Pour  $t_1$  et  $t_2$  choisis,  $I$  est une fonction de six paramètres  $E_0, E_1, \alpha, v_0, v_1, \beta$ . La minimisation de  $I$  a été tentée dans un premier temps par la méthode de Davidon - Fletcher - Powell [7]. Le calcul des dérivées partielles ne pouvant être fait littéralement cette méthode s'est avérée lourde et non convergente de façon significative. Il lui a été préféré une méthode mixte ; en effet une partition des paramètres permet d'optimiser linéairement  $E_0, E_1, v_0$  et  $v_1$  pour un choix de  $\alpha$  et  $\beta$ . Ensuite une méthode de descente classique et simple permet d'atteindre un minimum absolu en agissant seulement sur  $\alpha$  et  $\beta$ .

Ainsi il est possible de trouver les fonctions de relaxation de  $E$  et de  $v$  et c'est sous cette forme que les résultats sont présentés figure 10.

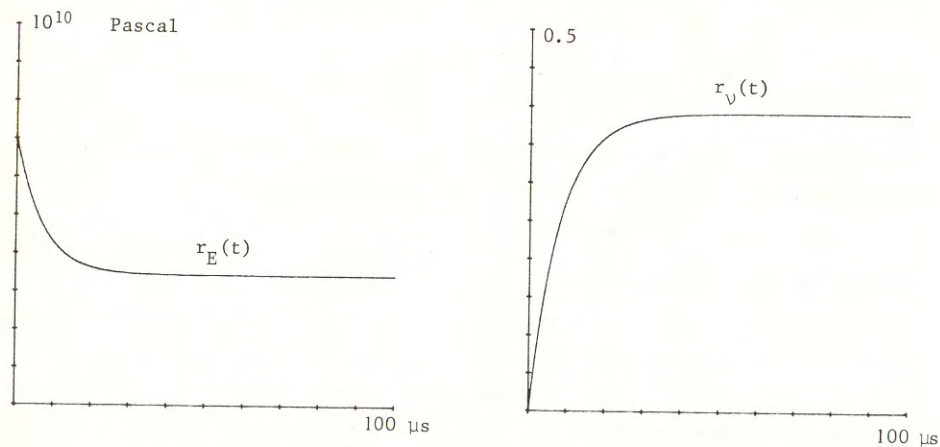


Fig. 10 : Fonctions de relaxation du matériau pour les deux caractéristiques E et v

#### 4. CONCLUSION

Rappelons tout d'abord que le but de ce travail n'est pas d'obtenir avec une grande exactitude les paramètres décrivant le comportement rhéologique du PVC pour un domaine fixé des déformations et des vitesses de déformation. Pour ce faire il conviendrait d'étendre notre gamme d'expérience et d'apprécier avec exactitude toutes les fonctions de transfert des chaînes de mesures et notamment de la mesure de pression.

Il est simplement montré que cette expérimentation est une méthode nouvelle pour appréhender la rhéologie des matériaux aux grandes vitesses de sollicitation et avec le mérite qu'elle nous permet de réaliser une étude bidirectionnelle ; en outre elle ne crée pas d'échauffement dans le matériau.

Dans un premier temps une petite plage expérimentale seulement a été examinée et il faut penser que malgré des grandes vitesses de déformation, tant que les déformations restent voisines de  $10^{-2}$ , le comportement linéaire reste un bon compromis entre la réalité et la simplicité de mise en oeuvre des calculs. Il est à noter que cette plage d'étude est tout à fait adaptée à l'étude des chocs "faibles" en particulier.

Des conditions expérimentales différentes pouvant éventuellement aller jusqu'à la ruine des tubes permettraient d'étendre considérablement le domaine d'étude et de sortir du mode linéaire envisagé dans cet exposé.

LISTE DES SYMBOLES UTILISES

- a : rayon moyen du tube
- $A_i$  : amplitude adimensionnelle (amplitudes / h)
- E : module d'Young du matériau
- $E_0, E_1, \nu, \nu_0, \alpha, \beta$  : paramètres visco élastiques du matériau
- G : module de cisaillement du tube
- g : paramètre adimensionnel  $g = \frac{E}{2kG} \left[ \frac{h}{a} \right]^2$
- k : facteur de correction du cisaillement
- m : partie imaginaire du nombre d'onde adimensionnel caractérisant l'amortissement
- N : nombre d'onde adimensionnel
- n : partie réelle du nombre d'onde adimensionnel caractérisant la fréquence
- P : pression adimensionnelle, p/12 kG
- p : pression sur la face interne du tube
- $r_E$  : fonction de relaxation de E
- $r_\nu$  : fonction de relaxation de  $\nu$
- t : temps
- U : déplacement adimensionnel d'un point de la surface moyenne du cylindre dans le sens de l'axe des x, U/h
- V : vitesse adimensionnelle du front de pression,  $\nu/\nu_d$
- $V_{c0}$  : première vitesse critique adimensionnelle
- $V_{c1}$  : vitesse corrigée adimensionnelle de propagation des ondes de cisaillement,  $\delta = \nu_s/\nu_d$
- $V_{c2}$  : vitesse adimensionnelle de propagation dans une barre,  $\sqrt{1 - \nu^2}$
- $V_{c3}$  : vitesse adimensionnelle de propagation dans une plaque, l
- v : vitesse du front d'onde
- $\nu_d$  : vitesse de propagation dans une plaque  $\sqrt{E/\rho} (1 - \nu^2)$
- $\nu_s$  : vitesse corrigée de propagation des ondes de cisaillement  $\sqrt{kG/\rho}$
- W : déplacement radial total adimensionnel, w/h
- X : coordonnée adimensionnelle suivant l'axe du tube,  $\sqrt{12} x/h$
- x : coordonnée suivant l'axe du tube
- $\delta$  : paramètre adimensionnel,  $\delta^2 = \frac{(1 - \nu^2) k G}{E}$
- $(\delta_{ij})$  : tenseur de Krönecker
- $(\epsilon_{ij})$  : tenseur des déformations
- $\epsilon_x$  : déformation longitudinale ou axiale,  $\frac{\partial u}{\partial x}$
- $\epsilon_\theta$  : déformation transversale ou circonférencielle  $\frac{w}{a}$
- $\nu$  : coefficient de Poisson
- $\rho$  : masse volumique du matériau
- $(\sigma_{ij})$  : tenseur des contraintes

REFERENCES

- 1 - Vinh T. - Vibrations des corps visco-élastiques - Détermination des modules complexes. La Rhéologie. Coord. B. Persoz - Masson et Cie (1969) p. 89.
- 2 - Essais dynamiques à grande vitesse sur les matériaux et les structures. Colloque I.S.M.C.M. St Ouen (Juillet 1982).
- 3 - Niordson F. - Transmission os shock waves in thin walled cylindrical tubes. Acta Polytechnica 2, 3 - 23 (1952).
- 4 - Tang S.c. - Dynamic response of a tube under moving pressure. J. Engineering mechanics division 5, 97-122 (1965).
- 5 - Dawson T. H. - Weak pressure wave in a gas filled élastique tube. J. Sound and Vibration 24, 241-246 (1972).
- 6 - Brossard J. and Renard J. - Mechanical effects of gaseous detonations on a flexible confinement. Gasdynamics of detonations and explosions. Progress in Astronautics and Aeronautics. 75, 108-121 (1981).
- 7 - Rao. SS. - Optimization. Theory and application (Indian Institute of Technology, Kampur) Wiley Eastern Limited. (1978).

## CONCENTRATION TRANSITOIRE D'ONDES VISCOELASTIQUES LINEAIRES (\*)

### SPIKING OF LINEAR VISCOELASTIC WAVES

R. H. BLANC (\*\*)

#### RESUME

La forme d'une impulsion viscoélastique unidimensionnelle évolue comme conséquence du fait que la vitesse de phase et le coefficient d'atténuation sont deux fonctions de la fréquence. Nous établissons dans le cadre d'une théorie linéaire qu'il existe des impulsions continues, fonctions du temps qui engendrent à une distance donnée des impulsions de déplacement, de contrainte, de déformation ou de l'une quelconque de leurs dérivées successives par rapport au temps, se rapprochant d'aussi près que l'on veut d'une impulsion de la forme  $\delta$  de Dirac. A titre d'illustration, nous approchons l'impulsion unité au moyen de trois suites de fonctions modélisant l'onde, convergeant vers  $\delta$  et nous explicitons l'expression de l'impulsion à l'origine qui engendre ces suites dans chacun des trois cas. De telles ondes pourraient prendre naissance et se répéter dans les vibrations des structures.

#### ABSTRACT

The change in shape of a one-dimensional viscoelastic pulse is due to the phase velocity and the attenuation coefficient both being frequency-dependent. It is established here within the framework of a linear theory that there exist time-dependent continuous pulses which at a given distance generate pulses of displacement, stress, strain, or any of their successive derivatives with respect to time, which can be made to approach a Dirac  $\delta$  function as closely as may be required. As an illustration, we approach this Dirac  $\delta$  function by means of three sequences of functions representing the wave which converge to  $\delta$ , and we give the explicit expression for the pulse at the origin which generates each of these three sequences. Waves of this type are liable to arise and occur repeatedly in vibrating structures.

(\*) Communication au 17<sup>ème</sup> Colloque Annuel du Groupe Français de Rhéologie, Paris, 1-2 décembre 1982

(\*\*) Chargé de recherche au C.N.R.S., Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique  
31, chemin Joseph Aiguier - B.P. 71 - 13277 MARSEILLE CEDEX 9

## 1. INTRODUCTION

La propagation d'une onde mécanique dépend des propriétés du milieu ainsi que de sa géométrie. Afin d'éliminer cette dernière, considérons les ondes à une dimension. A la différence d'une onde élastique, la forme d'une impulsion viscoélastique évolue comme conséquence du fait que la vitesse de phase  $c(\omega)$  et le coefficient d'amortissement  $\alpha(\omega)$  sont deux fonctions de la fréquence [1].

Nous nous posons le problème suivant. Existe-t-il une onde continue fonction du temps qui engendre une impulsion de la forme unité  $\delta$  à la distance  $x$  et à l'instant  $t_0$ , et, dans l'affirmative, quelle est sa forme ? La théorie s'applique au déplacement, à la contrainte, à la déformation ou à l'une quelconque de leurs dérivées successives par rapport au temps. Comme cas particulier on peut donc raisonner sur l'accélération pour laquelle un Dirac correspond à un échelon unité de vitesse matérielle, c'est-à-dire une onde qui revête une forme de choc. Mais surtout plus généralement, nous étudions au cours de la propagation d'une onde, la formation en un point et un instant donnés de discontinuités d'ordres non seulement égaux mais encore *inférieurs* à ceux des ondes de discontinuités qui se propagent.

## 2. L'ONDE TRANSITOIRE VISCOELASTIQUE

Soit  $f(x,t)$  une impulsion mécanique unidimensionnelle se propageant dans le sens des  $x$  croissants et soit :

$$\bar{f}(x,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

sa transformée de Fourier. Supposons donnée l'impulsion à la distance  $x_1$ , l'impulsion à la distance  $x_2 > x_1$  peut être représentée par :

$$f(x_2,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x_1,\omega) e^{-\alpha(\omega)(x_2-x_1) + i\omega [t - \frac{x_2-x_1}{c(\omega)}]} d\omega \quad (2)$$

dans laquelle  $f(x,t)$  représente soit le déplacement  $u(x,t)$ , la contrainte  $\sigma(x,t)$  ou la déformation  $\varepsilon(x,t)$  ; on l'étend [2] à la vitesse matérielle  $v(x,t) = \partial u / \partial t$ .

On montrerait aisément que cette relation s'applique plus généralement aux dérivées successives par rapport au temps des grandeurs précédentes :

$$f(x,t) \in \left\{ u(x,t), \sigma(x,t), \varepsilon(x,t), \frac{\partial^i u}{\partial t^i}, \frac{\partial^j \sigma}{\partial t^j}, \frac{\partial^k \varepsilon}{\partial t^k} \right\} \quad (3)$$

Dans le cas d'une tige semi-infinie, il est d'usage de prendre  $x_1 = 0$  et de poser  $x_2 - x_1 = x$  ; la relation (2) devient [2] :

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(0,\omega) e^{-\alpha(\omega)x + i\omega [t - \frac{x}{c(\omega)}]} d\omega \quad (4)$$

En vue d'exprimer l'impulsion à l'origine  $f(0,t)$  en fonction de l'impulsion à la distance donnée  $x$ , inversons la relation (4), il vient :

$$\bar{f}(x,\omega) = \bar{f}(0,\omega) e^{-\alpha(\omega)x - i\omega \frac{x}{c(\omega)}}$$

On en tire immédiatement  $\bar{f}(0,\omega)$ . On obtient alors par une nouvelle inversion :

$$f(0,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x,\omega) e^{\alpha(\omega)x + i\omega [t + \frac{x}{c(\omega)}]} d\omega \quad (5)$$

Dans le cas, qui seul nous intéresse, où l'impulsion  $f(x,t)$  est réelle,  $c(\omega)$  et  $\alpha(\omega)$  étant des fonctions paires, la relation (5) prend encore la forme :

$$f(0,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(x,\omega) \cos \omega (t + \frac{x}{c(\omega)}) - B(x,\omega) \sin \omega (t + \frac{x}{c(\omega)})] e^{\alpha(\omega)x} d\omega \quad (6)$$

où  $A(x,\omega)$  et  $B(x,\omega)$  sont définis par :

$$\bar{f}(x,\omega) = A(x,\omega) + i B(x,\omega)$$

On veut que l'impulsion à la distance  $x$  et à l'instant  $t_0$  soit de la forme  $\delta$ . Soit  $S_0$  son aire, l'impulsion prend la forme  $S_0 \delta(t-t_0)$ . Sa transformée de Fourier (1) par rapport au temps est

$$\bar{f}(x,\omega) = S_0 e^{-i\omega t_0}$$

Si l'on porte cette expression dans (5) on obtient

$$f(0,t) = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha(\omega)x + i\omega [t-t_0 + \frac{x}{c(\omega)}]} d\omega \quad (7)$$

La fonction  $\alpha(\omega)$  étant à valeurs positives et croissante à partir d'une certaine valeur de  $\omega$  [2], l'intégrale précédente est divergente.

Pour surmonter cette difficulté, nous allons remplacer  $f(x,t)/S_0$  non plus directement par une impulsion unité mais par une suite de fonctions régulières  $f_T(x,t)$  d'aire constante égale à 1, convergeant vers  $\delta$  [3], on intègre ensuite, puis on fait tendre  $f_T$  vers sa limite  $\delta$ .

## 3. SUITES D'IMPULSIONS CONVERGEANT VERS $\delta$

Nous allons considérer trois types de fonction  $f_T$  afin de pouvoir, sur ces exemples, apprécier l'influence de la modélisation sur la solution du problème. Parmi les plus simples, nous avons retenu les impulsions rectangulaires, les courbes de Gauss et les fonctions de la forme

$\frac{\sin \pi t / \tau}{\pi t / \tau}$ . Leurs spectres de Fourier sont les suivants :

### 3.1. Impulsion rectangulaire

Considérons l'impulsion rectangulaire d'aire  $S_0$  et de durée  $\tau$  centrée sur l'instant  $t_0$  :

$$f(x,t) = \begin{cases} f_M & \text{pour } |t - t_0| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{pour } |t - t_0| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

Son amplitude est  $f_M = S_0/\tau$ .

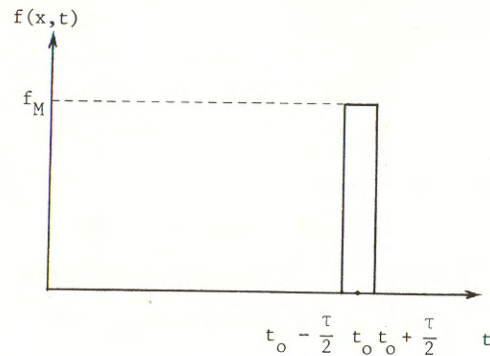


Fig. 1.

Sa transformée de Fourier est

$$\begin{cases} A(x,\omega) = \frac{2S_0}{\tau\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} \cos \omega t_0 \\ B(x,\omega) = -\frac{2S_0}{\tau\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} \sin \omega t_0 \end{cases} \quad (8)$$

3.2. Courbe de Gauss  $f(x,t) = \frac{S_0}{\tau} e^{-\pi(\frac{t-t_0}{\tau})^2}$

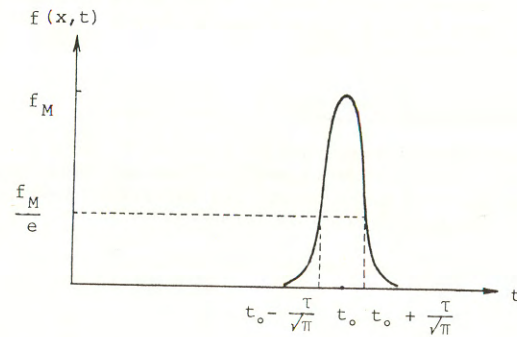


Fig. 2.

L'aire limitée par cette courbe est égale à  $S_0$ . Son maximum  $f_M$ , atteint à l'instant  $t_0$ , vaut :

$$f_M = \frac{S_0}{\tau}$$

Sa transformée de Fourier est

$$\begin{aligned} A(x,\omega) &= S_0 e^{-\frac{\tau^2\omega^2}{4\pi}} \cos \omega t_0 \\ B(x,\omega) &= -S_0 e^{-\frac{\tau^2\omega^2}{4\pi}} \sin \omega t_0 \end{aligned} \quad (9)$$

3.3. Fonction en  $\frac{\sin\pi t/\tau}{\pi t/\tau}$

Soit

$$f(x,t) = \frac{S_0}{\tau} \frac{\sin\pi(t-t_0)/\tau}{\pi(t-t_0)/\tau} \quad (10)$$

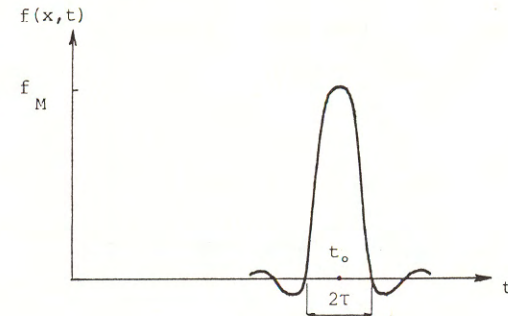


Fig. 3.

Son aire est  $S_0$ . Son maximum, atteint à l'instant  $t_0$ , vaut  $f_M = \frac{S_0}{\tau}$

Sa transformée de Fourier est

$$\begin{aligned} A(x,\omega) &= S_0 \cos \omega t_0 \\ B(x,\omega) &= -S_0 \sin \omega t_0 \end{aligned} \quad \text{pour } |\omega| < \frac{\pi}{\tau} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} A(x,\omega) &= 0 \\ B(x,\omega) &= 0 \end{aligned} \quad \text{pour } |\omega| > \frac{\pi}{\tau}$$

#### 4. LOI DE COMPORTEMENT

On voit d'après l'expression (6) que l'impulsion à l'origine, qu'il s'agit de déterminer, dépend non seulement de l'impulsion que l'on veut obtenir à la distance  $x$  mais encore des caractéristiques de la propagation  $c(\omega)$  et  $\alpha(\omega)$ . Pour pouvoir intégrer (6), nous allons devoir expliciter une forme pour ces deux fonctions pour lesquelles on a [2] :

$$c(\omega) \rightarrow c_0 = C \frac{t_0}{\omega} \quad \omega \rightarrow \infty \quad (12)$$

$$\alpha(\omega) \rightarrow \alpha_0 = C \frac{t_0}{\omega} \quad (13)$$

En fait, pour la généralité des corps viscoélastiques,

$$\alpha(\omega) = \alpha_1 \omega \quad \text{pour } \omega > 0 \quad \text{avec } \alpha_1 = C \frac{t_0}{\omega_0} \quad (14)$$

dans un intervalle de fréquence aussi étendu que l'expérience permet d'atteindre, voir par exemple [4]. Toutefois, pour respecter la relation (13) au delà, nous prendrons finalement pour  $\alpha(\omega)$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha(\omega) = \alpha_1 \omega & 0 \leq \omega \leq \omega_0 \\ \alpha(\omega) = \alpha_0 & \omega \geq \omega_0 \end{array} \right. \quad (15)$$

avec  $\frac{\alpha_0}{\omega_0} = \alpha_1$

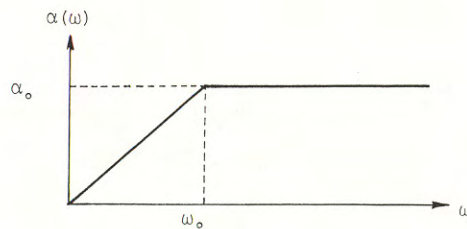


Fig. 4.

D'autre part, en général la pente de  $c(\omega)$  est faible, en particulier d'après (12) pour les fréquences relativement élevées qui constituent le spectre des impulsions brèves ou encore, ce qui revient au même pour les corps thermo-rhéologiquement simples [5], à des températures pas trop éloignées de la température de transition vitreuse. On peut alors poser en première approximation dans le spectre utile [4] de l'impulsion :

$$c(\omega) = c = C \frac{t_0}{\omega} \quad (16)$$

Remarquons que ces hypothèses conduisent pour l'angle de perte  $\phi(\omega)$  à la relation :

$$\operatorname{tg} \frac{\phi(\omega)}{2} = \frac{\alpha(\omega) c(\omega)}{\omega} = \alpha_1 c$$

c'est-à-dire à  $\phi = Cte$  dans le spectre utile limité de l'impulsion. On discute ailleurs cette hypothèse [6][7]. Par contre, lorsque la dispersion de vitesse ne peut être négligée, nous proposons en deuxième approximation la représentation suivante, plus fine, pour la loi de vitesse :

$$c(\omega) = c_0 \frac{\omega}{\omega + \omega_1} \quad (17)$$

représentée à la figure 5.

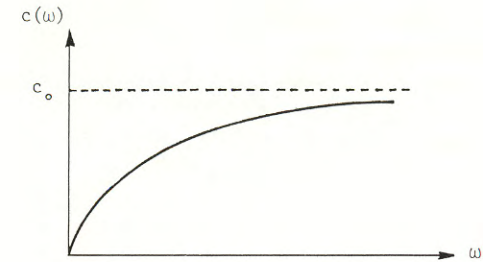


Fig. 5.

#### 5. DETERMINATION ANALYTIQUE DE L'IMPULSION INITIALE

##### 5.1. Impulsion rectangulaire à la distance $x$

On désire obtenir une impulsion rectangulaire de largeur  $\tau$  à la distance  $x$  en vue de faire ensuite  $\tau \rightarrow 0$ . Portons donc les relations (8) dans l'expression (6), on obtient :

$$f(0, t) = \frac{2S_0}{\pi\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{\alpha(\omega)x}}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} \cos \omega \left[ t - t_0 + \frac{x}{c(\omega)} \right] d\omega$$

Compte tenu de la loi de comportement (15)-(16), cette expression devient :

$$f(0, t) = \frac{2S_0}{\pi\tau} \int_0^{\omega_0} \frac{e^{\frac{\alpha_1 \omega x}{\omega_0}}}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} \cos \omega \left( t - t_0 + \frac{x}{c} \right) d\omega + \frac{2S_0 e^{\alpha_0 x}}{\pi\tau} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega} \cos \omega \left( t - t_0 + \frac{x}{c} \right) d\omega$$

Prenons  $t_0 = \frac{x}{c}$

D'autre part, l'intégrale précédente peut encore se décomposer de la façon suivante :

$$f(o, t) = \frac{2S_o}{\pi\tau} \int_0^{\omega_o} \frac{e^{\frac{\alpha_o}{\omega_o} \omega x}}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} \cos \omega t \, d\omega + \frac{2S_o e^{\alpha_o x}}{\pi\tau} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega} \cos \omega t \, d\omega - \frac{2S_o e^{\alpha_o x}}{\pi\tau} \int_0^{\omega_o} \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega} \cos \omega t \, d\omega \quad (18)$$

Le second membre est la somme de trois intégrales, de types  $I_1, I_2, I_3$  que nous allons calculer.

### 5.1.1. - Calcul de la 1ère et de la 3ème intégrales

La 1ère intégrale est du type

$$I_1 = \int_0^{\omega_o} \frac{e^{a\omega}}{\omega} \sin b\omega \, d\omega$$

posons  $u = b\omega$ , il vient

$$I_1 = \int_0^{b\omega_o} e^{\frac{a}{b}u} \frac{\sin u}{u} \, du$$

Intégrons par parties, on obtient

$$I_1 = \left| e^{\frac{a}{b}u} \operatorname{Si}(u) \right|_0^{b\omega_o} - \frac{a}{b} \int_0^{b\omega_o} e^{\frac{a}{b}u} \operatorname{Si}(u) \, du$$

ou encore, en remplaçant  $\operatorname{Si}(u)$ , sous le signe  $\int$ , par son développement en série entière

$$I_1 = e^{a\omega_o} \operatorname{Si}(b\omega_o) - \frac{a}{b} \int_0^{b\omega_o} e^{\frac{a}{b}u} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p u^{2p+1}}{(2p+1)(2p+1)!} \, du$$

En intégrant cette série convergente, il vient

$$I_1 = e^{a\omega_o} \operatorname{Si}(b\omega_o) - \frac{a}{b} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)(2p+1)!} \int_0^{b\omega_o} u^{2p+1} e^{\frac{a}{b}u} \, du = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)(2p+1)!} \left\{ e^{a\omega_o (b\omega_o)^{2p+1}} - \frac{a}{b} \left[ e^{\frac{a}{b}u} u \sum_{q=0}^{2p+1} (-1)^q \frac{(2p+1; -1; q)}{\left(\frac{a}{b}\right)^q} u^{2p+1-q} \right] \right\}^{b\omega_o}$$

avec  $(m; d; v) = m(m+d)(m+2d)\dots(m+(v-1)d)$  [8]

$$I_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)(2p+1)!} \left[ e^{a\omega_o (b\omega_o)^{2p+1}} - e^{a\omega_o} \sum_{q=0}^{2p+1} (-1)^q \frac{(2p+1; -1; q)}{\left(\frac{a}{b}\right)^q} (b\omega_o)^{2p+1-q} - (2p+1)! \left(\frac{b}{a}\right)^{2p+1} \right]$$

c'est-à-dire enfin

$$I_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p b^{2p+1}}{(2p-1)(2p+1)!} \left[ e^{a\omega_o \omega_o^{2p+1}} - e^{a\omega_o} \sum_{q=0}^{2p+1} (-1)^q \frac{(2p+1; -1; q)}{a^q} \omega_o^{2p+1-q} - \frac{(2p+1)!}{a^{2p+1}} \right] \quad (19)$$

La 3ème intégrale est de la forme

$$I_3 = \int_0^{\omega_o} \frac{\sin b\omega}{\omega} \, d\omega$$

En remplaçant le sinus par son développement en série entière

$$I_3 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \int_0^{\omega_o} \frac{(b\omega)^{2p+1}}{\omega} \, d\omega$$

Intégrons, on obtient :

$$I_3 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p b^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\omega_o^{2p+1}}{2p+1} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(b\omega_o)^{2p+1}}{(2p+1)(2p+1)!} \quad (20)$$

Pour expliciter le coefficient  $b$  dans (19) et (20) écrivons que

$$\sin \frac{\omega\tau}{2} \cos \omega t = \frac{1}{2} [\sin \omega (t + \frac{\tau}{2}) + \sin \omega (-t + \frac{\tau}{2})]$$

L'expression (18) devient

$$f(o, t) = \frac{S_o}{\pi\tau} \left[ \int_0^{\omega_o} \frac{\sin b_1 \omega}{\omega} e^{\frac{\alpha_o}{\omega_o} \omega x} \, d\omega + \int_0^{\omega_o} \frac{\sin b_2 \omega}{\omega} e^{\frac{\alpha_o}{\omega_o} \omega x} \, d\omega \right] + 2^{\text{ème}} \text{ intégrale} - \frac{S_o}{\pi\tau} e^{\alpha_o x} \left[ \int_0^{\omega_o} \frac{\sin b_1 \omega}{\omega} \, d\omega + \int_0^{\omega_o} \frac{\sin b_2 \omega}{\omega} \, d\omega \right] \quad (21)$$

où  $b_1 = t + \frac{\tau}{2}$

et  $b_2 = -t + \frac{\tau}{2}$

(21) devient en y appliquant le résultat du calcul des intégrales (19) et (20)

$$f(o, t) = \frac{S_o e^{\alpha_o x}}{\pi\tau} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(b_1^{2p+1} + b_2^{2p+1})}{(2p+1)(2p+1)!} \left[ - \frac{(2p+1) e^{-\alpha_o x}}{\left(\frac{\alpha_o x}{\omega}\right)^{2p+1}} - \sum_{q=0}^{2p+1} (-1)^q \frac{(2p+1; -1; q)}{\left(\frac{\alpha_o x}{\omega}\right)^q} \omega_o^{2p+1-q} \right] + 2^{\text{ème}} \text{ intégrale}$$



qui s'écrit encore sous forme plus condensée

$$f(0, t) = \frac{S_0 e^{\alpha_0 x}}{\pi \tau} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} \left(\frac{\omega_0}{\alpha_0 x}\right)^{2p+1} \frac{\left(\frac{\tau}{2}+t\right)^{2p+1} + \left(\frac{\tau}{2}-t\right)^{2p+1}}{2^{2p+1}} \sum_{q=2p+2}^{\infty} \frac{(-\alpha_0 x)^q}{q!}$$

+ 2ème intégrale

### 5.1.2. Calcul de la 2ème intégrale

On sait que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin v}{v} \cos bv \, dv = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |b| < 1 \\ 0 & |b| > 1 \end{cases}$$

Par le changement de variable  $\omega = \frac{2u}{\tau}$ , il vient

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} \cos 2u \frac{t}{\tau} \, du = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

Cette intégrale a donc pour valeur

$$\begin{cases} \frac{S_0 e^{\alpha_0 x}}{\tau} & \text{pour } -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{pour } t < -\frac{\tau}{2} \text{ et } t > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (22)$$

Finalement

$$f(0, t) = \frac{S_0 e^{\alpha_0 x}}{\pi \tau} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} \left(\frac{\omega_0}{\alpha_0 x}\right)^{2p+1} \frac{\left(\frac{\tau}{2}+t\right)^{2p+1} + \left(\frac{\tau}{2}-t\right)^{2p+1}}{2^{2p+1}} \sum_{q=2p+2}^{\infty} \frac{(-\alpha_0 x)^q}{q!} + \frac{S_0 e^{\alpha_0 x}}{\tau} \mathbb{1}\left\{-\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}\right\} \quad (23)$$

### 5.2. - Courbe de Gauss à la distance x

On désire maintenant obtenir une impulsion de forme gaussienne à la distance x. Portons les relations (9) dans l'expression (6), compte tenu de (16), il vient :

$$f(0, t) = \frac{S_0}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega \left(t - t_0 + \frac{x}{c}\right) e^{-\frac{\tau^2 \omega^2}{4\pi} + \alpha(\omega)x} \, d\omega$$

En tenant compte de (15) et en prenant encore  $t_0 = \frac{x}{c}$ , l'intégrale précédente peut se décomposer de la façon suivante

$$f(0, t) = \frac{S_0}{\pi} \int_0^{\omega_0} e^{-\frac{\tau^2 \omega^2}{4\pi} + \frac{\alpha_0}{\omega_0} x \omega} \cos \omega t \, d\omega + \frac{S_0 e^{\alpha_0 x}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2 \omega^2}{4\pi}} \cos \omega t \, d\omega - \frac{S_0 e^{\alpha_0 x}}{\pi} \int_0^{\omega_0} e^{-\frac{\tau^2 \omega^2}{4\pi}} \cos \omega t \, d\omega \quad (24)$$

c'est-à-dire la somme de trois intégrales que nous allons calculer.

### 5.2.1. Calcul de la 1ère intégrale

Elle est du type

$$J_1 = \int_0^{\omega_0} e^{-a\omega^2 + b\omega} \cos \omega t \, d\omega$$

Opérons le changement de variable

$$y = \sqrt{a} \left(\omega - \frac{b}{2a}\right)$$

il vient

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\frac{b}{2\sqrt{a}}}^{\sqrt{a} \left(\omega_0 - \frac{b}{2a}\right)} \cos t \left(\frac{2\sqrt{a} y + b}{2a}\right) e^{-y^2} \, dy$$

En décomposant le cosinus

$$J_1 = \frac{e^{\frac{b^2}{4a}}}{\sqrt{a}} \left[ \cos \frac{bt}{2a} \int_{-\frac{b}{2\sqrt{a}}}^{\sqrt{a} \left(\omega_0 - \frac{b}{2a}\right)} \cos \frac{ty}{\sqrt{a}} e^{-y^2} \, dy - \sin \frac{bt}{2a} \int_{-\frac{b}{2\sqrt{a}}}^{\sqrt{a} \left(\omega_0 - \frac{b}{2a}\right)} \sin \frac{ty}{\sqrt{a}} e^{-y^2} \, dy \right]$$

En intégrant, on obtient

$$J_1 = \frac{e^{\frac{b^2-t^2}{4a}}}{4\sqrt{a}} \left[ \left(\cos \frac{bt}{2a}\right) \left\{ \operatorname{erf} \left[\sqrt{a} \left(\omega_0 - \frac{b}{2a}\right) - \frac{it}{2\sqrt{a}}\right] + \operatorname{erf} \left[\sqrt{a} \left(\omega_0 - \frac{b}{2a}\right) + \frac{it}{2\sqrt{a}}\right] \right. \right.$$

$$\left. - \operatorname{erf} \left[-\frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{it}{2\sqrt{a}}\right] - \operatorname{erf} \left[-\frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{it}{2\sqrt{a}}\right] \right\}$$

$$- \frac{1}{i} \left(\sin \frac{bt}{2a}\right) \left\{ \operatorname{erf} \left[\sqrt{a} \left(\omega_0 - \frac{b}{2a}\right) - \frac{it}{2\sqrt{a}}\right] - \operatorname{erf} \left[\sqrt{a} \left(\omega_0 - \frac{b}{2a}\right) + \frac{it}{2\sqrt{a}}\right] \right.$$

$$\left. - \operatorname{erf} \left[-\frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{it}{2\sqrt{a}}\right] + \operatorname{erf} \left[-\frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{it}{2\sqrt{a}}\right] \right\} \quad (25)$$

Recherchons donc une simplification d'une expression de la forme

$$E^{\pm} = \operatorname{erf}(a + ib) + \operatorname{erf}(a - ib) \quad (26)$$

On a

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)p!}$$

$$\sin n\theta = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^p n!}{(2p+1)!(n-2p-1)!} \cos^{n-2p-1} \theta \sin^{2p+1} \theta \quad (27)$$

$$\cos n\theta = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^p n!}{(2p)!(n-2p)!} \cos^{n-2p} \theta \sin^{2p} \theta \quad (28)$$

Mettons le nombre complexe  $a + ib$  sous forme polaire  $\rho e^{i\theta}$

$$E^+ = \operatorname{erf} \rho e^{i\theta} + \operatorname{erf} \rho e^{-i\theta}$$

nous obtenons

$$E^+ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\rho^{2p+1}}{(2p+1)p!} 2 \cos(2p+1)\theta$$

En remplaçant le cosinus par son développement (28)

$$E^+ = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\rho^{2p+1}}{(2p+1)p!} \sum_{q=0}^p \frac{(-1)^q (2p+1)!}{(2q)!(2p+1-2q)!} \cos^{2p+1-2q} \theta \sin^{2q} \theta$$

or,  $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{a}{\rho}$ ,  $\sin \theta = \frac{b}{\rho}$ , ainsi

$$E^+ = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\rho^{2p+1}}{p!} (2p)! \sum_{q=0}^p \frac{(-1)^q}{(2q)!(2p+1-2q)!} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{2p+1-2q} \left(\frac{b}{\rho}\right)^{2q}$$

ou encore par élimination des termes en  $\rho$ :

$$E^+ = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(2p)!}{p!} \sum_{q=0}^p (-1)^q \frac{a^{2p+1-2q} b^{2q}}{(2q)!(2p+1-2q)!} \quad (29)$$

De même, recherchons une expression plus simple de

$$E^- = \operatorname{erf}(a+ib) - \operatorname{erf}(a-ib) \quad (30)$$

Sous forme polaire

$$E^- = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\rho^{2p+1}}{(2p+1)p!} 2 \sin(2p+1)\theta$$

En remplaçant le sinus par son expression (27), il vient :

$$E^- = \frac{4i}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(2p)!}{p!} \sum_{q=0}^p (-1)^q \frac{a^{2p-2q} b^{2q+1}}{(2q+1)!(2p-2q)!} \quad (31)$$

Compte tenu de (29) et (31), l'expression (25) de  $J_1$  se réduit à

$$J_1 = \frac{e^{\frac{b^2-t^2}{4a}}}{\sqrt{a}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(2p)!}{p!} \left\{ \sum_{q=0}^p (-1)^q \left[ \frac{\cos \frac{bt}{2a}}{(2q)!(2p+1-2q)!} \left(\frac{-t}{2\sqrt{a}}\right)^{2q} \right. \right. \\ \cdot \left. \left. \left[ (\sqrt{a}(\omega_0 - \frac{b}{2a}))^{2p+1-2q} - \left(\frac{-b}{2\sqrt{a}}\right)^{2p+1-2q} \right] - \frac{\sin \frac{bt}{2a}}{(2q+1)!(2p-2q)!} \left(\frac{-t}{2\sqrt{a}}\right)^{2q+1} \right. \right. \\ \cdot \left. \left. \left[ (\sqrt{a}(\omega_0 - \frac{b}{2a}))^{2p-2q} - \left(\frac{-b}{2\sqrt{a}}\right)^{2p-2q} \right] \right] \right\} \quad (32)$$

### 5.2.2. Calcul de la 2ème et de la 3ème intégrale

La deuxième intégrale n'est autre, au signe près, que la limite de la troisième pour  $\omega_0 \rightarrow \infty$ . Calculons donc cette dernière ; elle est du type

$$J_3 = \int_0^{\omega_0} e^{-aw^2} \cos \omega t \, d\omega$$

Opérons le changement de variable  $u = \sqrt{a}\omega$ , il vient :

$$J_3 = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\omega_0 \sqrt{a}} e^{-u^2} \cos \frac{ut}{\sqrt{a}} \, du$$

qui s'intègre en donnant

$$J_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{ae}} \frac{t}{4a} \left[ \operatorname{erf}(\omega \sqrt{a} - \frac{it}{2\sqrt{a}}) + \operatorname{erf}(\omega_0 \sqrt{a} + \frac{it}{2\sqrt{a}}) \right] \quad (33)$$

soit compte tenu de (29)

$$J_3 = \frac{e^{-\frac{t^2}{4a}}}{\sqrt{a}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(2p)!}{p!} \sum_{q=0}^p (-1)^q \frac{\left[ (\omega_0 \sqrt{a})^{2p+1-2q} \left(\frac{t}{2\sqrt{a}}\right)^{2q} \right]}{(2q)!(2p+1-2q)!} \quad (34)$$

Pour calculer la deuxième intégrale, faisons  $\omega_0 \rightarrow \infty$  dans (33) il vient immédiatement

$$\int_0^{\infty} e^{-aw^2} \cos \omega t \, d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{-\frac{t^2}{4a}} \quad (35)$$

Finalement, pour obtenir l'impulsion à l'origine, portons dans (24) les calculs (32), (34) et (35) des trois intégrales qui y figurent, il vient :

$$f(o, t) = \frac{S_o}{\pi} \frac{e^{\frac{b^2-t^2}{4a}}}{\sqrt{a}} \left[ \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(2p)!}{p!} \left\{ \sum_{q=0}^p (-1)^q \frac{\left(\frac{t}{2\sqrt{a}}\right)^{2q}}{(2q)!(2p-2q)!} \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left[ \frac{A^{2p+1-2q} B^{2p+1-2q}}{2^{p+1-2q}} \cos \frac{bt}{2a} + \frac{t}{2\sqrt{a}} \frac{A^{2p-2q} B^{2p-2q}}{2^{q+1}} \sin \frac{bt}{2a} \right] \right\} + \frac{S_o}{2\sqrt{\pi a}} e^{\alpha_o x} - \frac{t^2}{4a} \right. \\ \left. - \frac{S_o}{\pi\sqrt{a}} e^{\alpha_o x} - \frac{t^2}{4a} \left[ \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(2p)!}{p!} \sum_{q=0}^p (-1)^q \frac{(\omega_o \sqrt{a})^{2p+1-2q} \left(\frac{t}{2\sqrt{a}}\right)^{2q}}{(2q)!(2p+1-2q)!} \right] \right] \quad (36)$$

avec  $a = \frac{\tau^2}{4}$        $A = \sqrt{a} (\omega_o - \frac{b}{2a}) = \frac{\tau}{2\sqrt{\pi}} (\omega_o - \frac{2\pi\alpha_o x}{\omega_o \tau^2})$

$b = \frac{\alpha_o}{\omega_o} x$        $B = -\frac{b}{2\sqrt{a}} = -\frac{\alpha_o x \sqrt{\pi}}{\omega_o \tau}$

Examinons les premiers termes du développement de  $f(o, t)$

pour  $p = 0$        $f_o(o, t) = A_o e^{-\frac{t^2}{4a}} (\cos \frac{bt}{2a} + B_o)$       (37)

pour  $p = 1$        $f_1(o, t) = A_1 e^{-\frac{t^2}{4a}} [(t^2 + B_1) \cos \frac{bt}{2a} + C_1 t \sin \frac{bt}{2a} + D_1 t^2 + E_1]$       (38)

### 5.3. Fonction en $\frac{\sin \pi t / \tau}{\pi t / \tau}$

On désire enfin obtenir une impulsion de la forme (10) à la distance  $x$ . Portons donc les relations (11) dans l'expression (6), il vient

$$f(o, t) = \frac{S_o}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\tau}} \cos \omega [t - t_o + \frac{x}{c(\omega)}] e^{\alpha(\omega)x} d\omega \quad (39)$$

Il n'est utile de connaître les fonctions  $\alpha(\omega)$  et  $c(\omega)$  que dans l'intervalle  $[0, \pi/\tau]$ , il n'est donc plus nécessaire de formuler d'hypothèse sur le prolongement à l'infini de  $\alpha(\omega)$ . Dans ces conditions, compte tenu de (14) et (16), il vient en prenant en outre  $t_o = x/c$

$$f(o, t) = \frac{S_o}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\tau}} e^{\alpha_1 x \omega} \cos \omega t d\omega$$

Le calcul de cette intégrale conduit au résultat

$$f(o, t) = \frac{S_o}{\pi} \frac{1}{\alpha_1^2 x^2 + t^2} [e^{\alpha_1 x} \frac{\pi}{t} (\alpha_1 x \cos \frac{\pi}{t} t + t \sin \frac{\pi}{t} t) - \alpha_1 x] \quad (40)$$

Si, au lieu de la relation (16), nous retenons pour la loi de vitesse de phase l'expression (17), on obtient maintenant, toute autre condition restant inchangée

$$f(o, t) = \frac{S_o}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\tau}} e^{\alpha_1 x \omega} \cos(\omega t + \frac{x\omega_1}{c_o}) d\omega$$

Le calcul de cette intégrale conduit au résultat

$$f(o, t) = \frac{S_o}{\pi} \frac{1}{\alpha_1^2 x^2 + t^2} \{ e^{\alpha_1 x \frac{\pi}{t}} [ \alpha_1 x \cos(\frac{\pi}{t} t + \frac{x\omega_1}{c_o}) \\ + t \sin(\frac{\pi}{t} t + \frac{x\omega_1}{c_o}) ] - t \sin \frac{x\omega_1}{c_o} - \alpha_1 x \cos \frac{x\omega_1}{c_o} \} \quad (41)$$

### 5.4. Remarque

Certaines de ces solutions se présentent sous forme de vibrations modulées. Dans les applications, une certaine analogie avec le phénomène de battement laisse penser que de tels trains d'onde pourraient prendre naissance et se répéter dans les vibrations de pièces ou de structures.

### 6. CONCLUSION

Nous établissons dans le cadre d'une théorie linéaire qu'il existe des impulsions fonctions du temps qui engendrent à une distance donnée  $x$  des impulsions de déplacement, de contrainte, de déformation ou de l'une quelconque de leurs dérivées par rapport au temps se rapprochant d'aussi près que l'on veut d'une impulsion de la forme unité  $\delta$ . A titre d'illustration, nous approchons cette impulsion de Dirac au moyen de trois suites de fonctions modélisant l'onde convergeant vers  $\delta$  et nous explicitons l'expression de l'impulsion à l'origine qui engendre le terme général de chacune de ces trois suites.

### 7. BIBLIOGRAPHIE

- [1] KOLSKY H., The propagation of stress pulses in viscoelastic solids, *Phil. Mag.* 1956, 1 (8), 693-710, pl. 35-36.
- [2] HUNTER S.C., Viscoelastic waves, in : *Progress in Solid Mechanics*, 1, ch. 1, SNEDDON I.N. and HILL R. eds, North-Holland, Amsterdam, 1960.
- [3] GUELFAND I.M., CHILOV G.E., *Les distributions*, 1, Dunod, Paris, 1972.
- [4] BLANC R.H., Détermination de l'équation de comportement des corps viscoélastiques linéaires par une méthode d'impulsion, Thèse Doct. d'Etat Math., Fac. Sci. Marseille, 1971

- [5] FERRY J.D., Viscoelastic properties of polymers, John Wiley, New-York, 1970
- [6] CRANDALL S.H., The role of damping in vibration theory, J. Sound Vibr., 1970 11 (1), 3-18.
- [7] BLANC R.H. and CHAMPOMIER F.P., A wave front method for determining the dynamic properties of high damping materials, J. Sound Vibr., 1976, 49 (1), 37-44
- [8] GRÖBNER W. und HOFREITER N., Unbestimmte Integrale, 1949, Bestimmte Integrale, 1950, Springer-Verlag, Vienne.

## MODELISATION DU COMPORTEMENT THIXOTROPE ET/OU VISCOELASTIQUE DE MILIEUX DISPERSES CONCENTRES

### *A MODEL FOR THE THIXOTROPIC AND/OR VISCOELASTIC BEHAVIOR OF DISPERSE CONCENTRATED MEDIA*

D. QUEMADA, J.C. LELIEVRE, C. LACOMBE  
Unité de Biorhéologie. Equipe du Laboratoire Associé au CNRS, LA 343,  
Département de Biophysique - CHU Pitié-Salpêtrière  
91, Bd. de l'Hôpital, 75013 PARIS.

#### RESUME

Un modèle à trois paramètres pour la viscosité stationnaire de suspensions concentrées, basé sur une analyse structurale globale du système, proposée antérieurement, est généralisé pour la modélisation des mesures de viscosité instationnaire. Deux paramètres supplémentaires, un temps de Maxwell et un temps de relaxation de la structure, sont nécessaires pour décrire la superposition des effets viscoélastiques et thixotropes. Un exemple d'application au sang est discuté, notamment en comparant les résultats pour deux échantillons de sang, l'un normal, l'autre pathologique.

#### ABSTRACT

A 3-parameters model for steady viscosity of concentrated suspensions is extended to analysis of unsteady viscosity measurements. This model was based on structural changes of the system. The description of superposed viscoelastic and thixotropic properties of the suspension requires introduction of two new parameters, a Maxwell time and a relaxation time of the structure. One example of application to blood is discussed, especially the results for two samples of normal and pathological blood are compared.

## I. INTRODUCTION

L'étude rhéologique des milieux dispersés concentrés exige l'introduction de paramètres qui prennent en compte la structure de ces milieux. Comme exemple simple, on peut citer le cas d'une suspension de particules (sphériques et rigides) dans un fluide newtonien de même densité. La viscosité relative  $\eta_R$  de la suspension sous des conditions stationnaires d'écoulement laminaire est donnée par analyse dimensionnelle /1/ sous la forme:

$$\eta_R = \eta/\eta_F = \eta_R(\phi, \tau\dot{\gamma}) \quad (1)$$

où  $\phi$  est la concentration en volume des particules,  $\eta_F$  la viscosité du fluide suspensif,  $\dot{\gamma}$  la vitesse de cisaillement et  $\tau$  un temps caractéristique du système.

Dans le cas de systèmes plus complexes, d'autres variables adimensionnelles peuvent être impliquées dans le modèle rhéologique (1).

La relation entre les paramètres du modèle et la structure du milieu n'est pas toujours bien établie, mais des arguments phénoménologiques peuvent être souvent évoqués.

En général, au repos ( $\dot{\gamma}=0$ ), la structure du milieu est le résultat d'un processus d'association des particules qui peut d'ailleurs dépendre de l'histoire du matériau.

Sous l'action du cisaillement cette structure agrégée est progressivement détruite et, lorsque le cisaillement croît, des phénomènes d'orientation et de déformation des éléments désagrégés peuvent intervenir.

De nombreux modèles rhéologiques conduisent à des expressions explicites pour (1) mais ne prennent souvent pas en compte la double dépendance  $\eta_R(\phi, \tau\dot{\gamma})$ .

Le but de cet article est d'une part de rappeler brièvement le modèle qui a conduit à cette double dépendance et d'autre part de le généraliser au cas de conditions non stationnaires d'écoulement.

Enfin, quelques exemples de comparaison avec l'expérience seront donnés dans le cas particulier d'échantillons de sangs normaux et pathologiques.

## 2. MODELE DE VISCOSITE STRUCTURELLE

La relation entre la structure et la fraction volumique est fournie par la loi de viscosité :

$$\eta_R = (1 - \frac{1}{2}k\phi)^{-2} \quad (2)$$

qui met en oeuvre une viscosité intrinsèque  $k$  jouant le rôle d'un paramètre de structure.

La loi (2) a été établie théoriquement en appliquant un principe d'énergie dissipée minimum à l'écoulement diphasique de fluides newtoniens /2/. Le point de départ de la théorie s'appuie sur l'expérience qui montre que l'écoulement d'une suspension concentrée dans un tube présente un noyau enrichi et une couche pariétale appauvrie en particules.

## 3. MODELE DE COMPORTEMENT RHEOFLUIDIFIANT

La généralisation de la loi (2) au cas non newtonien a été obtenue /3/, en supposant que l'évolution du paramètre de structure,  $k(t, \phi, \dot{\gamma})$  est décrite par une équation cinétique du premier ordre:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{\tau_A}(k_A - k) - \frac{1}{\tau_D}(k - k_D) \quad (3)$$

où  $\tau_A$  et  $\tau_D$  sont les temps de relaxation de deux processus en compétition : l'agrégation (indice A), la désagrégation (indice D) des particules en suspen-

sion. Bien entendu,  $\tau_A$  et  $\tau_D$  dépendent de  $\dot{\gamma}$ . Sous des conditions stationnaires, et à  $\phi$  constant, la solution  $k(\infty, \phi, \dot{\gamma})$  de (3) est

$$k(\dot{\gamma}) = k_\infty + \frac{k_0 - k_\infty}{1 + (\tau_A/\tau_D)} \quad (4)$$

où  $k_A \equiv k_0 = k(0)$  est la viscosité intrinsèque à cisaillement nul et  $k_D \equiv k_\infty = k(\infty)$  est la viscosité intrinsèque pour un cisaillement infini.

Le cisaillement réduit ( $\tau\dot{\gamma}$ ) qui intervient dans (1) est directement relié au rapport  $\tau_A/\tau_D$ . Pour les systèmes concentrés, on a adopté /3/ une relation empirique:

$$\tau_A/\tau_D = (\tau\dot{\gamma})^\mu \quad (5)$$

où  $\mu$  est un paramètre dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1.

Les figures 1 et 2 montrent respectivement l'ajustement de (2), compte tenu de (4) et (5), sur des mesures de  $\eta_R(\dot{\gamma})$  pour une suspension de latex ( $\mu = 1$ ) /4/ et une suspension de globules rouges ( $\mu = 0,5$ ).

## 4. MODELE DE COMPORTEMENT THIXOTROPE ET/OU VISCOELASTIQUE

Il a été proposé /5/ d'étendre le modèle précédent au cas où les conditions ne sont plus stationnaires.

On suppose que l'expression (2) de la viscosité reste valable à chaque instant, à condition d'introduire la valeur instantanée  $k(t)$  du paramètre de structure, donnée par (3). Dans le cas où l'on applique un échelon de cisaillement  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1$ , l'évolution de la contrainte en fonction du temps est donnée par :

$$\sigma(t; \dot{\gamma}_1) = \eta(t; \dot{\gamma}_1) \dot{\gamma}_1 \quad (6)$$

qui décrit le comportement purement thixotropique de la suspension. Cependant, la plupart des systèmes étudiés montrent aussi des propriétés viscoélastiques qui doivent être simultanément prises en compte.

Pour cela, on suppose que le milieu a un comportement viscoélastique du type liquide de Maxwell. Si  $G$  est le module d'élasticité on pose:

$$\tau_M \dot{\sigma} + \sigma = \eta(t; \dot{\gamma}_1) \dot{\gamma}_1 \quad (7)$$

la viscosité  $\eta(t; \dot{\gamma}_1)$  étant encore donnée par (2) avec  $k(t)$  solution de (3).

Dans une première analyse, on considère que le temps de Maxwell  $\tau_M$  est constant (x). Dans ces conditions, la solution de (7) s'écrit simplement:

$$\sigma(t; \dot{\gamma}_1) = \frac{\dot{\gamma}_1}{\tau_M} \int_0^t \eta(t'; \dot{\gamma}_1) e^{-\frac{t-t'}{\tau_M}} dt' \quad (8)$$

## 5. CAS PARTICULIER DU SANG

### 5.1. Comportement rhéologique transitoire du sang

Il est bien connu maintenant que le comportement rhéologique du sang sous

(x) mais peut néanmoins dépendre de la valeur  $\dot{\gamma}_1$  de la vitesse de cisaillement appliquée.

une sollicitation transitoire de cisaillement dépend de la valeur de ce cisaillement /6/, /7/, /8/. La figure 3 montre les trois comportements caractéristiques suivants :

- $\dot{\gamma} \ll \tau^{-1}$  : comportement à dominante viscoélastique (A)  
 $\dot{\gamma} \approx \tau^{-1}$  : comportement à dominante thixotrope (B)  
 $\dot{\gamma} \gg \tau^{-1}$  : comportement essentiellement newtonien. (C)

L'explication de ces phénomènes se trouve dans la capacité qu'ont les globules rouges (GR) de s'agréger pour former un réseau de rouleaux enchevêtrés qui s'étirent, se scindent et se cassent sous l'action du cisaillement, (figure 4). Cette organisation dépend de la présence des protéines du plasma, notamment du fibrinogène et des globulines.

### 5.2. Quelques modèles de comportement viscoélastique et/ou thixotrope

Aucun modèle mécanique simple (Maxwell, Kelvin-Voigt, Burger) ne peut rendre compte de façon satisfaisante du comportement rhéologique du sang en régime d'écoulement transitoire /9/. La raison de cet échec doit être cherchée dans le fait que les modèles précédents ne prennent pas en compte les changements de structure provoqués par l'écoulement.

Tel est aussi le cas pour les modèles de viscoélasticité non linéaire (/10/, par ex.). En revanche, l'utilisation d'un modèle de Maxwell généralisé (modèle de Jeffrey) semble être plus prometteur /11/.

A partir de théories générales sur les liquides en écoulement, d'autres modèles, dits modèles thermodynamiques, conduisent à des expressions plus ou moins utilisables /12, 13/ qui d'ailleurs ne sont pas en accord avec les expériences.

Plus récemment, une analyse mécanique plus détaillée de la loi de comportement du sang a été entreprise d'abord à l'aide d'un modèle viscoélastique à trois paramètres /14/, puis en utilisant la notion de fluide à mémoire /15/. Le premier modèle s'applique avec une bonne approximation à la phase descendante de  $\sigma(t)$  tandis que le second (qui contient 6 paramètres) rend compte de l'allure complète des rhéogrammes expérimentaux.

### 5.3. Mise en oeuvre du présent modèle

Pour fixer les idées, nous considérons un échelon de vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}(t)$  représenté sur la figure 3.

Pour  $\dot{\gamma} = 0$  le sang est au repos et présente une structure agrégée avec  $k = k_0$ . Au bout d'un temps suffisamment long ( $t \gg \tau$ ), la viscosité intrinsèque atteint la valeur  $k(\infty, \dot{\gamma})$ . On omet ici d'indiquer la dépendance de  $k$  en fonction de la concentration  $\phi$  car les expériences sont faites à  $\phi = \text{cte}$ .

L'évolution de  $k(t; \dot{\gamma})$  s'obtient par intégration de (3) qui donne :

$$k(t; \dot{\gamma}) = k(\infty; \dot{\gamma}) + [k_0 + k(\infty; \dot{\gamma})] e^{-(\tau_A^{-1} + \tau_D^{-1})t} \quad (9)$$

avec :

$$\tau_A^{-1} + \tau_D^{-1} = \frac{1}{\tau_A} [1 + (\tau \dot{\gamma})^\alpha] \quad (10)$$

En portant (9) dans (2) pour exprimer (8) on voit que deux paramètres dynamiques  $\tau_A$  et  $\tau_M$  restent à déterminer à partir de l'expérience. En effet, les paramètres de structure  $k_0, k_\infty, \alpha$  et  $\tau$  s'obtiennent à partir de mesures faites sous des conditions stationnaires d'écoulement, comme il a été indiqué précédemment.

### 5.4. Résultats préliminaires et discussion

La figure 5 montre un exemple d'évolution théorique de la contrainte de cisaillement, selon (8), pour un comportement purement thixotrope, pour  $\tau \dot{\gamma} \approx 1$ . Aucune comparaison expérimentale n'est possible cependant dans le cas du sang puisque ce fluide possède aussi des propriétés viscoélastiques.

Les figures 5 et 6 illustrent respectivement l'ajustement de (8) sur des mesures effectuées sur deux échantillons de sang, l'un normal, l'autre pathologique (sang d'un polyglobulique). Le tableau 1 résume les résultats (on rappelle que seuls les deux paramètres  $\tau_A$  et  $\tau_M$  restaient à déterminer).

TABEAU 1

	$k_0$	$k_\infty$	$\tau(\text{sec})$	$\dot{\gamma}_1(\text{sec}^{-1})$	$\tau_M(\text{sec})$	$\tau_A(\text{sec})$	$\tau_D(\text{sec})$
Sang normal	4.195	1.961	0.466	0.05	5.1	1.1	7.2
$\phi = 0.45$				1	2.2	1.1	1.6
$\eta_p = 1.75 \text{ cP}$ ( $\nu = 0.5$ )				20	-	-	-
Sang pathologique	3.968	1.408	0.089	0.05	2.5	1.2	18.0
$\phi = 0.45$				1	1.6	1.3	4.4
$\eta_p = 2.01 \text{ cP}$ ( $\nu = 0.5$ )				20	-	-	-

Ces résultats appellent les remarques suivantes :

a) Les caractéristiques dynamiques de l'appareillage actuel influent sur la partie  $0 \leq t \leq 1 \text{ sec}$  des enregistrements, en allongeant le temps de montée ainsi que le montrent les enregistrements correspondant au plasma. C'est pourquoi l'ajustement pour  $\dot{\gamma}_1 = 20 \text{ sec}^{-1}$  perd toute signification et que seule la valeur stationnaire  $\sigma(\infty; \dot{\gamma}_1)$  a un sens (cette valeur est utilisée pour la détermination de  $k_0, k_\infty$  et  $\tau$ ).

b) Pour  $\dot{\gamma}_1 = 1 \text{ sec}^{-1}$ , et surtout pour le sang normal, l'ajustement sur la partie correspondant à la relaxation de la contrainte n'est bon que si on laisse de côté la partie croissante jusque, et y compris, le maximum observé. Le maximum théorique est alors plus élevé et décalé vers les temps plus courts, en complet accord avec la remarque a). Au contraire, pour  $\dot{\gamma}_1 = 0.05 \text{ sec}^{-1}$ , la dynamique de l'appareillage intervient de façon plus limitée du fait de la plus lente montée du signal, due à la viscoélasticité.

c) Les valeurs obtenues pour  $\tau_M$  sont toujours supérieures à  $\tau_A$ , montrant que les effets viscoélastiques se font encore sentir alors que le système a déjà atteint sa structure d'équilibre. En adoptant pour le temps de Maxwell l'expression  $\tau_M = (\eta_{eq}/G)$ , où  $\eta_{eq}$  est la viscosité  $\eta(\infty; \dot{\gamma}_1)$  stationnaire et  $G$  le module d'élasticité, on obtient, pour  $\dot{\gamma}_1 = 0.05 \text{ sec}^{-1}$ , les valeurs  $G_{norm} = 0.23 \text{ dynes/cm}^2$  et  $G_{path} = 0.39 \text{ dynes/cm}^2$ , qui sembleraient correspondre à une structure des amas de rouleaux de GR pratiquement deux fois plus rigide dans le cas pathologique que dans le cas normal. Pour  $\dot{\gamma}_1 = 1 \text{ sec}^{-1}$ , on obtient de même  $G_{norm} = 0.12 \text{ dynes/cm}^2$  et  $G_{path} = 0.14 \text{ dynes/cm}^2$ , valeurs très voisines qui pourraient être associées à une élasticité inchangée des rouleaux de globules rouges.

d) Les valeurs obtenues pour  $\tau_A$ , de l'ordre de 1 sec, montrent que  $\tau_A$  ne semble pas affecté par le type de structure concerné ou par l'état du sang, normal ou pathologique.

e) Le tableau 1 donne aussi les valeurs des temps de désagrégation  $\tau_D = \tau_A / (\tau \dot{\gamma})^{1/2}$  environ 2,5 fois plus grandes pour le sang pathologique que pour le sang normal (18/7,2 = 2,5 et 4,4/1,6 = 2,75). Cette augmentation pourrait traduire une plus grande résistance de la structure à pouvoir être dispersée (réseau  $\rightleftharpoons$  amas de rouleaux à  $\dot{\gamma} = 0.05 \text{ sec}^{-1}$ , et rouleaux  $\rightleftharpoons$  globules rouges à  $\dot{\gamma} = 1 \text{ sec}^{-1}$ ) quand on passe du sang normal au sang pathologique. De plus, aussi bien pour le cas normal que pour le cas pathologique, on aurait un temps de désagrégation du réseau en amas de rouleaux environ 4 fois plus grand que le temps de dispersion des rouleaux en globules rouges (7,2/1,6 = 4,5 et 18/4,4 = 4,1).

## 6. CONCLUSION

La bonne qualité de l'ajustement du modèle proposé aux mesures instationnaires, ajustement qui, soulignons-le, ne comporte que deux paramètres  $\tau_A$  et  $\tau_M$  qui viennent compléter les trois paramètres caractérisant les propriétés stationnaires, semble montrer la validité du modèle proposé. De plus, les tentatives d'interprétation des valeurs trouvées pour ces deux paramètres, temps de Maxwell  $\tau_M$  et temps d'agrégation  $\tau_A$ , ainsi que le temps de désagrégation  $\tau_D$  qui s'en déduit, semblent aussi conforter ce modèle. Néanmoins son application à un plus grand nombre de mesures est nécessaire avant d'en tirer des conclusions définitives.

## BIBLIOGRAPHIE

- /1/ KRIEGER, I.M. (1963) A dimensional approach to colloid rheology. Trans. Soc. Rheol. 7, 101-109.
- /2/ QUEMADA, D. (1977) Rheology of concentrated disperse systems and minimum energy dissipation principle. I. Viscosity-concentration relationship. Rheol. Acta 16, 82-94.
- /3/ QUEMADA, D. (1978) Rheology of concentrated disperse systems. II. A model for non newtonian shear viscosity in steady flows. Rheol. Acta 17, 632-642.
- /4/ QUEMADA, D. (1978) Rheology of concentrated disperse system. III. General features of the proposed non-newtonian model. Comparison with experimental data. Rheol. Acta 17, 643-653.
- /5/ QUEMADA, D. (1980) Blood rheology and its implication in flow of blood. In "Engineering and Medical Aspects of the Arterial Blood Flow", pp. 5-13. CISM Course. CM Rodkiewicz, G. Longo (ed.). CISM, Udine (Italy) (sous presse).
- /6/ LELIEVRE, J.C., LACOMBE, C., QUEMADA, D. (1982) Caractérisation rhéologique du sang humain. J. Biophys. et Méd. Nucl. 6, 117-120.
- /7/ HEALY, J.C., JOLY, M. (1975) Rheological behaviour of blood. Biorheology 12, 335-340.
- /8/ LACOMBE, C., LELIEVRE, J.C. (1981) Viscosity and blood structure. Biochimie 63, 883-885.
- /9/ BUREAU, M. (1977) Propriétés rhéologiques du sang in vitro en écoulement de Couette en régime transitoire. Thèse 3ème cycle, Université Pierre et Marie Curie.

- /10/ BIRD, R.B., MARSH, B.D. (1968) Viscoelastic hysteresis. I. Model predictions. Trans. Soc. Rheol. 12, 479-488.
- /11/ THURSTON, G.B. (1979) Rheological parameters for the viscosity, viscoelasticity and thixotropy of blood. Biorheology 16, 149-162.
- /12/ EYRING, H. (1936) Viscosity, plasticity, and diffusion as examples of absolute reaction rates. J. Chem. Phys. 4, 283-291.
- /13/ HUANG, C.R., SISKOVIC, N., ROBERTSON, R.W., FABISIAK, N., SMITHERBERG, E.H., COPLEY, A.L. (1975) Quantitative characterization of thixotropy of whole human blood. Biorheology 12, 279-282.
- /14/ STOLTZ, J.F., GAILLARD, S., LUCIUS, M., GUILLOT, M. (1979) Recherche d'un modèle viscoélastique applicable au comportement rhéologique du sang. J. Mécanique 18, 593-607.
- /15/ STOLTZ, J.F., LUCIUS, M. (1981) Viscoelasticity and thixotropy of human blood. Biorheology 18, 453-473.

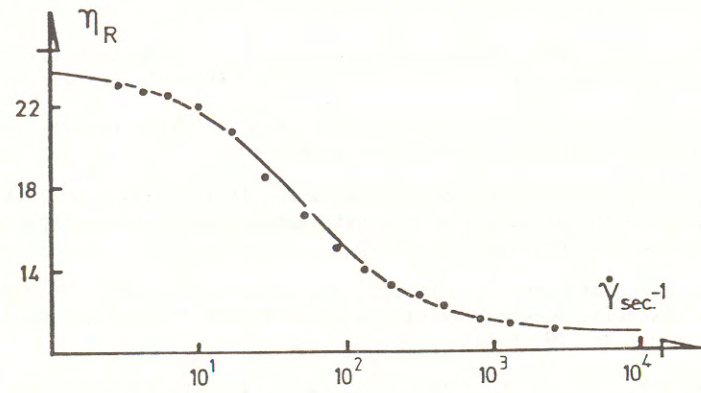


Fig. 1

Fig. 1 - Variation de la viscosité relative d'une suspension monodispersée de latex en fonction de la vitesse de cisaillement (d'après /4/, avec  $\mu = 0,986$ ,  $k_0 = 3,180$ ,  $k_{\infty} = 2,793$ ,  $\tau = 11,3$  msec.).

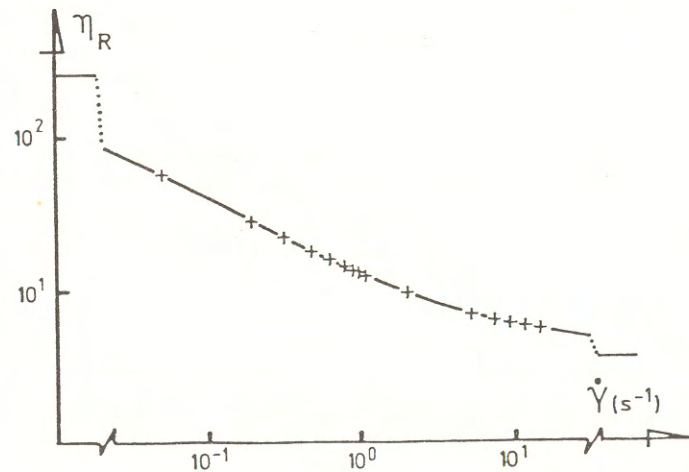


Fig. 2

Fig. 2 - Variation de la viscosité relative du sang humain normal en fonction de la vitesse de cisaillement (+ expérience d'après /6/, courbe d'après le présent modèle avec  $\mu = 0,52$ ;  $k_0 = 4,17$ ;  $k_{\infty} = 2,13$ ;  $\tau = 0,82$  sec.).

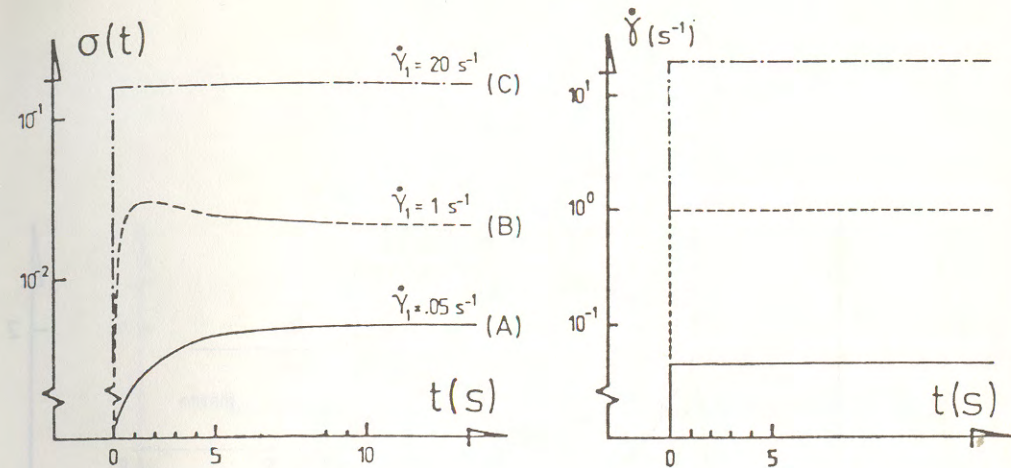


Fig. 3 - Rhéogrammes expérimentaux en régime transitoire pour le sang. (A) Comportement à dominante viscoélastique. (B) Comportement à dominante thixotrope. (C) Comportement essentiellement newtonien.

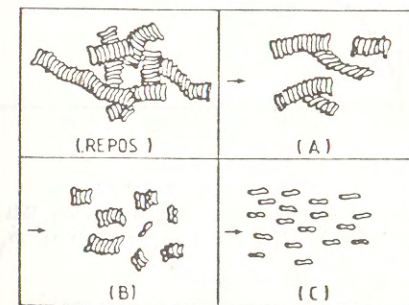


Fig 4

Fig. 4 - Représentation schématique de la structure du sang (→ sens de l'écoulement) (A) Equilibre réseau-rouleaux. (B) Equilibre rouleaux-globules rouges. (C) Globules rouges individuels.



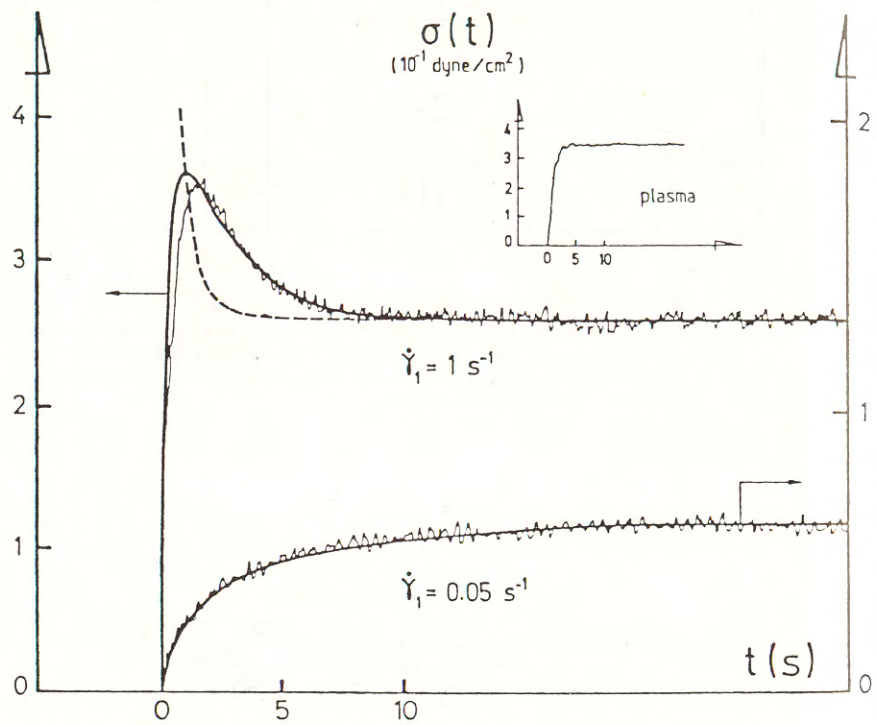


Fig. 5 - Sang normal : évolution de  $\sigma(t)$  sous l'action d'un échelon de  $\dot{\gamma}$ ,  $\dot{\gamma}_1 = 0,05 \text{ sec}^{-1}$  (a) et  $\dot{\gamma}_1 = 1 \text{ sec}^{-1}$  (b).

----- - Relaxation de la contrainte  $\sigma(t, \dot{\gamma}_1) = \eta(t, \dot{\gamma}_1) \dot{\gamma}_1$   
 pour un échelon de vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}_1 = 1 \text{ sec}^{-1}$

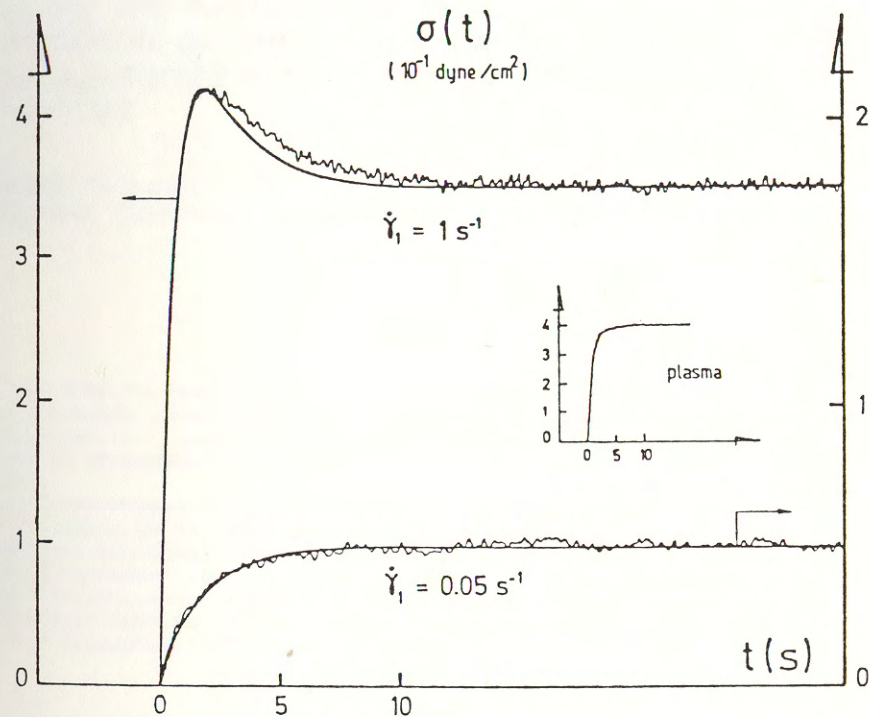


Fig. 6 - Sang pathologique : évolution de  $\sigma(t)$  sous l'action d'un échelon de  $\dot{\gamma}$ ,  $\dot{\gamma}_1 = 0,05 \text{ sec}^{-1}$  (a) et  $1 \text{ sec}^{-1}$  (b).

## DETERMINATION DE L'INFLUENCE DE L'HUMIDITE ET DE LA TEMPERATURE SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE D'ADHESIFS EPOXY PAR DES METHODES DYNAMIQUES

STUDY OF THE INFLUENCE OF MOISTURE AND  
TEMPERATURE ON THE MECHANICAL BEHAVIOUR OF  
EPOXY ADHESIVES WITH DYNAMICAL MEASUREMENT  
TECHNIQUES

A. CARDON, Professeur.

F. BOULPAEP, Collaborateur technique F.R.F.C.

### RESUME

Les adhésifs époxy utilisés dans divers domaines d'application : génie civil, mécanique, aéronautique, etc..., ont un comportement viscoélastique souvent non-linéaire. Leurs caractéristiques mécaniques sont sensiblement influencées par un traitement en fonction de la température après une première polymérisation.

Etant viscoélastiques leurs caractéristiques varient considérablement en fonction de la fréquence, de la température et de l'humidité.

Les méthodes dynamiques de mesure des composantes du module complexe permettent d'obtenir rapidement des données sur ces variations. Nous essayons d'obtenir des corrélations entre la variation de ces caractéristiques mécaniques et leurs facultés d'adhésion en y incorporant un facteur mesurant la rugosité des surfaces sur lesquelles l'adhésif est appliqué.

### ABSTRACT

Bonding epoxies are utilized in several types of applications : civil engineering, mechanics, aerospace structures, and so on... They are viscoelastic and frequently in the nonlinear range.

Their mechanical characteristics are strongly influenced by a postcuring cycle. As consequence of their viscoelastic behaviour, it is important to determine the influence of frequency, temperature and humidity. Dynamical test methods measuring the complex modulus makes it possible to obtain in a short time the necessary informations on these variations. We actually try to correlate the variation of mechanical characteristics with the bonding properties. As supplementary parameter we take into account the rugosity of the surfaces where the epoxy was applied.

(.) Communication présentée lors du 17<sup>ième</sup> Colloque du Groupe Français de Rhéologie - Paris - 1 et 2 décembre 1982.

(..) Vrije Universiteit Brussel - Faculté des Sciences Appliquées - Mécanique des Milieux Continus - Pleinlaan 2 - 1050 Bruxelles (Belgique)

(...) Fonds de la Recherche Fondamentale Collective (V.U.B. - 2.9003.79)

## 1. INTRODUCTION

Les résines époxy sont utilisées depuis de longues années soit pour effectuer des réparations dans des ouvrages de génie civil, soit comme éléments de liaison dans des structures mécaniques et en particulier dans la construction aéronautique. La relation entre les qualités d'adhésion de ces résines en couches minces, injectées dans une structure existante ou appliquées en tant qu'éléments de liaison, et leurs propriétés mécaniques intrinsèques est un élément essentiel pour pouvoir sélectionner les résines adéquates.

Leur comportement est non pas élastique mais, parfois fortement, viscoélastique. Souvent à partir de contraintes faibles (environ 0.3 la contrainte à la rupture), ce comportement viscoélastique est non linéaire. Une caractérisation non-linéaire expérimentale est dès lors indispensable. Une approche non-linéaire fort pratique semble être celle proposée par Schapéry, [1], dont nous exposerons ultérieurement des applications.

Nous présentons ici quelques résultats de mesure du module complexe de ces résines, et leur variation en fonction de la fréquence, de la température et de l'humidité. Nous avons également mesuré les effets d'un recuit de la résine sur ces caractéristiques mécaniques.

Finalement nous donnons quelques résultats d'essais de cisaillement sur la résine en couche mince en étudiant sa caractéristique d'adhésion en fonction de ses caractéristiques propres et de rugosité des surfaces.

## 2. METHODE DE MESURE - DOMAINES DE MESURE - CORRECTIONS

Nous utilisons deux équipements dynamiques commercialement disponibles (viscoélasticimètre de Metravib et Dynastat de Imass). Ces équipements nous donnent une gamme de mesure en fréquence de 0.1 à 1000 Hz et en température de -180 à 250°C.

Le raccord de ces équipements à un mini-ordinateur HP 1000 avec un logiciel spécifique nous permet d'obtenir un balayage très rapide des résultats.

La description plus précise de l'équipement et des différentes corrections a été donnée dans [2].

## 3. COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE NON-LINEAIRE

Quelques essais de fluage permettent de déterminer le seuil de contrainte à partir duquel la non-linéarité doit être prise en considération.

A titre d'exemple, la figure 1 montre les courbes de fluage pour une résine époxy (S31) à 35°C pour différents niveaux de contrainte de 0.2 à 0.8 la valeur de la contrainte de rupture.

Dans la figure 2, la réduction a été effectuée pour vérifier le seuil de linéarité. On remarquera qu'à partir de 0.2  $\sigma_r$  il n'est plus possible d'obtenir une courbe de fluage réduite unique.

Les mêmes résultats peuvent être obtenus par la mesure des composantes du module complexe  $\tilde{E}$  ( $\tilde{E} = E_1 + iE_2$ ;  $E_1$  et  $\tan \delta = E_2/E_1$ ), en faisant varier l'amplitude de la contrainte sinusoïdale.

## 4. MESURES DYNAMIQUES

En poursuivant les expériences décrits dans [3] nous comparons les résultats de mesure des composantes du module complexe sans recuit et après un recuit de 72 heures à 40°C.

COURBES DE FLUAGE S31 (35°C)

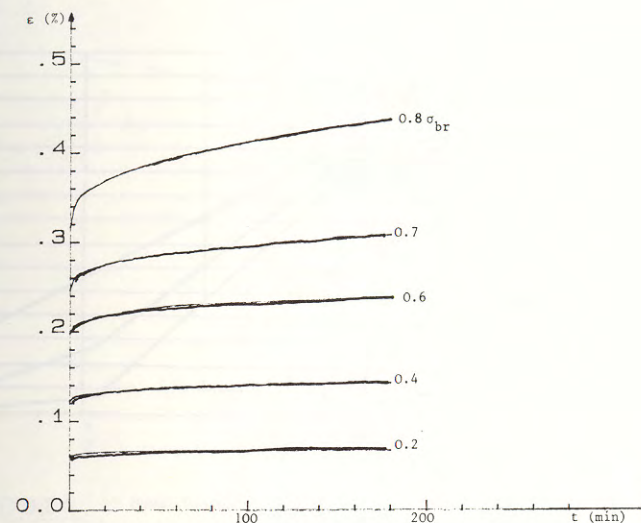


FIG. 1

REDUCTION DES COURBES DE FLUAGE S31 (35°C)

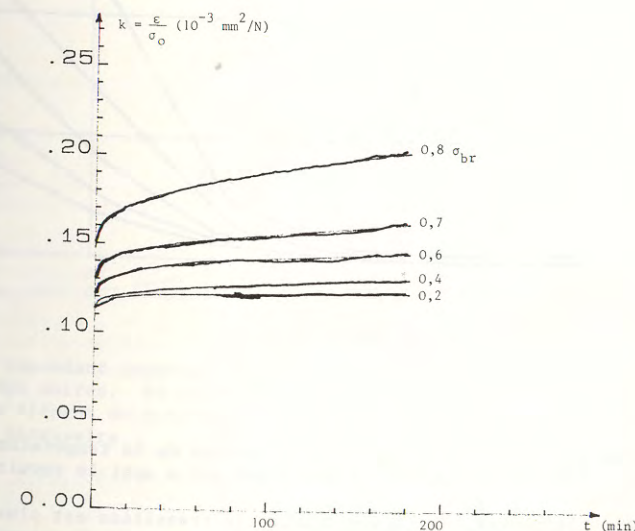


FIG. 2

La figure 3 nous donne  $E_1$  et la figure 4 nous donne  $\text{tg } \delta$  pour différentes fréquences de 0.1 à 50 Hz de 25 à 50°C sur un échantillon SD sans recuit.

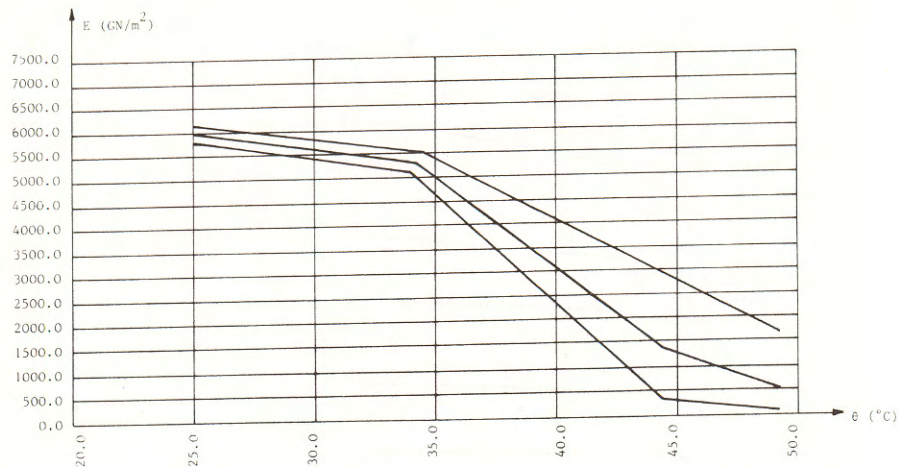


FIG. 3

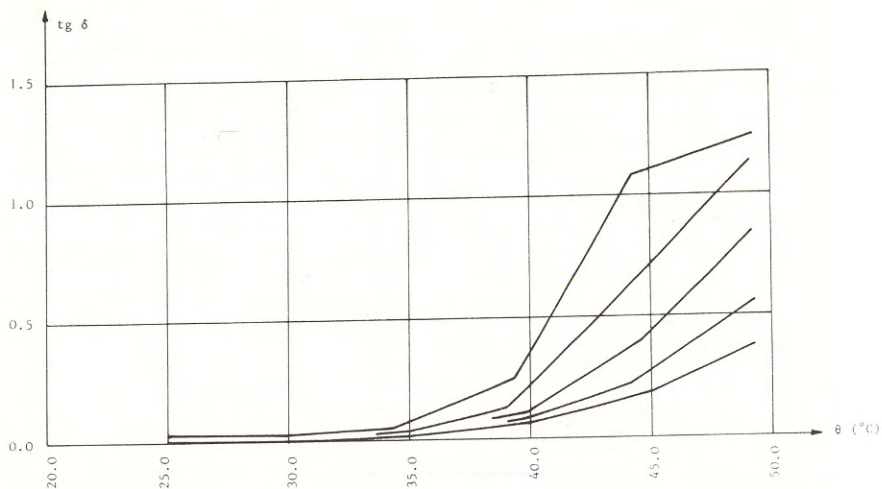


FIG. 4

Les figures 5 et 6 donnent  $E_1$  et  $E_2$  en fonction de la température pour une fréquence de 0.5 Hz mesurés sur un échantillon qui a subi le recuit indiqué ci-dessus.

Il apparait clairement que la température de transition est plus élevée pour l'échantillon qui a subi le recuit que pour celui utilisé directement sans recuit.

SD3IA (FREQ. 0.5 Hz)

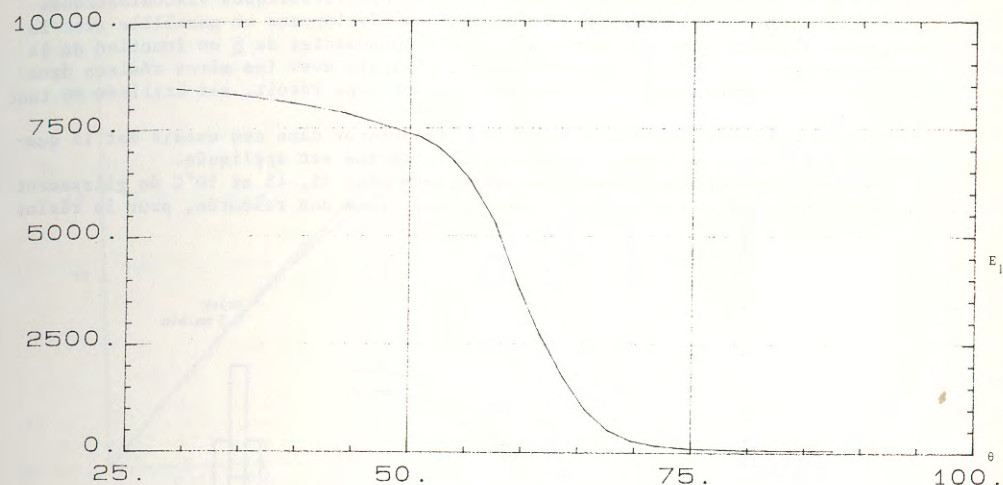


FIG. 5

SD3IA (FREQ. 0.5 Hz)

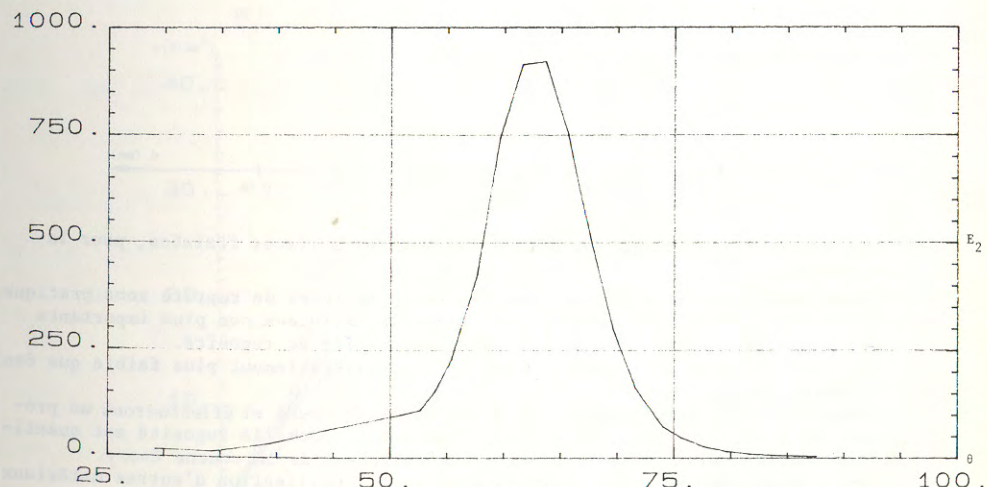


FIG. 6

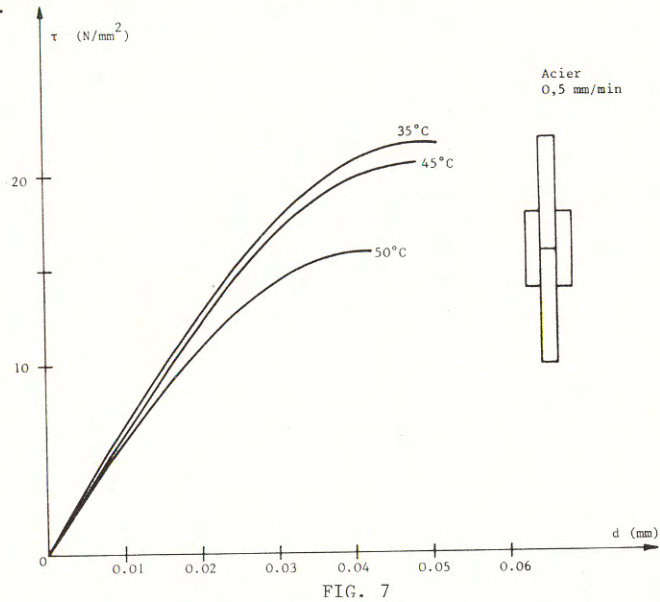
Il est cependant important de tenir compte aussi bien des résultats sans recuit que des autres. En effet l'utilisation parfois par injection de la résine en tant qu'élément de refection sur chantier ne permet pas toujours d'effectuer le recuit nécessaire.

## 5. CISAILLEMENT EN COUCHES MINCES

En vue d'obtenir une corrélation entre les caractéristiques viscoélastiques intrinsèques de la résine et son adhésion nous développons en parallèle avec le programme d'essais pour la détermination des composantes de  $\underline{E}$  en fonction de la température et de la fréquence un ensemble d'essais avec les mêmes résines dans un dispositif symétrique ou la résine, avec et sans recuit, est utilisée en tant qu'adhésif.

Le paramètre supplémentaire que nous introduisons dans ces essais est la qualité de surface des éléments sur lesquels la résine est appliquée.

Nous donnons dans la figure 7 les résultats pour 35, 45 et 50°C du glissement en fonction de la contrainte pour une surface lisse non rainurée, pour la résine SD31 recuite.



La figure 8 nous donne les résultats pour des surfaces fraisées, pour la même résine.

On peut immédiatement remarquer que si les contraintes de rupture sont pratiquement de même niveau à la rupture, les glissements totaux sont plus importants dans le cas fraisé que dans le cas sans préparation de rugosité.

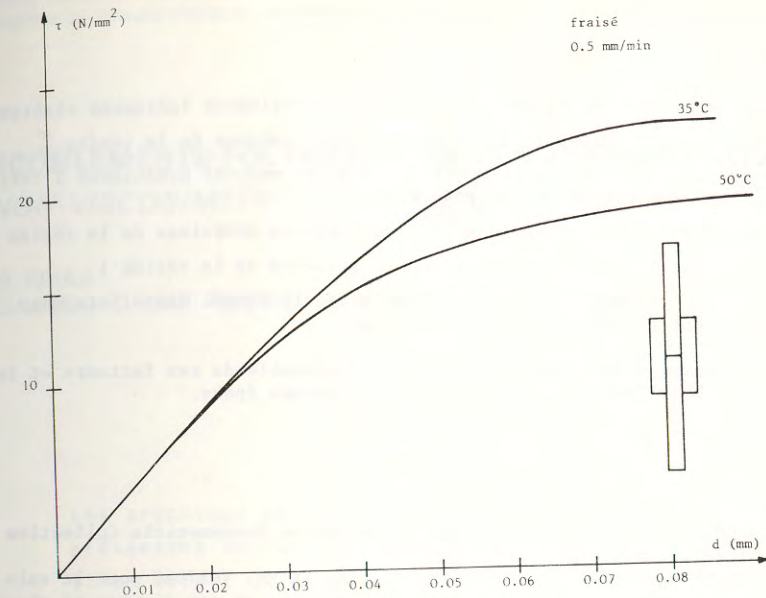
La rigidité dans le second cas est donc considérablement plus faible que dans le premier cas.

Nous analysons actuellement cet effet analytiquement et effectuerons un programme de mesures introduisant des états de surface dont la rugosité est quantifiée de manière plus précise, ainsi que l'épaisseur de la couche époxy.

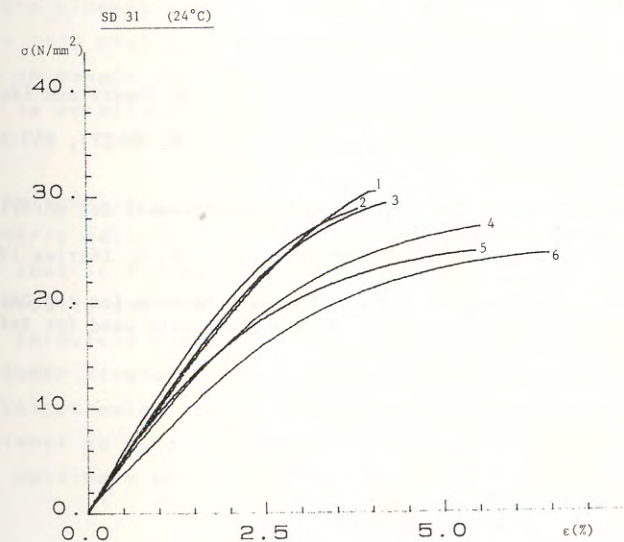
Notre programme de mesure prévoit également l'utilisation d'autres matériaux de support que l'acier et des dispositifs avec différents matériaux de support.

## 6. INFLUENCE DE L'HUMIDITE RELATIVE

Un paramètre important influençant le comportement mécanique des résines époxy, et donc leur qualités de transmission de contraintes dans une adhésion, est le degré d'humidité.



La figure 9 compare les courbes de traction à température ambiante (24°C) et vitesse de contrainte constante d'échantillons conservés dans différentes conditions d'humidité relative.



Les courbes 4, 5 et 6 sont les résultats d'échantillons conservés à 24°C et 90 % d'humidité relative durant 20 jours. Les courbes 1, 2 et 3 proviennent d'échantillons conservés à 24°C avec une humidité relative voisine de zéro. On remarquera que le taux d'humidité relative élevé diminue sensiblement la rigidité de la résine et n'influence que faiblement sa résistance limite.

## 7. CONCLUSIONS

Les premiers résultats de notre programme d'expériences indiquent clairement :

- l'importance du recuit sur les propriétés intrinsèques de la résine ;
- la possibilité d'obtenir rapidement à l'aide de mesures dynamiques l'influence de la température et de la fréquence ;
- l'influence de l'état de surface sur les qualités adhésives de la résine ;
- l'influence de l'humidité relative sur la rigidité de la résine ;
- le seuil de contrainte relativement bas à partir duquel des effets non-linéaires sont à prendre en considération.

Notre programme actuel tente d'intégrer l'ensemble de ces facteurs et leur influence sur le mécanisme de l'adhésion par résines époxy.

## REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier le Fonds de la Recherche Fondamentale Collective Belge pour son aide financière.

Nous voulons également remercier Mme BOURLAU et Mr. VRIJDAG pour le soin apporté respectivement à la dactylographie de ce texte et aux figures et photos.

Toute l'équipe scientifique et technique du département des Milieux Continus de la V.U.B. a contribué à la précision de nos objectifs et l'analyse critique de nos résultats par de nombreuses discussions amicales.

## BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] R.A. SCHAPERY, "On a Thermodynamic Constitutive Theory and its Application to various Nonlinear Materials". IUTAM Colloquium on "Thermoinelasticity" (ed. B. BOLEY), 259-285, 1970, Springer Verlag, Wien, New York.
- [ 2 ] A. CARDON, Cl. HIEL, "Détermination du comportement des matériaux composites sous conditions dynamiques". Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, Tome V, 6, février 1982, 283-291.
- [ 3 ] F. BOULPAEP, A. CARDON, Cl. HIEL, "Dynamic Methods for the Determination of the Viscoelastic Properties of Epoxy Materials used for Refections of Civil Engineering Constructions". Rheol. Acta 21, 420-422, 1982.

## ÉCOULEMENTS POLYMERIQUES NON VISCOMÉTRIQUES NON-VISCOSIMETRIC POLYMERIC FLOWS

M. FRIAS  
CINDEN - C. MAT. POLYM., LISBONNE

### RÉSUMÉ

Les processus de formation des matériaux polymériques présentent souvent des écoulements non viscométriques. Il en suffit de rappeler la formation de fibres textiles, l'extrusion, la superviscosité d'étirage et l'effet de réduction de dragage sur certains écoulements turbulents. La littérature abonde en rapports entre grandeurs cinématiques et grandeurs dynamiques modélés par des lois physicochimiques dont la portée reste douteuse. On en essaie de trouver un appui cohérent dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

### ABSTRACT

Nonviscometric flows are frequently met when forming polymeric materials. It suffices to remind the formation of textile fibres, the extrusion, the stretching superviscosity and the drag reduction effect appearing on some turbulent flows. The literature abounds in relations between kinematic and dynamic magnitudes inspired by physicochemical patterns with doubtful extent. We there attempt to find out a coherent support on the framework of continuum mechanics.

### 1. LE FLUIDE SIMPLE PUREMENT VISQUEUX

Un matériau est dit simple, selon Noll, si la contrainte, lo-

(§) Communication au Groupe Français de Rhéologie, le 1<sup>er</sup> Décembre 1982.

cale, est déterminée par l'histoire du gradient de la déformation au même point,

$$T = \mathcal{F}(D(t-s)) \quad (1.1)$$

Un fluide est un matériau simple dont le comportement est invariant après toute déformation conservant la densité, en particulier des rotations et des réflexions, c'est à dire, des transformations orthogonales. En conséquence, un fluide est un matériau isotrope.

Les fluides nous concernant étant des milieux incompressibles, les équations rhéologiques sont toujours indéterminées à une pression près, soit (1.1) devient

$$T = \mathcal{F}(D(t-s)) - pI \quad (1.2)$$

où  $I$  est le tenseur unité.

Selon Reiner et Truesdell, pour un milieu isotrope, la contrainte peut être développée en série de puissances sur le taux de cisaillement,

$$T = a_1 D + a_2 D^2 + a_3 D^3 + a_4 D^4 + \dots \quad (1.3)$$

La matrice de  $D$  doit satisfaire à sa propre équation de Cayley-Hamilton, laquelle pour une matrice de dimension trois, carrée, prend la forme

$$D^3 = I_1 D^2 + I_2 D + I_3 I \quad (1.4)$$

où  $I$  est la matrice unité et les invariants  $I_1, I_2, I_3$  prennent des valeurs en fonction des valeurs propres de la matrice respectivement,

$$\begin{aligned} I_1 &= p + q + r \\ I_2 &= pq + qr + rp \\ I_3 &= pqr \end{aligned} \quad (1.5)$$

Alors,  $T$  devient quadratique en  $D$ ,

$$T = b_0 I + b_1 D + b_2 D^2 \quad (1.6)$$

les coefficients étant fonctions des invariants ci-dessus.

Si nous considérons maintenant une expérience de cisaillement avec

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

on aura

$$T = b_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

c'est à dire,

- Il manque une pression pour empêcher le matériau de se dilater ou de se contracter, selon le cas;
- Il faut des tensions normales pour empêcher le matériau de s'allonger ou de se rétrécir, selon le cas.

Ces deux effets, respectivement de Kelvin-Reynolds et de Poynting, sont caractéristiques de la mécanique non-linéaire et, qualitativement, indépendants de la nature du matériau.

Les coefficients de (1.6) étant indépendants, on remarquera que:

- Les effets de Kelvin-Reynolds et de Poynting sont indépendants;
- Ces deux effets sont aussi indépendants de l'effet de cisaillement classique, traduit par le deuxième terme de (1.8);
- Ces conclusions sont indépendantes, en plus de la nature du matériau, de la définition particulière de la déformation.

Envisageons en plus l'extension,

$$D = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Au lieu de (1.6) on aura

$$T = b_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Contrairement au cisaillement, on ne trouve pas ici des effets d'orientation tensorielle diverse.

La plupart des écoulements observés en laboratoire rhéologique sont caractérisés par des champs de vitesses simples, par exemple les écoulements, respectivement,

- a) de Couette,  $\dot{x}_1 = \dot{x}_3 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = \omega(r)$
- b) de Poiseuille,  $\dot{x}_1 = \dot{x}_3 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = u(r)$
- c) cône-plateau,  $\dot{x}_1 = \dot{x}_3 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = \omega(\theta)$

Ce sont des écoulements viscométriques, c'est à dire des écoulements à histoire de déformation relative constante, dont la transformation d'un élément, dans le temps, est un glissement simple à vitesse constante.

## 2. LES EFFETS " ANOMALX "

Ostwald a observé des anomalies sur les écoulements de solutions colloïdales et a proposé qu'une viscosité structurale, distincte de la viscosité newtonienne, y intervenait.

Freundlich a suggéré une élasticité pour la solution colloïdale. Staudinger, qui a bâti le premier le concept de macromolécule, a remarqué que l'effet de la température sur la viscosité pourrait être contrarié par le mouvement

brownien favorisé par l'augmentation de la température. C'est à dire, un effet macromoléculaire était observé en compétition avec un effet thermique, voire entropique.

Loewe, de Waele et Ostwald ont proposé que les écarts d'écoulement pourraient être inclus dans une formule inspirée par les isothermes d'adsorption,

$$V = k p^m \quad (2.1)$$

où  $k$  et  $m$  sont des paramètres,  $V$  le débit volumétrique en écoulement capillaire par unité de temps et  $p$  la perte de pression.

Farrow, Loewe et Neale ont proposé une relation analogue à (2.1) mais entre le taux de déformation et la tension de cisaillement,

$$dv/dx = k t^n \quad (2.2)$$

les valeurs de  $n > 1$  correspondant à des lois paraboliques comme le fluide dilatant et les "infranewtoniens" à des lois hyperboliques comme le fluide pseudoplastique et la plupart des écoulements plus connus en rhéologie.

Aussi d'inspiration physicochimique Eyring a suggéré un modèle de sa cinétique des vacuoles,

$$t = A \operatorname{arcsinh} (-B dv/dx) \quad (2.3)$$

Aux applications, ces modèles souffrent de divers problèmes d'échelle, donnant des résultats non comparables sur des appareils différents. La logarithmisation des lois les rendent apparemment linéaires. L'apparition de beaucoup de tables ont rendu pourtant populaires beaucoup de ces "lois". Entre les modèles plus modernes, celui d'Ellis, avec lequel Bird et ses collaborateurs ont bien travaillé, est probablement le plus appliqué,

$$-dv/dy = (f_0 + f_1 |t|^{a-1}) t \quad (2.4)$$

avec trois paramètres ajustables. Contrairement aux modè-



les antérieurs, celui-ci a l'écoulement newtonien comme limite, soit avec  $a < 1$ , quand  $t$  devient très petit, soit avec  $a > 1$ , quand  $t$  devient très grand. Les soi dites lois de puissance sont aussi incluses.

### 3. LE DRAGAGE POLYMÉRIQUE

Dans l'écoulement laminaire en régime stationnaire d'un fluide dans un tube capillaire, le dragage visqueux balance la différence de pression entre les deux extrémités du tube,

$$\eta \left( \frac{dv}{dr} \right) 2\pi r l = - \pi r^2 (p_1 - p_2) \quad (3.1)$$

d'où

$$v = (p_1 - p_2) (a^2 - r^2) / 4l\eta \quad (3.2)$$

ou, en termes de débit volumétrique par seconde,

$$V = \pi (p_1 - p_2) a^4 / 8l\eta \quad (3.3)$$

$$\eta = \pi (p_1 - p_2) a^4 / 8lV \quad (3.4)$$

Ainsi, en régime laminaire, la vitesse moyenne de l'écoulement,  $V/\pi a^2$ , est proportionnelle à la différence de pression nécessaire pour contrebalancer les forces de viscosité. Quand la vitesse augmente, on entre dans un régime prèturbulent avec des perturbations diverses sur les lignes de courant, qui se transforment en petits turbillons pour une vitesse critique, à un nombre de Reynolds critique. On a observé que cette vitesse critique a un caractère qualitatif suivant,

$$\text{vitesse} = \text{viscosité}^x \cdot \text{rayon}^y \cdot \text{densité}^z \quad (3.5)$$

La respective analyse dimensionnelle nous donne

$$L T^{-1} = M^x L^{-x} T^{-x} \cdot L^y \cdot M^z L^{-3z} \quad (3.6)$$

soit

$$1 = -x + y - 3z$$

$$-1 = -x$$

$$0 = +x + z$$

$$\text{d'où, } x = 1, y = -1, z = -1$$

Il en résulte que

$$\text{VITESSE CRITIQUE} = \frac{K \cdot \text{VISCOSITÉ}}{\text{RAYON} \cdot \text{DENSITÉ}} \quad (3.7)$$

c'est à dire, la viscosité élevée favorise le régime laminaire, la densité et le rayon du tube d'écoulement ayant l'effet opposé. L'analyse dimensionnelle nous conduit, en régime laminaire, ainsi à une relation simple où  $K$  est le nombre de Reynolds.

Depuis des ans que l'écoulement turbulent est analysé en tubes de Pitot en régime stationnaire. On y observe que le dragage est maximum sur l'axe du tube et que la vitesse varie décroissant paraboliquement à partir de l'axe,

$$v_0 - v = b r^2 \quad (3.8)$$

Au lieu de  $\eta dv/dr$  on peut exprimer le dragage  $F$ ,

$$2 r l F = - (p_1 - p_2) r^2 \quad (3.9)$$

ou

$$F = (p_1 - p_2) / 4bl \frac{dv}{dr} = \eta^t \frac{dv}{dr} \quad (3.10)$$

en faisant intervenir une "viscosité turbulente"  $\eta^t$ , dépendante de  $p_1 - p_2$  qui détermine la vitesse.

Les rapports  $T(D)$  de Reiner-Rivlin et Truesdell ne s'appliquant, en principe, au régime turbulent, on doit revenir à la fonctionnelle

$$T = \mathcal{F}(D) \quad (3.11)$$

Il faut en plus remarquer que

$$\begin{aligned} \dim T &= M L^{-1} T^{-2} \\ \dim D &= T^{-1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

soit, l'application fonctionnelle sur D doit inclure un paramètre temporel. Au lieu d'un fluide purement visqueux, on a affaire à un fluide viscoélastique, un milieu viscoélastique ayant toujours un paramètre temporel, vu que la dimension du rapport viscosité / module d'élasticité est

$$\dim(\eta/E) = T \quad (3.13)$$

Une solution polymérique est un fluide viscoélastique - non purement visqueux - qui, en régime d'écoulement turbulent, répond, essentiellement, par sa composante élastique. On pourra écrire que, pour la solution polymérique,

$$T = \mathcal{F}(D_1 + i D_2) \quad (3.14)$$

le rapport  $D_2/D_1$  devenant négligeable même pour des concentrations peu appréciables, le fluide ayant une réponse quasi élastique, avec un spectaculaire effet de réduction du dragage visqueux.

Les recherches sur la structure de la turbulence des écoulements de fluides viscoélastiques ont montré (5) que même pour de très petites concentrations, les fluides possèdent un temps de relaxation principal, généralement inférieur à 0,1 seconde.

#### 4. LES ÉCOULEMENTS D'ÉTIRAGE

Dans les écoulements de formation de filaments ou de films polymériques, les particules ou éléments matériels subissent un champ de contraintes qui les écarte du glissement simple viscométrique. La nature des déformations étant de la forme (1.10), beaucoup de formules rhéologiques ont été pro-

posées pour modéliser l'écoulement, en particulier l'étirage à très haute viscosité. Si l'on considère la matrice de déformation

$$D = \begin{bmatrix} \dot{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{a}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{a}/2 \end{bmatrix} = (d_{ik}) \quad (4.1)$$

le premier élément diagonal déterminant les autres en raison de l'incompressibilité du milieu et de la symétrie de l'écoulement.

L'étirage  $u_1$  est, simplement,

$$u_1 = dx_1/dt = \dot{a}x_1 \quad (4.2)$$

En régime stationnaire  $\dot{a} = \text{const.}$ , l'évolution de l'écoulement de  $t'$  à  $t$  étant telle que

$$\begin{aligned} \ln(x_1/x_1') &= \dot{a}(t-t') \\ x_1'(t') &= x_1 \exp(-\dot{a}(t-t')) \\ x_2'(t') &= x_2 \exp(\dot{a}/2(t-t')) \\ x_3'(t') &= x_3 \exp(\dot{a}/2(t-t')) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Au lieu de postuler ou proposer une formule rhéologique, on va analyser la fonctionnelle de la contrainte,  $p_{ij}$ ,

$$\begin{aligned} p_{ij}' &= p_{ij} + p_{ij} \\ p_{ij}' &= \int_{t_0}^t \psi(t-t') (\partial x_i / \partial x_k') (\partial x_j / \partial x_l') d_{kl}(t') dt' \\ &= \int_{t_0}^t \psi(t-t') \begin{bmatrix} \exp 2\dot{a}(t-t') & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \exp(-\dot{a}(t-t')) & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \exp(-\dot{a}(t-t')) \end{bmatrix} dt' \end{aligned} \quad (4.4)$$

étant  $t_0 < t' < t$ .

$$(4.5)$$

On peut admettre que le matériau est un milieu à mémoire courte, soit

$$\psi(t-t') = \int_0^{\infty} N(w)/w \exp(-(t-t')/w) dw \quad (4.6)$$

En intégrant (4.5) on obtient

$$p_{11}^i = \dot{\lambda} \int_0^{\infty} N(w) \left( \frac{3}{(1-2aw)(1+aw)} - \exp(t_0-t) \frac{1-2\dot{a}w}{w} + \exp(t_0-t) \frac{1+\dot{a}w}{w} \right) dw \quad (4.7)$$

On admet que la tension sur la surface du filament est négligeable,  $p_{22} = p_{33} = 0$ ,  $p_{11}$  devenant alors

$$p_{11} = \dot{\lambda} \int_0^{\infty} N(w) \left( \frac{3}{(1-2aw)(1+aw)} - \exp(t_0-t) \frac{1-2\dot{a}w}{w} + \exp(t_0-t) \frac{1+\dot{a}w}{w} \right) dw \quad (4.8)$$

Alors,

$$p_{11}/\dot{\lambda} = 3 \int_0^{\infty} N(w) dw = 3 \eta \quad (4.9)$$

c'est à dire, on retrouve la viscosité de Trouton, pour l'étirage, sans faire appel à des propositions rhéologiques particulières.

Il faut noter que le comportement viscoélastique non linéaire des solutions polymériques, dans la littérature récente, s'appuie sur des équations constitutives du même type, dues, à partir de considérations tout à fait diverses, à M. Philips (4).

#### Références

- (1) AKBAY, U., BECKER, E., KROZER, S., SPONAGEL, S., *Rheology*, 11, 1980, 79, Plenum;
- (2) FRIAS, M. *Rheology*, 11, 749, Plenum, 1980;
- (3) KEPES, A. *Rheology*, 11, 185, Plenum, 1980;
- (4) PHILIPS, M. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 2, 109, 1977;
- (5) SCHÜMMER, P., THIELEN, W., *Rheology*, 11, 132, Plenum, 1980;
- (6) TANNER, R. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 6, 289, 1980;
- (7) TRUESDELL, C. *Handbuch der Physik*, 111/3, Springer, 1965.

## PHENOMENES DE PROPAGATION D'ONDES DE TRAFIC ROUTIER DANS UN SOL A COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE

### PROPAGATION OF ROAD TRAFFIC WAVES IN A VISCOELASTIC MEDIUM

D. LE HOUUEDEC

Docteur ès Sciences - Maître-Assistant au Laboratoire de Génie Civil  
ENSM - 1, rue de la Noë - 44072 NANTES Cedex

#### RESUME

Le passage d'un véhicule sur un profil routier donne naissance à des vibrations qui sont ensuite transmises au sol pour finalement atteindre les structures environnantes. L'étude de ce cheminement prend en compte les problèmes de propagation d'ondes dans les milieux traversés pour lesquels on doit admettre une loi de comportement dynamique. Pour un massif à comportement viscoélastique, on montre que la décroissance exponentielle des ondes de surface est proportionnelle à la fréquence d'excitation et inversement proportionnelle à la vitesse de l'onde. De plus, la méthode utilisée donne dans le cas d'un sol élastique, des résultats intéressants qui sont en plein accord qualitatif avec les mesures expérimentales effectuées in-situ sur des sols sableux et argileux.

#### ABSTRACT

The vehicle traffic on a road profile produces vibrations that after are propagated in the ground and finally reach the neighbouring buildings. The study of this motion takes into the account the problems of wave propagation in the soil masses. For these ones, we must assume a dynamical behaviour law. With a viscous-elastic soil, we show that the exponential decrease of surface waves is proportional to the traffic frequency and inversely proportional to the wave velocity. Besides, in the case of an elastic soil, the used method gives interesting results that are in full agreement with the in-situ tests recorded on clayey and sandy grounds.

#### 1. INTRODUCTION

Les problèmes liés au trafic routier ont pris naissance dans la deuxième partie du XX<sup>e</sup> siècle avec le développement accéléré de l'industrie automobile. Certes, au cours des dix dernières années, cet accroissement s'est trouvé ralenti par suite de la crise de l'énergie. Malgré tout, les gênes créées par le trafic routier peuvent toujours être constatées par chacun. Par celles-ci, les vibra-

(\*\*) Communication au 17<sup>e</sup> Colloque Annuel du Groupe Français de Rhéologie (1<sup>er</sup> et 2 décembre 1982)

tions mécaniques occupent sans doute une place moins importante que par exemple la pollution atmosphérique ou le bruit. Néanmoins, leur impact est loin d'être négligeable et pour le confirmer, nous pouvons signaler 2 cas précis où ces vibrations mécaniques ont été directement à l'origine de dommages occasionnés sur des bâtiments avoisinant les voies de circulation routière. En premier lieu, des dommages très importants (destruction de crépis et de fresques, crevasses sur une façade, fissure dans une tour, chute de blocs à partir d'une corniche...) ont été constatés à partir de 1950 au Palais de Farnesina à Rome par suite de l'augmentation du trafic lourd sur le boulevard longeant le Palais [1]. L'autre exemple concerne une rue de Rennes où deux tranchées voisines (électricité et eau) mal remblayées ont été directement à l'origine de vibrations lors du passage du trafic lourd, occasionnant dans un immeuble proche, des dommages appréciables (fissuration importante des plâtres, chute de cadres accrochés au mur). Bien sûr, pour tous les cas de dommages observés, il n'est jamais prouvé que le trafic routier porte l'entière responsabilité des désordres. On peut en effet penser que son action dépend également beaucoup des sols traversés et cette remarque justifie à elle seule l'intérêt d'une recherche se préoccupant de la corrélation existant entre les caractéristiques des vibrations (dues au trafic routier en ce qui nous concerne) et celles des sols en présence.

## 2. CARACTERISTIQUES DES VIBRATIONS DUES AU TRAFIC ROUTIER ET DE DIFFERENTS TYPES DE SOLS

### 2.1. Caractéristiques des vibrations dues au trafic routier

Rappelons d'abord que les sollicitations importantes proviennent exclusivement du trafic lourd. En effet, on admet généralement que les véhicules lourds (camions, bus) produisent des amplitudes de vibrations pratiquement dix fois supérieures à celles occasionnées par des véhicules légers [2]. Les vibrations dues au trafic routier prennent leur origine pour une faible part dans le véhicule lui-même (mauvais équilibrage de parties tournantes par exemple) mais surtout à cause des défauts d'uni de la chaussée. Malgré l'amélioration des engins de construction de routes, il subsiste toujours, au niveau de la surface, des dénivellations agissant en particulier sur les amplitudes des vibrations transmises par le pneu. En France, ces défauts d'uni sont caractérisés par leur longueur d'onde et leur amplitude dont les caractéristiques statistiques sont déduites des relevés obtenus par l'analyseur de profil en long type L.C.P.C. Ces données permettent alors de répertorier les chaussées en classes d'uni (de 1 à 10) [3].

Les fréquences  $f_0$  des vibrations transmises par le trafic sont directement liées aux longueurs d'onde  $\lambda$  du profil et à la vitesse  $v_0$  de déplacement du véhicule par la relation  $f_0 = \frac{v_0}{\lambda}$ . En règle générale, pour un profil routier, cette longueur d'onde varie entre environ 1 m et une soixantaine de m, ce qui, pour une vitesse de 60 km/h, donne des fréquences comprises entre 0,3 et 17 Hz. Pour des chaussées pavées existant encore au centre des villes, les fréquences sont obligatoirement plus élevées et peuvent même dépasser une centaine d'Hz. Ce domaine de fréquences peut contenir des fréquences propres fondamentales d'éléments de constructions avoisinant les voies de circulation. Ainsi, STEFFENS [4] signale le cas d'une voûte médiévale de 8,5 m de portée et de 0,25 m de hauteur ayant une fréquence fondamentale de 11 Hz.

### 2.2. Caractéristiques des sols

Deux types de sols possédant des caractéristiques physiques et dynamiques particulières peuvent se comporter de manière totalement différente en réponse à des sollicitations. Ainsi, on admet généralement que les accélérations des vibrations dues au trafic et transmises dans le sol sont bien plus importantes dans les argiles humides que dans les terrains sableux. Mais l'amplitude de ces vibrations décroît plus rapidement dans les argiles que dans les sables. D'autre part, la vitesse de propagation en surface des ondes de Rayleigh est nettement plus faible dans des terrains marécageux que dans des calcaires altérés par exem-

ple. Ces remarques ont été établies à la suite de différents résultats obtenus in-situ et sont satisfaites en règle générale. Par contre, les hypothèses concernant les lois de comportement des sols sont plus complexes et sans cesse remises en cause. La donnée la plus simple considère le sol comme un milieu homogène, élastique et isotrope. Cette schématisation très simplificatrice par rapport à la réalité permet malgré tout de justifier par un calcul, pas nécessairement élémentaire d'ailleurs, les conclusions énoncées ci-dessus. En fait, les caractéristiques des sols dépendent d'un nombre très élevé de facteurs dont la prise en compte complète est impossible. A titre d'exemple, on peut signaler que le module de cisaillement d'un sable est entre autres fonction des caractéristiques statiques et dynamiques des contraintes exercées (amplitude, fréquence), de l'indice des vides, du degré de saturation du sol, des caractéristiques des grains, de la température...

L'amortissement interne du sol constitue également un facteur extrêmement important pour tous les problèmes de propagation des vibrations. La loi de décroissance des amplitudes qui en résulte a été souvent discutée mais la constance de ces lois tient à la présence d'un terme de la forme  $\exp(-\alpha d)$  où  $d$  est la distance entre la source et le point de réponse, et  $\alpha$  est, selon les auteurs, dépendant ou non de la fréquence. S'il y a dépendance, on admet habituellement que ce coefficient  $\alpha$  est proportionnel à la fréquence et inversement proportionnel à la vitesse de transmission de l'onde. Nous verrons par la suite que l'hypothèse d'un comportement viscoélastique du sol conduit à obtenir les conditions précitées sur  $\alpha$ .

## 3. REPOSE D'UN MASSIF A COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE SOUMIS A DES SOLLICITATIONS VIBRATOIRES DUES A UN TRAFIC ROUTIER DENSE

### 3.1 - Hypothèses d'étude

Le cas d'un véhicule franchissant une irrégularité du type "nid de poule" pourrait être schématisé par une charge vibratoire ponctuelle. Par contre, pour un trafic dense circulant sur un profil statistiquement régulier, une représentation plus adaptée est obtenue en considérant une répartition des efforts sur une bande dont la largeur correspond à celle de la voie de circulation. Dans ce cas, une hypothèse très simplificatrice consiste à admettre que cette répartition est uniforme et que la fréquence d'excitation est identique pour toutes les sollicitations agissantes. Comme le montre la figure 1, nous sommes alors ramenés à la résolution d'un problème bidimensionnel à déformation plane.

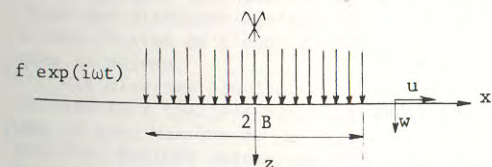


Fig. 1 - Représentation des sollicitations dues au trafic routier

Pour le sol lui-même, nous le considérons comme un massif semi-infini, homogène, isotrope et à comportement viscoélastique caractérisé par une équation du mouvement que nous présenterons par la suite. Pour des raisons pratiques bien compréhensibles, le relevé des réponses s'effectue en général uniquement à la surface du sol. Cette constatation étant faite, nous nous sommes par conséquent limités à la recherche des déplacements obtenus à la surface du massif.

### 3.2. Equations du mouvement

Avec les hypothèses précitées, l'application du principe fondamental de la dynamique en un point non chargé conduit à l'équation suivante des ondes :

$$\{[(\lambda + \mu) + (\lambda' + \mu') \frac{\partial}{\partial t}] \text{grad div} + (\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}) \Delta - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\} \vec{U} = \vec{0} \quad (1)$$

où  $\vec{U}(u, v, w)$  est la fonction déplacement,  $\lambda$  et  $\mu$  les modules de Lamé,  $\rho$  la masse

volumique,  $\lambda'$  et  $\mu'$  les paramètres fonction de la dissipation d'énergie dans le sol et liés aux modules  $\lambda$  et  $\mu$  par les relations [5] :

$$\lambda' + 2\mu' = \frac{\lambda + 2\mu}{Q_p \omega}, \quad \mu' = \frac{\mu}{Q_s \omega} \quad (2)$$

$Q_p$  et  $Q_s$  sont alors des coefficients adimensionnels caractérisant l'amortissement dans le milieu des ondes primaires P et secondaires S, et  $\omega$  est la pulsation de l'onde transmise.

D'autre part, la loi contraintes-déformations tenant compte du comportement viscoélastique du sol s'écrit :

$$\sigma_{ij} = (\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t}) (\delta_{ij} \text{div } \vec{U}) + (\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}) (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \quad (3)$$

Aux équations (1) et (3), s'ajoutent les conditions aux limites sur la frontière du massif, à savoir :

$$\begin{aligned} - \text{ pour la contrainte normale } & (\sigma_{zz})_{z=0} = f \exp i\omega t \quad \text{si } |x| \leq B \\ & = 0 \quad \text{si } |x| > B \end{aligned} \quad (4a)$$

$$- \text{ pour la contrainte de cisaillement } (\sigma_{xz})_{z=0} = 0 \quad \text{quel que soit } x \quad (4b)$$

La recherche des déplacements dans les sens horizontal ( $u$ ) et vertical ( $w$ ) s'effectue d'une part en considérant que  $\vec{U}$  dérive d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vectoriel, et d'autre part en utilisant une transformée de Fourier pour les équations (1), (3) et (4). Cette méthode qui a été largement développée dans le cas d'un comportement élastique du sol [6] permet la détermination analytique des déplacements transformés. L'application d'une transformée inverse de Fourier à ces résultats conduit aux expressions des déplacements en surface donnés sous forme intégrale. Ainsi nous obtenons :

$$u_{z=0} = \frac{i f K_s^2}{\rho \omega^2 \pi} \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_s^2 - 2\zeta^2 + 2(\zeta^2 - K_p^2)^{1/2} (\zeta^2 - K_s^2)^{1/2}}{F(\zeta)} \sin \zeta B \exp(-i\zeta x) d\zeta \quad (5)$$

$$w_{z=0} = - \frac{f K_s^4}{\rho \omega^2 \pi} \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\zeta^2 - K_p^2)^{1/2}}{\zeta F(\zeta)} \sin \zeta B \exp(-i\zeta x) d\zeta \quad (6)$$

où  $K_p = \frac{\omega}{v_p}$ ,  $K_s = \frac{\omega}{v_s}$ ,  $v_p$  et  $v_s$  représentant les vitesses complexes des ondes P et S définies comme suit :

$$v_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} (1 + \frac{i}{Q_p}) \quad (7a)$$

$$v_s^2 = \frac{\mu}{\rho} (1 + \frac{i}{Q_s}) \quad (7b)$$

On peut ajouter que dans d'autres domaines de recherche (physique des solides par exemple), on introduit le concept de pulsation complexe au lieu de considérer des vitesses complexes. Mais dans les deux cas, les quantités  $K_p$  et  $K_s$  conservent les mêmes significations.

D'autre part,  $F(\zeta)$  représente la fonction connue sous le nom de fonction complexe de Rayleigh et s'écrivant :

$$F(\zeta) = (2\zeta^2 - K_s^2)^2 - 4\zeta^2 (\zeta^2 - K_p^2)^{1/2} (\zeta^2 - K_s^2)^{1/2} \quad (8)$$

Il faut ajouter que les expressions intégrales (5) et (6) donnant les composantes horizontale et verticale des déplacements en surface sont strictement identiques à celles obtenues dans l'hypothèse d'un comportement élastique du sol. La seule modification concerne  $K_p$  et  $K_s$  qui, au lieu d'être réels comme précédemment, deviennent maintenant complexes.

#### 4. ANALYSE DE QUELQUES RESULTATS OBTENUS

##### 4.1. Commentaires sur les résultats relevés en milieu élastique

Nous rappelons que la méthode de calcul des déplacements en surface pour un massif élastique utilise le domaine d'intégration en variable complexe représenté sur la fig. 2 :

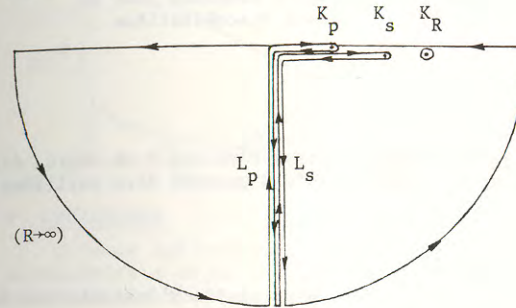


Fig. 2 - Domaine d'intégration utilisé pour un massif élastique

En fait, on démontre que les contributions des ondes de volume P et S se calculent le long des contours  $L_p$  et  $L_s$  entourant les points de ramification  $K_p$  et  $K_s$ , tandis que le résidu calculé au pôle  $K_R$  évalue l'influence de l'onde superficielle

R. Ce dernier résultat est indépendant de la distance entre la chaussée et le point de réponse, et varie uniquement en fonction de la fréquence d'excitation et des caractéristiques (module d'Young et coefficient de Poisson) du sol. Des applications numériques réalisées pour des massifs argileux et sableux avec des fréquences d'excitation comprises entre 1 et 20 Hz nous ont permis d'aboutir à des conclusions identiques à celles tirées d'essais in-situ, à savoir [7] :

- pour un massif argileux, l'amplitude des déplacements verticaux est toujours supérieure à celle des déplacements horizontaux. Par contre, il n'en est pas de même pour un massif sableux.
- Les amplitudes dans l'argile sont en général plus élevées que celles obtenues dans le sable. Toutefois, il existe des conditions de distance et de fréquence pour lesquelles les conclusions précédentes ne sont pas vérifiées.
- Pour des distances supérieures à cinq fois la longueur de l'onde superficielle, la contribution de l'onde de Rayleigh est prépondérante par rapport à celles des ondes de volume.

Ces diverses conclusions totalement confirmées par les résultats d'essais expérimentaux réalisés sur site montrent donc en particulier que, mise à part dans la zone voisine de la chaussée, les déplacements du massif en surface peuvent être évalués approximativement à partir de la connaissance de la réponse due à l'onde superficielle de Rayleigh.

##### 4.2. Contribution de l'onde superficielle pour un massif viscoélastique

Remarquons d'abord que généralement dans ce cas on admet l'hypothèse  $Q_p = Q_s = Q$ . Ceci revient à dire que les caractéristiques d'amortissement sont identiques au cours de la transmission des ondes P, S et R. En fait, cette hypothèse entraîne que les quantités  $K_p$ ,  $K_s$  et  $K_R$  solution de  $F(\zeta) = 0$ , possèdent le même argument ( $-\theta$ ) égal à  $\text{Arc tg}(-\frac{1}{2Q})$ . Ces considérations conduisent aux modifications du domaine d'intégration sous la forme indiquée sur la fig. 3 :

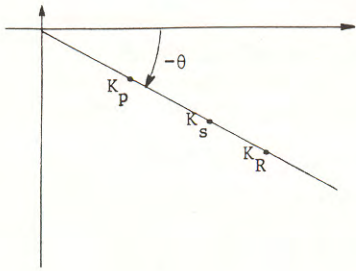


Fig. 3 - Domaine complexe pour un massif viscoélastique

Evidemment, les valeurs de  $Q$  sont extrêmement variables d'un sol à un autre. Ainsi, nous donnons ci-après quelques valeurs moyennes de  $Q$  pouvant être utilisées pour différents types de sols [5] :

- Argile, sol argileux.....  $Q \approx 1$
- Sable, silt, gravier, loess..  $Q \approx 10$
- Roche.....  $Q \approx 100$

Nous avons déjà vu que la contribution de l'onde superficielle s'évaluait par le calcul du résidu au pôle  $K_R$ . Pour le déplacement horizontal, nous obtenons :

$$u_{R,z=0} = + \frac{f}{2\rho\omega^2} \exp(i\omega t) \frac{K_s^4 (2K_R^2 - K_s^2)^3}{-K_s^8 + 4K_s^6 K_R^2 + 8K_R^6 (K_p^2 - K_s^2)} \cdot \frac{\sin B K_R}{K_R} \exp(-i K_R x) \quad (9a)$$

et pour le déplacement vertical, nous déduisons de même :

$$w_{R,z=0} = \frac{i f}{\rho\omega^2} \exp(i\omega t) \frac{K_s^4 K_R (K_R^2 - K_p^2)^{1/2} (2K_R^2 - K_s^2)^2}{-K_s^8 + 4K_s^6 K_R^2 + 8K_R^6 (K_p^2 - K_s^2)} \cdot \frac{\sin B K_R}{K_R} \exp(-i K_R x) \quad (9b)$$

Le rapport  $\frac{K_R}{K_s} = \beta$  est dans ce cas d'étude un paramètre réel dépendant uniquement de la nature du sol considéré. Comme nous pouvons écrire  $K_s$  sous la forme :

$$K_s = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \omega \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{Q}} \right)^{1/2}$$

nous déduisons l'expression de  $K_R$  :

$$K_R = \beta \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \omega (\cos \theta - i \sin \theta) (1 + \frac{1}{Q})^{-1/4} \quad (10)$$

La partie réelle de  $(-i K_R x)$  caractérisant la décroissance des ondes en fonction de la distance nous est alors donnée par la relation :

$$\Re(-i K_R x) = -\beta \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \omega x \sin \theta (1 + \frac{1}{Q})^{-1/4} \quad (11)$$

ce qui signifie que dans l'hypothèse d'un massif à comportement viscoélastique, le coefficient de décroissance exponentielle des amplitudes est proportionnel à la fréquence de l'excitation.

Il faut ajouter que cette fréquence n'intervient pas uniquement sur la décroissance mais constitue également un facteur important pour l'évaluation des amplitudes. A titre d'exemple, nous donnons sur la figure 4 quelques courbes obtenues pour un massif sableux ( $E = 50\,000$  kPa,  $\nu = 1/3$ ) et qui nous montrent que les amplitudes au bord de la chaussée diminuent en fonction de la fréquence. Par contre, pour un massif argileux, cette remarque n'est pas toujours vérifiée.

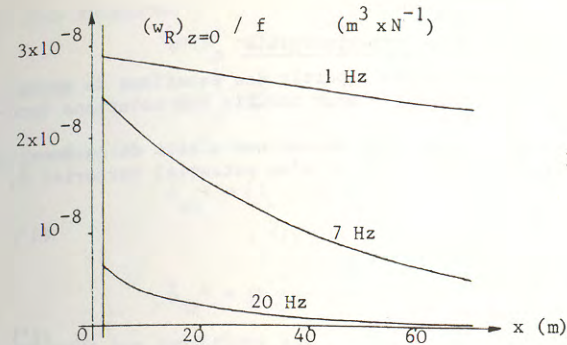


Fig. 4 - Variations des amplitudes pour un massif sableux (onde superficielle)

## 5. CONCLUSIONS

L'étude que nous venons de présenter nous a permis de relier les paramètres de viscosité d'un sol à comportement viscoélastique et la loi de décroissance exponentielle des ondes de surface qui en résulte. Ce résultat se trouve en accord avec diverses formules établies d'une manière semi-empirique à la suite d'essais expérimentaux. Toutefois, les conclusions que nous avons tirées doivent être éventuellement corrigées pour les zones voisines de la source d'excitation constituée par la voie de circulation. En effet, dans ce domaine, la contribution de l'onde de Rayleigh n'est pas toujours prépondérante. Dans le cas d'un massif élastique, l'influence des ondes de volume a déjà été examinée pour tous les points situés à l'extérieur de la zone chargée et dans l'hypothèse de la viscoélasticité, il serait donc certainement intéressant d'évaluer cette contribution des ondes P et S.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] MASSARI G. "Danno ai monumenti da traffico stradale pesante : il caso della Farnesina di Raffaello" Uria Roma N. V. VI 1971, Estratto dalla Rassegna "Ingegneri Architetti" Anno XXXI
- [2] TOKITA Y., ODA A. "On the characteristics of ground vibration generated by the traffics" Internoise 75, Sendai, August 27-29, 1975, pp 511-514
- [3] LUCAS J., VIANO A. "Mesure systématique de l'uni sur le réseau routier" Bulletin de Liaison des P. et C., n° 101, mai-juin 1979, pp 101-109
- [4] CROCKETT J.H.A. "Traffic vibration damage in medieval cathedrals" Colloque RILEM, Budapest 1963, pp 303-318
- [5] GIRARDI L. "Propagation des vibrations dans les sols homogènes ou stratifiés" Annales de l'I.T.B.T.P., n° 397, septembre 1981, pp 29-66
- [6] LE HOUDEC D. "Réduction et propagation dans le sol des vibrations dues au trafic routier urbain : cas particulier des chaussées sur fondation élastique" Thèse de Docteur ès Sciences, Université de Nantes, 20 novembre 1980
- [7] LE HOUDEC D., RIOU Y. "Analytical response of a semi-infinite soil-mass to road traffic vibrations" Proceedings of the Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Southampton (13-15 July 1982), AA Balkema Rotterdam, pp 209-223.

## Recherche des déplacements en surface sous forme intégrale

Cette annexe précise le cheminement suivi à partir des équations du mouvement (1) (3), et des conditions aux limites (4) pour aboutir aux solutions intégrales données par les relations (5) et (6).

Appelons  $u$  et  $w$  les composantes suivant les directions  $x$  et  $z$  de la fonction déplacement  $\vec{U}$  dérivant d'un potentiel scalaire  $\phi$  et d'un potentiel vectoriel  $\vec{\psi}$ , c'est-à-dire :

$$\vec{U} = \text{grad } \phi + \text{rot } \vec{\psi} \quad (1')$$

Cette décomposition permet alors d'écrire :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2')$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

où  $\psi$  désigne la composante de  $\vec{\psi}$  suivant la direction  $y$ .

Dans ce cas, la loi de comportement (3) s'exprime en chaque point :  
- pour la contrainte normale :

$$\sigma_{zz} = [\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} + 2(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t})] \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + (\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \quad (3')$$

- pour la contrainte de cisaillement :

$$\sigma_{xz} = (\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}) (-\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}) \quad (4')$$

La considération d'une excitation du type harmonique  $f \exp(i\omega t)$  conduit à établir que toutes les solutions recherchées peuvent être écrites sous la forme :

$$q(x, z, t) = q^*(x, z) \exp(i\omega t) \quad (5')$$

En effet, les déphasages entre excitation et réponse sont inclus sans problème dans l'expression complexe de  $q^*(x, z)$ .

De plus, les conditions de sollicitations extérieures n'existant que sur une partie de la frontière extérieure du domaine, la résolution immédiate n'est pas possible et pour cela, nous utilisons une transformée de Fourier définie par l'intégrale suivante :

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(i\zeta x) dx \quad (6')$$

ce qui permet d'obtenir des conditions et des équations valables dans tout le domaine transformé. Ainsi, l'équation (1') associée à (2') et (5') nous donne alors :

$$-\omega^2 \hat{\phi}^* = \frac{[\lambda + 2\mu + i\omega(\lambda' + 2\mu')]}{\rho} (-\zeta^2 \hat{\phi}^* + \frac{\partial^2 \hat{\phi}^*}{\partial z^2}) \quad (7')$$

$$-\omega^2 \hat{\psi}^* = \frac{(\mu + i\omega \mu')}{\rho} (-\zeta^2 \hat{\psi}^* + \frac{\partial^2 \hat{\psi}^*}{\partial z^2}) \quad (8')$$

En posant

$$K_p^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu + i\omega(\lambda' + 2\mu')} = \frac{\omega^2 \rho}{(\lambda + 2\mu) (1 + \frac{i}{Q_p})} \quad (9')$$

et

$$K_s^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\mu + i\omega \mu'} = \frac{\omega^2 \rho}{\mu(1 + \frac{i}{Q_s})} \quad (10')$$

nous déduisons

$$\hat{\phi}^*(K_p^2 - \zeta^2) + \frac{\partial^2 \hat{\phi}^*}{\partial z^2} = 0 \quad (11')$$

$$\hat{\psi}^*(K_s^2 - \zeta^2) + \frac{\partial^2 \hat{\psi}^*}{\partial z^2} = 0 \quad (12')$$

De même les conditions de contraintes se transforment comme suit :

$$\hat{\sigma}_{zz}^* = [\lambda + 2\mu + i\omega(\lambda' + 2\mu')] \frac{\partial^2 \hat{\phi}^*}{\partial z^2} - (\lambda + i\omega \lambda') \zeta^2 \hat{\phi}^* + 2(\mu + i\omega \mu') i\zeta \frac{\partial \hat{\psi}^*}{\partial z} \quad (13')$$

$$\hat{\sigma}_{xz}^* = (\mu + i\omega \mu') (-\frac{\partial^2 \hat{\psi}^*}{\partial z^2} - \zeta^2 \hat{\psi}^* + 2 i\zeta \frac{\partial \hat{\phi}^*}{\partial z}) \quad (14')$$

et pour les conditions aux limites, nous obtenons :

$$(\hat{\sigma}_{zz}^*)_{z=0} = 2f \exp(i\omega t) \frac{\sin \zeta B}{\zeta} \quad (15')$$

$$(\hat{\sigma}_{xz}^*)_{z=0} = 0 \quad (16')$$

Les solutions de (11') et (12') satisfaisant au critère de décroissance des ondes avec la profondeur s'écrivent sous la forme :

$$\hat{\phi}^* = A(\zeta) \exp[-(\zeta^2 - K_p^2)^{1/2} z] \quad (17')$$

$$\hat{\psi}^* = B(\zeta) \exp[-(\zeta^2 - K_s^2)^{1/2} z] \quad (18')$$

avec la restriction nécessaire de  $\mathcal{Q}_e(\zeta^2 - K_p^2)^{1/2}$  et  $\mathcal{Q}_e(\zeta^2 - K_s^2)^{1/2}$  positives

Ces expressions sont ensuite portées dans les équations (13') et (14') de façon à obtenir les contraintes normale et tangentielle en fonction des quantités  $A(\zeta)$  et  $B(\zeta)$  que nous voulons déterminer. Ainsi, nous déduisons pour  $z = 0$

$$(\hat{\sigma}_{zz}^*)_{z=0} = [2(\mu + i\omega \mu')(\zeta^2 - K_p^2) - (\lambda + i\omega \lambda') K_p^2] A(\zeta) - 2i\zeta(\mu + i\omega \mu')(\zeta^2 - K_s^2)^{1/2} B(\zeta) = 2f \frac{\sin \zeta B}{\zeta} \quad (19')$$

$$(\hat{\sigma}_{xz}^*)_{z=0} = (\mu + i\omega \mu') [-2i\zeta(\zeta^2 - K_p^2)^{1/2} A(\zeta) - (2\zeta^2 - K_s^2) B(\zeta)] = 0 \quad (20')$$

ce qui nous donne les valeurs de  $A(\zeta)$  et  $B(\zeta)$  :

$$A(\zeta) = \frac{2f K_s^2}{\rho \omega^2} \frac{2\zeta^2 - K_s^2}{F(\zeta)} \frac{\sin \zeta B}{\zeta} \quad (21')$$

$$B(\zeta) = \frac{4if K_s^2}{\rho \omega^2} \frac{(\zeta^2 - K_p^2)^{1/2}}{F(\zeta)} \sin \zeta B \quad (22')$$

où la fonction complexe de Rayleigh s'écrit :

$$F(\zeta) = (2\zeta^2 - K_s^2)^2 - 4\zeta^2 (\zeta^2 - K_p^2)^{1/2} (\zeta^2 - K_s^2)^{1/2} \quad (23')$$

En portant dans (17') et (18') puis en tenant compte des relations entre déplacements et potentiels dans le domaine transformé, nous obtenons :

$$\hat{u}^* = \frac{2if K_s^2}{\rho \omega^2} \frac{\sin \zeta B}{F(\zeta)} \{ 2(\zeta^2 - K_s^2)^{1/2} (\zeta^2 - K_p^2)^{1/2} \exp[-(\zeta^2 - K_s^2)^{1/2} z] - (2\zeta^2 - K_s^2) \exp[-(\zeta^2 - K_p^2)^{1/2} z] \} \quad (24')$$

$$\hat{w}_{z=0} = \frac{2 f K_s^2}{\rho \omega^2} \frac{\sin B\zeta}{\zeta} \frac{(\zeta^2 - K_p^2)^{1/2}}{F(\zeta)} \{ (2\zeta^2 - K_s^2) \exp [ -(\zeta^2 - K_p^2)^{1/2} z ] - 2 \zeta^2 \exp [ -(\zeta^2 - K_s^2)^{1/2} z ] \} \quad (25')$$

En considérant la transformée inverse de Fourier :

$$u_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_{z=0} \exp(-i\zeta x) d\zeta \quad (26')$$

puis en effectuant  $z = 0$ , nous déduisons les composantes du déplacement en surface, sous forme intégrale :

$$u_{z=0} = \frac{i f K_s^2}{\pi \rho \omega^2} \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_s^2 - 2\zeta^2 + 2(\zeta^2 - K_p^2)^{1/2} (\zeta^2 - K_s^2)^{1/2}}{F(\zeta)} \sin B\zeta \exp(-i\zeta x) d\zeta \quad (27')$$

$$w_{z=0} = - \frac{f K_s^4}{\pi \rho \omega^2} \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\zeta^2 - K_p^2)^{1/2}}{F(\zeta)} \frac{\sin B\zeta}{\zeta} \exp(-i\zeta x) d\zeta \quad (28')$$

expressions identiques à celles pouvant être obtenues dans le cas d'un massif élastique mais où les quantités  $K_p$  et  $K_s$  au lieu d'être réelles comme précédemment deviennent complexes.

## COMPRESSION PAR CHOC ET RUPTURE PAR ECAILLAGE D'UN VERRE DE BOROSILICATE

### SHOCK-WAVE COMPRESSION AND SPALLING OF A BOROSILICATE GLASS

J. CAGNOUX  
 Centre d'Etudes de Gramat - 46500

#### RESUME

La propagation d'une onde de contrainte plane a été étudiée dans un verre de borosilicate. Pendant la phase de compression et de détente, les composantes principales du tenseur des contraintes ont été enregistrées au moyen de capteurs piézorésistifs. Une méthode est proposée afin d'obtenir l'évolution des contraintes déviatoires pendant le processus de déformation. Le verre de borosilicate montre une réponse élastique non linéaire jusqu'à 75 kbar. Au-dessus de cette limite, la propagation témoigne d'un comportement viscoplastique, expliqué par le phénomène de compaction des verres. En traction, des capteurs piézorésistifs situés dans un matériau tampon ont été utilisés pour enregistrer le signal contrainte-temps émis par la rupture. Les résultats obtenus s'interprètent par la nucléation et la croissance de dommages internes à la matière.

#### ABSTRACT

Using one-dimensional strain conditions, the dynamic stress-wave response of a borosilicate glass was investigated. Longitudinal and lateral stresses were measured with piezoresistive gauges in loading and unloading conditions. A method is proposed to obtain deviatoric stresses versus deformation. The borosilicate glass exhibits a non linear elastic response below 75 kbar. Above this limit, the material shows a viscoplastic like behavior explained by the permanent densification of glasses. The tensile response of the material was investigated using piezoresistive gauges located in a buffer. Results agree with the nucleation and growth of spall damage.



## 1 - INTRODUCTION.

L'étude du mécanisme de déformation des verres vis à vis des sollicitations produites par la propagation des ondes de contrainte présente un double intérêt. Elle permet d'apporter des données supplémentaires, premièrement sur le comportement des matériaux fragiles au-dessus de leur limite élastique d'Hugoniot, et deuxièmement sur les mécanismes fondamentaux gouvernant la rupture par écaillage des matériaux solides.

Dans beaucoup de matériaux fragiles, Grady [1] pense que le comportement du milieu est gouverné par un phénomène d'écoulement hétérogène. La localisation des zones de rupture et l'adiabaticité du processus de déformation produiraient un abaissement de la rigidité globale du milieu. Beaucoup d'observations expérimentales, notamment sur des roches, sont cohérentes avec une telle conception. Les verres sont à priori des matériaux fragiles, isolants de la chaleur, présentant une haute limite élastique, et sont par conséquent candidats à un tel comportement. Dans un précédent travail [2], nous avons effectivement constaté une perte de rigidité au-dessus de la limite élastique d'Hugoniot d'un verre de borosilicate (\*). Nous précisons ici les résultats obtenus alors, et nous les commentons dans l'esprit d'apporter des éléments au débat précédent.

L'application d'une contrainte de traction de grande intensité et pendant un temps très court peut provoquer dans un matériau solide un type de fracture appelé écaillage. Le caractère de la rupture par écaillage diffère des ruptures quasistatiques par le fait que la contrainte de traction atteint des valeurs suffisamment élevées pour provoquer la nucléation ou l'activation d'un grand nombre de microdéfauts [3], [4]. Ainsi, suivant la durée de l'impulsion de traction, des degrés différents de dommages vont de l'existence de microfissures isolées à la pulvérisation complète du matériau par coalescence de ces microfissures. Des premiers essais d'écaillage [5] réalisés sur le verre de borosilicate avaient permis de constater que ce matériau n'échappait pas à cette conception de la rupture. Nous reprenons les résultats expérimentaux obtenus, et après les avoir interprétés, nous présentons un modèle d'endommagement du verre basé sur le critère de Butcher et Tuler.

## 2 - COMPRESSION PAR CHOC.

### 2 - 1. Les générateurs de choc.

Les chocs plans ont été générés par l'impact de projectiles lancés par un canon à gaz comprimé, et par des systèmes explosifs. La vitesse des projectiles à l'impact a été mesurée avec des aiguilles à court-circuit. La planéité a été vérifiée avec ce même type de mesure ; l'obliquité à l'impact n'a pas excédé  $2.10^{-3}$ rd au canon à gaz et  $10^{-2}$ rd avec l'explosif.

### 2 - 2. Mesure de la contrainte longitudinale $\sigma_x$ .

#### 2-2-1. Montage expérimental

Les échantillons sont des disques de 80mm de diamètre ; leurs faces ont une planéité à 0,01mm près et un parallélisme à  $3.10^{-4}$ rd près. Des capteurs piézorésistifs sont montés entre ces disques, à raison de deux capteurs par plan de mesure ; ces derniers étant placés perpendiculairement à la direction de propagation du choc. Le dernier disque du montage a une épaisseur telle que les ondes de détente ne peuvent provenir que de la surface libre de l'impacteur, pendant la durée de la mesure. Ce montage est schématisé sur la Figure 1.

(\*)  $80\%SiO_2$ ,  $13,1\%B_2O_3$ ,  $3,50\%Na_2O$ ,  $1,10\%K_2O$ ,  $2,25\%Al_2O_3$ ,  $0,05\%Fe_2O_3$ .

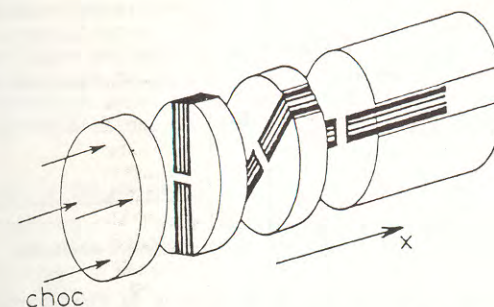


Figure 1 : Eclaté du montage expérimental destiné à mesurer la contrainte longitudinale  $\sigma_x$ .

#### 2-2-2. Les capteurs piézorésistifs et la chaîne de mesure.

La matière première utilisée pour la fabrication des jauges se présente sous la forme de feuilles de manganin de la société MAPREN (\*). Des jauges à quatre pattes, d'impédance  $300\Omega$ , ont été photodécoupées dans les laboratoires du Centre d'Etudes de Gramat à partir de feuilles de  $35\mu m$  d'épaisseur. La partie sensible de ces jauges a la géométrie d'un fil de 5mm de long. Ces capteurs sont insérés entre deux feuilles de mylar de  $15\mu m$  d'épaisseur. Le reste du volume dans le plan de mesure est occupé par une résine époxy AY103.

Le courant d'alimentation (10-20A) est fourni par une alimentation à courant constant. Les enregistrements sont effectués sur un analyseur de signaux transitoires THOMSON TSN 693 avec un pas d'échantillonnage de 10 ns.

#### 2-2-3. Principe de la mesure de $\sigma_x$ .

Le principe de la mesure de la contrainte longitudinale  $\sigma_x$  par un capteur piézorésistif a été expliqué par Keough [6], et est maintenant bien connu. Cependant, il nous a paru utile pour la suite de l'exposé, de rappeler quelques idées essentielles concernant le fonctionnement de ces capteurs.

Les matériaux d'enrobage ont en général une limite élastique très basse, comparée aux contraintes produites dans les échantillons étudiés. Néanmoins certains auteurs [7], [8] voient l'influence de la rigidité de l'enrobage sur la courbe d'étalonnage ( $\sigma$ ,  $\Delta R/R_0$ ) jusqu'à 10 kbar environ. Pour des contraintes de quelques dizaines de kilobars et plus dans l'échantillon, les auteurs s'accordent pour supposer l'existence d'un état hydrodynamique dans l'enrobage. Dans ce cas, l'état de contrainte appliqué à l'élément de manganin est sphérique et égal à la contrainte  $\sigma_x$  dans l'échantillon (Figure 2). De ce fait il est indispensable de maintenir une épaisseur significative du matériau d'enrobage entre l'échantillon et le manganin, afin de pouvoir étendre largement les étalonnages préalables. Dans la pratique cette épaisseur est un compromis entre l'effet ci-dessus recherché et le temps de résolution du capteur. Pour le capteur décrit précédemment, le temps de réponse calculé à partir des impédances de choc du verre et du capteur est estimé à 50 ns en moyenne. Compte tenu des temps de montée des profils enregistrés (Chapitre 2-4), nous parlerons alors de mesures lagrangiennes.

(\*) Société Mapren, 8 rue Bellini, 75782 Paris Cédex 16.

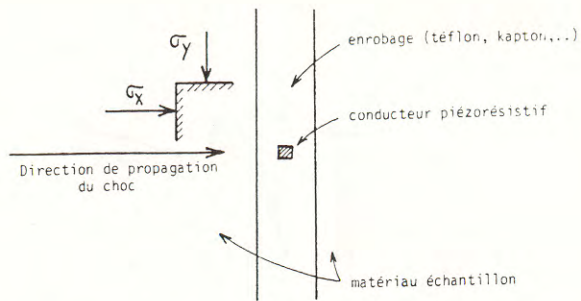


Figure 2 : Condition de mesure de la contrainte longitudinale  $\sigma_x$ .

#### 2-2-4. Etalonnage des capteurs.

La loi d'étalonnage en compression est une expression linéaire pression-résistance établie par Chartagnac [9], et comparable aux données obtenues par Keough [7], Lee [8], et Pérez [10].

L'étalonnage utilisé est :

$$\begin{aligned} \text{compression : } \sigma(\text{kbar}) &= 370 \cdot (\Delta R/R_0) \pm 5\% \\ \text{détente : } \sigma &= \sigma_{\max} [(\Delta R/R_0) - (\Delta R/R_0)_{\text{res}}] / [(\Delta R/R_0)_{\max} - (\Delta R/R_0)_{\text{res}}] \end{aligned}$$

où  $\sigma_{\max}$  est la pression obtenue à  $(\Delta R/R_0)_{\max}$  et  $(\Delta R/R_0)_{\text{res}}$  est la variation résiduelle de résistance observée après retour à  $\sigma_x=0$ .

### 2-3. Mesure de la contrainte latérale $\sigma_y$ .

#### 2-3-1. Montage expérimental.

Les échantillons cylindriques sont découpés, instrumentés de capteurs piézorésistifs, puis réassemblés comme il est indiqué sur la Figure 3.

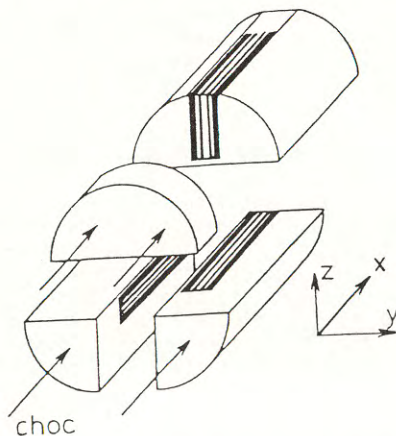


Figure 3 : Eclaté du montage destiné à mesurer la contrainte latérale  $\sigma_y$ .

La qualité de l'usinage des pièces constitutives de l'assemblage est identique à celle décrite pour la mesure de  $\sigma_x$ . La mesure de la contrainte latérale  $\sigma_y$  se fait à l'aide des jauges 300m $\Omega$  placées dans les plans de mesure parallèles à la direction de propagation du choc. Dans ces plans, les capteurs piézorésistifs sont montés d'une façon analogue à celle décrite pour les capteurs  $\sigma_x$ . Nous insisterons sur le fait que la géométrie filiforme de l'élément sensible de manganin, et sa configuration de mise en place dans l'échantillon font qu'il subit le même régime de déformation que le capteur  $\sigma_x$  lors du passage de l'onde de choc.

#### 2-3-2. Principe de la mesure de $\sigma_y$ .

Nous développerons ici les principes de cette technique utilisée par Chartagnac [11]. Supposons dans l'immédiat qu'un état stationnaire de contrainte règne sur une épaisseur d'échantillon très grande devant la section du conducteur piézorésistif (Figure 4). Le matériau d'enrobage étant supposé hydrodynamique pour les niveaux de contrainte considérés, l'état de contrainte appliqué à l'élément de manganin est sphérique, et égal à la contrainte  $\sigma_y$ . Sur cet état stationnaire, la loi d'étalonnage est alors strictement identique à celle établie pour la mesure de  $\sigma_x$ .

Sur la figure 4, nous avons représenté à un instant donné le profil du choc dans l'échantillon et dans le matériau d'enrobage. En général, la vitesse de la propagation est plus faible dans l'enrobage que dans l'échantillon, de sorte que nous assistons à un retard de l'onde dans l'enrobage. De plus, bien que nous ayons dans un premier temps négligé les contraintes de cisaillement au milieu de l'enrobage, les conditions de collage à l'interface échantillon-enrobage font qu'il n'y a pas dissociation des deux propagations, mais un effet d'entraînement tel que nous l'avons représenté sur la Figure 4. Sur cette dernière, imaginons le fil sensible à l'intérieur du front de choc. Pour pouvoir utiliser le capteur piézorésistif, il faut pouvoir lui attribuer un état de pression fiable à la contrainte  $\sigma_y$  régnant dans l'échantillon. Dans l'épaisseur du front de choc, l'état de contrainte est éminemment transitoire, et le fort gradient de contrainte interdit tout calcul de la pression dans l'enrobage. Aucune mesure ne peut alors s'effectuer dans ces conditions. Plaçons maintenant le fil sensible dans un état stationnaire. Si celui-ci est bien établi, il n'y a pas de gradient de pression dans le sens de la propagation, et la pression dans l'enrobage est égale à  $\sigma_y$ .

En résumé, nous formulerons les principes de cette technique de mesure de la façon suivante :

- L'élément sensible piézorésistif doit être filiforme, placé perpendiculairement à la direction de l'onde de choc, inséré dans un enrobage hydrodynamique, et placé dans un plan de mesure produit par un découpage longitudinal de l'échantillon.
- La mesure de  $\sigma_y$  ne peut pas se faire sur les états transitoires de contrainte ; en revanche elle est significative sur les paliers stationnaires, et peut alors être comparée à  $\sigma_x$  sur ces mêmes états.
- Cette mesure n'est pas lagrangienne, en ce sens que la position du fil sensible dépend des conditions complexes d'écoulement liées à l'existence de l'enrobage.

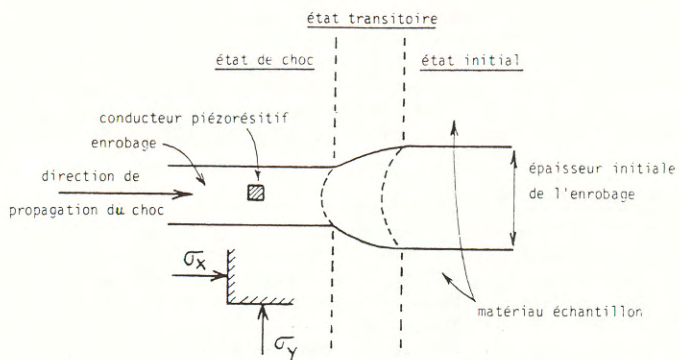


Figure 4 : Condition de mesure de la contrainte latérale  $\sigma_y$

## 2 - 4. Résultats obtenus.

Les conditions initiales des essais effectués sont décrites dans le Tableau I. Quelques profils expérimentaux obtenus sont montrés sur les Figures 5 à 8.

Tableau I. Conditions initiales des essais réalisés pour l'étude en compression par choc d'un verre de borosilicate

Essai	Générateur de choc	Impacteur nature; épaisseur (mm)	Vitesse d'impact (m/s)	Cible épaisseur des éléments (mm)	Observation
AL1	canon à gaz	Cu ; 1	340	5 - 10 - 10	Mesure de $\sigma_x$
AL2	canon à gaz	Cu ; 1	908	5 - 10 - 10	Mesure de $\sigma_x$
AL3	canon à gaz	nitène 181 ; 1,31	821	5 - 10 - 10	Mesure de $\sigma_x$
AL4	explosif	AU4G ; 10, (a)	~ 2500	10 - 5 - 5	Mesure de $\sigma_x$
AL5	explosif	AU4G ; 10	~ 2500	5 - 5 - 5	Mesure de $\sigma_x$
AL6	explosif	acier ; 3	~ 2000	10 - 5 - 5	Mesure de $\sigma_x$
AL7	explosif	acier ; 1,5	~ 1050	5 - 5 - 5	Mesure de $\sigma_x$
D1	canon à gaz	Cu ; 1	317	10	Mesures de $\sigma_x$ et $\sigma_y$
D2	canon à gaz	Cu ; 1	889	20	Mesures de $\sigma_x$ et $\sigma_y$
D3	explosif	acier ; 3	~ 1600	15	Mesures de $\sigma_x$ et $\sigma_y$
D4	explosif	AU4G ; 10, (a)	~ 2500	10	Mesures de $\sigma_x$ et $\sigma_y$
D5	explosif	AU4G ; 10	~ 2500	10	Mesures de $\sigma_x$ et $\sigma_y$

(a) PMMA épaisseur 5mm interposé entre l'impacteur et la cible en verre

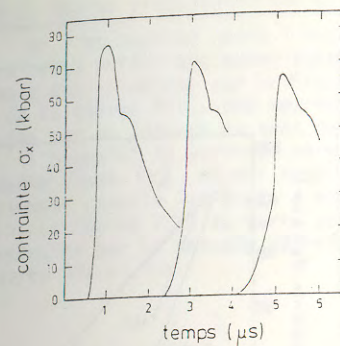


Figure 5 : Essai AL3. Contrainte  $\sigma_x$  enregistrée pour les abscisses lagrangiennes 5, 15 et 25mm.

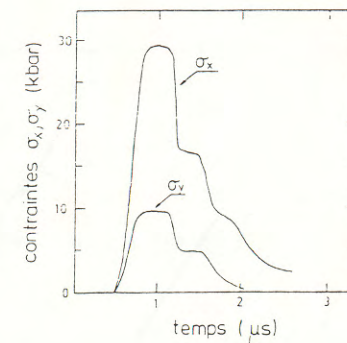


Figure 6 : Essai D1. Contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  enregistrées à une abscisse lagrangienne 10mm.

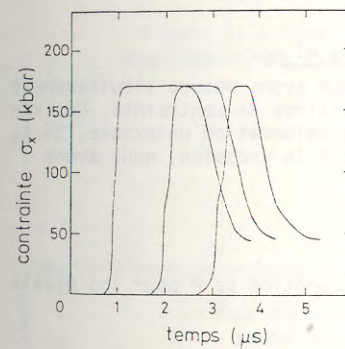


Figure 7 : Essai AL5. Contrainte  $\sigma_x$  enregistrée pour des abscisses lagrangiennes 5, 10 et 15mm.

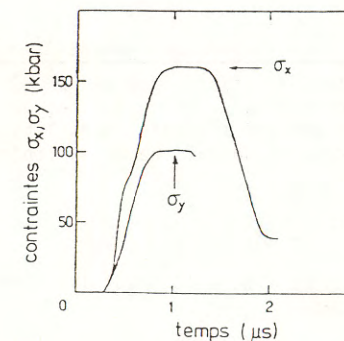


Figure 8 : Essai D5. Contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  enregistrées à une abscisse lagrangienne 10mm.

## 2 - 5. Exploitation des résultats expérimentaux.

### 2-5-1. Exploitation des mesures $\sigma_x(t)$ .

Les enregistrements  $\sigma_x(t)$  ont été dépouillés à l'aide de la technique d'analyse lagrangienne décrite par Seaman [12]. Les chemins obtenus dans le plan contrainte longitudinale-volume spécifique sont montrés sur la Figure 9.

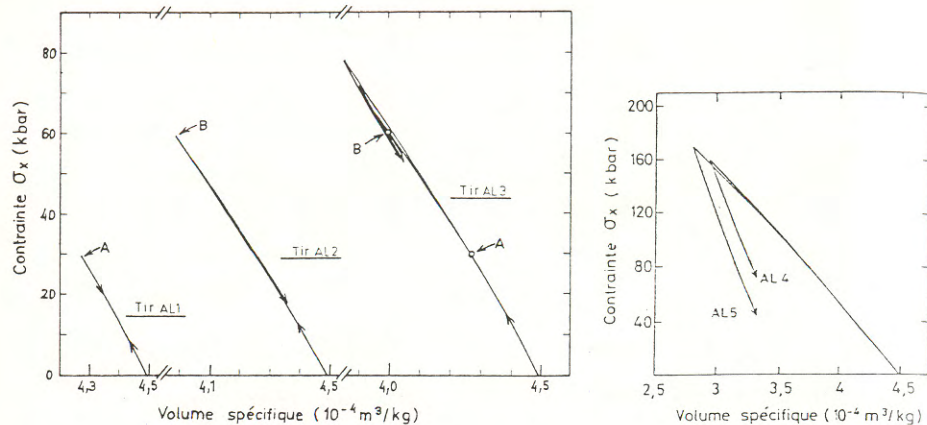


Figure 9 : Chemins thermodynamiques dans le plan contrainte-volume spécifique. Essais AL1 à AL5.

2-5-2. Exploitation des mesures simultanées de  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .

Dans les essais appelés "D" (Tableau I), nous avons mesuré simultanément les contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sur les paliers stationnaires de contrainte. Ces résultats ont été exploités dans l'hypothèse de la déformation uniaxiale. Si  $S_x$  est la partie déviatoire de la contrainte  $\sigma_x$ , et P la pression, nous avons :

$$S_x = \frac{2}{3} (\sigma_x - \sigma_y) \quad (1)$$

$$P = \frac{1}{3} (\sigma_x + 2\sigma_y)$$

Sur la Figure 10, nous avons reporté  $S_x$  en fonction de P pour les essais effectués.

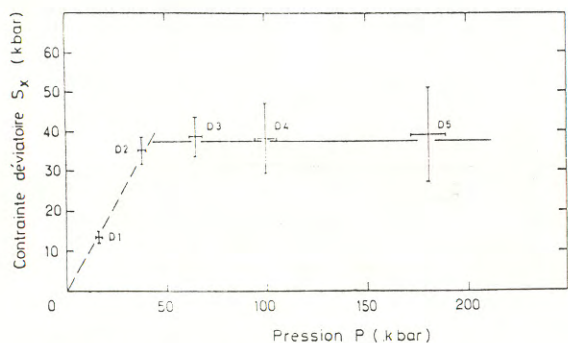


Figure 10 : Contrainte déviatoire en fonction de la pression pour les états de choc.

2-5-3. Courbe pression-volume spécifique attachée aux états de choc.

Si l'on suppose connu l'hugoniot du matériau, la courbe P(V) peut être déterminée à partir des enregistrements simultanés de  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ . Cette construction simple est illustrée sur la Figure 11. On accède ainsi à une connaissance discrète de la courbe P(V). Une représentation continue de celle-ci pourra être construite par un lissage au sens des moindres carrés des points  $P_i(V_i)$ .

L'hugoniot du verre de borosilicate avait été déterminé au cours d'une précédente étude [13], et est reporté sur la Figure 12. Sur cette courbe, on a également reporté les états d'équilibre atteints au cours des cycles des essais "AL". La courbe P(V) du verre de borosilicate relative aux états de choc a été construite par la méthode décrite sur la Figure 11 et est tracée sur les Figures 12a et 12b.

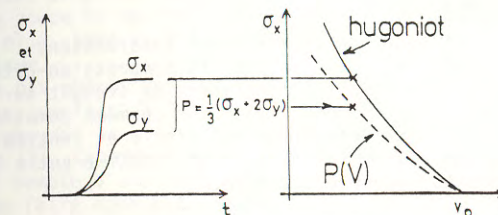
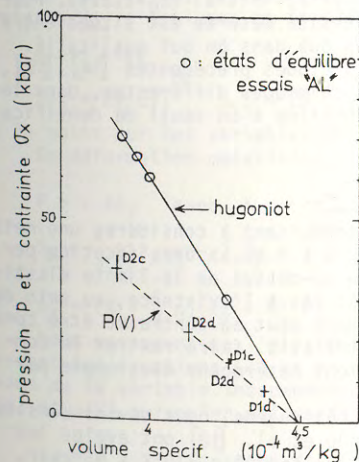
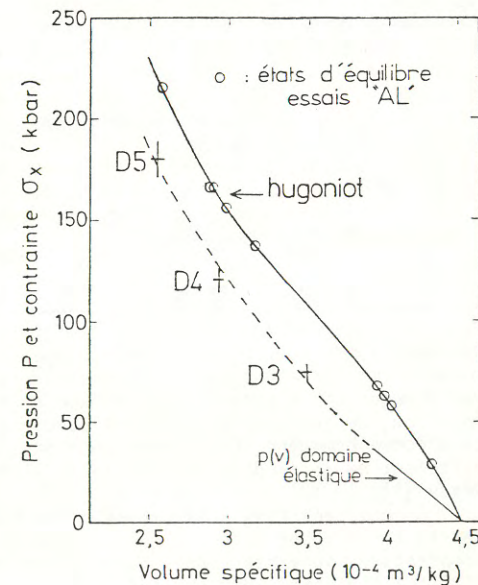


Figure 11 : Technique de construction de la courbe pression-volume spécifique attachée aux états de choc.



(a)



(b)

Figures 12 : Hugoniot et courbe pression-volume spécifique du verre de borosilicate.

## 2 - 6. Discussion.

Considérons les essais AL1 et AL2. Les trajets compression-détente dans le plan contrainte-volume spécifique sont réversibles (Figure 9). Malgré un hystérésis très léger, nous dirons que la réversibilité est également remarquée pour l'essai AL3.

Les essais AL4, AL5 et AL6 montrent quant à eux un changement de comportement très net par rapport aux précédents, caractérisé par un hystérésis sur le cycle compression-détente. Nous n'avons pas effectué de mesure à  $\sigma_x=0$ , mais l'allure des courbes de détente laisse supposer l'existence d'une déformation permanente à  $\sigma_x = 0$ . Ce changement de comportement se manifeste, au niveau de la propagation, par l'apparition d'un précurseur élastique à  $75 \pm 5$  kbar (Figure 7), valeur de la limite élastique d'Hugoniot (L.E.H.) pour le verre de borosilicate étudié.

### 2-6-1. Réponse élastique.

Entre 0 et 75 kbar, deux modes de comportement apparaissent :

- Entre 0 et 30 kbar environ, les trajets compression-détente montrent une réponse élastique non-linéaire. Ce comportement se traduit sur la propagation par une dispersion de l'onde de compression sur ce même domaine. Au sens de la théorie des caractéristiques, cette onde est simple et centrée.

- Une réponse élastique approximativement linéaire entre 30 et 75 kbar. Sur ce domaine de contrainte, l'onde est simple.

### 2-6-2. Densification permanente du verre.

Nous n'avons pas effectué d'essais spéciaux afin de récupérer et analyser le matériau post-choc. Nous avons cependant récupéré les échantillons des essais indiqués dans le Tableau I dans un réservoir massif en acier rempli de chiffons. Pour tous les essais, nous avons recueilli une poudre blanche de granulométrie variable. Elle était constituée de grains anguleux que nous avons soumis à une méthode de diffraction X (Debye-Sherrer). L'analyse montre un état amorphe pour tous les échantillons testés. Nous avons mesuré au pycnomètre la densité des grains constitutifs de la poudre récupérée. Pour les essais réalisés au-dessous de 75 kbar, la densité mesurée est celle du matériau initial ( $\rho_0=2,226$ ). Pour les essais réalisés au-dessus de 75 kbar, la densité mesurée est située entre 2,226 et 2,324. Ces mesures n'ont été réalisées que dans un but qualitatif. Cependant elles corroborent un certain nombre d'études précédentes [14], [15], [16], réalisées sur des verres de compositions chimiques différentes, dans lesquelles la limite élastique d'Hugoniot est identifiée à un seuil de densification permanente (compaction) [17].

### 2-6-3. Rigidité du matériau au-dessus de la L.E.H..

Les observations faites sur la Figure 10 conduisent à considérer une nette dégradation du module de rigidité au-dessus de la L.E.H.. La densification permanente est le mécanisme de déformation reconnu au-dessus de la limite élastique d'Hugoniot. A priori ce mécanisme ne conduit pas à l'existence, au sein du matériau, de zones privilégiées d'écoulement, mais peut au contraire être considéré comme homogène. On ne peut donc pas, à notre avis, faire rentrer le comportement du verre dans la théorie de l'écoulement hétérogène développée par Grady [1].

Si nous écartons l'hypothèse d'une fusion hétérogène, nous devons considérer la température atteinte sur l'hugoniot. Kondo et al. [18] ont évalué les températures suivantes sur l'hugoniot de la silice fondue : 710°K à 95 kbar, 1180°K à 150 kbar, 1920°K à 225 kbar. D'après Spinner [19], pour un verre de borosilicate, le module de cisaillement varie très peu jusqu'à une température de 600°K environ, puis décroît pour perdre environ 20% de sa valeur initiale à 900°K. Pour la première valeur de  $S_x$  que nous avons calculée au-dessus de la

L.E.H., la contrainte  $\sigma_x$  était de 110 kbar, la température peut être estimée à 900°K, et la perte de rigidité devient alors appréciable.

### 2-6-4. Modélisation du matériau au-dessus de la L.E.H..

Les caractéristiques de l'onde de compaction, notamment la dispersion en fonction de la distance de propagation (Figure 5), et les trajets suivis dans le plan contrainte-volume spécifique (Figure 9) suggèrent une modélisation du matériau par un modèle élastique-viscoplastique. De plus les données obtenues dans le plan contrainte déviatoire-pression précisent la surface d'écoulement : tout critère d'écoulement pour lequel la contrainte déviatoire  $S_x$  reste constante dans le plan des déformations uniaxiales de l'espace des contraintes principales convient à un tel modèle.

Si le modèle élastique-viscoplastique est capable de restituer la propagation monodimensionnelle dans le verre de borosilicate [20], sa généralisation n'est pas immédiate. En effet, pour un tel modèle, dans le plan,  $(\sigma_x, V)$ , le trajet de détente coupe la courbe  $P(V)$  de façon à rendre compte de l'inversion du déviateur. De plus, pour  $\sigma_x = 0$ , la déformation permanente serait une déformation non volumique.

Nous n'avons pas obtenu une précision suffisante sur la mesure en détente de la contrainte  $\sigma_y$  de façon à tracer la courbe  $P(V)$  en détente. En cela, nous revenons donc un peu sur la valeur des dépouillements réalisés dans une précédente publication [2]. Cependant, tout en limitant le crédit sur les valeurs de  $\sigma_y$  en détente, il semble d'une part qu'un hystérésis se dessine sur la courbe  $P(V)$  et que l'on puisse faire apparaître une déformation permanente volumique cohérente avec le phénomène de compaction, et d'autre part que le trajet  $\sigma_x(V)$  ne coupe pas le trajet  $P(V)$ . Ces dernières données suggèrent davantage un comportement analogue à un matériau poreux [21].

### 2 - 7. Détermination des paramètres élastiques.

Sur son domaine élastique, nous considérerons le verre de borosilicate comme un système ne donnant lieu qu'à des phénomènes mécaniques. Cette hypothèse est étayée par la très faible valeur du coefficient de Grüneisen de la silice fondue ( $\gamma_0 = 0,036$  à 20°C [22]).

En élasticité, les expressions de la pression  $P$  et du déviateur des contraintes  $S_{ij}$  s'écrivent en fonction des déformations :

$$P = -\lambda \epsilon_{kk} \quad \dot{P} = -\lambda \dot{\epsilon}_{kk} \quad (2)$$

$$S_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} \quad \dot{S}_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}$$

où le point sur les variables désigne leur dérivée par rapport au temps.

En déformation uniaxiale, ces relations donnent :

$$\dot{P} = -K \dot{\epsilon}_x \quad \text{avec} \quad K = \lambda + \frac{2}{3} \mu$$
$$\dot{S}_x = \frac{4}{3} \mu \dot{\epsilon}_x = -2 \dot{S}_y = -2 \dot{S}_z \quad (3)$$

$$\text{et} \quad \dot{\sigma}_x = (K + \frac{4}{3} \mu) \dot{\epsilon}_x = E' \dot{\epsilon}_x$$

Nous passerons de l'élasticité linéaire à l'élasticité non linéaire en conservant les équations (3) et en considérant que les modules  $K$  et  $\mu$  sont des fonctions de la variable indépendante du modèle. Nous chercherons donc les fonctions  $K(V)$  et  $\mu(V)$  puisqu'en déformation uniaxiale nous avons :

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\dot{V}}{V} \quad (\text{équation de continuité})$$

Les essais AL1, AL2 et AL3 permettent d'évaluer la vitesse du son lagrangienne  $C_L$  entre 0 et 75 kbar. Puisque  $E' = \rho C_L^2$ , l'expression du module contraint est alors exprimée en fonction de  $V$  par les équations suivantes (système MKS) :

- pour  $4,26 \cdot 10^{-4} \leq V \leq 4,49236 \cdot 10^{-4}$

$$E'(V) = 3,42960 \cdot 10^{24} V^3 - 5,84405 \cdot 10^{21} V^2 + 3,751016 \cdot 10^{18} V - 1,07475 \cdot 10^{15} + 1,15994 \cdot 10^{11} / V$$

- pour  $3,9 \cdot 10^{-4} \leq V \leq 4,26 \cdot 10^{-4}$

$$E'(V) = 2,025 \cdot 10^7 / V$$

Nous ferons l'hypothèse que le coefficient de Poisson  $\nu$  reste constant et égal à 0,22 sur tout le domaine élastique. Les modules  $K(V)$  et  $\mu(V)$  se calculent à partir des relations de l'élasticité :

$$K = \frac{1 + \nu}{3(1 - 2\nu)} E' \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} E' \quad (4)$$

Ce qui donne :

$$K(V) = 0,52136 E'(V)$$

$$\mu(V) = 0,35897 E'(V)$$

Nous avons vérifié a posteriori que la fonction  $P(V)$  déterminée à partir du  $K(V)$  précédent et de (3) reproduit bien les données expérimentales de la Figure 12.

## 2 - 8. Comparaisons expérience-calcul numérique.

Les simulations numériques ont été réalisées avec un programme monodimensionnel lagrangien. Ce programme procède à la résolution des équations de conservation de la mécanique (masse, quantité de mouvement, énergie) auxquelles est adjoit le modèle de comportement du milieu. La comparaison entre les résultats expérimentaux de l'essai AL3, et la simulation de ce même essai est montrée sur la Figure 13. Nous constatons que le modèle élastique non linéaire décrit précédemment reproduit de manière fort correcte la propagation de l'onde de contrainte au-dessous de 75 kbar.

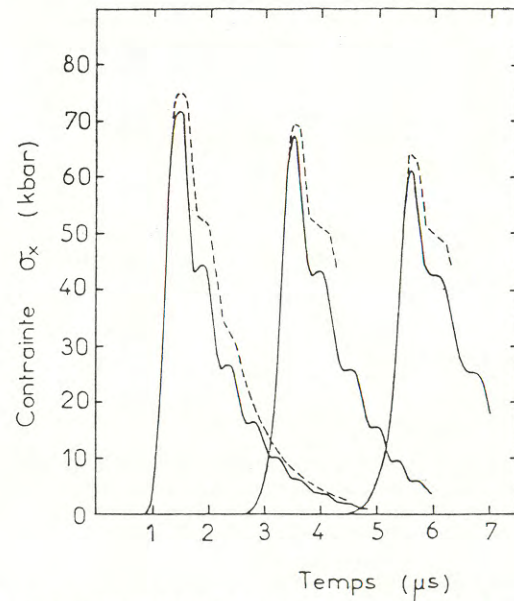


Figure 13 : Comparaison expérience-calcul de l'essai AL3.  
Le trait discontinu est l'expérience  
Le trait continu est le résultat de la simulation numérique.

## 3 - ECAILLAGE.

### 3 - 1. Méthode expérimentale.

Un chargement rapide en tension est provoqué en déformation uniaxiale par la rencontre de deux ondes de détente de sens opposés. Ce processus est réalisé par l'impact d'un projectile sur des cibles correctement dimensionnées. Le schéma du montage expérimental est représenté sur la Figure 14. Sur l'avant du projectile est collé un disque de borosilicate d'épaisseur  $2e$  derrière lequel est collé un disque d'araldite d'épaisseur  $30\text{mm}$ . La qualité des usinages a été décrite précédemment. La mesure est réalisée dans l'araldite au moyen de deux capteurs piézorésistifs à base de manganin.

L'évolution des ondes de contrainte est schématisée sur la Figure 15. A l'impact, deux ondes de compression prennent naissance à l'interface impacteur-cible. La première onde se propage dans l'impacteur et se réfléchit sur la face arrière de celui-ci, et une onde de détente remonte. La deuxième onde de compression se propage dans la cible et donne lieu à l'interface verre-araldite à une onde de compression transmise et une onde de détente réfléchi. Les deux ondes de détente se rencontrent au milieu du disque de verre constituant la cible. Cette rencontre provoque une contrainte de traction. Si cette contrainte excède la contrainte de tension limite du matériau, la rupture a lieu. L'ouverture d'un vide au milieu de la cible provoque un rééquilibrage des contraintes, et une onde de compression remonte de part et d'autre des surfaces libres nouvellement créées. L'écaillage est donc décelé par cette onde de recompression, mesurée dans l'araldite.

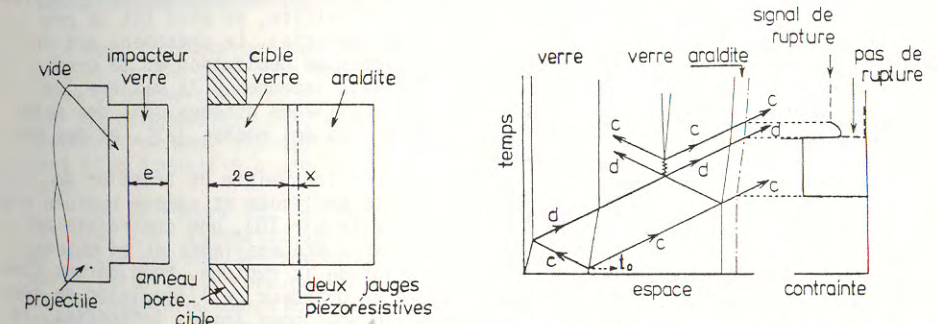


Figure 14 : Schéma du montage destiné à engendrer une tension dynamique dans la cible en verre.

Figure 15 : Plan espace-temps montrant les trajets de compression (c) et de détente (d) dans l'impacteur et dans la cible. La contrainte est mesurée sur une facette perpendiculaire à la direction du choc.

### 3 - 2. Résultats obtenus.

Les conditions initiales des essais effectués sont données dans le Tableau II. Quelques résultats, obtenus au niveau du plan de mesure sont montrés sur les Figures 16 et 17. Nous remarquerons que dans tous les essais effectués, le verre n'a été sollicité en compression que sur son domaine élastique.

Pour le tir TD1, la première compression enregistrée est provoquée par l'impact, et la détente provient de la face arrière de l'impacteur (Figure 15). Cette détente provoque bien une contrainte nulle dans l'échantillon.

Une seconde onde apparaît à un intervalle de temps de la première égal au temps de maintien en palier stationnaire. Ce type d'enregistrement est conforme au rebondissement de l'impacteur. Aucun signal dû à la formation d'une écaillage n'est ici enregistré. Les mêmes remarques seront faites pour le tir TD2.

Tableau II. Conditions initiales des essais destinés à engendrer une traction dynamique dans le verre de borosilicate.

Essai	Épaisseur de l'impacteur (mm)	Vitesse d'impact (m/s)	Contrainte de compression maximum dans le verre (kbar)	Contrainte de traction minimum dans le verre (kbar)
TD1	5	291	17	- 8
TD2	5	416	24	- 10,5
TD3	5	547	32	- 15
TD4	5	676	39	- 22
TD5	5	963	56	- 35

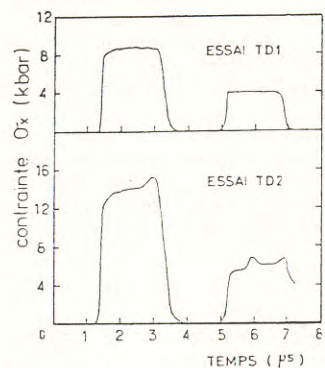


Figure 16 : Enregistrements obtenus pour les tirs TD1 et TD2.

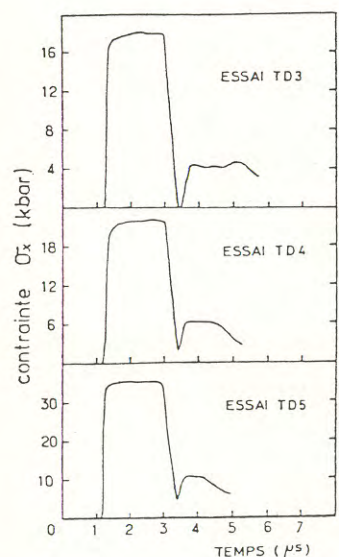


Figure 17 : Enregistrements obtenus pour les tirs TD3, TD4 et TD5.

Dans l'essai TD3 (Figure 17), nous avons maintenu le temps de palier, mais nous avons augmenté la vitesse d'impact, donc la contrainte de traction dans l'échantillon de verre. Immédiatement après la première onde apparaît une onde de recompression, témoin de la formation d'une écaille. Ces constatations sont aussi valables pour les essais TD4 et TD5.

Un premier examen des profils obtenus permet de constater que plus l'intensité de la traction provoquée est élevée, plus élevé est le signal de recompression dans l'araldite, et plus tôt se produit la rupture du matériau. Ce phénomène est interprétable en termes de nucléation et de croissance de microdéfauts internes à la matière, et est analogue aux écaillages obtenus dans des matériaux aussi variés que des roches [23], et des métaux [24].

Pour le tir TD2, une contrainte de traction de -10,5kbar avait été appliquée et aucune rupture n'a été observée. Pour le tir TD3, une contrainte de traction de -15kbar a été appliquée et on observe la manifestation de la rupture. Nous dirons donc que pour l'ordre de grandeur de l'impulsion de contrainte à laquelle nous nous sommes intéressés, le seuil d'endommagement peut être placé à -11kbar.

### 3-3. Aspect microstructural.

Modélisons les défauts à l'origine de la rupture par des fissures planes équivalentes, circulaires, de rayon R, dans un milieu élastique. Le rayon critique R\* d'une telle fissure est donné par :

$$R^* = \pi K^2 I_C / 4\sigma^2$$

La valeur retenue pour le facteur intensité de contrainte critique est celle déterminée par Vernaz [25] :  $K_{IC} = 0,85 \text{ MNm}^{-3/2}$ . Nous soulignerons que cette valeur peut être utilisée quelle que soit la taille des microphases, puisque Vernaz n'a trouvé aucune variation de la ténacité en fonction de la taille de la séparation. Pour  $\sigma = -11 \text{ kbar}$  nous trouvons  $R^* = 0,5 \mu\text{m}$ .

Afin de comparer la taille théorique d'un défaut activé lors de l'écaillage avec la microstructure, nous avons réalisé une étude de cette dernière en microscopie électronique à transmission.

Une micrographie est montrée sur la Figure 18. On y aperçoit un aspect granuleux de fond correspondant à la séparation de phase du système  $\text{SiO}_2, \text{B}_2\text{O}_3, \text{K}_2\text{O}, \text{Na}_2\text{O}$  ; la phase apparaissant préférentiellement étant une phase riche en alcalins [26]. La taille des microphases vitreuses est ici comprise entre 150 et 250 Å. Sur cette Figure 18, se distinguent également de gros agrégats montrant eux-mêmes un aspect granuleux, répartis régulièrement sur la surface observée, et ayant une taille allant de quelques dixièmes de micron à 2 microns environ. Ces agrégats pourraient contenir une phase riche en alumine [27].



Figure 18 : Micrographie montrant la structure micro-séparée du verre de borosilicate.

Nous constaterons que ces agrégats ont une taille dont la valeur coïncide avec la taille théorique des défauts préférentiellement activés. Il est donc logique de rechercher les microdéfauts à l'origine de la rupture par écaillage autour de ces nodules. Il n'apparaît pas, sur la Figure 18, de failles évidentes, cependant on peut envisager un stade préliminaire de nucléation, ce dernier pouvant être identifié à une décohésion intergranulaire aux frontières de ces agrégats.

Sur la Figure 18, les défauts compatibles avec le seuil d'endommagement sont les plus gros agrégats. Sur cette même figure, nous remarquerons une répartition en taille des nodules compatible avec une fonction de nucléation des microfissures telle qu'il sera nucléé beaucoup plus de petites fissures que de grosses. La dépendance du temps observée au niveau de la réponse à l'écaillage s'explique alors par le raisonnement suivant : plus la contrainte de traction est grande en valeur absolue, plus le nombre de microfissures activées est grand, plus le rayon de parcours moyen est petit, et plus la coalescence est rapide.

Reste à étudier le rôle de l'inertie d'une fissure élémentaire sur la réponse globale de la microstructure. Selon Kalthoff et Shockey [28], lorsqu'un défaut de taille  $R_0$  est soumis à une impulsion de durée  $L_0$ , le traitement dynamique de la fissuration peut être approximé par le traitement statique quand  $C_L L_0 / R_0 > 20$ , où  $C_L$  est la vitesse de son longitudinale. Dans notre cas  $L_0 \approx 1 \mu\text{s}$  et  $R_0 \approx 1 \mu\text{m}$ , la condition précédente est vérifiée, ce qui permet de valider a posteriori le concept statique utilisé.

### 3-4. Modèle d'endommagement et de rupture.

Les résultats et les interprétations physiques que nous venons d'exposer suggèrent une modélisation par un critère de Butcher et Tuler [29] :

$$d = \int_{t_0}^t (\sigma_0 - \sigma)^B dt$$

$\sigma_0$  est le seuil d'endommagement

$t_0$  est le temps à partir duquel  $|\sigma| > |\sigma_0|$

si  $\beta = 1$ , le paramètre  $d$  est homogène à une impulsion [30]. Nous définirons en plus une constante  $d_c$  telle que :

si  $d < d_c$  le matériau est endommagé  
 si  $d = d_c$  le matériau est rompu.

Nous prendrons la grandeur  $v$  définie par

$$v = \frac{d}{d_c}$$

comme paramètre d'endommagement.

Les modules élastiques du milieu sont alors paramétrés en fonction de  $v$  par les relations suivantes :

$$K(v) = K(1 - v^n)$$

$$\mu(v) = \mu(1 - v^n)$$

où le paramètre  $n$  quantifie la sévérité de l'endommagement sur les paramètres élastiques initiaux  $K$  et  $\mu$ .

Afin de réaliser des simulations numériques de l'écaillage, il convient de définir le comportement du verre sur une sollicitation de traction. Pour une première approche du problème, il nous a paru raisonnable de maintenir en traction la valeur des paramètres élastiques aux conditions standards.

Les paramètres du modèle précédent ont été calculés par comparaison entre les profils expérimentaux et les profils donnés par des simulations numériques. Il semble qu'une bonne restitution des phénomènes soit observée pour les valeurs suivantes :

$$\beta = 1$$

$$|\sigma_0| = 11 \text{ kbar}$$

$$d_c = 2,2 \text{ kbar} \times \mu\text{s}$$

$$n = 20$$

Les résultats de quelques simulations numériques sont donnés sur les Figures 19 et 20. La notation "pas d'endommagement" est relative à des simulations numériques pour lesquelles le verre est supposé compact tant que  $d < d_c$  ; lorsque  $d = d_c$  pour deux mailles de calcul consécutives, un vide est créé. On constate tout d'abord une bonne restitution de la dépendance du temps, mais des amplitudes de recompression calculées nettement supérieures aux valeurs expérimentales. D'autre part la relaxation des contraintes n'est pas observée. Ce phénomène est par contre très bien restitué par le modèle d'endommagement.

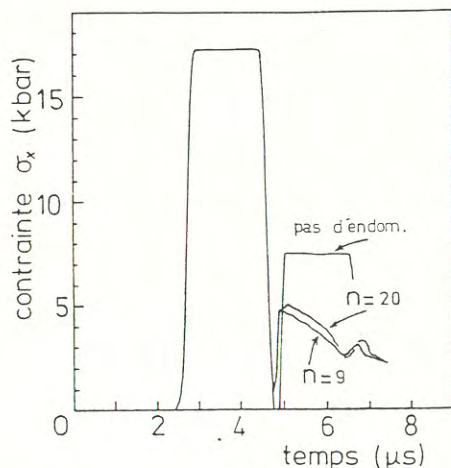


Figure 19 : Résultats des simulations numériques de l'essai TD3.

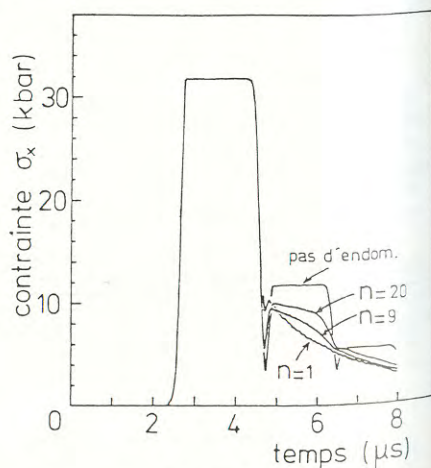


Figure 20 : Résultats des simulations numériques de l'essai TD5.

#### 4 - CONCLUSION.

Un verre de borosilicate a été étudié en compression par choc jusqu'à 200 kbar, et en traction jusqu'à -35 kbar environ.

En compression, nous avons mis en œuvre deux techniques expérimentales et leur dépouillement associé. Il s'agit des mesures de la contrainte longitudinale  $\sigma_x$  dans des plans différents, perpendiculaires à l'écoulement, associées à l'analyse lagrangienne des signaux  $\sigma_x(t)$  d'une part, et d'autre part des mesures simultanées des contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sur les états stationnaires.

La réunion des données expérimentales obtenues par les deux techniques expérimentales précédentes a permis d'apporter les éléments suivants sur le comportement du matériau :

- Une élasticité non linéaire entre 0 et 30 kbar ; la concavité de la courbe de réponse dans le plan contrainte-volume spécifique étant négative.
- Une élasticité approximativement linéaire entre 30 et 75 kbar.
- Une limite élastique d'Hugoniot située à 75 kbar  $\pm$  5 kbar.
- Au-delà de 75 kbar, le comportement est déterminé par une compaction du milieu.
- La chute progressive de la rigidité du matériau observée au-dessus de la L.E.H. est interprétée par une élévation de la température du verre, due à l'irréversibilité du phénomène de compaction et à l'adiabaticité du processus de déformation.

En traction, l'écaillage du verre de borosilicate a été étudié pour des durées d'impulsion de l'ordre de une à deux microsecondes. Nous n'avons noté aucun endommagement pour des tractions dont l'amplitude en valeur absolue était inférieure à 11 kbar. Au-delà de cette valeur, la propagation des ondes est conditionnée par l'histoire de l'endommagement dans le verre et par l'histoire du champ des contraintes dans ce matériau. Il semble que les microdéfauts à partir desquels s'initie l'endommagement soient des nodules présumés riches en alumine, et dont la taille est située entre quelques dixièmes de micron et deux-microns.

Un modèle d'endommagement, basé sur le critère impulsif de Butcher et Tuler a été construit et reproduit fort correctement les phénomènes observés.

#### 5 - BIBLIOGRAPHIE.

- [1] - D.E. Grady, 1977, in High-Pressure Research Applications in Geophysics, Eds M.H. Manghnani, Si Akimoto (New-York : Academic Press) pp 389-438.
- [2] - J. Cagnoux, in Proceedings of the 1981 Topical Conference on Shock Waves in Condensed Matter, Stanford Research Institute, Palo Alto, California, U.S.A.
- [3] - D.R. Curran, D.A. Shockey, L. Seaman, J. Appl. Phys. 44, 4025 (1973).
- [4] - K.J. Takahashi, Macromolecular Sci. Phys. B8, 673 (1973).
- [5] - J. Cagnoux, in Proceedings of the Fifth International Conference The Physics of Non-Crystalline Solids, Université de Montpellier, France, 1982.
- [6] - D. Bernstein, D.D. Keough, J. Appl. Phys. 35, 1471 (1964).
- [7] - D.D. Keough, J.Y. Wong, J. Appl. Phys. 41, 3508 (1970).
- [8] - L.M. Lee, J. Appl. Phys. 44, 4017 (1973).
- [9] - P. Chartagnac, travail non publié.
- [10] - M. Pérez, Contribution à l'étude du comportement sous choc de jauges piézo-résistives jusqu'à 200 kbar. Thèse de Docteur Ingénieur, Université Paul Sabatier, Toulouse (1980).
- [11] - P. Chartagnac, J. Appl. Phys. 53, 948 (1982).
- [12] - L. Seaman, J. Appl. Phys. 45, 4303 (1974).
- [13] - J. Cagnoux, travail non publié.
- [14] - R.V. Gibbons, T.J. Ahrens, J. Geophys. Res. 76, 5489 (1971).
- [15] - J. Arndt, V. Hornemann, W.F. Muller, Physics and Chemistry of Glasses, Vol 12, N°1 (1971).
- [16] - H. Sugiura, K. Kondo, A. Sawaoka, J. Appl. Phys. 52, 3375 (1981).



- [17]- W. Primak, 1975, *Compacted States of Vitreous Silica*, Vol 4, *Studies in Radiation Effects in Solids*, Edited by G.J. Dienes Brookhaven National Laboratory and L.T. Chadderton H.C. Orsted Institute, (New-York : Gordon and Breach).
- [18]- K.I. Kondo, A. Sawaoka, T.J. Ahrens, *J. Appl. Phys.* 52, 5084(1981).
- [19]- S. Spinner, *J. Amer. Ceram. Soc.* 39, 113(1956).
- [20]- J. Cagnoux, travail non publié.
- [21]- J.W. Swegle, *J. Appl. Phys.* 51, 2574 (1980).
- [22]- J. Wackerle, *J. Appl. Phys.* 33, 922(1962).
- [23]- D.E. Grady, M.E. Kipp, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.* 16, 293 (1979).
- [24]- S.J. Bless, Final Technical Report UDR-TR-81-07, Contract N°F33615-76-C-5124, University of Dayton Research Institute, March 1981.
- [25]- E. Vernaz, Influence de la composition sur la ténacité des verres. Thèse de Docteur Ingénieur, Université des Sciences et des Techniques du Languedoc, Montpellier (1978).
- [26]- E.A. Porai-Koshits and V. I. Averjanov, *J. of non Cryst. Sol.* 1, 29 (1968).
- [27]- G.B. Carrier, *J. of Non Cryst. Sol.* 38, 15(1980).
- [28]- J.F. Kalthoff, D.A. Shockey, *J. Appl. Phys.* 48, 986(1977).
- [29]- F.R. Tuler, B.M. Butcher, *Int. J. Fract. Mech.* 4, 431(1968).
- [30]- B.D. Lambourn, in *Mechanical Properties at High Rates of Strain*, Conference Series N°21 Published by the Institute of Physics, London (1974), pp 262-271.

## SUR LE MOUVEMENT D'UN MILIEU INFINI, PERIODIQUE, ELASTIQUE OU VISCOELASTIQUE

### ON THE MOTION OF AN UNBOUNDED PERIODIC, ELASTIC OR VISCOELASTIC MEDIUM

N. TURBE (\*)  
 Maître-Assistante - Laboratoire de Mécanique Théorique,  
 Université Pierre et Marie Curie

#### RESUME

On considère un milieu élastique ou viscoélastique, à caractéristiques périodiques, occupant tout l'espace. A partir de l'opérateur de l'élasticité linéaire, à coefficients périodiques, est introduite une famille d'opérateurs agissant sur des fonctions définies sur un domaine borné. Les propriétés spectrales de ces opérateurs permettent de mettre en évidence un développement de la solution des équations du mouvement. Ce développement de Bloch est utilisé pour montrer que, lorsque les données initiales sont des fonctions lentement variables par rapport à la période du matériau, la solution est approchée par une fonction qui satisfait aux équations obtenues par homogénéisation des équations initiales.

#### ABSTRACT

We consider an unbounded, elastic or viscoelastic material with periodic structure. From the operator of linear elasticity, with periodic coefficients, we introduce operators that act upon functions defined on a bounded set. The spectral properties of these operators give an expansion of the solution of the equations of motion. This Bloch expansion is used to prove that when the initial conditions are slowly varying functions, compared to the period of the material, the solution is approximated by a function which satisfies the equations obtained in homogenization theory from the initial equations.

#### 1. INTRODUCTION

Par ses multiples applications dans différents domaines, géophysiques ou technologiques, par exemple, l'étude de la propagation d'ondes dans des milieux multicouches ou des milieux renforcés par un réseau de fibres élastiques, a conduit à de nombreux travaux. Les effets de dispersion ont été analysés, permettant la comparaison avec des théories d'approximation : module effectif, raideur effective, homogénéisation (d'ailleurs valable également pour l'étude de la propagation d'ondes dans des milieux bornés), élaborées depuis plusieurs années

(\*) Colloque du Groupe Français de Rhéologie, 1er, 2 Décembre 1982.

(C. Sve [9], J.D. Achenbach [1], T.C. Ma, R.A. Scott et W.H. Yang [6] ...). Dans la ligne de ces recherches, quelques propriétés de la solution des équations du mouvement d'un milieu élastique ou viscoélastique, à structure périodique, occupant tout l'espace, sont présentées ici. Avec l'hypothèse des petites perturbations, les équations considérées sont les équations linéaires classiques de l'élasticité ou de la viscoélasticité.

Dans une première partie, nous examinons le cas du matériau élastique. A partir de l'opérateur de l'élasticité linéaire, à coefficients périodiques, est introduite une famille d'opérateurs agissant sur des fonctions définies en tous les points de la cellule de base, donc sur un domaine borné. Les propriétés spectrales de ces opérateurs permettent de mettre en évidence un développement de la solution, en ondes planes harmoniques. C'est le développement de Bloch, généralisation du développement de Fourier de la solution des équations de l'élasticité d'un corps homogène.

Ce développement est utilisé pour montrer que, lorsque les données initiales sont des fonctions lentement variables par rapport à la période du matériau, la solution est approchée par une fonction qui représente une onde se propageant dans un milieu homogène. C'est le milieu obtenu par application de la théorie de l'homogénéisation (G. Duvaut [5], A. Bensoussan, J.L. Lions et G. Papanicolaou [2], E. Sanchez-Palencia [8] ...) au problème d'élasticité initial.

L'étude de la solution des équations du mouvement d'un milieu infini, viscoélastique, à mémoire longue, est ensuite abordée. Cette solution possède également un développement de Bloch dont les composantes satisfont à des équations intégrales-différentielles. Ce développement permet l'obtention de solutions approchées, dans diverses situations : conditions initiales lentement variables, matériau à faible viscoélasticité ou à petit temps de relaxation. Une étude analogue est enfin menée pour un milieu viscoélastique à mémoire instantanée.

## 2. DEVELOPPEMENT DE BLOCH POUR LES EQUATIONS DE L'ELASTICITE

### 2.1. Le problème - Cadre fonctionnel

On considère un corps élastique, occupant tout l'espace, à structure périodique, c'est-à-dire que les caractéristiques du milieu, la masse volumique  $\rho(x)$  et les coefficients d'élasticité  $a_{hlmn}(x)$ , sont des fonctions périodiques, de période  $2\pi$  par rapport à chaque variable :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \rho(x), \quad a_{hlmn}(x) \in 2\pi Y, \quad Y = ]0, 1[ ]^3$$

Les coefficients d'élasticité vérifient les propriétés usuelles de symétrie et d'ellipticité :

$$a_{hlmn} = a_{lhmn} = a_{mnlh} \quad (1)$$

$$\forall \epsilon_{ij} \text{ (symétrique)}, \quad \exists \alpha \text{ (constante positive)}; \quad a_{hlmn} \epsilon_{mn} \bar{\epsilon}_{hl} \gg \alpha \epsilon_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} \quad (2)$$

où  $\bar{\epsilon}$  désigne le complexe conjugué de  $\epsilon$ .

La masse volumique est bornée :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad 0 < \rho_0 \leq \rho(x) \leq \rho_1 \quad (3)$$

Soit  $u_n = u_n(x, t)$  la  $n^{\text{ème}}$  composante du vecteur déplacement. Les forces volumiques extérieures étant supposées nulles, les équations du mouvement sont, compte tenu des propriétés de symétrie (1) :

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x_l} [a_{hlmn}(x) \frac{\partial u_m}{\partial x_n}] = 0 \quad (4)$$

auxquelles il faut joindre les conditions initiales :

$$u(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (5)$$

$f$  et  $g$  étant des fonctions données dont on va préciser les propriétés dans le cadre fonctionnel maintenant présenté. L'espace  $(L^2(\mathbb{R}^3))^3$  est muni d'un produit scalaire avec poids, défini par la masse volumique  $\rho(x)$ . On introduit, sur cet espace, l'opérateur de l'élasticité :

$$(A u)_n(x) = - \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x_l} [a_{hlmn}(x) \frac{\partial u_m}{\partial x_n}] \quad (6)$$

Grâce aux hypothèses de périodicité des coefficients, à cet opérateur est associée une famille d'opérateurs agissant sur des fonctions de  $(L^2(2\pi Y))^3$  :

$$\forall k \in Y, \quad [A(k) u]_n(x) = - \frac{1}{\rho(x)} \left( \frac{\partial}{\partial x_l} + ik_l \right) [a_{hlmn}(x) \left( \frac{\partial}{\partial x_n} + ik_n \right) u_m] \quad (7)$$

$A(k)$  opère sur les fonctions de  $(H^1(2\pi Y))^3$  "périodiques" (c'est-à-dire prenant même valeur en deux points opposés de deux faces opposées de la cellule  $2\pi Y$ ) pour lesquelles le vecteur contrainte est "périodique". Les propriétés des  $A(k)$  sont résumées dans la

#### Proposition :

Sous les hypothèses (1), (2) et (3),  $A(k)$ , défini par (7), est, pour tout  $k \in Y$ , un opérateur auto-adjoint, positif, de résolvante compacte.

Il en résulte alors le

#### LEMME

Pour chaque  $k \in Y$ , il existe une suite discrète de valeurs propres, positives ou nulles, de multiplicité finie :  $\omega_0^2(k) \leq \omega_1^2(k) \leq \dots \rightarrow +\infty$ , et des vecteurs propres correspondants :  $\varphi^0(x; k), \varphi^1(x; k), \dots$ , de l'opérateur  $A(k)$ , qui forment une base orthonormale dans  $(L^2(2\pi Y))^3$ .

Les propriétés des fonctions  $\omega_n^2(k)$  et  $\varphi^n(x; k)$  ont été étudiées par C.H. Wilcox [11] dans le cas scalaire. Les valeurs propres sont continues pour tout  $k$ ; ce sont des fonctions analytiques de  $k$  presque partout sauf sur des sous-ensembles de  $Y$ , de mesure nulle, où leur ordre de multiplicité change. Les vecteurs propres peuvent être construits comme fonctions mesurables de  $k$ . Sauf sur les ensembles de mesure nulle de  $Y$  où l'ordre de multiplicité change, les vecteurs propres sont des fonctions analytiques de  $k$ , à valeurs dans  $(C(2\pi Y))^3$ , espace des vecteurs continus sur  $2\pi Y$ .

### 2.2. Le développement de Bloch

Par une démonstration analogue à celle du cas scalaire étudié par A. Bensoussan, J.L. Lions et G. Papanicolaou [2], on a le

#### THEOREME

Soit  $u \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3$ , à valeurs complexes. Alors :

$$u(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_Y e^{ik \cdot x} dk \sum_{m=0}^N \hat{u}_m(k) \varphi^m(x;k) \quad (k \cdot x = k_1 x_1) \quad (8)$$

où le coefficient  $\hat{u}_m(k)$  est donné par :

$$\hat{u}_m(k) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|x| < R} e^{-ik \cdot x} u_h(x) \varphi_h^{-m}(x;k) \rho(x) dx \quad (9)$$

(les limites ont lieu au sens de  $L^2$ ).

Un exemple de ce théorème est fourni par le cas où le matériau est homogène. On montre alors que l'opérateur  $A(k)$ ,  $k \in Y$ , admet pour vecteurs propres les fonctions  $\psi^{(r)}(m+k) e^{im \cdot x}$  et pour valeurs propres  $\Omega_r^2(m+k)$  ( $r = 1, 2, 3$ ), les  $\psi^{(r)}$  et  $\Omega_r^2$  étant solutions de :

$$\frac{h_1 p q}{\rho} (m_1 + k_1) (m_q + k_q) \psi_p = \Omega_r^2 \psi_h$$

Les propriétés de périodicité des vecteurs propres permettent de donner une autre forme à (8) et (9), où apparaissent transformés de Fourier et de Fourier inverse.

### 2.3. La solution du problème d'élasticité

Le problème (4)-(5) est formulé comme un problème aux valeurs initiales dans  $(L^2(\mathbb{R}^3))^3$  :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + A u = 0 \quad (10)$$

$$u(0) = f \quad \frac{du}{dt}(0) = g \quad (11)$$

On suppose que :

$$f \in (H^1(\mathbb{R}^3))^3, \quad g \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3 \quad (12)$$

La théorie des semi-groupes assure alors l'existence d'une solution, et d'une seule, fonction qui peut être développée sous la forme (8) en ondes de Bloch, avec des coefficients  $\hat{u}_m$  dépendant du paramètre temps.

L'équation (10) conduit à la résolution du système :

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_m}{\partial t^2} + \omega_m^2(k) \hat{u}_m = 0 \quad (\text{sans sommation})$$

et le développement de la solution  $u$  en résulte :

$$u(x, t) = \int_Y dk \sum_{m=0}^{+\infty} \{ a_m^+(k) e^{i[k \cdot x + \omega_m(k) t]} + a_m^-(k) e^{i[k \cdot x - \omega_m(k) t]} \} \varphi^m(x;k) \quad (13)$$

les coefficients  $a_m^\pm(k)$  étant calculés à partir des conditions initiales, grâce à (9).

La solution  $u$  est une superposition d'ondes planes harmoniques. Pour des structures périodiques particulières (milieux multicouches ou renforcés par des fibres), ces solutions élémentaires ont fait l'objet de multiples études (J.D. Achenbach [2]) où sont, notamment, examinées les courbes de dispersion

$\omega = \omega(k)$  afin de permettre une comparaison avec les théories d'approximation. Dans le développement (13), certains termes peuvent avoir, en effet, dans des conditions données, une action prépondérante par rapport aux autres.

### 3. APPLICATION : LIEN AVEC LA THEORIE DE L'HOMOGENEISATION

#### 3.2. Les données du problème

$\epsilon$  est un petit paramètre positif donné. On suppose que les conditions initiales sont des fonctions de  $\epsilon$  et de  $x$ , lentement variables par l'intermédiaire de  $\epsilon$  :

$$u(x, 0) = f^\epsilon(\epsilon x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \epsilon g^\epsilon(\epsilon x)$$

La période du matériau apparaît alors comme petite par rapport à l'échelle des données.

Le terme  $\epsilon$ , facteur de  $g^\epsilon$ , provient de l'étude de l'énergie à l'instant initial, où énergies élastique et cinétique sont toutes deux d'ordre  $\epsilon^2$ .

On suppose que les fonctions  $f^\epsilon \in (H^1(\mathbb{R}^3))^3$  et  $g^\epsilon \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3$  admettent les développements en série de  $\epsilon$  suivants :

$$\forall y \in \mathbb{R}^3, \quad f^\epsilon(y) = f^0(y) + \epsilon f^1(y) + \dots \quad g^\epsilon(y) = g^0(y) + \epsilon g^1(y) + \dots$$

On étudie le comportement de la solution  $u$ , fonction de  $x$ ,  $t$  et  $\epsilon$  (par les conditions initiales) lorsque  $\epsilon$  tend vers 0. Pour ce faire, le développement de Bloch de  $u$  est utilisé :

$$u(x, t, \epsilon) = \int_Y dk e^{ik \cdot x} \sum_{m=0}^{+\infty} \hat{u}_m(k, t, \epsilon) \varphi^m(x;k) \quad (14)$$

où

$$\hat{u}_m(k, t, \epsilon) = a_m^+(k, \epsilon) e^{i\omega_m(k)t} + a_m^-(k, \epsilon) e^{-i\omega_m(k)t} \quad (15)$$

les coefficients  $a_m^\pm(k, \epsilon)$  étant déterminés à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} a_m^+(k, \epsilon) + a_m^-(k, \epsilon) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik \cdot y} f_1^\epsilon(\epsilon y) \varphi_1^{-m}(y;k) \rho(y) dy \\ i\omega_m(k) [a_m^+(k, \epsilon) - a_m^-(k, \epsilon)] = \epsilon \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik \cdot y} g_1^\epsilon(\epsilon y) \varphi_1^{-m}(y;k) \rho(y) dy \end{cases} \quad (16)$$

Mais, pour  $k = 0$ , 0 est valeur propre triple de  $A(0)$ , associée à tout vecteur constant. Le comportement de  $u$ , pour  $\epsilon$  tendant vers 0, va résulter de cette propriété.

#### 3.2 Etude de $\omega_0^2$ pour $k$ petit

Soit  $k = \epsilon K$ . Par définition, on a :

$$A(\epsilon K) \varphi^0(x; \epsilon K) = \omega_0^2(\epsilon K) \varphi^0(x; \epsilon K) \quad (16)$$

L'opérateur  $A(\epsilon K)$  s'exprime en puissances de  $\epsilon$  :

$$A(\epsilon K) = A(0) + \epsilon A_p K_p + \epsilon^2 A_{pq} K_p K_q \quad (17)$$

les opérateurs  $A_p$  et  $A_{pq}$ , définis à partir de (7), étant respectivement

différentiels d'ordres 1 et 0.

Les fonctions propres  $\varphi^0(x; \epsilon K)$  et valeurs propres  $\omega_0^2(\epsilon K)$  sont développées en puissances de  $\epsilon$  sous la forme :

$$\varphi^0(x; \epsilon K) = \varphi^0(x; 0) + \epsilon \varphi_{,p}^0(x) K_p + \epsilon^2 \varphi_{,pq}^0(x) K_p K_q + O(\epsilon^3) \quad (18)$$

$$\omega_0^2(\epsilon K) = \epsilon \alpha_p K_p + \epsilon^2 \Omega^2(K) + O(\epsilon^3) \quad (19)$$

où  $\varphi^0(x; 0)$  est un vecteur constant, fonction propre de  $A(0)$ . Notons que dans (18) et (19),  $K$  est un paramètre qui peut apparaître dans les coefficients.

Portant les développements (17), (18) et (19) dans (16), à l'ordre  $\epsilon$ , il vient :

$$A(0) \varphi_{,p}^0(x) + A_{,p} \varphi^0(x; 0) = \alpha_p \varphi^0(x; 0) \quad (p = 1, 2, 3)$$

En multipliant scalairement cette égalité par  $\varphi^0(x; 0)$  dans  $(L^2(2\pi Y))^3$ , on montre que  $\alpha_p = 0$  et on obtient alors une équation qui fournit  $\varphi_{,p}^0(x)$  dès lors que  $\varphi^0(x; 0)$  est connu. On introduit ici la solution  $\chi_p^1$  du problème suivant :

$$A(0) \chi_p^1 = i A_{,p} e^1 \quad (e^1 = 1^{\text{ème}} \text{ vecteur de la base naturelle de } \mathbb{R}^3).$$

$\chi_p^1$  apparaît comme la solution d'un problème statique d'élasticité, posé sur la cellule  $2\pi Y$ , avec forces volumiques nulles. Ainsi sont définis neuf vecteurs, classiquement introduits en théorie de l'homogénéisation des problèmes d'élasticité (E. Sanchez-Palencia [8]).

Avec cette définition des vecteurs  $\chi_p^1$ , il vient :

$$\varphi_{,p}^0(x) = i \varphi_1^0(x; 0) \chi_p^1(x) \quad (20)$$

A l'ordre  $\epsilon^2$  dans (16), en tenant compte de l'expression (20) on obtient :

$$\Omega^2(K) \varphi_j^0(x; 0) = \tilde{\rho}^{-1} a_{jpmq}^h K_p K_q \varphi_m^0(x; 0) \quad (21)$$

où  $\tilde{\rho}$  est la masse volumique moyenne :

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{2\pi Y} \rho(x) dx \quad (22)$$

et les termes  $a_{jpmq}^h$  les coefficients d'élasticité homogénéisés (E. Sanchez-Palencia [8]).

$K$  étant fixé, (21) apparaît comme un système linéaire, homogène, par rapport aux inconnues  $\varphi_j^0(x; 0)$ . C'est le système que l'on obtient dans la recherche des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice  $(\tilde{\rho}^{-1} a_{jpmq}^h K_p K_q)$ . Cette matrice étant symétrique, elle possède :

- . trois valeurs propres réelles positives :  $\Omega_{(r)}^2(K)$
- . trois vecteurs propres orthonormés :  $\psi_{(r)}(K)$

Ces vecteurs pris comme vecteurs  $\varphi^0$  permettent les développements (18) et (19). Ainsi la valeur propre triple nulle éclate, en général, en trois branches holomorphes de valeurs propres simples.

### 3.3. Comportement de la solution $u$ pour $\epsilon$ tendant vers 0

Dans (14), effectuons le changement de variable  $k = \epsilon K$  et développons en puissances de  $\epsilon$ . On cherche le terme principal de l'expression  $\epsilon^3 \hat{u}^m(\epsilon K, t, \epsilon)$  Il est donné par l'intermédiaire de (15) et (16). On montre alors que le premier terme du développement de  $u$  est apporté par la contribution  $m = 0$ . C'est la fonction :

$$u^0(\epsilon x, \epsilon t) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{2} \frac{1}{\tilde{\rho}} \int_{\mathbb{R}^3} dK \left\{ [\hat{f}_1^0(K) - \frac{i}{\Omega_{(r)}(K)} \hat{g}_1^0(K)] \psi_{(r)}^{-1}(K) e^{i\Omega_{(r)}(K)\epsilon t} + [\hat{f}_1^0(K) + \frac{i}{\Omega_{(r)}(K)} \hat{g}_1^0(K)] \psi_{(r)}^{-1}(K) e^{-i\Omega_{(r)}(K)\epsilon t} \right\} e^{iK \cdot \epsilon x} \psi_{(r)}(K)$$

$\hat{f}(K)$  désignant la transformée de Fourier de la fonction  $f(x)$ . On vérifie aisément que  $u^0$  est solution de :

$$\frac{\partial^2 u_j^0}{\partial t^2} - \frac{a_{jpmq}^h}{\tilde{\rho}} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial x_p \partial x_q} = 0$$

$$u^0(\epsilon x, 0) = f^0(\epsilon x) \quad \frac{\partial u^0}{\partial t}(\epsilon x, 0) = \epsilon g^0(\epsilon x)$$

équations du mouvement d'un milieu homogène, de loi de comportement

$$\sigma_{jp}^h = a_{jpmq}^h \epsilon_{mq}(u) \quad \epsilon_{mq}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_m} \right)$$

obtenue par "homogénéisation" du problème d'élasticité initial.

## 4. DEVELOPPEMENT DE BLOCH POUR LES EQUATIONS DE LA VISCOELASTICITE

### 4.1. Milieu viscoélastique à mémoire longue

On considère un milieu viscoélastique, infini, à structure périodique : la masse volumique  $\rho(x)$ , les coefficients instantanés d'élasticité  $a_{hlmn}^h(x)$  et les coefficients  $b_{hlmn}(x, t)$ , qui décrivent les effets de mémoire, sont définis sur  $2\pi Y$ . Les fonctions  $a_{hlmn}^h(x)$  et  $\rho(x)$  vérifient les propriétés (1), (2) et (3). Les coefficients  $b_{hlmn}(x, t)$  qui satisfont aux hypothèses de symétrie (1), sont, de plus, continument différentiables par rapport à  $t$  et tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \forall t, |b_{hlmn}(x, t)| \leq b e^{-\beta t} \quad (b, \beta > 0) \quad (23)$$

propriété en accord avec celles des matériaux viscoélastiques.

Les forces volumiques étant supposées nulles, les équations du mouvement de ce milieu et les conditions initiales sont les suivantes :

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ a_{hlmn}^h(x) \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right] - \frac{1}{\rho(x)} \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x_l} [b_{hlmn}(x, t-s) \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(s)] ds = 0$$

$$(t \geq 0)$$

$$u(x, t) = u^*(x, t) \quad (t \leq 0)$$

où la fonction donnée  $u^*$  est, pour tout  $t \leq 0$ , un élément de  $(H^1(\mathbb{R}^3))^3$ .

Sous les hypothèses précédentes, l'existence et l'unicité de la solution de ce problème est assurée (C.H. Dafermos [3] et [4]).

Dans la base des fonctions propres des opérateurs  $A(k)$ , définis par (7), la solution  $u$ , appartenant à  $(H^1(\mathbb{R}^3))^3$ , admet un développement de Bloch :

$$u(x, t) = \int_Y e^{ik \cdot x} dk \sum_{m=0}^{+\infty} \hat{u}_m(k, t) \varphi^m(x; k) \quad (24)$$

Pour  $k$  fixé, le coefficient  $\hat{u}_m(k, t)$  est obtenu par résolution du système intégral-différentiel suivant :

$$\frac{d^2 \hat{u}_m}{dt^2} + \omega_m^2(k) \hat{u}_m + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^t (B(k; t-s) \varphi^n(\cdot; k), \varphi^m(\cdot; k)) \hat{u}_n(s) ds = 0 \quad (25)$$

$(t \geq 0)$

$$\hat{u}_m(k, t) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik \cdot x} u_n^*(x, t) \overline{\varphi}_h^m(x; k) \rho(x) dx \quad (26)$$

$(t \leq 0)$

où l'opérateur  $B(k; t)$  est défini, de manière analogue à  $A(k)$  par :

$$[B(k; t)u]_n(x) = -\frac{1}{\rho(x)} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + ik_1 \right) [b_{hlmn}(x, t) \left( \frac{\partial}{\partial x_n} + ik_n \right) u_m] \quad (27)$$

L'étude de la fonction  $u$  est donc ramenée à celle de solutions de systèmes intégral-différentiels.

## 4.2. Application : recherche d'approximations de la solution

### 4.2.1. Homogénéisation du matériau viscoélastique

$\epsilon$  étant un petit paramètre positif donné, supposons les conditions initiales de la forme :

$$u(x, t) = u^*(\epsilon x, \epsilon t) \quad (t \leq 0) \quad (28)$$

La période du matériau est donc petite par rapport à l'échelle des données et ceci entraîne une approximation de la solution lorsque  $\epsilon$  tend vers 0.

On montre, comme dans le cas du matériau élastique, que le comportement de  $u$  est donné par l'apport des trois termes  $m=0$  du développement (24). La fonction  $u^0$ , qui approche ainsi  $u$ , est solution d'un problème de viscoélasticité à mémoire longue pour lequel la loi de comportement est :

$$\sigma_{jp}^h(t) = \int_{-\infty}^t \beta_{jpmq} (t-s) \epsilon_{mq}(u(s)) ds$$

où les coefficients ont pour transformés de Laplace les homogénéisés des coefficients  $(a_{jpmq}(x) + \hat{b}_{jpmq}(x, \lambda))$ .

### 4.2.2. Matériau à faible viscoélasticité ou à petit temps de relaxation

Soit  $\epsilon$  un petit paramètre positif. Supposons que le matériau soit à faible viscoélasticité, c'est-à-dire que les coefficients en relation avec les effets de mémoire dépendent de  $\epsilon$  sous la forme :

$$b_{hlmn}^\epsilon(x, t) = \epsilon b_{hlmn}(x, t)$$

Les coefficients  $\hat{u}_m(k, t, \epsilon)$  sont alors solutions de systèmes intégral-différentiels où l'introduction du petit paramètre  $\epsilon$  permet l'utilisation de techniques d'approximation : méthode des échelles multiples, perturbations spectrales (N. Turbé [10]).

Le cas d'un matériau à petit temps de relaxation :

$$b_{hlmn}^\epsilon(x, t) = \frac{1}{\epsilon} b_{hlmb}(x, \frac{t}{\epsilon})$$

conduit à une étude analogue (N. Turbé [10]).

### 4.3. Milieu viscoélastique à mémoire instantanée

On considère un milieu viscoélastique, infini, à structure périodique : la masse volumique  $\rho(x)$ , les coefficients d'élasticité  $a_{hlmn}(x)$  et les coefficients  $b_{hlmn}(x)$ , liés aux effets de mémoire, sont définis sur  $2\pi Y$ . La fonction  $\rho(x)$  satisfait à l'hypothèse (3), les coefficients  $a_{hlmn}(x)$  et  $b_{hlmn}(x)$  aux propriétés de symétrie et d'ellipticité (1) et (2).

Les forces volumiques étant supposées nulles, les équations du mouvement de ce milieu et les conditions initiales sont les suivantes :

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ a_{hlmn}(x) \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right] - \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ b_{hlmn}(x) \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n \partial t} \right] = 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

Pour  $f$  appartenant à  $(H^1(\mathbb{R}^3))^3$  et  $g \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3$ , le problème admet une solution et une seule,  $u$ , qui possède un développement de Bloch de la forme (24), dans la base des fonctions propres des opérateurs  $A(k)$ .

Le paramètre étant fixé, le coefficient  $\hat{u}_m(k, t)$  est obtenu par résolution du système différentiel suivant :

$$\frac{d^2 \hat{u}_m}{dt^2} + \omega_m^2(k) \hat{u}_m + \sum_{n=0}^{+\infty} (B(k) \varphi^n(\cdot, k), \varphi^m(\cdot; k)) \frac{d \hat{u}_n}{dt} = 0$$

$$\hat{u}_m(k, 0) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik \cdot x} f_h(x) \overline{\varphi}_h^m(x; k) \rho(x) dx$$

$$\frac{d \hat{u}_m}{dt}(k, 0) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik \cdot x} g_h(x) \overline{\varphi}_h^m(x; k) \rho(x) dx$$

où l'opérateur  $B(k)$  est défini de manière analogue à  $A(k)$  à l'aide des coefficients  $b_{hlmn}(x)$ .

#### 4.4. Application : recherche d'approximations de la solution

##### 4.4.1. Homogénéisation du matériau viscoélastique

$\epsilon$  étant un petit paramètre positif donné, on suppose que les données  $f$  et  $g$  sont des fonctions de  $x$  lentement variables par l'intermédiaire de  $\epsilon$  :

$$u(x,0) = f^0(\epsilon x) + \epsilon f^1(\epsilon x) + \dots \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \epsilon g^0(\epsilon x) + \epsilon^2 g^1(\epsilon x) + \dots$$

Par rapport à l'échelle des données, la période du matériau est donc petite et ceci amène à une approximation de la solution lorsque  $\epsilon$  tend vers 0.

On montre ici aussi, que le comportement de  $u$  est donné par la contribution des trois termes  $m=0$  du développement (24). La fonction  $u^0$  qui approche  $u$  est solution d'un problème de viscoélasticité pour lequel la loi de comportement de la forme

$$\begin{aligned} \sigma_{jp}^h(t) = & \alpha_{jpmq} \epsilon_{mq}(u(t)) + \beta_{jpmq} \epsilon_{mq} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right) \\ & + \int_0^t \gamma_{jpmq}(t-s) \epsilon_{mq}(u(s)) ds \end{aligned}$$

est constituée d'un terme élastique ( $\alpha$ ), d'un terme viscoélastique à mémoire courte ( $\beta$ ) et d'un terme à mémoire longue ( $\gamma$ ). (les expressions des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont explicités dans [8]).

##### 4.4.2. Matériau à faible viscoélasticité

Soit  $\epsilon$  un petit paramètre positif. On suppose que le matériau est à faible viscoélasticité :

$$b_{hlmn}^\epsilon(x) = \epsilon b_{hlmn}(x)$$

Les coefficients  $\hat{u}_m(k,t,\epsilon)$  sont alors solutions de systèmes différentiels où l'introduction du petit paramètre  $\epsilon$  permet l'utilisation de techniques d'approximation (E. Sanchez-Palencia [7]).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.D. ACHENBACH  
Waves and vibrations in directionally reinforced composites. Composite materials, vol. 2, Mechanics of Composite materials. L.J. Broutman, R.M. Kroch (ed.) Academic Press, New-York, (1975), pp. 309-351.
- [2] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU  
Asymptotic analysis for periodic structures. North-Holland Publishing Co, Amsterdam (1978).
- [3] C.M. DAFERMOS  
An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity J. Diff. Eqn, 7, pp. 554-569 (1970).
- [4] C.M. DAFERMOS  
Asymptotic stability in viscoelasticity A.R.M.A., 37, pp. 297-308 (1970).

- [5] G. DUVAUT  
Etude de matériaux composites élastiques à structure périodique. Homogénéisation. Proc. Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Delft (1976). Ed. Koiter. North-Holland, Amsterdam (1976).
- [6] T.C. MA, R.A. SCOTT, W.H. YANG  
Harmonic wave propagation in an infinite viscoelastic medium with a periodic array of cylindrical elastic fibers. J. Sound and Vib., 69, pp. 257-264 (1980).
- [7] E. SANCHEZ-PALENCIA  
Justification de la méthode des échelles multiples pour une classe d'équations aux dérivées partielles. Annal. Mat. Pura Appl., 66, pp. 159-176 (1978).
- [8] E. SANCHEZ-PALENCIA  
Non homogeneous media and vibration theory. Springer, Berlin (1980).
- [9] C. SVE  
Time harmonic waves traveling obliquely in a periodically laminated medium. J. Appl. Mech., 22, pp. 471-482 (1971).
- [10] N. TURBE  
Thèse de Doctorat ès Sciences, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6 (1982).
- [11] C.H. WILCOX  
Theory of Bloch waves. J. Anal. Math., 33, pp. 146-167 (1975).

## CONTRIBUTION A L'INTERPRETATION DES ESSAIS DE TRACTION A GRANDE VITESSE (\*)

### ON THE INTERPRETATION OF HIGH STRAIN RATE TENSILE TESTS

G. REGAZZONI, J.C. GIANNOTTA (Ingénieurs de recherche)  
et F. MONTHEILLET (Maître de recherche).  
Centre de Mise en Forme des Matériaux ERA 837  
Ecole des Mines de Paris.  
R. DORMEVAL (Ingénieur)  
Commissariat à l'Energie Atomique, Centre de Bruyères-le-Châtel

#### RESUME

L'interprétation d'un essai de traction dynamique est délicate car les conditions de déformation à grande vitesse font apparaître différents problèmes qui sont absents dans le cas des essais de traction traditionnels à faible vitesse. Nous abordons dans cette étude les questions les plus délicates posées par ce type d'essais, qui concernent la détermination de la vitesse de traction, l'échauffement en cours de déformation dans l'éprouvette et enfin l'influence des effets d'inertie. Ces différents points sont analysés dans le cas d'essais de traction sur du cuivre pur.

#### ABSTRACT

The interpretation of dynamic tensile test data raises problems which are not present in the case of conventional tensile tests. The more important of these problems are discussed, including the determination of the speed of the mobile head, the effect of adiabatic heating during straining and the influence of inertial effects. The relative importance of these factors is analysed in the case of tests carried out on pure copper.

#### 1. GENERALITES SUR L'ESSAI DE TRACTION A GRANDE VITESSE

Au cours des dernières années, un intérêt croissant a été porté à l'étude du comportement mécanique des matériaux soumis à des vitesses de déformation élevées ( $\dot{\epsilon} > 10^3 \text{ s}^{-1}$ ). Dans le domaine s'étendant de quelques centaines à quelques milliers de secondes<sup>-1</sup>, la plupart des essais ont été effectués en compression, au moyen du système de barres de Hopkinson ; dans ce cas la quantité de déformation est limitée, et l'interprétation des essais est compliquée par l'apparition du bombé des éprouvettes, lié aux conditions de frottement. Certains

(\*) Communication présentée au Groupe Français de Rhéologie le 2 Décembre 1982.



Figure 1: dispositif de traction à grande vitesse, dit ARBALETE (C.E.A., Centre de Bruyères-le-Châtel)

essais ont été effectués en cisaillement simple à l'aide d'un dispositif analogue. Les essais de traction sont par contre peu répandus, bien qu'ils présentent l'avantage d'imposer à l'échantillon des quantités de déformation importantes, et permettent d'étudier les phénomènes d'instabilité (striction) et de rupture.

La machine de traction à grande vitesse, dite ARBALETE, installée au CEA (Centre de Bruyères-Le-Châtel), réalise la mise en vitesse de la tête mobile de l'éprouvette par l'impact d'un projectile guidé sur deux rails, lancé à une vitesse  $v_p$  comprise entre 10 et 25 m/s (figure 1). Les éprouvettes couramment utilisées à l'heure actuelle ont un diamètre et une longueur  $\phi_0 = 2R = 2,5$  mm et  $L_0 = 15,7$  mm respectivement. A la suite de l'impact du projectile, la tête mobile de l'éprouvette est entraînée à la vitesse  $v(t)$ . Une jauge de contraintes située au voisinage de la tête fixe enregistre l'effort de traction  $F(t)$  (figure 2). L'électronique associée à l'appareillage permet d'obtenir pour chaque essai les courbes force-temps et allongement-temps. La figure 3 donne un exemple caractéristique des courbes ainsi enregistrées dans le cas d'un échantillon de cuivre OFHC tractionné à la température ambiante pour  $v_p = 19,5$  m/s.

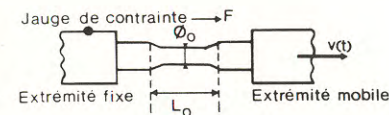


Figure 2 : Représentation schématique de l'essai de traction

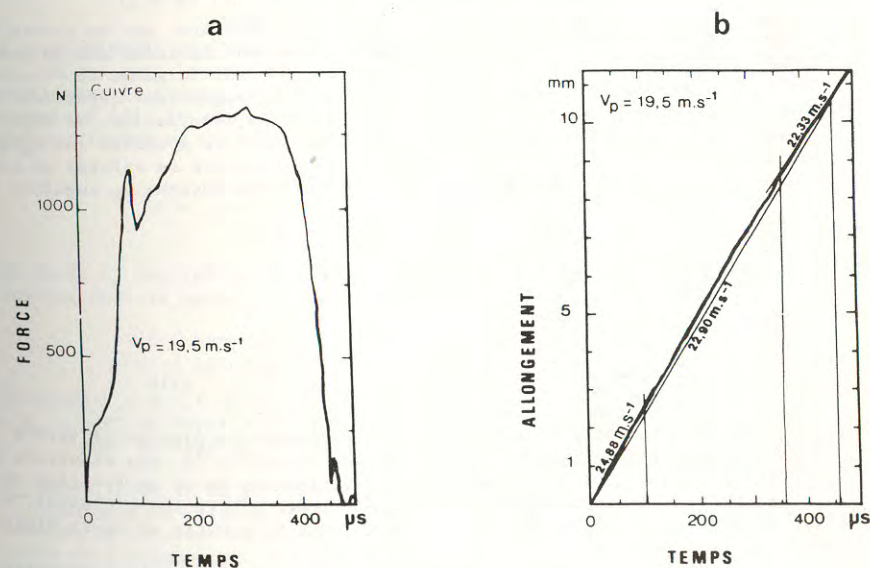


Figure 3 : Exemple d'enregistrements : courbe force-temps (a) courbe allongement-temps (b)



L'interprétation d'un tel essai est délicate, car les conditions de déformation à grande vitesse (régime "dynamique") font apparaître différents problèmes qui sont absents dans le cas des essais de traction traditionnels à faible vitesse (régime "quasistatique"). Nous nous proposons dans cette étude d'analyser les questions les plus délicates posées par ce type d'essais, qui concernent la détermination de la vitesse de traction, l'échauffement en cours de déformation, la répartition de la déformation dans l'éprouvette et enfin l'influence des effets d'inertie.

## 2. VITESSE DE TRACTION

L'essai de traction, dont la durée est généralement de quelques centaines de microsecondes (figure 3), comporte une phase de mise en vitesse de durée constante voisine de 15  $\mu$ s. Aux instants ultérieurs, la vitesse de traction  $v(t)$  peut être considérée comme constante en première approximation, comme le montre la figure 3b. Cette vitesse de traction moyenne est supérieure à celle du projectile, ce qui montre que la tête mobile de l'éprouvette décolle du projectile au moment de l'impact.

En fait, la vitesse de traction  $v(t)$  décroît légèrement au cours de l'essai, puisque l'énergie nécessaire pour déformer l'éprouvette et vaincre les forces de frottement est prise sur l'énergie cinétique de la tête mobile (l'énergie cinétique de l'éprouvette elle-même est négligeable). Ceci se traduit par la relation :

$$\frac{1}{2} m_t (v_i^2 - v_f^2) = \sigma_m \bar{\epsilon}_R V + E_{\text{frott}}. \quad (1)$$

où  $m_t$  désigne la masse de la tête mobile (pour les essais les plus récents,  $m_t = 0,8$  kg),  $v_i$  et  $v_f$  les vitesses de traction au début et à la fin de l'essai. Le terme  $\sigma_m \bar{\epsilon}_R V$  représente le travail nécessaire pour tractionner une éprouvette de volume  $V$  et de contrainte d'écoulement moyenne  $\sigma_m$ ,  $\bar{\epsilon}_R$  désignant ici la déformation à la rupture. La connaissance de  $v_i$ ,  $v_f$  et du terme  $\sigma_m \bar{\epsilon}_R V$  tiré des courbes de traction, permet de calculer par différence l'énergie dépensée en frottement  $E_{\text{frott}}$ .

Les expériences effectuées à la température ambiante, sur un cuivre de haute pureté à l'aide des éprouvettes mentionnées plus haut montrent que le terme  $\sigma_m \bar{\epsilon}_R V$  reste approximativement constant et voisin de 10J dans la gamme de vitesses utilisées ( $v_i$  variant de 14 à 36 m/s). En fait,  $\sigma_m$  et  $\bar{\epsilon}_R$  augmentent légèrement avec  $v_i$  ce qui entraîne un lent accroissement du travail de déformation. De même le terme  $E_{\text{frott}}$  reste sensiblement constant et du même ordre de grandeur que  $\sigma_m \bar{\epsilon}_R V$ . Il résulte de ces observations que la décroissance relative de vitesse en cours d'essai  $\Delta v/v_m$  diminue lorsque la vitesse de traction moyenne  $v_m$  augmente :

$$\frac{1}{2} m_t (v_i^2 - v_f^2) = C \approx \text{constante}$$

d'où l'on déduit :

$$m_t \cdot v_m \cdot \Delta v = C$$

et 
$$\frac{\Delta v}{v_m} = \frac{C}{m_t v_m^2} \quad (2)$$

$\Delta v/v_m$  est compris entre 5% aux vitesses de déformation élevées ( $1,9 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ ) et 20% aux vitesses de déformation plus faibles ( $7,4 \times 10^2 \text{ s}^{-1}$ ). Ces résultats sont précisés par la figure 5 qui présente les variations de  $v_f$  en fonction de  $v_i$ .

La vitesse de déformation  $\dot{\epsilon} = v(t)/L(t)$  décroît en cours d'essai, à la fois à cause de l'augmentation de longueur de l'éprouvette et de la diminution de  $v$ .

En pratique, on pourra prendre comme vitesse de déformation nominale :

$$\dot{\epsilon}_0 = \frac{L_R}{L_0 \Delta t} = \frac{v_m}{L_0} \quad (3.a)$$

où  $L_0$  et  $\Delta L_R$  désignent la longueur initiale de l'éprouvette et l'allongement à la rupture,  $\Delta t$  la durée de l'essai.

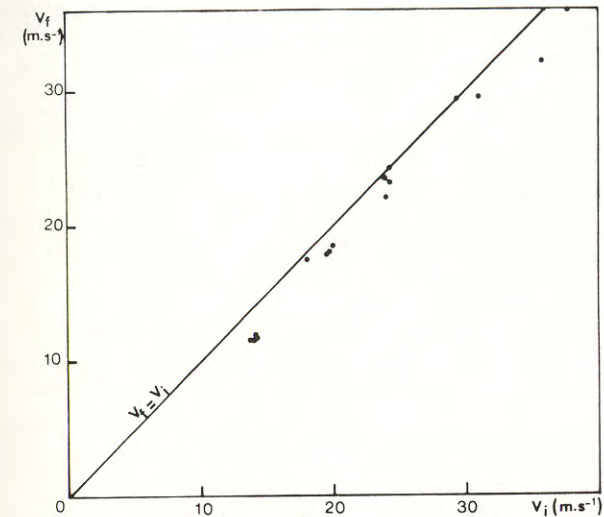


Figure 4 : Variation de la vitesse de traction  $v_f$  à la fin de l'essai en fonction de la vitesse de traction.

## 3. ECHAUFFEMENT EN COURS DE DEFORMATION

Alors que l'essai de traction quasistatique peut très souvent être considéré comme isotherme, la déformation est approximativement adiabatique en régime dynamique (cf. la durée de l'essai). Dans ces conditions une valeur approchée de l'échauffement en cours d'essai est donnée par la relation :

$$\Delta \theta = \frac{(1-f) \sigma_m \bar{\epsilon}_R}{\rho C_p} \quad (3.b)$$

où  $\sigma_m$  et  $\bar{\epsilon}_R$  ont été définis plus haut,  $f$  désigne la fraction d'énergie mécanique stockée dans le matériau (écrouissage). Dans le cas du cuivre,

$$\rho = 8900 \text{ kg/m}^3 \\ C_p = 380 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$$

En prenant  $f = 0,1$  et  $\bar{\epsilon}_R = 0,5$  on obtient :

- pour un essai à 20°C,  $\sigma_m = 310$  Mpa d'où  $\Delta \theta \approx 40^\circ\text{C}$
- pour un essai à 500°C,  $\sigma_m = 150$  Mpa d'où  $\Delta \theta \approx 20^\circ\text{C}$

## 4. REPARTITION DE LA DEFORMATION DANS L'EPROUVETTE

La mise en vitesse étant effectuée par choc d'un projectile sur la tête mobile, la déformation plastique ne s'étend pas instantanément à l'ensemble du corps de l'éprouvette. Des mesures de déformation locale (allongement relatif) ont été effectuées à l'aide d'une caméra rapide sur une éprouvette préalablement munie d'un marquage [1]. La figure 6 montre la répartition de la déformation dans le corps de l'éprouvette de longueur 30 mm à différents instants. Pendant

la première partie de l'essai, seule la partie de l'éprouvette située à proximité de la tête mobile se déforme. L'autre extrémité de l'éprouvette n'est atteinte par la déformation qu'au bout d'un temps voisin de 30  $\mu$ s. Dans une deuxième phase, la déformation s'homogénéise progressivement. Pour les éprouvettes de longueur 15,7 mm actuellement utilisées, la déformation peut être considérée comme homogène lorsque l'allongement relatif  $\Delta L/L_0$  atteint 10%, c'est-à-dire au bout d'une centaine de microsecondes.

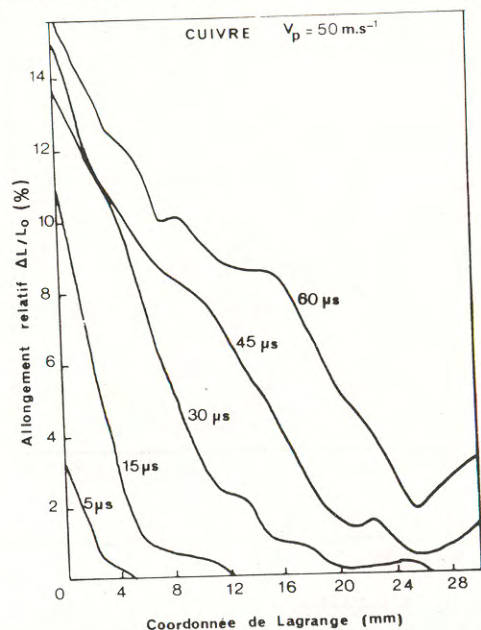


Figure 5 : Répartition de la déformation dans le corps de l'éprouvette à différents instants de l'essai de traction. D'après BUCHALET [1]

### 5. INFLUENCE DES EFFETS D'INERTIE

Au cours d'un essai de traction à faible vitesse, l'effort exercé sur l'éprouvette sert presque exclusivement à assurer sa déformation plastique. En régime dynamique, par contre, il n'est pas possible a priori de négliger les forces d'inertie, nécessaires pour mettre en vitesse les éléments de matière en des temps très courts. Ceci se traduit par la relation :

$$Fv(t) = \dot{W}_p + \dot{W}_c \quad (4)$$

où  $F$  désigne la force de traction,  $\dot{W}_p$  la puissance de déformation plastique, et  $\dot{W}_c$  le taux de variation de l'énergie cinétique de l'éprouvette.

Dans le cas d'une éprouvette cylindrique et en supposant la déformation homogène, la relation (5) permet de déduire l'expression de la contrainte d'écoulement apparente (mesurée) [2] :

$$\sigma_a = \sigma + \rho \left[ \frac{vL}{12} + \frac{R^2}{8} \left( \frac{v}{L} - \frac{3}{2} \frac{v^2}{L^2} \right) \right] \quad (5)$$

Les variations de  $\sigma$  et  $\sigma_a$  en fonction de l'allongement  $\Delta L/L_0$  ont été portées sur la figure 7 pour une éprouvette de cuivre de diamètre  $2R_0 = 2,5$  mm et de longueur  $L_0 = 15,7$  mm. La vitesse de traction est définie par la relation :

$$v = v_m \left[ 1 - \exp \left( -\frac{t}{t_c} \right) \right] \quad \text{avec } t_c = 5 \mu s$$

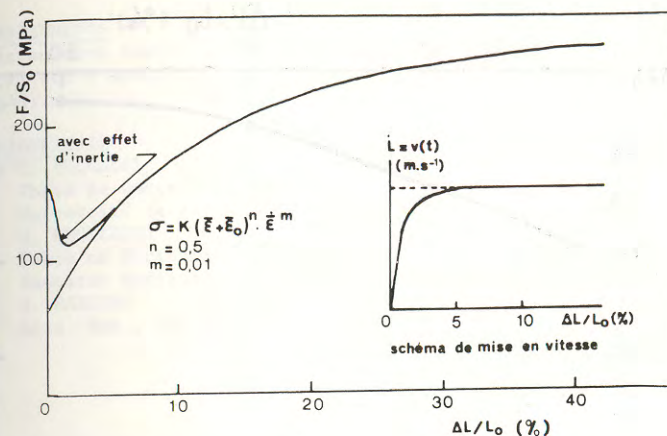


Figure 6 : Influence des effets d'inertie sur la contrainte d'écoulement déduite d'un essai de traction à grande vitesse.

Deux domaines peuvent être distingués :

- pendant la phase de mise en vitesse ( $\Delta L/L_0 < 5\%$ ), les effets d'inertie sont importants :  $\sigma_a$  est supérieure à  $\sigma$  et présente un pic marqué au début de l'essai ;

- lorsque la vitesse de traction est stabilisée, les effets d'inertie se réduisent au terme :

$$-\frac{3}{16} \rho R^2 \frac{v^2}{L^2}$$

et tendent donc à rendre  $\sigma_a$  plus petite que  $\sigma$  ; cette variation est cependant négligeable à l'échelle de la figure.

Par conséquent, les effets d'inertie ne perturbent que le début de la courbe de traction. Ils peuvent également expliquer l'existence du pic initial de la courbe force-temps, bien que des causes microstructurales puissent également être évoquées [3].

### 6. CONCLUSIONS

La figure 8 présente la courbe  $\sigma - \bar{\epsilon}$  déduite des courbes force-temps et allongement-temps de la figure 3. L'origine des déformations a été prise à l'instant où se produit le pic initial d'effort (figure 3-a), en admettant que cet instant corresponde au début de la déformation plastique de l'éprouvette au niveau de la tête fixe. Ce choix comporte toutefois une part d'arbitraire et peut être contesté. D'après les paragraphes précédents, la validité de la courbe de la figure 8 est affectée par l'hétérogénéité de la déformation pour  $\Delta L/L_0 < 10\%$  et par les effets d'inertie pour  $\Delta L/L_0 < 5\%$ . On n'oubliera pas par ailleurs que la vitesse de déformation  $\bar{\epsilon}$  décroît et que la température croît au cours de l'essai.

Malgré ces difficultés d'interprétation, la courbe  $\sigma - \bar{\epsilon}$  obtenue en traction dynamique est valable entre  $\Delta L/L_0 = 10\%$  et l'apparition de la striction. En particulier, elle n'est pas affectée par les effets d'inertie dans le cas des éprouvettes utilisées et dans la gamme de vitesses de déformation testées. De telles courbes obtenues à la température ambiante sur un cuivre de haute pureté, ont permis de mettre en évidence dans le domaine des grandes vitesses la relation [2].

$$\sigma = \sigma_0 + \alpha \dot{\bar{\epsilon}} \quad \text{pour } \bar{\epsilon} \text{ fixé} \quad (6)$$

Cette relation traduit l'augmentation rapide de  $\sigma$  en fonction de  $\dot{\bar{\epsilon}}$  dans le domaine dynamique, comme le montre à titre d'exemple la figure 9.

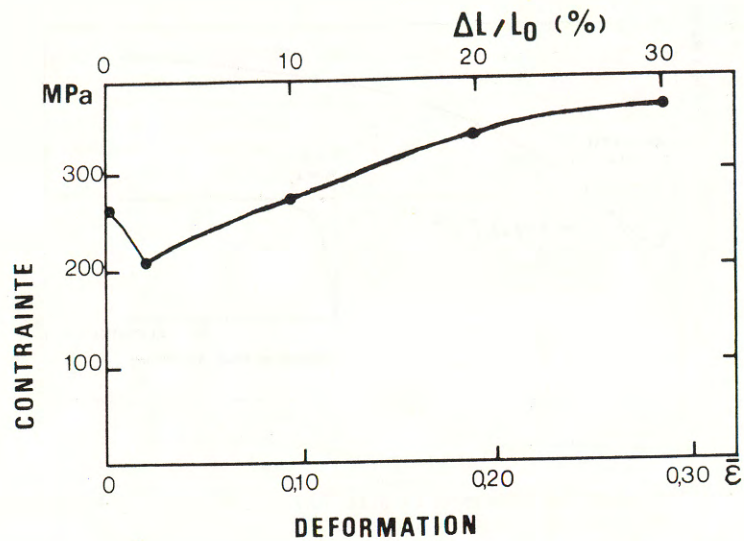


Figure 7 : Courbe contrainte-déformation déduite des courbes force-temps et allongement-temps de la figure 3

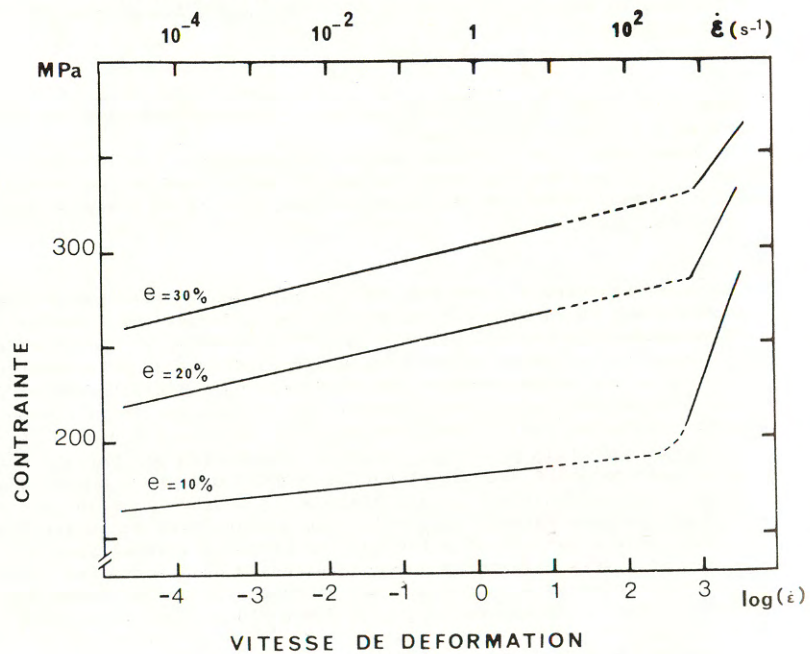


Figure 8 : Courbes contrainte-vitesse de déformation pour différentes quantités de déformation  $\epsilon$ .

#### 7. REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient le Centre d'Etudes Techniques des Armes et Munitions (D.T.A.T) qui a assuré le financement de cette étude (contrat CETAM-ARMINES 81-02-049).

#### 8. BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BUCHALET  
Thèse de Docteur-Ingénieur  
Université de Paris XIII (1970)
- [2] G. REGAZZONI  
Thèse de Docteur-ès-Sciences  
Institut National Polytechnique de Grenoble, à paraître (1983)
- [3] J. HARDING  
Acta Met., 19, (1971) 1177

## COUPLAGE DYNAMIQUE PAR CHOC

### COUPLING OF STRUCTURES THROUGH IMPACT PHENOMENON

F. SIDOROFF, Professeur et J.P. LAINE, Assistant.

#### RESUME

Le couplage de structures par phénomènes de choc fait intervenir trois principaux aspects : aspect dynamique du comportement des structures, aspect unilatéral du couplage, aspect comportement des matériaux à la déformation localisée.

Nous proposons dans cette étude une modélisation des problèmes de choc basée sur une analyse vibratoire de deux structures élastiques linéaires, couplées par une loi d'interface unilatérale dissipative, non linéaire.

Nous envisageons trois cas particuliers représentatifs (barreaux en compression, poutre en flexion, barreau en compression sur un massif viscoélastique) pour lesquels nous comparerons les résultats expérimentaux d'une simulation numérique.

#### ABSTRACT

Structures interaction through impact phenomenon involves three main aspects : dynamical behaviour of structures, unilateral coupling, local behaviour in the contact area.

We propose in this paper a comparison between experiences and computations for three typical cases (axial impact of elastic bars, flexural impact of a beam, impact of a bar on a viscoelastic half-space).

1-Communication présentée au Groupe Français de Rhéologie, le 3.12.82  
2-Laboratoire de Mécanique des Solides de l'ECOLE CENTRALE DE LYON

## 1-INTRODUCTION

Les problèmes de choc entre structures sont des problèmes difficiles et très importants pour les applications. Cette difficulté provient notamment que la description, même qualitative, d'un choc exige la prise en compte de nombreux aspects :

-Aspect dynamique : la prise en compte des termes d'inertie, en particulier la propagation des ondes induites dans les structures ne peut, la plupart du temps être ignorée.

-Aspect rhéologique du comportement des matériaux dans une plage de vitesses de déformations ou ce comportement est le plus souvent mal connu et ou les caractérisations rhéologiques classiques ne peuvent pas être utilisées. Les actes de ce colloque en sont un bon témoignage.

-Aspect unilatéral lié au problème de contact qui introduit une non linéarité essentielle et un couplage entre efforts et déplacements. Le trajet de chargement résulte de ce couplage et n'est donc connu ni en déformations, ni en contraintes. La géométrie locale des surfaces en contact joue également un rôle important.

-Aspect superficiel qui peut induire au niveau du contact des phénomènes locaux de frottement et d'adhésion, source supplémentaire de dissipation. Ces phénomènes sont encore mal connus, surtout dans les domaines des sollicitations rapides.

La formulation et la résolution numérique directe d'un tel problème dans le cadre de la mécanique des milieux continus pose donc des problèmes insurmontables sitôt que l'on vise une modélisation un tant soit peu réaliste du problème réel. En vue des applications, il importe donc de mettre en place une modélisation simple mais susceptible de prendre simultanément en compte les différents aspects mentionnés plus haut. C'est le sujet du travail que nous présentons.

Le point de départ de notre modélisation est la constatation que, parmi les quatre aspects évoqués, seul le premier concerne l'ensemble des structures impliquées alors que les trois autres sont nettement localisés au voisinage immédiat du contact. Ceci autorise la modélisation d'un tel problème par une loi rhéologique de contact créant un couplage dynamique entre deux structures discrétisées

par les techniques habituelles de la dynamique des structures. Des démarches de ce type ont déjà été utilisées pour des problèmes quasi statiques. C'est par exemple l'idée de base de l'approche énergétique de Griffith en Mécanique de la Rupture [1]. C'est également le point de vue de Maugis pour certains problèmes d'adhésion [2]. En dynamique, cette idée de couplage dynamique entre structures au moyen d'une loi d'interface non linéaire et dissipative commence également à faire son chemin [3]. Enfin ce travail est à rapprocher de certaines études récentes, à caractère plus mathématique, sur les problèmes de choc [4].

Nous présenterons au paragraphe 2, l'idée générale de la méthode, à partir d'un bilan énergétique du phénomène de choc. Nous détaillerons ensuite la construction de la modélisation tandis que le paragraphe 3 sera consacré à la confrontation théorie-expérience sur les problèmes types suivants : barreaux en traction et poutre en flexion, choc d'un barreau sur un massif viscoélastique.

## 2-PRESENTATION DE LA METHODE

### 2-1.BILAN ENERGETIQUE

Nous considérons donc un choc entre deux structures  $S_1$  et  $S_2$  et nous notons  $K_1^-$ ,  $K_2^-$  et  $K_1^+$ ,  $K_2^+$  l'énergie cinétique de ces deux structures respectivement avant et après le choc. Nous pouvons écrire

$$(1) K_1^- + K_2^- = K_1^+ + K_2^+ + D$$

ou  $D$  est l'énergie dissipée dans le choc qui est habituellement caractérisé par le "coefficient de restitution". Ce bilan global doit être affiné par une analyse plus précise de l'origine physique de la dissipation  $D$ . Les sources de dissipation sont multiples mais on peut les ranger en deux grandes classes.

a) Dissipations réparties provenant de l'ensemble de chaque structure  $S_1$  et  $S_2$  : l'impact crée un système d'ondes qui se propagent dans les deux structures et qui induit des vibrations, ensuite amorties par les mécanismes classiques (amortissement interne des matériaux). Il s'agit donc également d'une dissipation différée dans le temps car l'énergie ainsi dissipée est, lors du choc, momentanément stockée sous forme d'énergie vibratoire. Le bilan énergétique (1) est établi sur un intervalle de temps grand par rapport à la durée du choc.

(b) les solutions du problème statique obtenu en remplaçant pour chacune des structures les conditions aux limites d'interaction par une force dans la direction de la réaction d'interaction. Si une telle solution n'est pas définie (existence d'un mode de corps rigide) c'est ce dernier qui sera retenu pour compléter la base des déplacements cinématiquement admissibles.

Soit  $[\Phi_{11}, \Omega_{11}]$ ,  $[\Phi_{21}, \Omega_{21}]$  et  $\vec{R}_1, \vec{R}_2$  les solutions du problème (a) et (b) pour les structures (1) et (2).

Le schéma différentiel obtenu peut alors être représenté par un modèle discret équivalent. (Fig. 1)

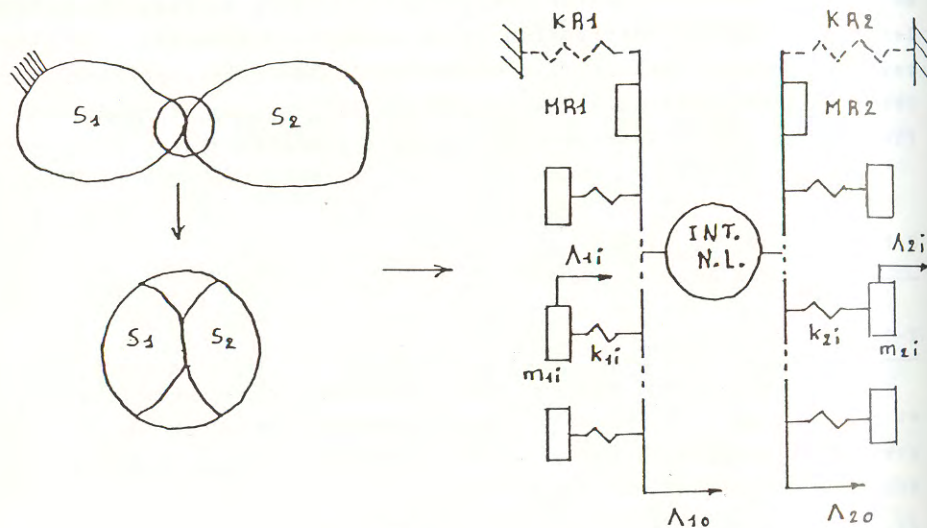


FIG -1-

Soit  $T_k(\dot{u}, \dot{u})$ ,  $k=1,2$  : l'expression de l'énergie cinétique pour les structures (1), (2)

$V_k(u, u)$  : l'expression de l'énergie potentielle de déformation élastique

il vient :

$$\begin{aligned}
 \cdot m_{k1} &= \frac{T_k^2(\vec{\Phi}_{k1}, \vec{R}_k)}{T_k(\vec{\Phi}_{k1}, \vec{\Phi}_{k1})} & \cdot K_{k1} &= \Omega_{k1} \cdot m_{k1} \\
 \cdot M_{Rk} &= T_k(\vec{R}_k, \vec{R}_k) & \cdot K_{Rk} &= V_k(\vec{R}_k, \vec{R}_k)
 \end{aligned}$$

b) Dissipations localisées au voisinage immédiat du contact, donc sur un volume très faible, et qui résultent des différents mécanismes de dissipation évoqués dans l'introduction.

.dissipation rhéologique (plastique, viscoplastique, viscoélastique..) à l'intérieur du matériau au voisinage immédiat du point d'impact.

.dissipation superficielle (frottement, adhésion) à l'interface de contact entre les deux matériaux.

Cette décomposition de l'énergie dissipée D en trois parties :

$$D = D_1 + D_2 + D_0$$

$D_1$  et  $D_2$  : dissipation différée dans  $S_1$  et  $S_2$

$D_0$  : dissipation localisée au contact

permet de découpler l'aspect dynamique responsable de  $D_1$  et  $D_2$ , des trois autres aspects qui sont globalement pris en compte par  $D_0$ .

C'est sur ce découplage que s'appuie notre modélisation.

## 2-2. PRINCIPE DE LA MODELISATION

La différence de nature et d'échelle entre les phénomènes locaux (au voisinage immédiat de la surface d'interaction) et les phénomènes dynamiques dans les structures suggère l'utilisation d'une analyse séparée pour chacun des problèmes.

Pour la modélisation du problème local on utilisera un modèle phénoménologique global d'interface sous la forme d'une loi liant la force d'interaction et l'interpénétration des deux structures. De tels modèles ont été utilisés avec succès dans le cas où l'influence du comportement dynamique des structures était faible et pour de nombreux cas de type de comportement des matériaux : comportement élastique en utilisant la théorie de Hertz, comportement viscoélastique et élastoplastique.

Pour la description du comportement dynamique des structures nous nous limiterons à une modélisation purement élastique car sur l'intervalle de temps où se produit l'interaction (durée du choc) on peut négliger l'amortissement dû aux dissipations à long terme.

La discrétisation du problème unilatéral en vue d'une intégration numérique passe par le choix d'une base de déplacement cinématiquement admissible pour chacune des deux structures. La solution retenue est d'utiliser :

(a) les solutions propres du problème bilatéral obtenu en imposant un déplacement nul pour chacune des deux structures au point d'interaction.

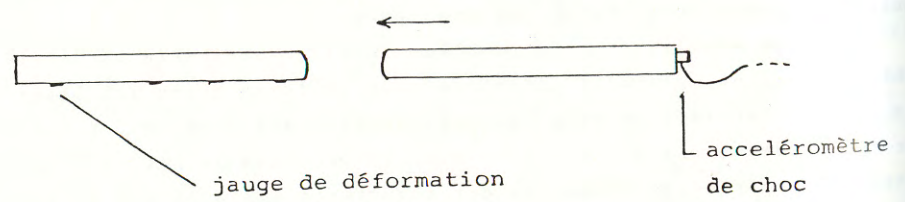
$$\ddot{u}_k = \sum_{i=1}^n [ (\Lambda_{ki} - \Lambda_{k0}) \cdot C_{ki} \cdot \dot{\phi}_{ki} + \Lambda_{k0} \cdot \ddot{R}_k ]$$

avec  $C_{ki} = \frac{T_k(\dot{\phi}_{ki}, \ddot{R}_k)}{T_k(\dot{\phi}_{ki}, \dot{\phi}_{ki})}$

### 3-CONFRONTATION THEORIE-EXPERIENCE

#### 3-1.CHOC COAXIAL DE DEUX BARREAUX

Deux barreaux d'acier cylindrique, à extrémité sphérique, (longueur 31,3 cm, diamètre 3 cm, rayon de courbure à l'extrémité 7 cm) subissent un choc coaxial avec une vitesse relative de 40cm/s



Le modèle de simulation est construit sur la base d'un modèle monodimensionnel prenant en compte les effets transversaux (modèle de Rayleigh-Love). La relation "force d'interaction-déformation" retenue s'appuie sur les résultats de la théorie de Hertz, l'intégration numérique est réalisée sur un modèle à 21 degrés de liberté par barreau.

Les courbes C1 et C2 présentent une comparaison entre expérience et résultat de simulation, aux abscisses X/L = 0,31, X/L = 0,84 pour l'évolution des contraintes et à l'extrémité libre pour l'évolution des accélérations.

#### CHOC COAXIAL DE DEUX BARREAUX

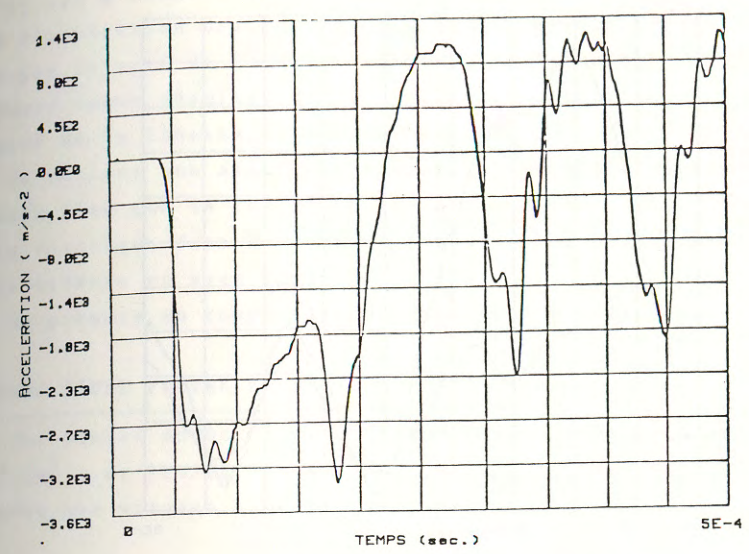


FIG -5- (EXPERIMENTAL)

#### CHOC COAXIAL DE DEUX BARREAUX

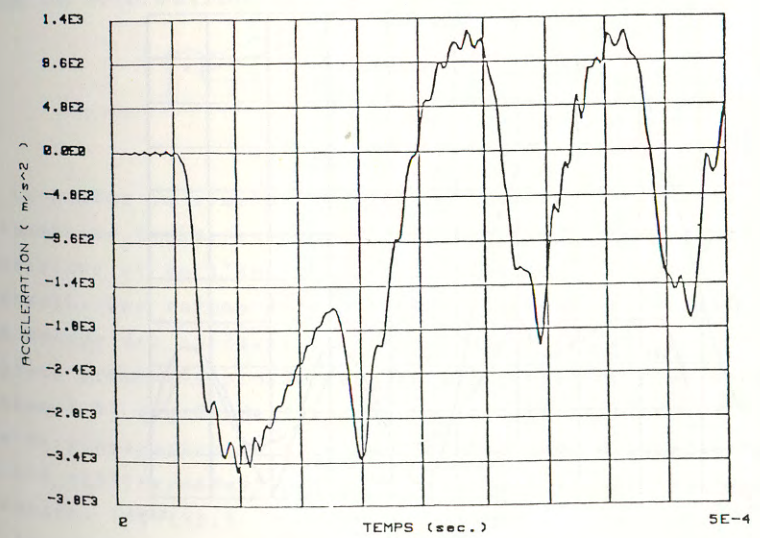


FIG -6- (CALCUL:21 d.d.1.)

X/L=1

### CHOC COAXIAL DE DEUX BARREUX

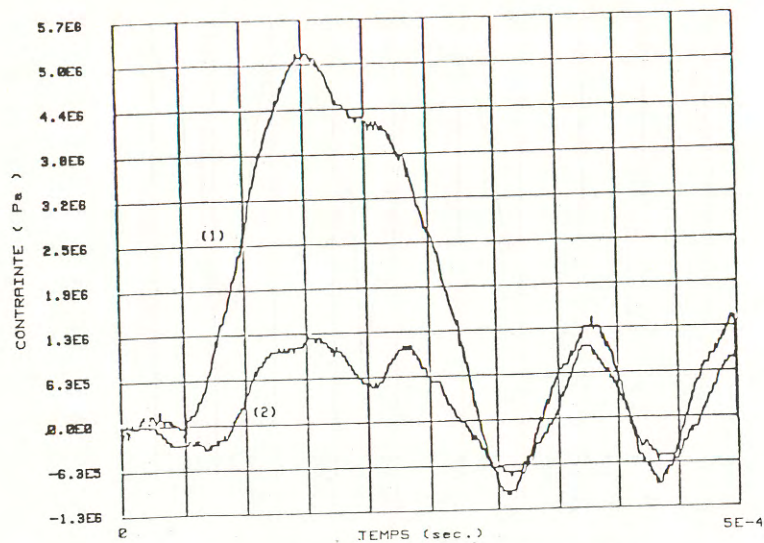


FIG -3- (EXPERIMENTAL)

### CHOC COAXIAL DE DEUX BARREUX

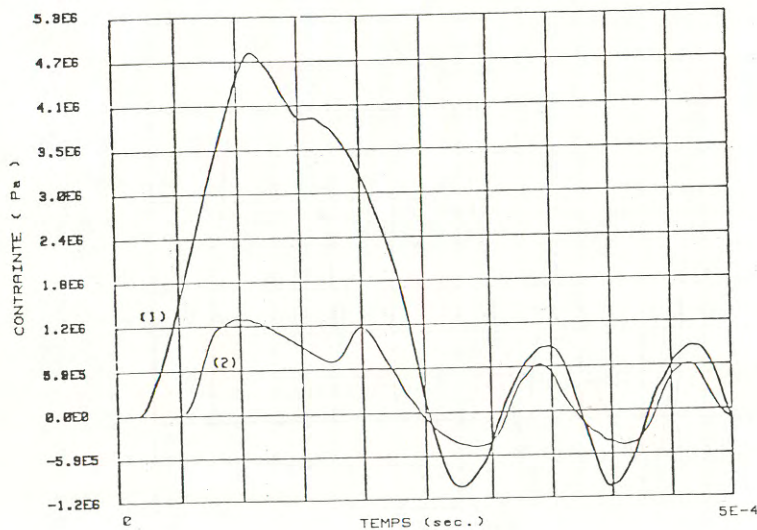


FIG -4- (CALCUL : 21 d.d.l.)

(1):  $X/L = .32$  (2):  $X/L = .84$

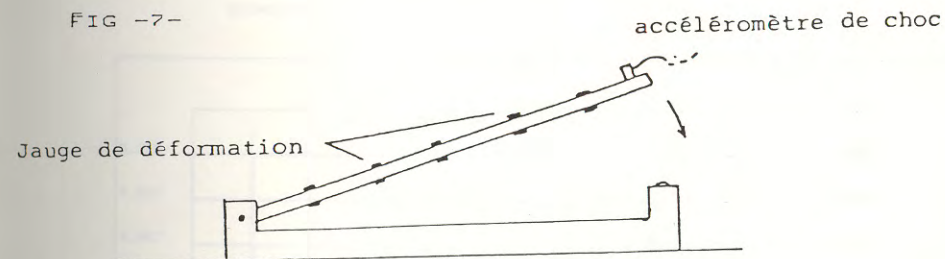
Il est à noter que l'aspect propagatoire du phénomène (retard pur à l'apparition des contraintes en différents points du barreau) n'est pas injecté de façon explicite dans le modèle. Le fait de les retrouver comme résultat de la simulation constitue un test de la validité de la finesse de discrétisation.

On obtient une assez bonne corrélation entre expérience et simulation bien que le calcul montre que les contraintes dépassent la limite élastique dans la zone de contact. Des essais réalisés à plus grande vitesse ou avec rayon de courbure plus faible montre la nécessité de prendre en compte les déformations plastiques à l'interface.

### 3-2. CHOC D'UNE POUTRE EN FLEXION

Une poutre en Dural de longueur :  $l = 1$  mètre, à section carrée  $S = 2 \text{ cm}^2$ , articulée à une de ces extrémités vient percuter un massif avec une vitesse linéaire de 3 m/s.

FIG -7-



Le schéma de simulation a été construit sur la base du modèle de Timoshenko (prise en compte de l'énergie cinétique de rotation des sections et de l'énergie potentielle de déformation dû à l'effort tranchant). Les rayons de courbure à l'interface ont été évalués après matage des surfaces de contact due à des chocs répétés. Les résultats présentés proviennent de l'intégration d'un schéma de simulation à 41 degrés de liberté. Vu le caractère très dispersif des ondes de propagation en flexion, le phénomène d'interaction est très long (15 millisecondes), et l'on assiste à de nombreuses ruptures de contact. (cf (5).)

La courbe (5) présente le résultat du calcul de la force d'interaction, les courbes (6) et (7) présentent une comparaison expérience - simulation pour les contraintes de flexion à 34 cm du point d'impact pour les 5 premières millisecondes du phénomène.



Le modèle de simulation prend en compte les forces de pesanteur.  
 Pour des temps d'intégration longs, les déperditions énergétiques à l'extré-  
 -mité articulée ont été simulées par un léger amortissement structural sur  
 les degrés de liberté représentant les modes dont la fréquence est la plus  
 élevée. 5

L'énergie restituée au mode de corps rigide est estimée à 38% par le calcul;  
 ce qui est tout à fait en accord avec la mesure expérimentale de la hauteur  
 de rebond.

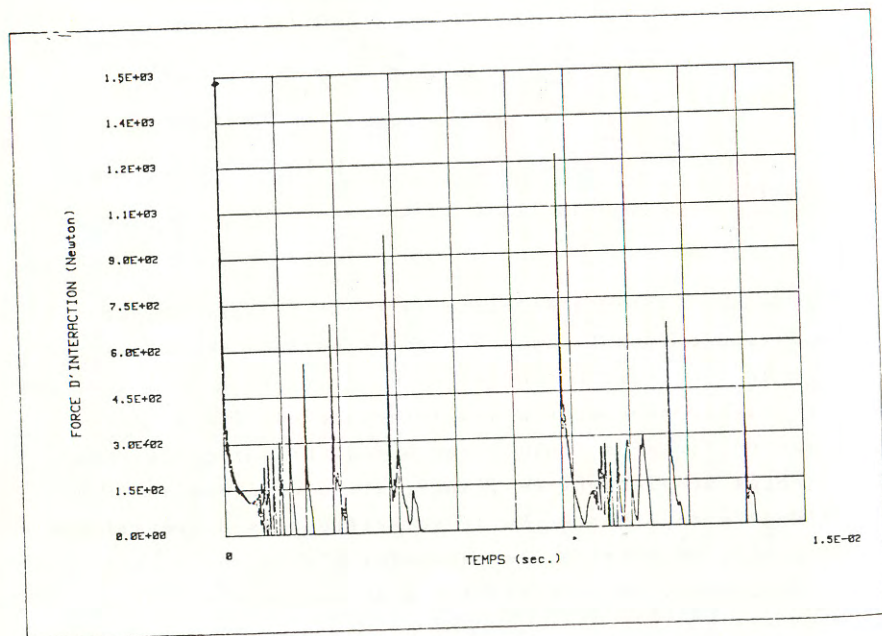


FIG -9- (EXPERIMENTAL)

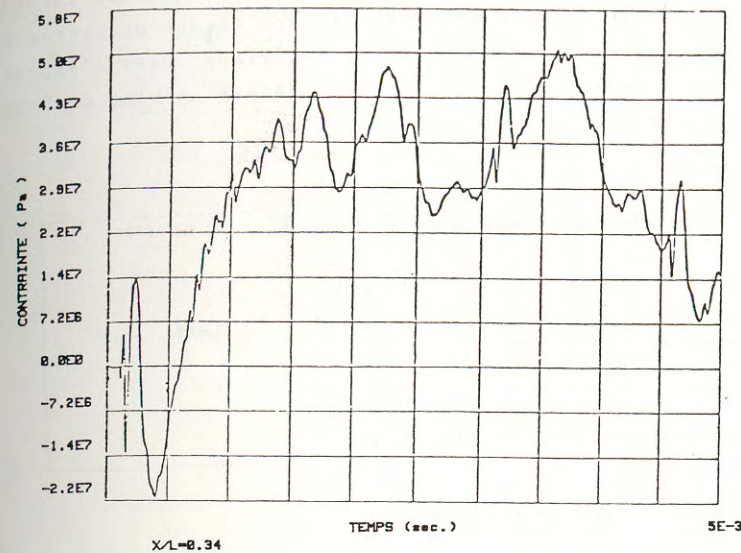
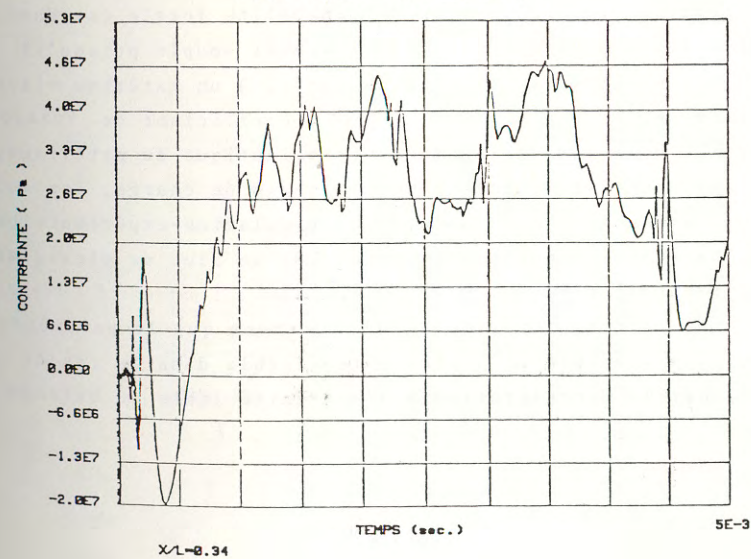
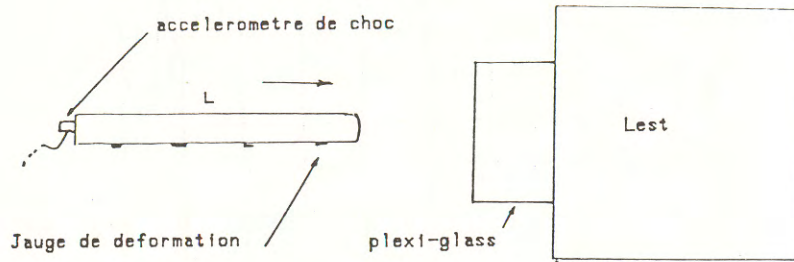


FIG -10- (CALCUL)



### 3-3. CHOC D'UN BARREAU SUR UN MASSIF VISCOELASTIQUE

Une troisième série d'expériences a été entreprise au laboratoire de mécanique de l'Ecole Centrale de Lyon en vue de mettre en évidence l'influence du comportement des matériaux. Dans l'expérience 31, un des barreaux d'acier est remplacé par un bloc de "plexiglass" lesté simulant un milieu semi-infini.



$L=31\text{cm}$  ,  $\phi=3\text{cm}$  , Rayon de courbure= $10\text{cm}$

FIG

La modélisation retenue par la déformabilité locale est dans le cas de la simulation présentée particulièrement souple puisqu'il s'agit d'une extension de la théorie de Hertz, à un matériau viscoélastique linéaire. (modèle de Kelvin-Voigt, coefficient de Poisson constant). Vu le caractère faiblement viscoélastique du matériaux, la phase de décharge est traitée comme la phase de charge, les courbes (12) et (13) présentent une comparaison simulation-expérience pour le choc d'un barreau cylindrique en acier sur un bloc de plexiglass, la vitesse d'impact est de  $100\text{cm/s}$ . (deccélération à l'extrémité libre). Les résultats de différentes simulations montrent que le paramètre mesurable le plus sensible à la viscosité (faible dans le cas de l'expérience) est la deccélération à l'extrémité libre du barreau élastique.

FIG -12- (experimental)

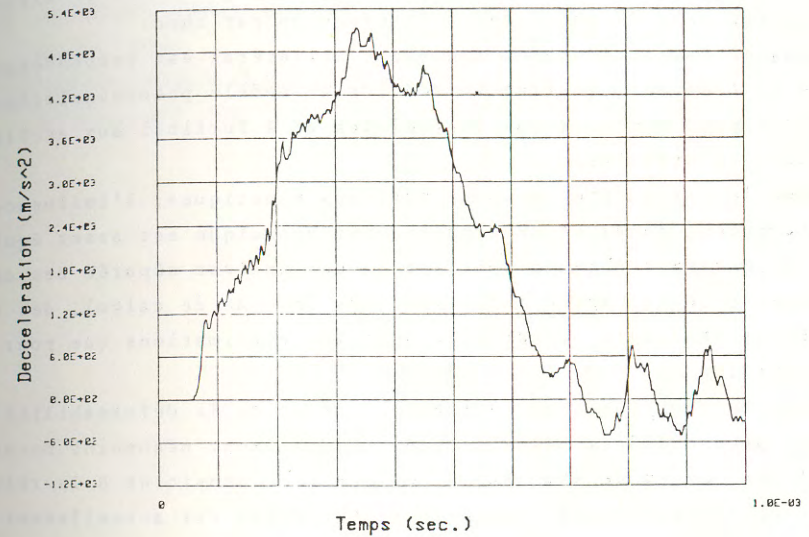
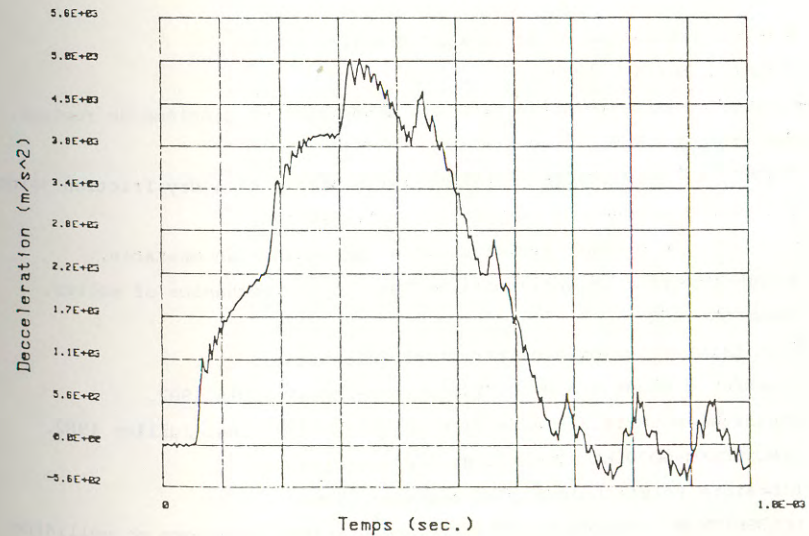


FIG -13- (calcul)



#### 4-CONCLUSION

Les exemples traités dans cette étude présentent trois types de situation pour le phénomène d'interaction par choc.

Dans le cas où l'aspect dynamique unilatéral est prépondérant (poutre en flexion), il faut introduire un modèle phénoménologique de contact pour remonter aux contraintes et à fortiori aux accélérations dans la structure.

Dans le cas du choc de deux barreaux élastiques, l'influence du comportement local et du comportement dynamique est assez équilibré. Les résultats obtenus montrent qu'une analyse séparée des deux phénomènes donnent, après injection dans le code de calcul, des résultats satisfaisants, aussi bien pour les déformations que pour les accélérations.

Dans le troisième cas envisagé, l'effet de la déformabilité locale est prépondérant. Les effets dynamiques sont néanmoins mesurables et les essais de simulation les montrent sensibles à la relation force-déformation à l'interface. Une étude est actuellement en cours pour tester des modèles de déformabilité locale plus élaborés.

#### 5-BIBLIOGRAPHIE

- [1] H.D BUI -Mécanique de la rupture fragile.  
Masson , Paris , 1978.
- [2] R.COURTEL -Analogie entre problème d'adhésion et problème de rupture.  
Cahiers du G.F.R. ,tome 5,n°2.
- [3] L.JEZEQUEL ,F.SIDOROFF -plastic like analysis of a dry friction joint.  
Colloque Euromech 151 ,Wuppertal,septembre 1982.
- [4] C.DO -On the dynamic evolution of a bar against an obstacle.  
IUTAM Symposium on variational methods in the mechanics of solids.  
EVANSTON 1978
- [5] J.P. LAINE -Choc de deux structures élastiques.  
Journées d'étude G.A.M.I. "Vibrations-Chocs" ,Juin 1982.  
Mécanique,Matériaux,electricité ,n°389-390-391 ,Mai-Juillet 1982.
- [6] TIMOSHENKO-GOODIER -Théorie de l'élasticité.  
Librairie Polytechnique ,CH. Béranger ,1961.
- [7] GOLDSMITH W. -Impact,the théorie and physical behaviour of colliding solids.  
Arnold ,1960.
- [8] VINH TUONG -Sur la résistance dynamique des matériaux à la déformation localisée par choc.  
Thèse de doctorat ès-sciences ,Paris ,1969
- [9] JOHNSON W. -Impact strength of materials.  
Arnold ,1972
- [10] HURTY-RUBENSTEIN -Dynamics of structures.  
Prentice-Hall ,1964

**MESURE DE PROPRIETES MECANQUES DES SOLS PAR  
L'INTERPRETATION DU SPECTRE DES RESONANCES AXIALES**  
*MEASUREMENT OF MECHANICAL PROPERTIES OF SOILS  
THROUGH THE INTERPRETATION OF THE LONGITUDINAL  
RESONANT SPECTRUM OF A CYLINDRICAL SAMPLE*

J. L. BOELLE, Chercheur à l'Ecole Centrale de Paris  
J. BIAREZ, Professeur à l'Ecole Centrale de Paris  
J. MEUNIER, Centre Océanologique de Bretagne

RESUME

Le but du montage présenté dans cette communication est de mesurer un certain nombre de paramètres mécaniques pour les sols en petites déformations par l'interprétation du spectre des fréquences de résonance axiales d'un échantillon cylindrique de sol. Nous proposons notamment une détermination simultanée du module d'Young et du coefficient de Poisson ; l'influence de l'anisotropie de comportement du matériau est également abordée. De plus, nous présentons une mesure des paramètres d'amortissement rhéologique à partir du calcul des bandes passantes observées lors des différentes résonances. Enfin nous présentons les résultats expérimentaux obtenus sur des matériaux pulvérulents.

ABSTRACT

The aim of the testing device presented in this communication is to provide the measurement of some mechanical properties of soils at very small strains from the interpretation of the axial resonant spectrum of a cylindrical sample of soil. In particular we propose to determine both Young's modulus and Poisson's ratio simultaneously ; the influence of the mechanical anisotropy of the material is also approached. Moreover we present a measurement of rheological damping from the calculation of resonant passing bands. At last experimental results on granular materials are set out.

## 1. INTRODUCTION

Si dans le domaine des déformations relatives à la plupart des ouvrages de génie civil, les sols présentent un comportement fortement non linéaire et irréversible, il apparaît toutefois que pour des déformations beaucoup plus faibles (inférieures à  $10^{-4}$ ), les sols puissent être considérés comme élastiques linéaires autour d'un état de contrainte donné. La connaissance des constantes élastiques liées à ce domaine de déformation est d'une grande importance pour étudier tous les phénomènes de propagation d'ondes dans les sols et devrait permettre de combler le fossé existant actuellement entre les méthodes d'investigation non destructives (sismique) et les essais géotechniques classiques.

Notre méthode d'essai est à rapprocher de la "colonne résonante" développée par Hardin puis Drnevich [1-2], mais elle présente la particularité, en ne se limitant pas à la mesure de la première fréquence de résonance, de proposer une méthode de détermination simultanée de plusieurs paramètres élastiques ; c'est ce dernier aspect qui sera particulièrement abordé dans la première partie de cette communication.

Dans la seconde partie, nous mettons en évidence le caractère plastique de l'amortissement rhéologique dans les sols pulvérulents pour de faibles déformations, retrouvant ainsi les résultats théoriques proposés par Mindlin [3].

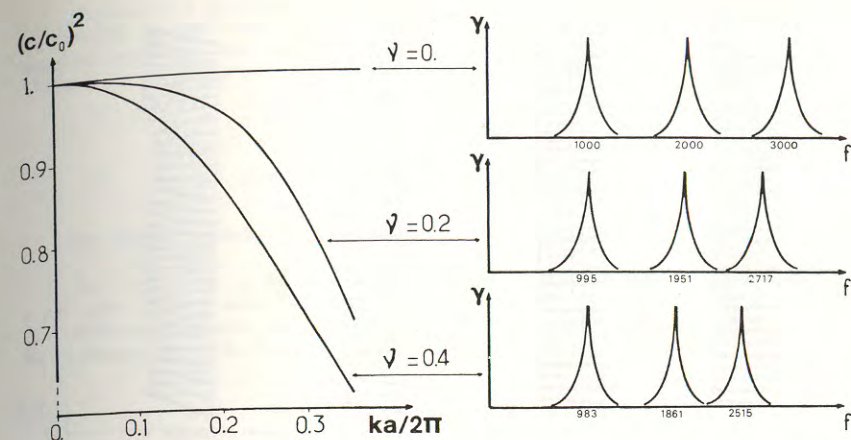
Enfin nous présentons les principaux résultats expérimentaux obtenus à ce jour sur des milieux granulaires, en mettant en évidence d'une part la non-linéarité du module d'Young et du coefficient d'amortissement vis-à-vis de la contrainte de confinement et d'autre part l'influence de l'histoire du matériau sur le coefficient de Poisson et les coefficients d'anisotropie.

## 2. METHODE DE MESURE DES PARAMETRES ELASTIQUES A PARTIR DU SPECTRE AXIAL D'UN ECHANTILLON CYLINDRIQUE

### 2.1. Rappels sur les modes propres longitudinaux d'un barreau cylindrique

Les modes propres longitudinaux (c'est-à-dire indépendants de l'angle  $\theta$  en coordonnées cylindriques) d'un barreau cylindrique de longueur infinie ont été étudiés par Pocchhammer et Chree [4-5] ; la solution de ce problème conduit à une relation entre le nombre d'onde  $k$  et la fréquence  $f$  paramétrée en  $E$  et  $\nu$  qui sont respectivement le module d'Young et coefficient de Poisson du matériau étudié, supposé élastique linéaire isotrope (on trouvera dans l'annexe 1 l'écriture complète de cette relation).

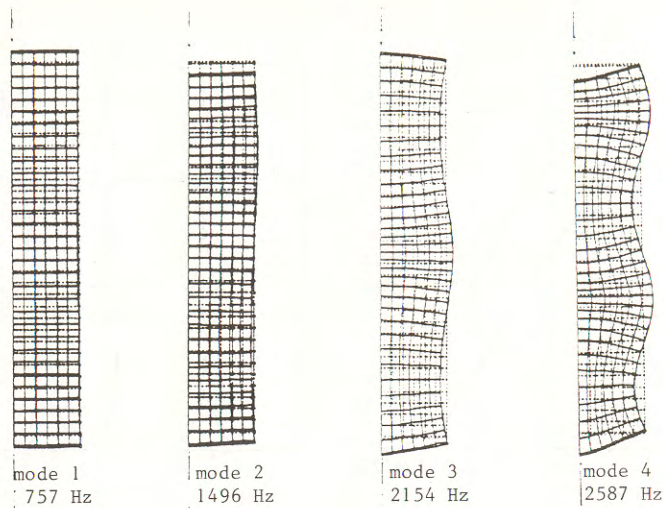
A notre connaissance le problème du barreau de longueur finie reste ouvert ; aussi nous avons entrepris une étude par éléments finis [6] pour l'étude des modes propres longitudinaux d'un barreau de longueur  $L$ , où nous avons montré qu'un calcul monodirectionnel élémentaire des nombres d'onde  $k$  aux résonances ainsi que l'utilisation de l'équation de Pocchhammer conduisent à une détermination correcte de  $E$  et  $\nu$  dans la mesure où le produit  $ka$  n'est pas trop élevé ( $a$  rayon du barreau). Le graphe 1 montre notamment l'influence du coefficient de Poisson  $\nu$  sur le spectre.



Graphe n° 1 : Influence du coefficient de Poisson  $\nu$  sur la première branche solution de l'équation de Pocchhammer (à gauche -  $C_0 = \sqrt{E/\rho}$ ,  $c = 2\pi f/k$ ), et sur le spectre des résonances longitudinales d'un échantillon de longueur finie  $L$  (à droite - les fréquences exprimées en Hertz correspondent aux résonances d'un échantillon libre à ses deux extrémités tel que  $a/2L = 0,1$  et  $C_0/L = 2000$  Hz).

### 2.2. Présentation du dispositif expérimental

Dans notre montage les deux extrémités de l'échantillon sont approximativement libres : l'échantillon est placé dans une cellule triaxiale classique, ce qui permet de lui imposer une contrainte de confinement isotrope initiale ; pour cette raison l'échantillon est donc entouré par une fine membrane de caoutchouc et par deux embases rigides très légères à ses extrémités. L'embase supérieure permet la liaison de l'échantillon avec le haut de la cellule au moyen de ressorts souples, de plus un petit accéléromètre pour la mesure des résonances  $y$  est fixé ; l'embase inférieure sur laquelle est collé un aimant fait face à un dispositif excitateur dont la fréquence peut varier au gré de l'utilisateur. La présence de ces dispositifs a été prise en compte pour le calcul des nombres d'onde aux différentes résonances, un contrôle par la méthode des éléments finis a également été effectué [6], le graphe n° 2 montre les résultats obtenus à l'aide de cette dernière méthode (le calcul analytique conduit aux fréquences suivantes 750 Hz, 1484 Hz, 2138 Hz, 2564 Hz, soit une différence inférieure à 1%).



Graph n° 2 : Calcul par éléments finis des quatre premiers modes propres longitudinaux d'un échantillon cylindrique de longueur finie limité à ses deux extrémités par deux embases rigides (rapport des modules embase/échantillon = 440).

### 2.3. Influence et évaluation de l'anisotropie mécanique du matériau testé

Dans le paragraphe 1.1, nous avons rappelé un certain nombre de résultats relatifs aux solides élastiques linéaires isotropes ; afin d'étudier l'influence de l'anisotropie mécanique du matériau sur le spectre longitudinal, nous avons établi une relation similaire à celle de Pocchhammer dans le cas très simple de l'anisotropie transverse de révolution (aélotropie), les axes de symétrie de la loi et de l'échantillon étant confondus ; bien que cette simplification représente une restriction importante vis-à-vis de lois anisotropes plus générales, nous pensons l'aélotropie suffisante pour décrire la majorité des sols pour lesquels la direction verticale est privilégiée de par le mode de dépôt (sédimentation).

Un calcul similaire à celui mené par Pocchhammer conduit à une relation entre  $k$  et  $f$  paramétrée par les cinq constantes élastiques définissant la loi aélotrope (voir dans l'annexe 2 une présentation plus détaillée de la relation obtenue).

Devant la complexité créée par la présence de cinq paramètres indépendants, nous nous sommes reportés aux travaux de Wiendieck [7] sur l'étude de l'anisotropie dans les sols ; l'axe de révolution ( $z$ ) étant vertical, Wiendieck définit les trois paramètres suivants :

$$\alpha = E_h / E_v ; \text{ où } E_v = \sigma_z / \epsilon_z, \text{ chargement selon } z$$

$$\text{et } E_h = \sigma_x / \epsilon_x, \text{ chargement selon } x$$

$$\beta = G_h / G_v ; G_h = \frac{E_h}{2(1 + \nu_h)}$$

$G_v$  = module de cisaillement dans un plan vertical.

$$\gamma = \nu_h / \nu_v ; \nu_h = \epsilon_y / \epsilon_x, \text{ chargement selon } x$$

$$\nu_v = \epsilon_x / \epsilon_z, \text{ chargement selon } z$$

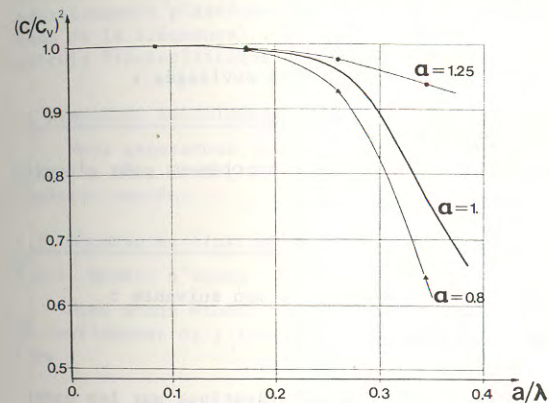
Wiendieck a proposé des relations très probables dans les sols permettant de réduire le problème à trois paramètres indépendants (ces relations sont obtenues en postulant des variations elliptiques de  $E_\theta$  et  $\nu_\theta$ ,  $\theta$  étant l'angle entre l'axe  $z$  et un axe  $z'$  obtenu après rotation du système autour de l'axe  $y$ ) :

$$\gamma = \alpha$$

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{\alpha} + 2\alpha\nu_v}{2(1 + \alpha\nu_v)}$$

On obtient ainsi trois paramètres indépendants  $E_v$ ,  $\nu_v$ ,  $\alpha$ .

Sur le graphe 3, on remarque que l'influence de  $\alpha$  sur la vitesse de phase  $c$  est très faible pour les premières harmoniques ( $k$  faible), ce qui nous permettra expérimentalement de calculer  $E_v$  et  $\nu_v$  à partir des deux premières fréquences de résonance et d'évaluer  $\alpha$  à l'aide des résonances suivantes.



Graph n° 3 : Influence du coefficient anisotrope  $\alpha$  sur l'équation aux fréquences (première branche).

$$c_v = \sqrt{E_v / \rho} = 559,3 \text{ m/s}$$

$$\nu_v = 0,10$$

$$\lambda = 2\pi/k$$

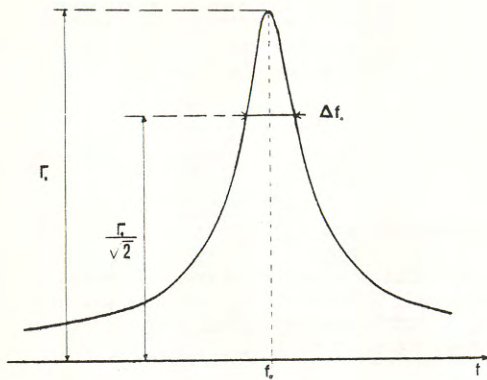
Les points de calcul correspondent aux valeurs de  $k$  imposées par la géométrie de l'essai ( $L = 0,20 \text{ m}$ ).

Notons de plus qu'une étude paramétrique sur les trois coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  considérés comme indépendants montre que seul  $\alpha$  entraîne des variations très importantes sur la valeur de la vitesse de phase.

Ceci nous permet donc, dans la mesure où l'anisotropie de révolution est acceptable pour représenter le comportement des dépôts sédimentaires, de proposer une méthode de mesure des paramètres  $E_v$ ,  $\nu_v$  et  $\alpha$  en petites déformations, les autres valeurs nécessaires à la construction de la loi étant calculées à l'aide des relations proposées par Wiendieck.

### 3. MESURES D'AMORTISSEMENT

Ces mesures ont été effectuées à partir des calculs des bandes passantes des différentes résonances (voir graphe 4).



Graphe n° 4 : Courbe de résonance en accélération ; définition de la bande passante :  $\frac{\Delta f_0}{f_0}$

Deux modèles d'amortissement rhéologique peuvent être envisagés :

### 3.1. Solide isotrope à amortissement visqueux

Pour un solide viscoélastique linéaire, la loi de comportement peut s'écrire de la façon suivante :

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda' \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu' \dot{\epsilon}_{ij}$$

Dans la première étude nous avons fait la simplification suivante :

$$\eta_p = \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu} = \eta_s = \frac{\mu'}{\mu} = \eta$$

C'est-à-dire que nous avons supposé l'amortissement identique sur les ondes de compression et de cisaillement, cette approximation est souvent faite dans le domaine de la propagation d'ondes dans les sols ; dans ce cas simple, on montre que le coefficient  $\eta$  est obtenu à partir des bandes passantes par la relation suivante :

$$\eta = \frac{1}{2\pi f_n} \cdot \frac{\Delta f_n}{f_n} \quad \text{n'étant le numéro d'ordre de l'harmonique considérée.}$$

La bande passante est donc proportionnelle à la fréquence.

C'est ce dernier point qui nous a amené à envisager un autre modèle d'amortissement dans les sols pulvérulents pour de faibles déformations.

### 3.2. Solide à amortissement hystérétique

Nous avons remarqué expérimentalement que les bandes passantes sont approximativement indépendantes de la fréquence pour les sols pulvérulents, d'autre part des essais cycliques réalisés par El Hosri [8] dans le même domaine de déformation montrent que la surface des cycles dans l'espace contraintes-déformations est indépendante de la fréquence ( $f < 50$  Hz) ; ce sont ces constatations expérimentales qui ont amené certains auteurs à modifier la loi viscoélastique en divisant le terme  $\eta$  par la fréquence afin d'obtenir une bande passante constante. Ce modèle appelé modèle à amortissement hystérétique s'écrit alors de la façon suivante après transformée de Fourier :

$$\hat{\sigma}_{ij} = (\lambda + j\lambda^*) \hat{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + (\mu + j\mu^*) \hat{\epsilon}_{ij} \quad \text{où } j^2 = -1$$

De même que précédemment nous avons fait l'hypothèse suivante :

$$\beta_p = \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\lambda + 2\mu} = \beta_s = \frac{\mu^*}{\mu} = \beta$$

On a alors la relation :

$$\beta = \frac{\Delta f_n}{f_n}$$

Notons toutefois que ce modèle n'est qu'un moyen pratique, mais sans interprétation physique, de traiter le problème beaucoup plus complexe du solide à amortissement plastique (cette loi implique également un comportement indépendant de la fréquence) ; on pourra trouver dans les travaux de Chouvet [9] des calculs élastoplastiques en régime dynamique transitoire.

## 4. RESULTATS EXPERIMENTAUX DANS LES MATERIAUX GRANULAIRES SECS

Nous exposerons ici les résultats obtenus sur des assemblages de billes de verre de même diamètre (2 mm), ainsi que sur des échantillons de sable à granulométrie serrée.

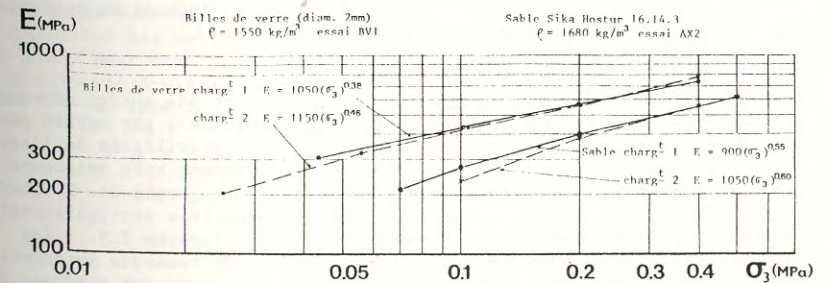
### 4.1. Constantes élastiques

#### 4.1.1. Modèle d'Young E

Nous avons étudié tout particulièrement l'influence de la pression isotrope de confinement  $\sigma_3$  ; les résultats obtenus peuvent être approchés par une loi du type :

$$E = E (\sigma_3)^n$$

où A est un coefficient multiplicatif dépendant de l'état de compacité (cf. Hardin [10]).

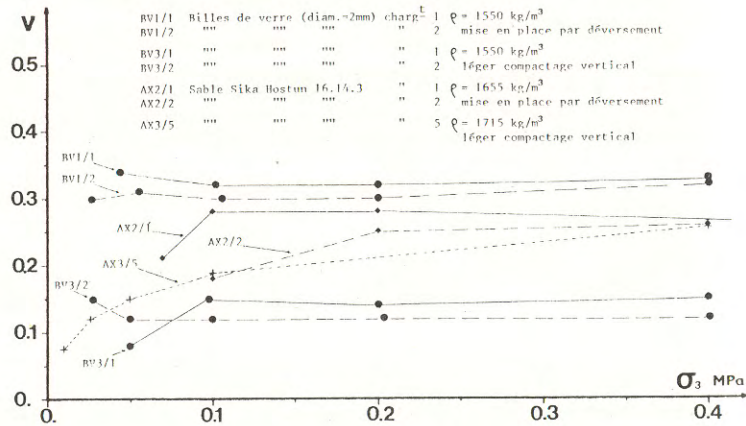


Graphe n° 5 : Variation du module d'Young E en petites déformations ( $\epsilon_{max} < 10^{-6}$ ) en fonction de la contrainte de confinement isotrope  $\sigma_3$  pour quelques matériaux granulaires secs.

#### 4.1.2. Coefficient de Poisson

Si pour des assemblages de billes on ne constate pas d'influence importante de la contrainte isotrope  $\sigma_3$ , il apparaît que le procédé de fabrication de l'échantillon est déterminant sur la valeur du coefficient de Poisson  $\nu$  (voir graphe 6, essais BV1 et BV3), il apparaît que pour des densités très voisines, mais obtenues différemment, le coefficient de Poisson passe d'une valeur moyenne de 0,31 pour un échantillon obtenu par simple déversement à une valeur de 0,13 pour un échantillon ayant subi un léger compactage vertical.

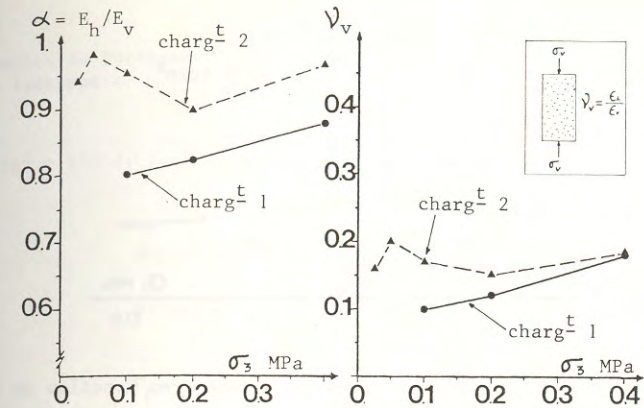
D'autre part il semble que l'angularité des grains joue un rôle sur l'évolution du coefficient de Poisson vis-à-vis de la contrainte de confinement : si les assemblages de billes de verre présente un coefficient de Poisson approximativement indépendant de la contrainte isotrope, on observe par contre une augmentation de  $\nu$  pour les échantillons de sable jusqu'à une valeur stabilisée voisine de 0,25 obtenue pour une contrainte de l'ordre de 0,15 MPa (voir graphe 6, essai AX3/5).



Graph 6 : Variations du coefficient de Poisson  $\nu$  en petites déformations ( $\epsilon_{\max} < 10^{-6}$ ) en fonction de la contrainte isotrope  $\sigma_3$  et du mode de construction de l'éprouvette pour des matériaux granulaires secs.

#### 4.1.3. Coefficients anisotropes

Pour les essais présentés précédemment il ne nous est pas apparu nécessaire de faire une interprétation anisotrope des résultats obtenus ; par contre pour des échantillons fortement compactés selon la direction privilégiée de l'espace, les troisième et quatrième fréquences de résonance s'écartent très nettement des courbes de Pocchammer calculées dans le cas isotrope (voir graphe 3). L'interprétation de l'essai BV4 (billes de verre fortement compactées verticalement) a été effectuée d'après les hypothèses exposées dans le paragraphe 2.3. ; les principaux résultats sont rapportés sur le graphe n° 7. On remarque notamment l'influence sur  $\alpha$  de plusieurs chargements isotropes ; ceux-ci ont tendance à supprimer l'anisotropie initiale.



Graph 7 : Evolution du coefficient d'anisotropie  $\alpha$  et du coefficient de Poisson  $\nu_v$  en fonction de  $\sigma_3$  pour plusieurs chargements successifs (billes de verre).

#### 4.2. Paramètres d'amortissement

Comme le montrent les résultats reportés dans le tableau ci-dessous, les bandes passantes (cf. graphe 4) ne varient pas proportionnellement à la fréquence :

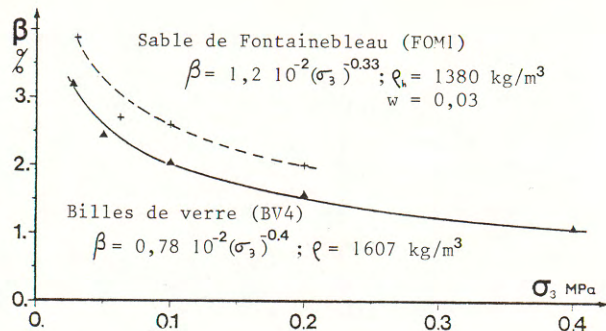
f (Hz)	692	1409	2039	2453
$(\frac{\Delta f}{f})$	2,8%	2,9%	2,5%	2,6%

Valeurs provenant de l'essai FOM1 (sable de Fontainebleau ;  $\sigma_3 = 0,063$  MPa)

Nous avons donc utilisé le modèle à amortissement hystérétique (cf. § 3.2.) pour représenter les sols pulvérulents. Le graphe 8 montre les variations du coefficient  $\beta$  pour deux types de matériaux pulvérulents ; on remarque la forte non-linéarité vis-à-vis de la contrainte de confinement, ce qui conduit à rechercher des lois du type :

$$\beta = B (\sigma_3)^{-m}$$





Graph n° 8 : Variation du coefficient d'amortissement  $\beta$  en fonction de la contrainte isotrope  $\sigma_3$  pour les sols pulvérulents.

### 5. CONCLUSION

La méthode d'essai que nous avons présentée dans cette communication nous a permis de mesurer plusieurs paramètres mécaniques dans le domaine des petites déformations ( $\epsilon_{\max} < 10^{-6}$ ), ceci par une interprétation approfondie du spectre des résonances longitudinales : les fréquences de résonance permettant la détermination simultanée du module d'Young  $E$ , du coefficient de Poisson  $\nu$  et du coefficient d'anisotropie  $\alpha$ , les bandes passantes conduisant au coefficient d'amortissement  $\beta$ . Les essais réalisés mettent en évidence certains comportements non linéaires dans les sols, notamment l'influence de la contrainte isotrope sur le module d'Young et sur le coefficient d'amortissement ; par ailleurs, nous montrons l'importance de l'histoire de l'échantillon sur les coefficients  $\nu$  et  $\alpha$ .

Actuellement seuls les résultats obtenus sur des matériaux pulvérulents secs ont été présentés, des essais sur matériaux saturés en eau et sur des échantillons cohérents (argiles) sont en cours et devraient faire l'objet de publications ultérieures.

### ANNEXE 1

Relation de Pocchammer pour un barreau de longueur infinie élastique linéaire isotrope :

$$\frac{2p}{a} (q^2 + k^2) J_1(pa) J_1(qa) - (q^2 - k^2)^2 J_0(pa) J_1(qa) - 4k^2 p q J_1(pa) J_0(qa) = 0$$

$a$  : rayon du barreau

$$p^2 = \left(\frac{\omega}{c_p}\right)^2 - k^2 \quad q^2 = \left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 - k^2$$

$$c_p = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad c_s = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes de Lamé

$\rho$  : masse volumique

### ANNEXE 2

Relation donnant les modes propres longitudinaux pour un barreau infini aélotrope.

Relations contraintes-déformations

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A\epsilon_x + F\epsilon_y + D\epsilon_z & \sigma_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \sigma_y &= F\epsilon_x + A\epsilon_y + D\epsilon_z & \sigma_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ \sigma_z &= D\epsilon_x + D\epsilon_y + C\epsilon_z & \sigma_{xy} &= \frac{A-F}{2} \gamma_{xy} \end{aligned}$$

Un calcul analogue à celui de Pocchammer et Chree conduit à la relation suivante :

$$F(\xi_1, \xi_2) - F(\xi_2, \xi_1) + \left(\frac{A-F}{a}\right) \xi_1 \xi_2 (\psi(\xi_2) - \psi(\xi_1)) \cdot J_1(\xi_1 a) J_1(\xi_2 a) = 0$$

$$\text{où } F(\xi_1, \xi_2) = J_0(\xi_1 a) J_1(\xi_2 a) \xi_2 (1 + k^2 \psi(\xi_2)) (D + A\xi_1^2 \psi(\xi_1))$$

$$\text{et } \psi(\xi) = \frac{D + G}{-A\xi^2 + (\rho\omega^2 - Gk^2)}$$

$$(\xi^2)_{1/2} = \frac{\rho\omega^2 (A + G) - k^2 (AC - D^2 - 2GD) + /- \sqrt{\Delta^2}}{2GA}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \rho^2 \omega^4 (A-G)^2 - 2k^2 \rho \omega^2 [(A+G)(AC - D^2 - 2GD) - 2GA(G+C)] \\ &+ k^4 [(AC - D^2 - 2GD) - 4G^2 AC] \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] B.O. HARDIN et J. MUSIC. Apparatus for vibration of soils specimens during the triaxial test ; Instruments and Apparatus for Soil and Rock Mechanics, ASTM STP 392, 1965, pp 55-74.
- [2] B.O. HARDIN et V.P. DRNEVICH. Shear Modulus and Damping in soils ; Journal of the Soils Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 98, June 1972, pp 603-624.
- [3] R.D. MINDLIN, H. DERESIEWICZ. Elastic spheres in contact under varying oblique forces ; Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, 1953, Vol 75, pp 327-344.
- [4] J.D. ACHENBACH. Wave propagation in elastic solids, North Holland Publications, 1976.
- [5] A.C. ERINGEN, E.S. SUHUBI. Elastodynamics - Linear theory, Academic Press, 1975.
- [6] D. AUBRY, J. BIAREZ, J.L. BOELLE, J. MEUNIER. Identification of elastic coefficients through resonant tests of soil samples/Soil Dynamics & Earthquake Engineering Conference/Southampton/1982. 07.13-15/Vol 1 pp 65-75/
- [7] K. WIENDIECK. Thèse Docteur-Ingénieur : L'anisotropie des milieux pulvérulents et son influence sur les tassements. Grenoble 1964.
- [8] M.S. EL HOSRI. Thèse Docteur-Ingénieur : Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des matériaux en régime non permanent ; Ecole Centrale Paris, 1979.
- [9] D. CHOUVET. Thèse Docteur-Ingénieur : à paraître (Ecole Centrale Paris).
- [10] B.O. HARDIN, F.E. RICHART. Elastic wave velocities in granular soils ; Journal of the Soil Mechanics and Foundations division, ASCE, Feb. 1963, pp 33-65.

## REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier tout particulièrement Monsieur RIGUIDEL de la Compagnie Française des Pétroles pour l'intérêt qu'il a porté à nos travaux.

## ANALYSE DYNAMIQUE DE SYSTEMES NON LINEAIRES : COMPARAISON DE METHODES INCREMENTALES ET HARMONIQUES

### DYNAMICAL ANALYSIS OF NON LINEAR SYSTEMS: COMPARISON BETWEEN INCREMENTAL AND HARMONIC EXPERIMENTS

C. JODER, P. FLAUD, (\*)  
D. TREVISAN, D. GEIGER (\*\*)

## RÉSUMÉ

Afin de caractériser le comportement viscoélastique non linéaire d'un matériau, deux types d'expérimentation peuvent être proposés : la réponse de la structure à des sollicitations harmoniques, d'une part, et, d'autre part, la réponse à des excitations percussives (échelle de déformation).

Pour effectuer ces expériences, des bancs rhéologiques ont été réalisés permettant des excitations harmoniques de  $10^{-4}$  à  $10^2$  Hz (et pour des forces disponibles allant jusqu'à 20 daN), ou des échelons de déformation permettant des elongations de  $5 \cdot 10^{-2}$  m en  $10^{-1}$  s (forces disponibles 200 daN), les échantillons placés dans des fluides de composition déterminée et à des températures contrôlées ( $< 0$ ,  $1^\circ\text{C}$ ). Un modèle théorique non linéaire est proposé qui permet de relier une approche phénoménologique à une description structurelle du matériau pour les deux types d'excitations. Les résultats expérimentaux relatifs à un matériau en PVC sont représentés et confrontés à des approches théoriques. Ils mettent en relief les possibilités d'applications aux matériaux biologiques.

## ABSTRACT

Two different experimental approaches enable the study of non linear viscoelastic behaviour: oscillatory tests or creep experiments. These two approaches needs the use of two different experimental set up; the first one, for oscillatory test ( $10^{-4}$  to  $10^2$  Hz, 20 daN) and the second one, for creep experiments (allowing strain rate of  $.5 \text{ m s}^{-1}$  with 200 daN force). The samples are placed in a controlled environment (temperature, chemical composition of the fluid). A non linear viscoelastic theoretical model is discussed, and experimental results related to a PVC sample are presented in relation with applications to biological materials.

(\*) L.B.H.P. Université PARIS VII - 2 Place Jussieu - 75221 PARIS Cedex 05  
(\*\*) L.M.P. Université PARIS XII - 94010 CRETEIL

## 1. INTRODUCTION

La réalisation de matériaux de remplacement utilisables chez l'homme passe par un grand nombre de contraintes. Parmi celles-ci, il convient de souligner l'indispensable similitude de comportement rhéologique entre les matériaux constitutifs des prothèses et les tissus biologiques qu'ils doivent remplacer. Leur réalisation impose donc, et ceci est particulièrement vrai pour les ligaments, les tendons, les parois artérielles ou veineuses..., une connaissance détaillée de leurs propriétés rhéologiques, tant pour les domaines de sollicitation correspondant à un fonctionnement physiologique que pour ceux qui sont associés à des situations pathologiques. La nature des tissus biologiques ostéoarticulaires ou cardiovasculaires a le plus souvent imposé pour caractériser le comportement rhéologique de ces tissus, la réalisation d'appareillages spécifiques respectant l'environnement physicochimique du matériau et les sollicitations auxquelles il est soumis du point de vue des contraintes dans son contexte physiologique.

Sur le plan théorique il convient de déterminer des relations permettant de décrire le comportement du matériau soumis aux diverses sollicitations. Cette approche théorique peut se faire soit par une approche phénoménologique conduisant à l'obtention d'un modèle approximant le comportement mécanique du matériau à l'aide d'une relation mathématique à faible nombre de paramètres, valable dans le domaine d'étude, mais sans signification physique simple /1,2/, soit en recherchant, au contraire, des relations entre le comportement rhéologique macroscopique du matériau et les propriétés mécaniques, physico-chimiques..., de ses constituants pris à l'échelle microscopique /3,4,5/. Il en résulte alors un modèle structural dépendant de paramètres ayant une signification physique précise, liée à la nature polymérique, fibreuse ou composite de ces tissus biologiques.

Sur le plan expérimental, ces études peuvent se traduire par la mesure, sur un échantillon de matériau, de deux grandeurs: les contraintes appliquées et les déformations associées. Nous nous restreindrons ici à deux types d'approches complémentaires pour lesquelles deux bancs d'études spécifiques ont été construits: l'une utilise la réponse du matériau à un échelon de déformation maximale (relaxation de contrainte), donc à une sollicitation à spectre fréquentiel étendu; l'autre se base sur une étude harmonique, le matériau étant soumis à des contraintes sinusoïdales; pour chaque fréquence et à chaque valeur de la déformation on peut alors calculer le module d'élasticité complexe.

Après avoir décrit ces deux bancs de mesure des propriétés mécaniques des tissus, et présenté un modèle théorique de comportement rhéologique valable pour certains matériaux biologiques, nous appliquerons ces techniques d'investigation à un matériau inerte (PVC). Nous pourrions ainsi comparer, sur ce matériau parfaitement défini, et dans des conditions expérimentales reproductibles (les matériaux biologiques pouvant évoluer spontanément dans le temps) les résultats obtenus en relaxation de contrainte d'une part et sous sollicitations harmoniques d'autre part.

## 2. APPAREILLAGE

Il a donc été nécessaire de concevoir et de mettre au point deux bancs d'extensométrie dynamique permettant l'étude de divers matériaux qu'ils soient ou non d'origine biologique. Ces deux bancs ont pour caractéristique commune de permettre d'effectuer des tests de compressions ou d'extensions uniaxiales sur un échantillon placé dans une enceinte dont l'environnement est contrôlé tant en température qu'en ce qui concerne l'hygrométrie, le pH..., ce qui est une nécessité pour les tissus biologiques. Ces deux dispositifs se distinguent quant à la nature des tests qu'il est possible d'effectuer: de la relaxation de contrainte (réponse à un échelon de déformation) ou des sollicitations harmoniques.

### 2.a. MACHINE D'ESSAIS EN RELAXATION DE CONTRAINTE.

Pour des études en relaxation, il est nécessaire de soumettre l'échantillon à une sollicitation qui, expérimentalement, se rapproche le plus possible d'un échelon de déformation. Pour ce faire on utilise (Fig.1) un vérin pneumatique

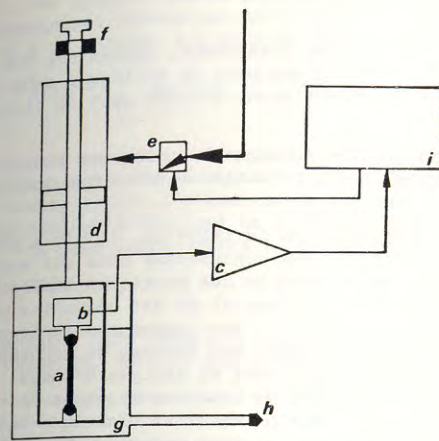


Fig.1 - banc d'études en relaxation de contrainte. a, échantillon sous tests; b, capteur de forces SEDEME DC 100; c, conditionneur SEDEME TS 37; d, vérin pneumatique FESTO DC 50-70; e, électrovanne; f, butée mécanique; g, enceinte à environnement contrôlé; h, régulation de température; i, mini-calculateur APPLE II.

### 2.b. BANC DE MESURES RHEOLOGIQUES ADAPTE AUX TESTS HARMONIQUES

En ce qui concerne les tests harmoniques (Fig.2), /8/, les forces sont imposées à l'aide d'un excitateur de vibrations pouvant délivrer des forces de 20 daN au maximum, pour des fréquences allant jusqu'à 100 Hz environ si l'on veut obtenir des élongations mesurables avec précision. Le signal de commande provient d'un générateur qui synchronise également le système d'acquisition et de traitement des données. L'allongement de l'échantillon et la force sont mesurés, ce qui permet de calculer les déformations et les contraintes appliquées. Une analyse de Fourier permet de déterminer, pour un signal d'excitation périodique, le module d'élasticité complexe du matériau. L'absence de génération d'harmoniques dans les signaux de forces et de déplacement, pour une excitation sinusoïdale de faible amplitude, permet, autour des valeurs statiques, de considérer le problème comme linéaire. Le traitement du signal permet de plus, par des acquisitions répétées sur un grand nombre de cycles, d'améliorer le rapport signal sur bruit ainsi que la précision des mesures. Ce banc rhéologique permet en outre de générer des excitations de

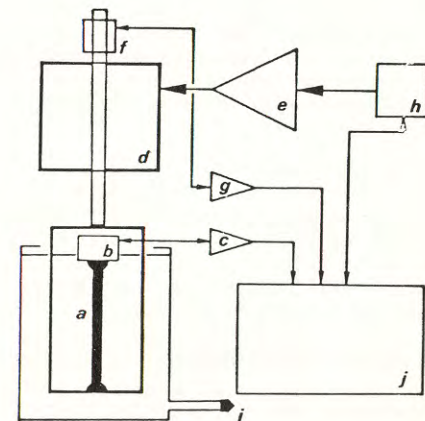


Fig.2 - Banc d'essais en sollicitations harmoniques. a, échantillon sous tests; b, capteur de forces SEDEME FC 5; c, conditionneur SEDEME TS 27; d, excitateur de vibration PRODERA 20 JE 20 C; e, amplificateur de puissance PRODERA A 436; f, capteur de déplacement ENERTEC-SCHLUMBERGER CD 3324; g, conditionneur ENERTEC-SCHLUMBERGER CA 3000; h, générateur en basse fréquence WAWETEK; i, enceinte thermostatée et régulation de température; j, système d'acquisition et de traitement de mesures INTERTECHNIQUE PS 200.

forme quelconque dont le spectre de fréquence est compatible avec la fonction de transfert du système (impulsions, rampes, excitations aléatoires ...).

### 2.c. CRITIQUES ET LIMITATIONS

Les deux systèmes que nous venons de présenter brièvement, présentent des limitations qu'il convient de recenser. Il s'agit d'une part de critiques inhérentes à toute mesure extensométrique sur un échantillon, d'autre part de limitations spécifiques aux systèmes utilisés.

Parmi les limitations communes il faut principalement signaler les problèmes dus aux attaches et aux "effets de bouts" sur l'échantillon ainsi que les phénomènes propagatifs dans le matériau testé.

a./ Au voisinage des attaches et sous l'effet de la traction, il n'y a plus, dans le matériau testé, uniformité de la section ni des contraintes dans ces sections, ces effets pouvant devenir très importants dans le cas de tissus biologiques composés de fibres et de gaines (ligaments par exemple). Il est néanmoins possible de s'affranchir de ces effets s'ils s'exercent sur une longueur inférieure à celle de l'échantillon, soit en effectuant directement des mesures de déformation de la partie centrale de cet échantillon (vidéocamera et analyse d'image, par exemple), soit par une étude de deux échantillons de longueur initiale différente  $l_{01}$  et  $l_{02}$  mais de même section. Ainsi, pour un matériau élastique linéaire, si les mesures sur les deux échantillons donnent deux modules d'Young  $E_1$  et  $E_2$ , il est possible de calculer simplement le module  $E$  exact par:

$$E = E_1 E_2 \frac{l_{01} - l_{02}}{E_1 l_{01} \cdot E_2 l_{02}} \quad (1)$$

cette relation montrant de plus que pour un échantillon de grande longueur les effets de bouts sont négligeables.

b./ Les phénomènes propagatifs se traduisent, dans le cas d'une excitation harmonique, par une modification de l'amplitude et de la phase des signaux de force le long du matériau. Il est néanmoins possible d'introduire des termes correctifs /8/ prenant en compte ces effets. Dans la plupart des cas cependant, il suffit de restreindre l'étude au domaine de fréquence inférieure à 100 Hz, compte tenu des échantillons testés, pour que ces phénomènes soient négligeables. Dans le cas de tests en relaxation de contrainte, ces phénomènes de propagation se traduisent par un retard  $\tau$  qui, en première approximation, peut, pour un échantillon de longueur  $l$ , de masse volumique  $\rho$  et de module d'élasticité  $E$  peut se mettre sous la forme:

$$\tau = l \sqrt{E/\rho} \quad (2)$$

En ce qui concerne les limitations propres à chaque appareillage nous ne retiendrons ici que l'impossibilité, en ce qui concerne l'étude en relaxation de contrainte, d'obtenir un réel échelon de déformation. La vitesse de déplacement du vérin pneumatique étant finie, il est alors impossible d'accéder à la réponse instantanée du matériau.

### 3. APPROCHE THEORIQUE

Le modèle théorique utilisé est celui de la viscoélasticité quasi-linéaire initialement introduit pour les tissus biologiques /1/. Ce modèle prend en compte deux caractéristiques fondamentales de ces tissus: la viscoélasticité et les non-linéarités en supposant qu'il est possible de séparer la dépendance temporelle de la dépendance en fonction de la déformation. Ainsi pour étudier la réponse d'un échantillon à un échelon de déformation d'amplitude  $\epsilon$ , on écrit que la contrainte  $\sigma$  se met sous la forme:

$$\sigma(\epsilon, t) = G(t, \epsilon) \cdot \epsilon = \sigma^0(\epsilon) \cdot G_r(t) \quad (3)$$

où  $\sigma^0(\epsilon) = \epsilon G(0, \epsilon)$  est une fonction des seules déformations et  $G_r(t) = G(t, \epsilon) / G(0, \epsilon)$  est une fonction ne dépendant que du temps appelée fonction de relaxation

réduite est une fonction ne dépendant que du temps.

Par application du principe de superposition à une infinité de déformations élémentaires subies par le matériau dans son histoire antérieure, la contrainte  $\sigma(t)$  à un instant  $t$  s'exprime par l'intégrale de convolution:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G_r(t-\tau) \frac{\partial \sigma^0(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (4)$$

pour calculer la fonction de relaxation réduite  $G_r(t)$ , on peut décrire le matériau à l'aide du modèle de Maxwell (solide linéaire standard) généralisé à un nombre infini d'éléments. On obtient ainsi un spectre de temps de relaxation noté  $H(\tau)$  et s'étendant de  $\tau = 0$  à l'infini.

On peut alors écrire la fonction de relaxation  $G(t)$  sous la forme:

$$G(t) = G_\infty + \int_0^\infty H(\tau) e^{-t/\tau} d(\text{Ln } \tau) \quad (5)$$

expression dans laquelle  $G_\infty$ , la fonction de  $\epsilon$  représente la réponse "élastique" du matériau, obtenue aux temps très longs.

Pour une gamme importante de temps, dans le cas des tissus biologiques, l'expérience a montré que l'on pouvait approximer  $H(\tau)$  par un spectre existant entre deux temps caractéristiques  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , et nul au dehors:

$$\begin{cases} H(\tau) = C & \text{pour } \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \\ H(\tau) = 0 & \text{en dehors} \end{cases} \quad (6)$$

Il est alors possible de réécrire la fonction de relaxation sous la forme:

$$G(t) = G_\infty + C \left\{ E_1 \left( \frac{t}{\tau_1} \right) - E_1 \left( \frac{t}{\tau_2} \right) \right\} \quad (7)$$

expression où  $E_1(x)$  désigne la fonction exponentielle intégrale:

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (8)$$

Pour les domaines de temps tels que l'on ait  $\tau_1 \ll t \ll \tau_2$ , cette expression de la fonction de relaxation peut se mettre sous la forme simplifiée:

$$G(t) \approx G_\infty - C \{ \gamma + \text{Ln}(t/\tau_2) \} \quad (9)$$

où  $\gamma$  représente la constante d'Euler.

De l'étude des données expérimentales reliant  $G$  à  $\text{Ln}(t)$  on peut donc déduire la valeur de  $C$  en se limitant aux gammes de temps associées à une variation linéaire; puis si  $G_\infty$  a pu être mesuré, la valeur de  $\tau_2$ . De plus, puisque l'équation (7) s'écrit, pour  $t \rightarrow 0$ :

$$G(0) = G_\infty + C \text{Ln}(\tau_2/\tau_1) \quad (10)$$

de la connaissance expérimentale de  $G(0)$ , on peut déduire le temps  $\tau_1$ .

Si l'on étudie maintenant la réponse à des sollicitations harmoniques, à la pulsation  $\omega$ , il est possible d'obtenir un module d'élasticité complexe réduit  $G(\omega)$  que l'on peut définir à partir des transformées de Fourier des expressions  $G(t)$  et de  $\epsilon(t)$ :

$$G(\omega) = F(G) / F(\epsilon) = i\omega \cdot F(G) \quad (11)$$

module complexe que l'on peut décomposer en ses parties réelles et imaginaires

$$G(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega) \quad (12)$$

En faisant intervenir le spectre de relaxation on obtient alors:

$$G'(\omega) = G_{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{H(\tau) \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} d(\text{Ln}\tau) \quad (13)$$

$$G''(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{H(\tau) \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} d(\text{Ln}\tau)$$

En utilisant les hypothèses précédentes et pour le spectre de relaxation défini en (6), il vient alors:

$$G'(\omega) = G_{\infty} + \frac{C}{2} \text{Ln} \frac{1 + \omega^2 \tau_1^2}{1 + \omega^2 \tau_2^2} \quad (14)$$

expression qui, aux pulsations, telles que :  $\tau_1 \ll \frac{2\pi}{\omega} \ll \tau_2$  se réduit à:

$$G'(\omega) = G_{\infty} + C \text{Ln}(\omega \tau_2) \quad (15)$$

qui correspond donc à une variation linéaire de  $G'$  en fonction de  $\text{Ln}(\omega)$ .

#### 4 - RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Nous présentons sur les figures 3 et 4 l'évolution temporelle de la force au cours d'un essai en relaxation de contrainte effectué sur un échantillon de PVC (température 30°C, élongation de 20%). A partir de ces résultats (même température et échantillons identiques) il est possible de calculer, pour différentes élongations, l'évolution au cours du temps de la contrainte vraie  $\sigma$  définie par:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{F(1+\epsilon)}{S_0} \quad (16)$$

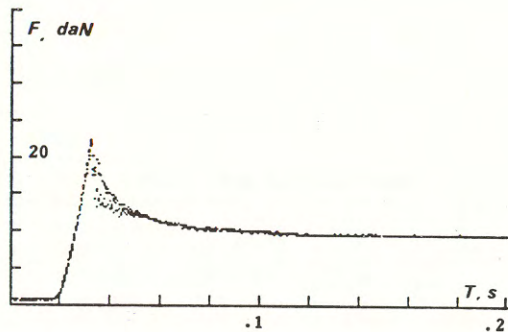


Fig. 3 - Evolution de la force en fonction du temps lors d'une expérience de relaxation de contrainte sur un échantillon de PVC de longueur initiale  $l_0 = 72$  mm et de  $S_0 = 70$  mm<sup>2</sup> à 30°C. L'élongation du matériau est  $\epsilon = 20\%$ . Cette courbe présente la partie initiale de l'évolution et permet en particulier d'évaluer la vitesse de montée en force et la vitesse de déplacement du vérin.

On peut observer que la variation de cette contrainte en fonction du Logarithme du temps (Fig. 5) présente un comportement linéaire sur au moins 5 décades et justifie donc l'utilisation de l'équation (6) dans la gamme de temps considérée.

Il est donc possible à partir de ces données expérimentales de calculer l'amplitude  $C$  du spectre de relaxation pour différentes valeurs de l'élongation  $\epsilon$  sans qu'il soit toutefois possible de déterminer  $G_0$  ni  $G_{\infty}$ . Cependant on a pu à partir d'autres données expérimentales correspondant à une relaxation effectuée pour une extension du matériau de 20%, de calculer l'évolution temporelle de  $G$  (Fig. 6) qui a conduit à une valeur identique pour déterminer

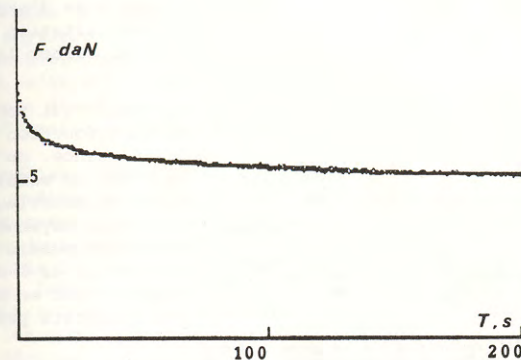


Fig. 4 - Evolution de la force en fonction du temps pour le même échantillon dans une gamme de temps plus large, mais limitée à 100 s; les résultats obtenus pour des temps plus longs (10<sup>4</sup> s) montrent que la relaxation n'est pas encore achevée.

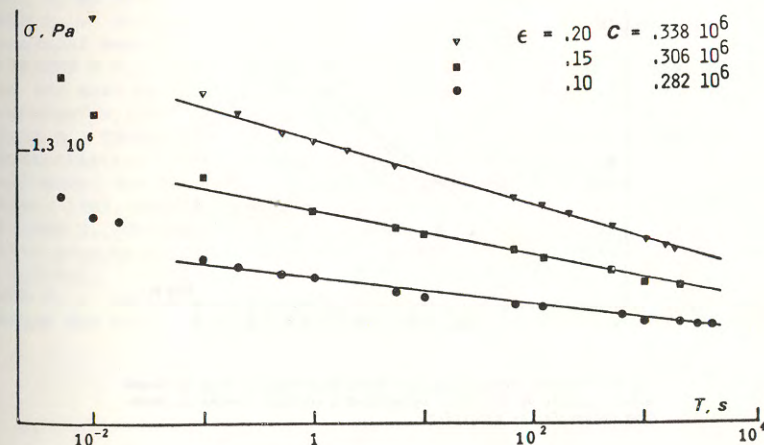


Fig. 5 - Evolution de la contrainte vraie en fonction du temps. Ces courbes présentent un comportement linéaire sur au moins 5 décades permettant de calculer l'amplitude  $C$  du spectre de relaxation, pour différentes valeurs de l'élongation.

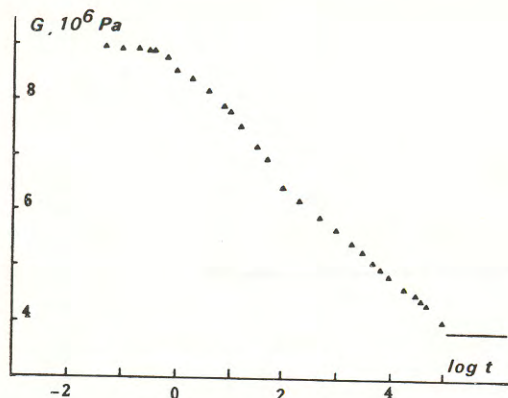


Fig. 6 - Exemple de résultat expérimental sur une gamme de temps plus importante faisant apparaître la réponse instantanée et la fin de la relaxation.

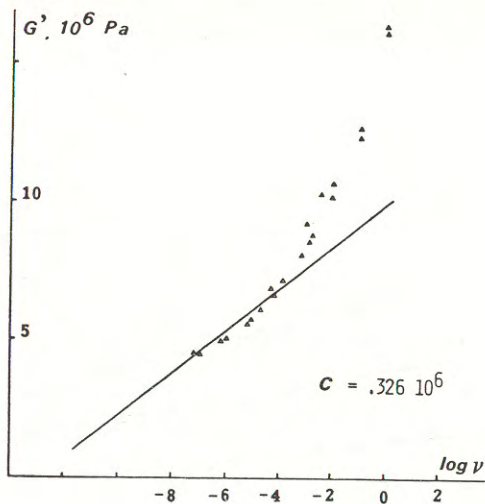


Fig. 7 - Données obtenues par des tests harmoniques, pour la température réduite de 21,6°C et permettant d'obtenir l'ordre de grandeur du spectre de relaxation.

l'amplitude du spectre de relaxation correspondant à cette élongation. De plus en effectuant des comparaisons avec l'état limite obtenu lors d'expériences de type sollicitation harmonique, on a pu approcher la valeur du temps  $\tau_2$ .

La Fig. 7 qui représente l'évolution, en fonction du logarithme de la fréquence, de la partie réelle  $G'(\omega)$  du module d'Young dynamique du matériau (pour la même extension moyenne  $\epsilon = 20\%$ ), a également permis de déterminer une valeur de C dont l'ordre de grandeur est en bon accord avec les résultats précédents.

## 5 - CONCLUSION

En conclusion de cette étude, plusieurs remarques doivent être faites.

Il faut tout d'abord souligner la difficulté qu'il y a à relier les résultats obtenus par une méthode de relaxation de contrainte et ceux obtenus par les essais de sollicitations harmoniques. Une comparaison de ces résultats passe nécessairement par l'utilisation d'un modèle théorique tel que celui qui a été

utilisé.

Une telle approche soulève, dans le cas d'une application aux matériaux d'origine biologique, le problème de l'accès aux "temps longs" qui ne peuvent être obtenus facilement sous peine d'une évolution irréversible des matériaux.

Il en est de même des températures qui ne peuvent être très différentes des températures physiologiques pour ne pas altérer les propriétés physico-chimiques du tissu biologique.

Par ailleurs, s'il est possible de déterminer l'amplitude du spectre de relaxation, la réponse élastique instantanée du matériau, donc son comportement aux "temps courts" restera toujours, même en utilisant une analyse harmonique, difficile d'accès.

Enfin, ces modèles, même s'ils font appel à un spectre de relaxation étendu, n'ont pas la prétention de rendre compte du comportement du matériau dans toute la gamme des temps, mais n'ont pour but que d'en prédire le comportement rhéologique global dans une gamme de fréquence et d'extension couvrant le domaine utile, ou, dans le cas de tissus biologiques, le domaine physiologique ou physiopathologique. Les deux approches expérimentales permettent donc d'obtenir des résultats comparables, et les hypothèses relatives à la nature du spectre de relaxation, dans les gammes de temps considérées, et à la quasi linéarité sont suffisantes pour décrire le comportement rhéologique du matériau.

## REFERENCES

- /1/ FUNG Y.C. - Stress strain history of soft tissues in simple elongation in: Y.C. FUNG, N. PERRONE, M. ANLIKER Eds., Biomechanics its Foundations and Objectives, Prentice Hall inc, Englewood cliffs (1972) pp 181-208.
- /2/ SANJEEVI R., SOMANATHAN N., RAMASWANY A. - Viscoelastic model for collagen fibers. Journal of Biomechanics, (1982), 15, pp 181-183
- /3/ COMMINOU M., YANNAS I.V. - Dependence of stress strain non-linearity of connective tissues on the geometry of collagen fibers. Journal of Biomechanics 1976, 9, pp 427-433.
- /4/ LANIR Y. - The rheological behavior of the skin: experimental results and structural model. Biorheology, (1979), 16, pp 191-202.
- /5/ DECRAEMER W.F., MAES M.A., VANHUUSE V.J. - A non-linear constitutive equation for soft biological tissues based upon a structural model. Journal of Biomechanics, (1980), 13, pp 559-564.
- /6/ GEIGER D., TREVISAN D., BERCOVY M., FLAUD P., GOUTALLIER D., ODDOU C. - Characterization of non-linear viscoelastic rheological properties of bioelastomers. 3rd Meeting of the European Society of Biomechanics, Nijmegen, January 1982, NETHERLANDS.
- /7/ TREVISAN D., GEIGER D., ODDOU C., BERGOVY M. - Banc d'extensiométrie uniaxiale pour tests de relaxation sur biomatériaux. ITBM vol 3 n°5, (1982) pp 513-522.
- /8/ FLAUD P. - Influence des propriétés rhéologiques non linéaires sur la dynamique des écoulements dans un tuyau déformable. Thèse d'Etat PARIS (1979).

## SPECTROSCOPIE MECANIQUE DANS LE DOMAINE TEMPOREL

TIME DOMAIN MECHANICAL SPECTROSCOPY (T.D.M.S.)

Gérard MARIN, Ingénieur  
Laboratoire de Physique des Matériaux Industriels - I.U.R.S. ,  
Université de PAU - avenue Louis-Sallenave - F-64000 PAU.

### R E S U M E

On décrit une méthode de Spectroscopie Mécanique qui permet, à partir de mesures transitoires en cisaillement (croissance des contraintes à l'établissement d'un écoulement permanent, relaxation des contraintes après arrêt de l'écoulement), de déterminer le module de cisaillement complexe  $G^*(\omega)$ . Cette méthode donne des résultats satisfaisants dans la zone dite "terminale" de relaxation (basses fréquences), son intérêt principal résidant dans la rapidité de la mesure, 2 à 8 fois plus courte qu'une caractérisation dans le domaine fréquentiel.

### A B S T R A C T

We describe in that paper a method called T.D.M.S (Time Domain Mechanical Spectroscopy) that gives the complex shear modulus  $G^*(\omega)$  from measurements in the time Domain (stress growth before newtonian flow, stress relaxation after cessation of flow), performing a Laplace Transform of either one of these transient functions. This method gives data with reasonable accuracy in the terminal region of relaxation in a much shorter time (2 to 8 times) than needed in the frequency Domain.

### 1. INTRODUCTION

La caractérisation des propriétés viscoélastiques dynamiques des polymères à l'état fondu présente un double intérêt.

Sur le plan fondamental, les paramètres que l'on peut tirer d'une telle étude (viscosité, complaisance limite, module de plateau) sont directement liés à la structure et l'environnement de ces longues chaînes enchevêtrées (longueur des chaînes, type de branchements, concentration dans le cas de solutions) [1]. Sur le plan des applications, les propriétés viscoélastiques des matières plastiques conditionnent directement leur aptitude à la transformation.

La détermination du module de cisaillement complexe  $G^*(\omega) = G'(\omega) + jG''(\omega)$  se fait par un balayage dans le domaine des fréquences, le plus souvent dans une géométrie cône-plan (oscillatoire) ou plan-plan (disques excentrés en rotation ou disques en oscillation).

Cependant, les longs temps de relaxation des polymères obligent à faire des mesures jusqu'à des fréquences très basses (typiquement  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  Hz), ce qui implique des manipulations longues (1 - 4 heures), à des températures élevées (100 à 300°C).

Certains polymères sont instables ou se dégradent rapidement à ces températures : la polymérisation continue, le polymère s'oxyde, réticule ou les chaînes se coupent, etc... Pour certains échantillons, il n'est pas possible de faire un balayage complet dans l'échelle des fréquences sans dégradation. C'est pourquoi nous avons essayé de mettre au point une méthode de détermination rapide des propriétés dynamiques des matériaux viscoélastiques, par Transformée de Laplace de fonctions transitoires, avant et après écoulement stationnaire. Ces méthodes s'apparentent à celles de T.D.S (Time Domain Spectroscopy) utilisées dans l'étude des phénomènes diélectriques.

## 2. PRINCIPE

Il est possible de déterminer le module de cisaillement complexe  $G^*(\omega)$  ou la viscosité complexe  $\eta^*(\omega)$  par une transformation de Laplace de la fonction de croissance des contraintes  $\sigma_1(t)$  à l'établissement d'un écoulement permanent Newtonien.

En effet, dans le cas général on a :

$$\eta^*(\omega) = \int_0^{\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$G(t)$  étant la fonction de relaxation.

Mais  $\sigma_1(t)$  et  $G(t)$  sont liés par la relation (2) :

$$G(t) = \frac{1}{\dot{\gamma}} \frac{d\sigma_1}{dt} \quad (2)$$

étant la vitesse de cisaillement.

On obtient alors :

$$\eta^*(\omega) = \frac{j\omega}{\dot{\gamma}} \int_0^{\infty} \sigma_1(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3)$$

Rappelons que

$$G^*(\omega) = j\omega \eta^*(\omega) \quad (4)$$

De façon tout à fait similaire, on peut calculer  $G^*(\omega)$  par transformation de Laplace de la fonction de relaxation des contraintes  $\sigma_2(t)$  après cessation de l'écoulement permanent au temps  $T_2$  (cf. Figure 1).

En effet, on a dans ce cas [2] :

$$G(t) = -\frac{1}{\dot{\gamma}} \frac{d\sigma_2}{dt} \quad (5)$$

$$\eta^*(\omega) = \int_0^{\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt$$

Et par intégration :

$$\eta^*(\omega) = \eta_0 - \frac{j\omega}{\dot{\gamma}} \int_0^{\infty} \sigma_2(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6)$$

L'origine des temps étant prise à  $T_2$ , et  $\eta_0$  étant la viscosité à faible vitesse de cisaillement.

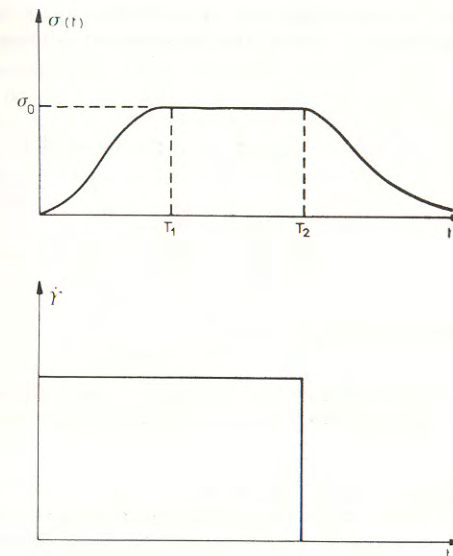


Figure 1 : Schéma des comportements transitoires avant et après écoulement permanent

## 3. METHODE ET TEST DE LA METHODE

### 3.1. Croissance des contraintes

Dans le cas de la fonction de croissance des contraintes, nous avons utilisé un algorithme de transformée de Fourier rapide (F.F.T.). Pour éviter les effets de troncature, on a enlevé au signal  $\sigma_1(t)$  une rampe  $\sigma_r(t)$  [3] :

$$\sigma_r(t) = \eta_0 \dot{\gamma} \frac{t}{T_1} = \sigma_0 \frac{t}{T_1} \quad (\text{pour } t < T_1) \quad (7)$$

et

$$\sigma_r(t) = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (\text{pour } t \geq T_1) \quad (8)$$

On peut montrer que la transformée de Fourier de cette rampe est nulle pour les fréquences de l'algorithme de F.F.T.

Les paramètres utilisés dans cet algorithme sont :



- temps d'échantillonnage  $\Delta t$
- temps de mesure  $N\Delta t = T_1$
- $N$  : nombre de points de mesures équidistants dans le temps
- $\Delta f$  fréquence d'échantillonnage =  $1/N\Delta t$
- $f_{\max}$  fréquence maximum =  $1/2\Delta t$

### 3.2. Relaxation des contraintes

Dans le cas de la fonction de relaxation des contraintes, pour éviter les effets de troncature et voir si une méthode d'intégration directe donnait de meilleurs résultats, nous avons calculé  $\eta^*(\omega)$  par simple intégration de la fonction  $\sigma_2(t)$  jusqu'à un temps  $T_3$  suffisamment long pour que  $\sigma_2(t)$  "écrase" les fonctions périodiques sinus et cosinus :

$$\eta'(\omega) = \eta_0 \int_0^{T_3 - T_2} \sigma_2(t) \cos \omega t dt$$

$$\eta''(\omega) = \int_0^{T_3 - T_2} \sigma_2(t) \sin \omega t dt \quad (9)$$

L'origine des temps étant  $T_2$ .

Cette méthode a l'avantage de ne pas imposer un intervalle de fréquence ( $\Delta f$ ,  $f_{\max}$ ) et de pouvoir calculer, par exemple,  $\eta^*(\omega)$  dans une échelle de pulsations logarithmique.

### 3.3. Test de la méthode

Nous avons tout d'abord calculé le comportement dans le domaine fréquentiel ( $\eta^*(\omega)$ ) dans le cas d'un modèle à temps de relaxation unique. Dans ce cas :

$$\sigma_1(t) = \eta_0 \dot{\gamma} (1 - e^{-t/\tau_0}) \quad (10)$$

et

$$\sigma_2(t) = \eta_0 \dot{\gamma} e^{-(t - T_2)/\tau_0} \quad (11)$$

$\eta_0$  étant la viscosité du milieu,  $\tau_0$  son temps de relaxation et  $\dot{\gamma}$  la vitesse de cisaillement.

Dans ce cas, la viscosité complexe du milieu s'écrit :

$$\eta^*(\omega) = \frac{\eta_0}{1 + j\omega\tau_0} \quad (12)$$

Nous avons alors comparé les valeurs théoriques de  $\eta^*(\omega)$  (équation 12) aux valeurs obtenues par les deux méthodes (3.1 et 3.2). Les caractéristiques d'échantillonnage ont été les suivantes :  $N = 512$  ou  $1024$  points ;  $\Delta t = 40$  ms ou  $80$  ms.

Les caractéristiques du "modèle" sont :  $\eta_0 = 100\,000$  poises ;  $\tau_0 = 1$  s, valeurs typiques d'un polymère fondu.

Les deux méthodes donnent des résultats satisfaisants (accord à mieux que 3%) sur un intervalle de fréquences de 2 à 3 décades dans la zone de relaxation dite "terminale" (fréquences de l'ordre de l'inverse du temps de relaxation du matériau). Cependant, la méthode d'intégration de  $\sigma_2(t)$  donne des résultats à une meilleure précision et sur un intervalle de fréquences plus important, son inconvénient étant un temps de calcul plus long.

## 4. REALISATION EXPERIMENTALE ET RESULTATS

### 4.1. Réalisation expérimentale

L'acquisition des fonctions de croissance des contraintes  $\sigma_1(t)$  et relaxation  $\sigma_2(t)$  ont été réalisées sur un rhéomètre INSTRON 3250 en géométrie cône-plan. Le nombre de points d'acquisition est au choix, de 512 ou 1024 points, et l'intervalle d'échantillonnage  $\Delta t$  varie de 40 ms à 800 ms selon le temps de relaxation maximum du matériau.

Le rhéomètre est couplé à un ordinateur H.P. 9845 B par un multiprogrammeur H.P. 6940 B qui contient une carte logique pour commander la rotation du système, une carte convertisseur rapide A/N couplée à un multiplexeur pour mesurer couple et force normale, et une carte A/N basse tension pour la mesure des températures.

Le programme d'acquisition/analyse des données démarre comme un thermomètre digital. Lorsque l'échantillon est en place et à la température voulue, l'opérateur commande la rotation du cône dans un sens. Lorsque le couple est constant (régime permanent), l'opérateur arrête la rotation et la contrainte tangentielle relaxe durant une période déterminée par le calculateur et liée au temps de croissance des contraintes que le calculateur avait mesuré. Puis le calculateur commande la rotation du cône dans l'autre sens et reproduit exactement la procédure décrite plus haut.

Selon le mode choisi, le calculateur enregistre la croissance des contraintes, ou la relaxation des contraintes, et fait la moyenne des signaux dans les deux sens de rotation. Puis il calcule la viscosité complexe  $\eta^*(\omega)$  et le module complexe  $G^*(\omega)$ , soit par FFT sur  $\sigma_1(t)$ , soit par intégration de  $\sigma_2(t)$ .

Un programme graphique trace ensuite  $\log G^*(\log \omega)$  et un diagramme de Cole-Cole de la viscosité complexe ( $\eta''(\eta')$ ). Dans ce diagramme, un arc de cercle est déterminé par une méthode des moindres carrés pour déduire les 3 paramètres caractéristiques de la relaxation terminale (cf. 4.2).

La durée d'une expérience de T.D.M.S varie typiquement entre 30 et 45 mn, mise en chauffe de l'échantillon comprise, ce qui est de 2 à 8 fois plus court qu'une caractérisation directe dans le domaine fréquentiel.

Nous avons comparé les valeurs de  $\eta^*(\omega)$  et  $G^*(\omega)$  obtenues par T.D.M.S à celles obtenues par des mesures directes dans le domaine fréquentiel. Dans ce cas, nous avons conservé la géométrie cône-plan, les oscillations du cône étant générées par un générateur/analyseur SOLARTRON 1170 lié à un système d'asservissement analogique de la position du cône. Le Solartron est piloté par le calculateur HP 9845, qui effectue également l'analyse des résultats.

### 4.2. Résultats

Nous avons effectué des mesures de T.D.M.S sur 4 échantillons de polymères commerciaux (polystyrène, polyamide, polyméthylmétacrylate, polyéthylène haute densité), et 2 échantillons modèles à distribution étroite de masse moléculaire (polystyrène, polybutadiène).

L'accord entre T.D.M.S et mesures directes dans le domaine fréquentiel est satisfaisant dans la zone dite "terminale" de relaxation ; cependant, les points calculés par T.D.M.S s'écartent des points déterminés par balayage en fréquence de la zone dite de "transition" (fréquences intermédiaires).

Nous avons reporté à titre d'exemple, les courbes comparées de  $G^*(\omega)$  obtenues

par les deux méthodes pour un polyméthylmétacrylate à 200°C (Figure 2).

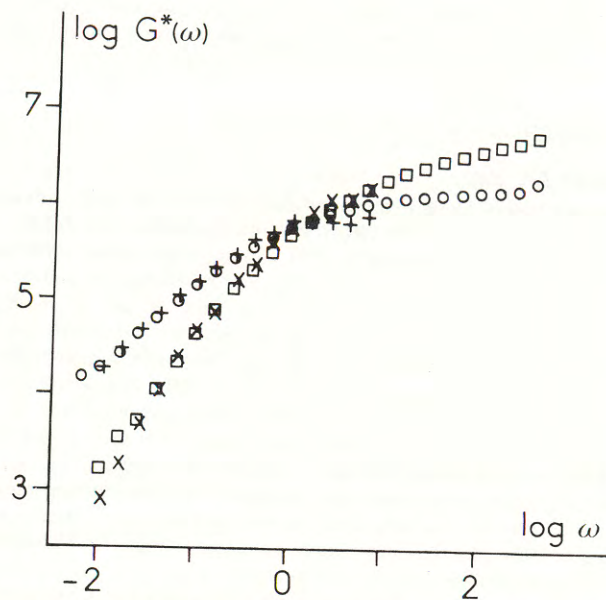


Figure 2 : Module de cisaillement complexe d'un polystyrène à 160°C.  
 □ G' dynamique ; ○ G'' dynamique ; x G' T.D.M.S. ; + G'' T.D.M.S

Si l'on s'intéresse particulièrement aux propriétés aux basses fréquences (ou temps longs), il est judicieux de reporter les résultats dans le plan complexe des viscosités ( $\eta''(\eta')$ ). Dans ce cas, pour un homopolymère, les points expérimentaux se placent, aux incertitudes de mesures près, sur un arc de cercle, ce qui permet de définir trois paramètres caractéristiques de la relaxation terminale [4] :

- $\eta_0$  viscosité limite : intersection de l'arc de cercle avec l'arc réel
- $\tau_0$  temps de relaxation moyen correspondant au maximum de  $\eta''(\omega)$  :  $\omega_c = 1/\tau_0$
- h paramètre tel que  $\theta = h(\eta/2)$ ,  $\theta$  étant l'angle de décentrage de l'arc de cercle par rapport à l'arc réel ; h traduit la largeur de la distribution des temps de relaxation et est directement lié à la largeur de la distribution des masses moléculaires.

Nous avons reporté sur la figure 3 les points représentatifs de la viscosité complexe obtenus par les deux méthodes pour un échantillon de polyamide. Les valeurs de  $\eta_0$ ,  $\tau_0$  et h, données par les deux méthodes, sont, dans tous les cas, en bon accord.

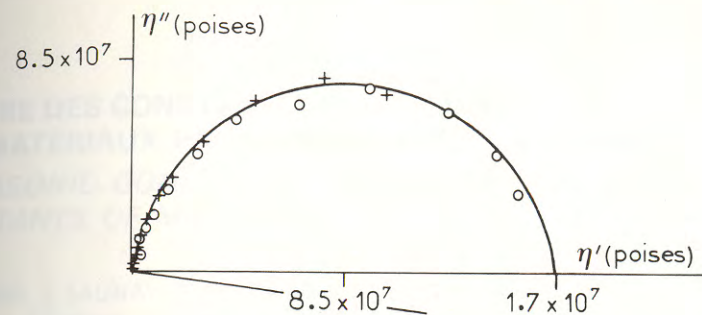


Figure 3 : Viscosité dynamique dans le plan complexe.  
 Polyamide, T = 200°C ; + dynamique ; ○ T.D.M.S

## 5. CONCLUSION

Nous avons essayé d'appliquer aux matériaux viscoélastiques fondus des méthodes de spectroscopie dans le domaine temporel. Les résultats obtenus sont satisfaisants dans la zone terminale de relaxation où le comportement du matériau dépend de ses caractéristiques structurales (longueur des chaînes, branchement, etc...). De plus, dans le cas de polymères commerciaux, leur aptitude à la transformation est directement liée à leur comportement aux temps longs (basses fréquences). Cette méthode pourra donc s'appliquer à des mesures de contrôle d'un grand nombre d'échantillons, ou à la caractérisation d'échantillons dégradant rapidement, la durée d'une caractérisation en T.D.M.S étant de 2 à 8 fois inférieure à celle d'un balayage dans le domaine des fréquences. De plus une telle caractérisation peut être facilement couplée à des mesures d'écoulement permanent ("courbe d'écoulement"  $\eta(\dot{\gamma})$ ).

Cependant, des mesures directes dans le domaine fréquentiel donnent des résultats à une meilleure précision et sur un intervalle de fréquences plus large.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. MARIN and W.W. GRAESSLEY *Rheologica Acta* 16, 527, (1977).  
 G. MARIN, E. MENEZES, V.R. RAJU and W.W. GRAESSLEY  
*Rheologica Acta* 19, 462, (1980).
- [2] J.D. FERRY "Viscoelastic Properties of Polymer". J. Wiley and Sons (New-York, 1970).
- [3] G. GESTBLOM and E. NORELAND *J. Physical Chemistry* 80, (14), 1631, (1976).
- [4] G. MARIN, J.J. LABAIG and Ph. MONGE *Polymer* 16, 223, (1975).

**MESURE DES CONSTANTES ELASTIQUES  
DES MATERIAUX PAR GONIOMETRIE ULTRASONORE**  
*ULTRASONIC GONIOMETRY MEASUREMENTS OF ELASTIC  
CONSTANTS OF MATERIALS*

M. MUDRY, J. LAUNAY, C. PREZIOSA, F. GILLETTA  
Université d'Orléans - Laboratoire de Mécanique et d'Energétique.

RESUME

Parmi les méthodes ultrasonores, la goniométrie présente l'avantage de pouvoir faire varier continuellement la direction de propagation et donc de n'exiger l'emploi que d'un petit nombre d'éprouvettes, même dans le cas de matériaux anisotropes. Nous avons pu approfondir et simplifier tout à la fois cette méthode à l'occasion d'une recherche sur le matériau bois, soutenue par la D.G.R.S.T. En particulier, les relations matériau-liquide coupleur ont été précisées tant du point de vue de l'imperméabilisation que des caractéristiques liquide. Dans certains cas il est opportun de remplacer l'eau par d'autres liquides. Ainsi l'ensemble des neuf constantes élastiques d'un matériau orthotrope peut être atteint de façon précise. Nous en présentons deux exemples.

ABSTRACT

Among all ultrasonic methods, goniometry offers the advantage of making propagation direction vary continuously and hence of requiring the use of only very few probes, even in the case of anisotropic materials. This method has been both studied more deeply and simplified through a specific research dealing with wood sponsored by the D.G.R.S.T. In particular, relations between material and coupling liquid have been precised as far as proofing and liquid characteristics. In some cases, water can be advantageously replaced by other liquids. So, all the nine elastic constants can be precisely achieved in orthotropic materials. Two examples are here presented.

1. INTRODUCTION.

A côté des classiques méthodes statiques de caractérisation de l'élasticité des matériaux, les méthodes dites dynamiques sont de plus en plus employées. Parmi elles on distingue les méthodes dites "basse fréquence" qui reposent sur la mesure de fréquences propres de petites structures telles que poutres ou plaques. Les méthodes dites ultrasonores sont d'un emploi courant plus récent. Leur principe général consiste à exciter à l'aide de sondes piezo-électriques la surface d'une éprouvette du matériau à analyser. Les ondes élastiques ainsi créées se propagent avec des polarisations et des vitesses qui dépendent de la direction de propagation et des constantes élastiques du matériau en question. La mesure du temps de parcours de l'onde et donc de la vitesse correspondante pour un ensemble bien choisi de directions de propagation permet, en principe, d'en déduire ces constantes. Les avantages sont bien connus et multiples : caractères non destructif - utilisation de petites éprouvettes - souplesse, rapidité et simplicité au niveau expérimental - déformation et comportement linéaire - Caractérisation visco-élastique... Une des techniques expérimentales possibles, la goniométrie, a été approfondie récemment par le Laboratoire de Mécanique et d'Energétique à l'occasion d'un programme de recherche soutenu par la D.G.R.S.T. sur le matériau bois. D'autres matériaux tels que des roches ont également été analysés.

2. ONDES PLANES ET MATERIAUX ORTHOTROPES.

Nous considérons un milieu élastique homogène (ou convenablement homogénéisé [1][2]) dont la loi de comportement s'écrit :

$$\text{avec } C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad C_{ijkl} = C_{klij} \quad (1)$$

d'où au plus 21 constantes indépendantes caractéristiques du matériau. Les méthodes ultrasonores utilisent généralement l'onde plane, définie par un champ de déplacement :

$$\vec{u}(x, t) = f\left(t - \frac{x_i n_i}{V}\right) \vec{p} \quad (2)$$

où f est une fonction scalaire quelconque

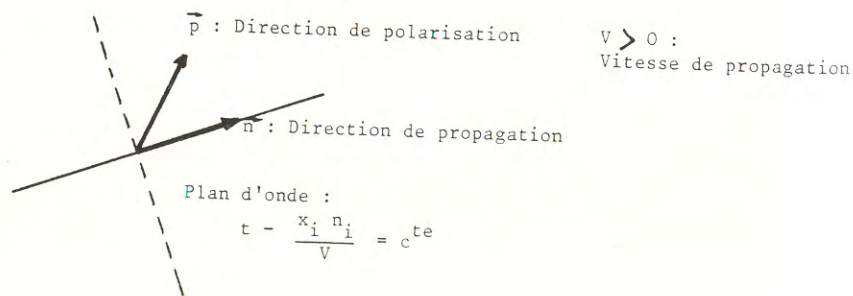


Figure 1

On distingue deux cas d'ondes dites "pures" longitudinale ("L") lorsque  $\vec{p} \parallel \vec{n}$  et transversale ("T") lorsque  $\vec{p} \perp \vec{n}$ .

En milieu illimité et en absence d'efforts volumiques, les équations de propagation sont obtenues en portant (2) dans les équations de NAVIER :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} u_{l,kj} \quad (3)$$

On obtient ainsi les équations de CHRISTOFFEL :

$$C_{ijkl} n_j n_k p_l = \rho V^2 p_i \quad (4)$$

Elles expriment que le scalaire  $\chi = \rho V^2$  est valeur propre du tenseur  $\mathbb{V}(\vec{n})$  de composantes :

$$V_{il} = C_{ijkl} n_j n_k \quad (5)$$

appelé tenseur acoustique du matériau pour la direction de propagation  $\vec{n}$ , la polarisation  $\vec{p}$  correspondante étant la direction propre associée. Le tenseur  $\mathbb{V}$  étant toujours symétrique, défini, positif, il existe donc pour chaque direction  $\vec{n}$ , 3 ondes planes de polarisations deux à deux orthogonales. En particulier on retrouve pour un matériau isotrope, qu'il existe pour toute direction deux ondes pures (L et T) de vitesse  $V_L$  et  $V_T$  indépendante de la direction. Dans le cas d'un fluide parfait barotrope, il n'y a qu'une onde pure L.

Une représentation géométrique commode et très utilisée dans les méthodes ultrasonores est la surface des lenteurs du matériau, lieu des extrémités du vecteur lenteur

$$\vec{L} = \frac{\vec{n}}{V} \quad (6)$$

lorsque celle de  $\vec{n}$  parcourt la sphère unité. Notant  $l_j$  ses composantes, on obtient son équation cartésienne à partir de (4) :

$$\text{Det}(\bar{C}_{ijkl} l_j l_k - \delta_{il}) = 0 \quad (7)$$

où :

$$\bar{C}_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}}{\rho} \quad (8)$$

sont les constantes spécifiques du matériau. Cette surface est en général constituée de 3 nappes disjointes correspondant à l'évolution de chacune des valeurs propres.

Si l'on excepte les monocristaux, l'orthotropie est une classe de comportement suffisante pour modéliser l'élasticité de la plupart des matériaux usuels.

Elle correspond à la symétrie orthorhombique des cristaux, et suppose l'existence de 3 plans de symétrie élastique deux à deux orthogonaux. Nous appelons base d'orthotropie ou base naturelle une base orthonormée construite à partir des intersections de ces trois plans. Dans cette base, les matrices de rigidité et de complaisance -obtenues en renu- mérotant classiquement (1) et son inverse- d'un tel matériau ont la forme [7] [14] :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

La matrice de complaisance est exprimée en fonction des constantes techniques du matériau.  
 Ces matrices sont symétriques et un matériau orthotrope est caractérisé par 9 constantes élastiques indépendantes.

Les composantes en base naturelle du tenseur acoustique d'un matériau orthotrope sont, selon (4) :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11} &= C_{11} n_1^2 + C_{66} n_2^2 + C_{55} n_3^2 ; \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = (C_{12} + C_{66}) n_1 n_2 \\
 \Gamma_{22} &= C_{66} n_1^2 + C_{22} n_2^2 + C_{44} n_3^2 ; \quad \Gamma_{23} = \Gamma_{32} = (C_{23} + C_{44}) n_2 n_3 \quad (10) \\
 \Gamma_{33} &= C_{55} n_1^2 + C_{44} n_2^2 + C_{33} n_3^2 ; \quad \Gamma_{31} = \Gamma_{13} = (C_{13} + C_{55}) n_3 n_1
 \end{aligned}$$

Si l'on ne considère que des propagations dans un plan naturel, le tenseur aura pour matrice (cas du plan (1,2) :  $n_3 = 0$ ) :

$$\begin{bmatrix} C_{11} n_1^2 + C_{66} n_2^2 & (C_{12} + C_{66}) n_1 n_2 & 0 \\ (C_{12} + C_{66}) n_1 n_2 & C_{66} n_1^2 + C_{22} n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} n_1^2 + C_{44} n_2^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Le diagramme des lenteurs correspondant (ie : les courbes des lenteurs naturelles sont par définition les intersections des trois nappes de la surface des lenteurs par le plan en question) est représenté sur la figure 2.

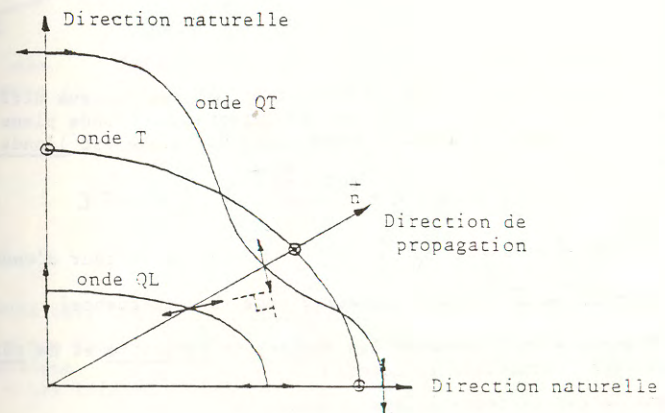


Figure 2

On notera l'existence d'une onde pure T polarisée perpendiculairement au plan et deux ondes impures polarisées dans le plan et baptisées quasi-L et quasi-T selon l'inclinaison de  $\vec{p}$  par rapport à  $\vec{n}$ .  
 On voit aussi que la considération de deux plans naturels met en jeu toutes les constantes élastiques.

Par contre la propagation dans les directions naturelles seulement ne permet pas d'atteindre les rigidités non diagonales, et donc (après inversion) ni les modules d'YOUNG  $E_i$  ni les coefficients de POISSON  $\nu_{ij}$ .

Le tableau de la figure 3 résume le nombre minimum de points de mesure (ie ; de directions de propagation différentes) nécessaires relativement aux constantes à déterminer.

	PLAN 1.2	PLAN 2.3	PLAN 3.1
4 lenteurs d'ondes quasi "L" ou quasi "T"	$C_{11}, C_{22}$ $C_{12}$ $C_{66}$	$C_{22}, C_{33}$ $C_{23}$ $C_{44}$	$C_{33}, C_{11}$ $C_{31}$ $C_{55}$
2 lenteurs de l'onde pure "T"	$C_{55}, C_{44}$	$C_{66}, C_{55}$	$C_{44}, C_{66}$

Figure 3

Les techniques expérimentales mettent en jeu des milieux différents ( : matériau + milieux coupleurs) liés par des interfaces. L'onde plane au comportement le plus simple au passage d'une interface plane est l'onde harmonique, telle que dans (2) :

$$f = \Re \{ A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \} \quad A \in \mathbb{C} \quad (12)$$

où  $\vec{k} = \frac{\omega}{V} \vec{n} = \omega \vec{L} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}$  est le vecteur d'onde

et  $\lambda = \frac{2\pi V}{\omega} = \frac{V}{N}$  la longueur d'onde (N : fréquence)

Les figures 4 et 5 résument les notions de réflexion et de réfraction associées à une onde harmonique incidente :

- dans le cas de deux milieux solides
- dans le cas d'un liquide ( onde incidente L) et d'un solide.

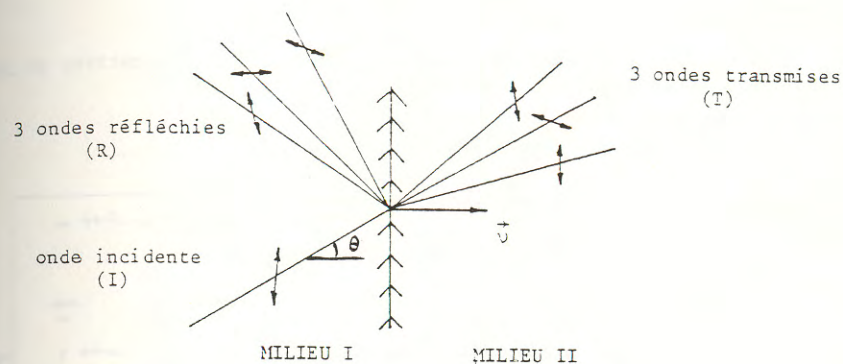


Figure 4

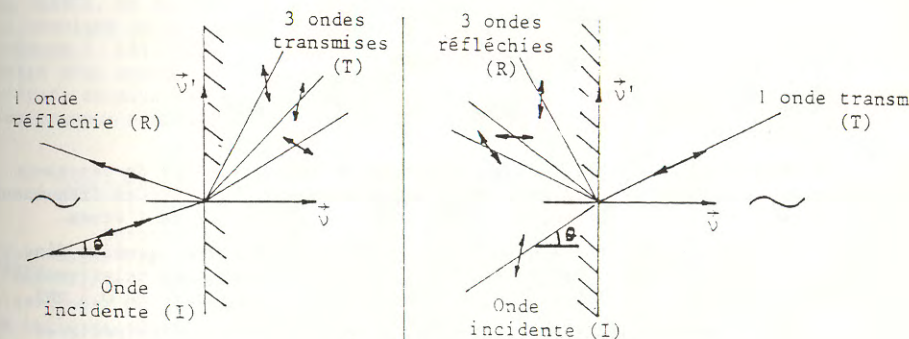


Figure 5

Dans les deux cas, les conditions d'interface impliquent :

- que toutes les ondes ont même fréquence et sont contenues dans le plan incident.

- les lois de DESCARTES :  $\frac{\sin \theta}{V(\theta)} = c \vec{e}$

Elles donnent par ailleurs les conditions de transmission en amplitude. L'ensemble de ces conditions entraîne qu'il peut y avoir moins de 3 ondes réfléchies ou réfractées dans le solide.

3. EXPERIMENTATIONS.

Toutes les techniques expérimentales [3] [4] [5] [6] mettent en jeu un montage tel que ci-dessous (Figure 6)

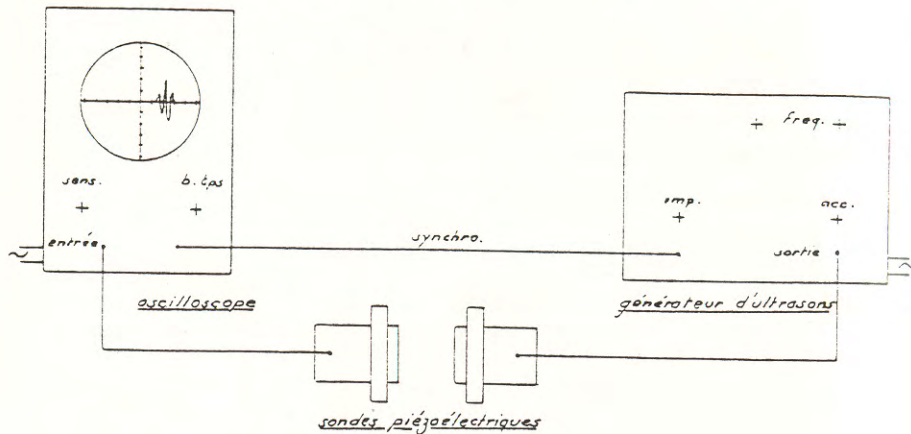


Figure 6

Les sondes sont utilisées au voisinage de leur fréquence de résonance et permettent d'obtenir des trains d'ondes à peu près harmoniques. Ces fréquences peuvent aller de 0,1 à 10 MHz selon les matériaux et l'objectif de l'étude.

Pour éviter les effets de dispersion géométrique (hétérogénéité fine du matériau) ou viscoélastiques, on a intérêt à opérer à fréquence relativement basse. Dans nos études sur le bois, nous sommes resté au voisinage de 0,5 MHz.

Ces techniques utilisent toutes des éprouvettes parallélépipédiques assez plates et ne diffèrent que par leur relation avec les sondes. Les figures 7 et 8 ci-dessous schématisent le contact direct et la technique du milieu coupleur solide. La goniométrie, qui fait spécialement l'objet de cette communication, est décrite plus en détail au paragraphe suivant.

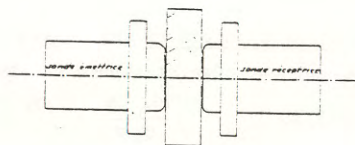


Figure 7

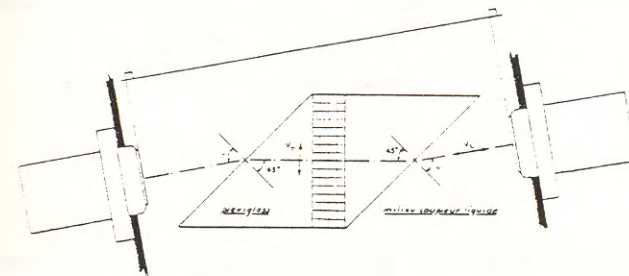


Figure 8

Parmi les matériaux étudiés, citons les métaux, polymères et céramiques, au comportement à peu près isotrope. Ces techniques, et en particulier la goniométrie, sont spécialement intéressantes pour des matériaux anisotropes. C'est le cas des composites modernes qui ont été étudiés à l'étranger ([4] [5] [6]) et en FRANCE, en particulier à l'I.S.M.C.M. par l'équipe VINH ([3] [7]). Il convient de mentionner également leur application récente aux os humains ou animaux ([8] [9]). Enfin nous avons spécialement développé la méthode goniométrique à propos de l'étude de diverses essences de bois [10] [11] [12] (sur le bois, voir aussi les travaux réalisés à NANCY [13]), et aussi de celle de quelques roches.

4. LA GONIOMETRIE DANS LES PLANS NATURELS.

Cette méthode n'utilise que des éprouvettes taillées selon les directions naturelles du matériau. Une telle éprouvette est montée sur un bâti et l'ensemble est plongé dans une cuve remplie de liquide, de l'eau dans les travaux classiques. La liaison bâti-cuve est notable et l'éprouvette peut donc être mise en incidence (i) à volonté par rapport au faisceau acoustique émis dans le liquide par une sonde à la paroi de la cuve et reçu par l'autre placée en regard (Figure 9).

L'onde L incidente engendre en général par réfraction les deux ondes quasi-L et quasi-T polarisées dans le plan naturel en question, lesquelles engendrent par l'autre face deux ondes L dans le liquide. Pour chacune des deux ondes ainsi générées dans le matériau un calcul simple montre que le vecteur lenteur correspondant a pour composantes (plan (1.2)) :

$$\vec{L} \begin{cases} l_1 = \frac{\cos i}{V_0} + \frac{t - t_0}{e} \\ l_2 = \frac{\sin i}{V_0} \end{cases} \quad (13)$$

où  $t_0$  note le temps de parcours sans éprouvette,

où  $t$  note le temps de parcours avec éprouvette

et où  $V_0$  est la vitesse dans le liquide,  $e$  l'épaisseur de l'éprouvette et  $i$

l'incidence.

La différence  $t - t_0$  est directement obtenue à l'oscilloscope et le point caractéristique  $(l_1, l_2)$  sur le diagramme des lenteurs se déduit donc facilement des mesures.

La direction de propagation de l'onde est donnée par l'angle de réfraction  $r$  tel que :

$$\sin r = V \ell_2 \quad \text{avec} \quad V^2 = \frac{1}{(\ell_1^2 + \ell_2^2)}$$

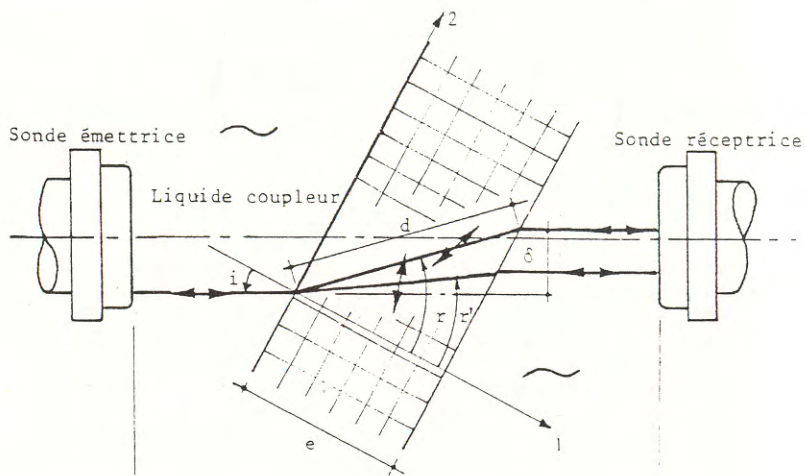


Figure 9

L'avantage de cette méthode est clair. Avec seulement deux éprouvettes naturelles, il est possible de "balayer" les trois plans naturels et donc, selon le § 2, obtenir en principe un nombre surabondant de renseignements. Une seule éprouvette suffit même si le matériau est isotrope transverse. La présence d'un liquide coupleur exige par contre la maîtrise de ses relations avec le matériau.

5. LA RELATION LIQUIDE-MATERIAU.

La première question qui se pose à l'évidence est celle de l'imperméabilisation de l'éprouvette lorsque le matériau est poreux comme c'est le cas des roches ou du bois. Ce dernier est, de ce point de vue, exemplaire puisqu'il est capable de fixer jusqu'à 30 % de son poids anhydre en eau du fait des propriétés bien connues de la cellulose, constituant essentiel des parois cellulaires. Au-dessous de cette valeur, il n'y a pas d'eau libre dans les cellules. On sait depuis longtemps [14] que certaines constantes techniques du bois dépendent fortement du taux d'humidité et la maîtrise de ce paramètre était donc un point essentiel de l'étude.

Nous obtenons une imperméabilisation partielle de l'éprouvette grâce à une membrane élastique (Figure 10) auto-adhésive et très fine (0,02 mm), qui est couramment utilisée comme pansement adhésif en chirurgie. Elle a aussi la qualité majeure d'être imperméable aux liquides, mais perméable aux gaz, en particulier à la vapeur d'eau. Il est ainsi possible de faire varier le taux d'humidité d'un seul jeu d'éprouvettes en atmosphère contrôlée (étuve), évitant ainsi toute dispersion de résultats due à l'utilisation de plusieurs jeux

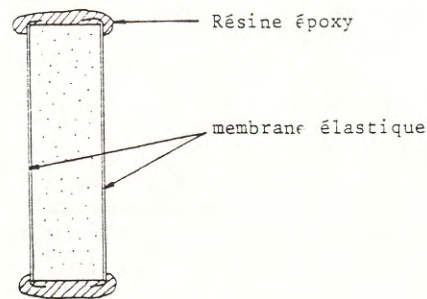


Figure 10

d'éprouvettes. L'étude de la variation des constantes élastiques du bois en fonction de l'humidité est actuellement en cours au L.M.E. (contrat M.R.I.).

Nos recherches sur le bois ont également mis en évidence un second type de problème qui est "l'adaptation" liquide-matériau tant du point de vue des vitesses de propagation que des impédances ( : produit  $Z = \rho V$  ). Sans entrer ici dans les détails (une discussion approfondie doit faire l'objet d'une prochaine publication) indiquons que les conditions de transmission sont difficiles avec l'eau au niveau de l'onde lente QT pour de nombreuses essences "légères".

On peut ainsi montrer que le choix du liquide doit satisfaire à deux critères :

- Vitesse faible devant celle de l'onde QL, les lois de DESCARTES permettant alors une plus grande plage de mesures sur QT, grâce à la disparition plus précoce de l'onde QL lorsque  $i$  augmente.
- Impédance voisine de celle de l'onde QT, les conditions de transmission assurant alors, à l'onde transmise, une amplitude suffisante pour une mesure correcte.

De nombreux liquides ont été recherchés et essayés. Relativement aux essences de bois les plus difficiles, certaines huiles de SILICONE ( $V_0 = 940$  m/s ;  $Z_0 = \rho_0 V_0 = 0,77 \cdot 10^6$  S.I.) semblent donner les meilleurs résultats.

6. DIAGRAMME EXPERIMENTAL DES LENTEURS ET RECONSTITUTION.

Pour chaque incidence, les formules (13) permettent une construction très simple du point correspondant à l'onde QL ou QT sur le diagramme des lenteurs, comme le montre la figure 11.

La direction 1 étant toujours conventionnellement celle de l'éprouvette (le : parallèle à l'épaisseur e), le point correspondant à l'onde incidente sur le cercle des lenteurs du liquide a pour coordonnées (Point A) :

$$\left( \frac{\cos i}{V_0} \quad \frac{\sin i}{V_0} \right)$$

Selon les formules (13), on obtient le point (B ou C) correspondant à l'onde QL ou QT par le vecteur AB ou AC (respectivement) de composantes :

$$\left( \frac{b - c_0}{e} \quad 0 \right)$$



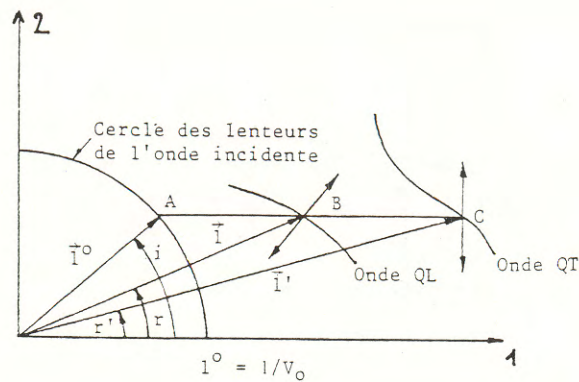


Figure 11

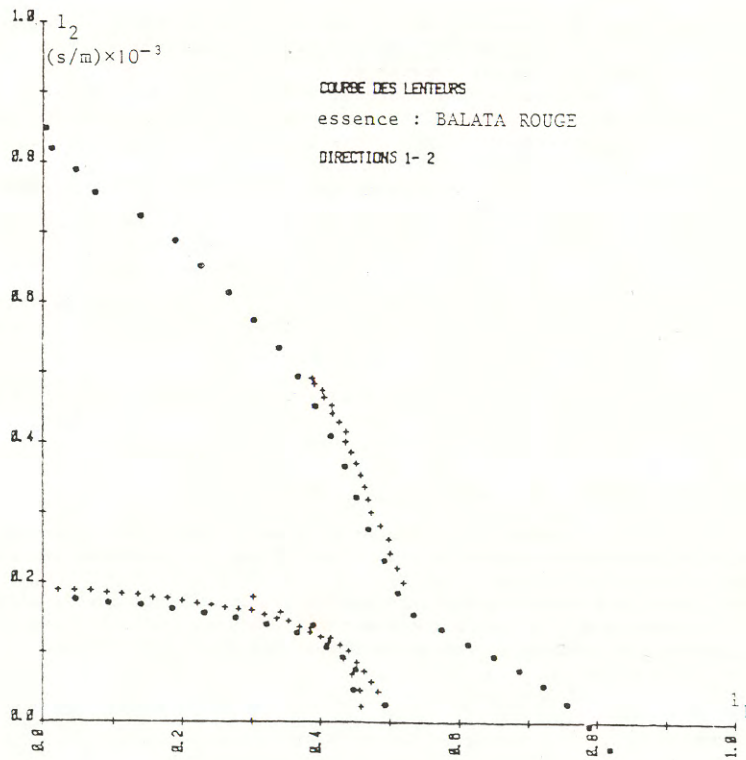


Figure 12

La figure 12 donne un exemple de diagramme expérimental des lenteurs pour une des essences de bois tropical étudiées au L.M.E. : le BALATA ROUGE. Les croix (x) correspondent à l'emploi de la glycérine comme liquide coupleur, les points (°) à celui du SILICONE V 1. On constate avec ce dernier liquide un diagramme beaucoup plus étendu au niveau de l'onde QT.

Ayant obtenu le plus vaste diagramme possible dans les 3 plans naturels du matériau, nous effectuons le choix des constantes de rigidité  $C_{\alpha\beta}$  qui permet de reconstituer "au mieux" toutes les lenteurs expérimentales. Actuellement nous déterminons d'abord les 3 constantes  $C_{11}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{33}$  à partir de la mesure relative à l'onde L selon les 3 directions naturelles. Les 6 autres constantes sont déterminées avec deux points bien choisis sur chaque courbe QT, conduisant au meilleur compromis quant à l'incertitude relative caractérisant les deux constantes mise en jeu par cette onde. Enfin l'ensemble des points expérimentaux non pris en compte est comparé à ces courbes de lenteurs reconstituées, permettant aussi de juger de la qualité de cette reconstitution et donc de la fiabilité des valeurs des rigidités.

7. DEUX EXEMPLES DE RESULTATS.

Nous donnons ici les diagrammes de lenteurs expérimentaux (+) et reconstitués (trait plein) avec les valeurs des constantes techniques correspondantes pour deux matériaux, étudiés au L.M.E. à ORLEANS.

a - Une essence de bois : LE CHENE

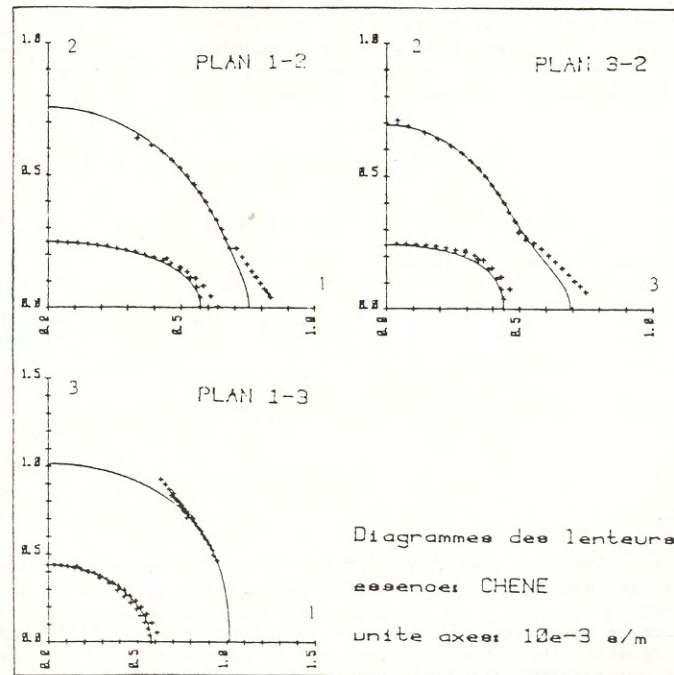


Figure 13

Constantes techniques du chêne ( $\rho = 0,63 \text{ gcm}^{-3}$ )

$E_1 = 13\ 200$	$\mu_{23} = 13\ 200$	$\nu_{12} = 0,39$	$\nu_{21} = 0,05$
$E_2 = 94\ 000$	$\mu_{31} = 6\ 100$	$\nu_{23} = 0,09$	$\nu_{32} = 0,37$
$E_3 = 22\ 200$	$\mu_{12} = 11\ 100$	$\nu_{31} = 0,38$	$\nu_{13} = 0,65$
(daN/cm <sup>2</sup> )	(daN/cm <sup>2</sup> )		

Les directions naturelles du bois sont numérotées comme suit :

- 1 - Tangentielle (aux couches annuelles)
- 2 - Longitudinale (sens du "fil")
- 3 - Radiale

L'ensemble des résultats obtenus sur toutes les essences étudiées jusqu'à présent (une vingtaine) et leur discussion font l'objet d'une publication à paraître prochainement.

b - Une roche : UN MARBRE

Quelques roches ont été étudiées au L.M.E. en collaboration avec le Laboratoire de Pétrologie de l'Université d'ORLEANS. Nous donnons ci-dessous le tableau des constantes techniques obtenues. On notera la quasi-isotropie-transverse autour de la direction naturelle numérotée 2, comme l'on pouvait s'y attendre.

$$\rho = 2,81 \text{ g cm}^{-3}$$

$E_1 = 256\ 080$	$\mu_{23} = 115\ 150$	$\nu_{12} = 0,23$	$\nu_{21} = 0,13$
$E_2 = 455\ 000$	$\mu_{31} = 85\ 800$	$\nu_{23} = 0,11$	$\nu_{32} = 0,17$
$E_3 = 283\ 350$	$\mu_{12} = 113\ 600$	$\nu_{31} = 0,31$	$\nu_{13} = 0,34$
(daN/cm <sup>2</sup> )	(daN/cm <sup>2</sup> )		

## CONSTANTES ELASTIQUES DES MATERIAUX ET GONIOMETRIE ULTRASONORE

8. CONCLUSION.

Les méthodes ultrasonores -et en particulier la goniométrie- ont ainsi été appliquées aujourd'hui à des matériaux très variés et ont donné de bons résultats. Les comparaisons avec les mesures statiques sont généralement très satisfaisantes. Sur le bois elles ne peuvent être faites pour l'instant qu'en termes d'ordres de grandeur (relativement à des tables de valeurs déjà assez anciennes) du fait de la grande dispersion des caractéristiques naturelles au sein d'une même essence. Un programme de comparaison systématique associant dix laboratoires et soutenu par le M.R.I. est actuellement en cours.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] TURBE N. Sur le mouvement d'un milieu infini, périodique, élastique ou visco-élastique (Ce colloque)
- [2] BEHRENS E. Elastic constants of composite materials Journal of the Acoustical Society of America. Vol. 45 - N1 - 1969
- [3] VINH. T. Mesures ultrasonores des constantes élastiques des matériaux composites Sciences et Techniques de l'armement, 54, 2e Fasc. 1981
- [4] MARKHAM M.F. Measurement of the elastic constants of fibre composites by ultrasonics Composites - March 1970
- [5] TAUCHERT T.R. An experimental study of dispersion of stress waves on a Fiber-Reinforced composite. Journal of Applied Mechanics - March 1972.
- [6] GIESKE J.H. Elastic constants of B-A1 Composites by Ultrasonic Velocity Measurements. Experimental Mechanics - April 1974
- [7] VINH T. CHEVALLER Y. LE NIZERAY D. Mécanique des Matériaux composites - Caractérisation mécanique - Etudes dynamiques. Document ISMCM - 1980
- [8] YOON H.S. Ultrasonic wave propagation in human cortical bone - Paris I. II. III. J. Biomechanics, Vol. 9 pp 407 - 412, 459 - 464, 537 - 540 ; 1976.
- [9] YCON H.S. Ultrasonic properties and microtexture of human cortical bone. Ultrasonic Tissue characterization II, M. Linder Ed., Natural Bureau of Standards, Spec. Publ. 525 - 1979.
- [10] PREZIOSA C. MUDRY M. LAUNAY J. GILLETTA F. Détermination des constantes élastiques du bois par une méthode acoustique goniométrique. Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t.293, Série II. Septembre 1981.
- [11] MUDRY M. LAUNAY J. PREZIOSA C. GILLETTA F. Mesure des constantes élastiques du bois par ultrasons. Actes du Congrès International EUROMECH 154 "Ultrasonic investigation of structural and mechanical properties of solids" - Bordeaux - 27 au 29 Avril 1982.
- [12] PREZIOSA C. MUDRY M. LAUNAY J. GILLETTA F. Méthode ultrasonore de détermination des constantes élastiques du bois. Actes du Colloque Sciences et Industries du Bois. Grenoble - 20 au 22 Septembre 1982.
- [13] BUCUR V. Module d'YOUNG, de COULOMB et coefficients de POISSON du bois par mesure ultrasonores sur éprouvettes cylindriques de faible taille. Actes du Congrès International EUROMECH 154 "Ultrasonic investigation of structural and mechanical properties of solids" - Bordeaux - Avril 1982.
- [14] KOLLMANN F.P. COTE W.A. Principles of Wood Science and Technology 1 - Solid Wood - Springer Verlag 1975.

**LISTE DES AUTEURS**

*LIST OF AUTHORS*

AMINALLAH (M.)  
BIAREZ (J.)  
BLANC (R. H.)  
BOELLE (J.-L.)  
BOULPAEP (F.)  
BROSSARD (J.)  
CAGNOUX (J.)  
CAPET  
CARDON (A.)  
CHIAM (C.Y.)  
DORMEVAL (R.)  
FLAUD (P.)  
FRIAS (M.)  
GEIGER (D.)  
GIANNOTTA (J.-C.)  
GILLETTA (F.)  
GODET  
HABIB  
HOARAU  
JODER (C.)  
LACOMBE (C.)  
LAINE (J.-P.)  
LATAILLADE (J.-L.)  
LAUNAY (J.)  
LE HOUEDÉC (D.)  
LELIEVRE (J.-C.)  
MARCHAND (A.)  
MARIN (G.)  
MEUNIER (J.)  
MONNERIE (L.)  
MONTEILLET (F.)  
MUDRY (M.)  
POUSSIN (D.)  
POUYET (J.)  
PREZIOSA (C.)  
QUEMADA (A.)  
REGAZZONI (G.)  
RENARD (J.)  
SIDOROFF (F.)  
TASSIN (J.-F.)  
TAUDIN  
THIRION (P.)  
TREVISAN (D.)  
TRONEL (M.)  
TURBE (N.)

## GRUPE FRANÇAIS DE RHÉOLOGIE

---

Vous NE CONNAISSEZ PAS le Groupe Français de Rhéologie :  
lisez la présentation succincte qui en est faite au verso.

Vous CONNAISSEZ le Groupe Français de Rhéologie, et  
vous SOUHAITEZ PARTICIPER à son activité

- soit à titre individuel

- soit en tant qu'organisme collectif ( Laboratoire ou  
Société, Etablissement d'Enseignement, Service d'un grand Etablissement  
public, etc...)

- soit à ces deux titres simultanément

REMP LISSEZ la ou (les) formule(s) de demande d'admission appropriée(s)  
et envoyez la à l'adresse indiquée avec un chèque du montant de votre  
cotisation.

---

Vous voulez EN SAVOIR PLUS avant de prendre une décision, écrivez  
nous à l'adresse ci-dessous :

GRUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE  
Secrétariat Général

C.E.B.T.P.  
12, rue Brancion  
75737 PARIS CEDEX 15

---

### Les Colloques annuels du G.F.R. :

1- Rhéologie des systèmes à 2 phases	1965
2- Aspects énergétiques en Rhéologie	1966
3- Progrès récents des effets du 2ème ordre	1967
4- Rhéologie en relation avec la structure	1968
5- Comportements mécaniques des matériaux composites	1969
6- Influence de la température et de la pression sur les comportements rhéologiques	1970
6bis - Rhéologie et hydrotechnique	1970
7- Viscoplasticité	1971
8- Rhéologie des bétons	1973
9- Phénomènes de surface	1974
10- Influence de la température sur les comportements rhéologiques	1975
11- Rhéologie des corps mous	1976
12- Thermodynamique des comportements rhéologiques	1977
13- Aspects rhéologiques de la mécanique de la rupture	1978
14- Rhéologie des couches minces	1979
15- Comportements rhéologiques et structure des matériaux	1980
16- Applications de la Rhéologie aux problèmes de fabri- cation industrielle	1981
17- Comportements rhéologiques sous sollicitations rapides ou dynamiques	1982
18- Méthodes et Appareils de mesures rhéologiques	1983
19- Rhéologie des matériaux anisotropes	1984

## GRUPE FRANÇAIS DE RHÉOLOGIE

---

La RHEOLOGIE est la science des DEFORMATIONS et ECOULEMENTS de la matière, des CONTRAINTES qui en résultent et des EFFORTS qu'il faut lui appliquer pour les obtenir.

UNIVERSELLE, on la rencontre dans tous les domaines de l'activité humaine, et ses applications vont de la mise en forme des produits industriels quel qu'en soit le matériau, aux comportements de la matière vivante, en passant par la tenue des pneumatiques ou la durabilité des constructions. Son impact économique est donc considérable.

INTERDISCIPLINAIRE, elle fait appel à la MECANIQUE, à la PHYSIQUE, à la CHIMIE, à la BIOLOGIE, qui lui fournissent ses instruments de base, et se montre utile à chacune de ces disciplines.

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF à vocation purement scientifique fondée en 1964 et régie par la loi de 1901, le GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE a pour OBJECTIFS de contribuer au DEVELOPPEMENT des études et recherches relatives à la Rhéologie, et de favoriser la DIFFUSION ou le TRANSFERT des progrès accomplis dans ses diverses branches.

Dans ce but, le Groupe Français de Rhéologie

- organise des REUNIONS où les chercheurs et les industriels peuvent présenter et discuter leurs résultats ou leurs préoccupations ;
- entretient des relations avec le COMITE INTERNATIONAL DE RHEOLOGIE et les SOCIETES DE RHEOLOGIE d'autres pays ;
- organise un COLLOQUE NATIONAL ANNUEL ;
- édite des CAHIERS consacrés aux exposés scientifiques (une cinquantaine de numéros édités à ce jour), et un BULLETIN consacré aux informations courantes ;
- contribue à la clarification du langage par l'établissement d'un DICTIONNAIRE ;
- etc...

Cette activité vous intéresse et vous souhaitez devenir membre :  
SUIVEZ LES INDICATIONS DONNEES AU VERSO

---

Anciens Présidents du G. F. R. :

J. MANDEL (Président Fondateur, 1964-1967)  
M. JOLY (1967-1970), B. PERSOZ (1970-73), P. HABIB (1973-76), R. COURTEL (1976-79)

C. HUET (1979-1983)

Président actuel : J.D. WEBER (1983- )