GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

Comptes rendus du
19e Colloque National Annuel

Centre National de la Recherche Scientifique,
Paris 28, 29, 30 novembre 1984

RHEOLOGIE DES MATERIAUX ANISOTROPES

RHEOLOGY OF ANISOTROPIC MATERIALS

Textes réunis par

Christian HUET, Daniel BOURGOIN et Stéphane RICHEMOND

CEPADUES-EDITIONS

AUX EDITIONS CEPADUES

Bois et Productique	*P. Martin*
Mécanique des solides réels, élasticité – 2e éd.	*J. Duc et D. Bellet*
Problèmes d'élasticité – 2e éd.	*J. Duc et D. Bellet*
Tables de détente ou compression isentropique et table de choc $\gamma = 1{,}400$	*L. Luneau*
Mécanique du matériau bois et composites	*D. Guitard*

En couverture :

Grandes déformations anisotropes des cellules du bois sous l'effet d'une compression isotrope.

Cliché Y. TRENARD, Centre Technique du Bois et de l'Ameublement, Paris (par autorisation).

©CEPAD 1986

I.S.B.N. 2.85428.162.4

Toute reproduction, même partielle de cet ouvrage, est interdite. Une copie ou production par quelque procédé que ce soit, constitue une contrefaçon.

Dépôt légal : Août 1986

N° Editeur : 186

GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

Comptes rendus du
19e Colloque National Annuel

Centre National de la Recherche Scientifique,
Paris 28, 29, 30 novembre 1984

RHEOLOGIE DES MATERIAUX ANISOTROPES

RHEOLOGY OF ANISOTROPIC MATERIALS

Textes réunis par

Christian HUET
Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
Délégué International et Ancien Président du Groupe Français de Rhéologie

Daniel BOURGOIN
Directeur de Recherche au CNRS
Vice-Président du Groupe Français de Rhéologie

Stéphane RICHEMOND
Maître de Conférences à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
Ancien Secrétaire-Adjoint du Groupe Français de Rhéologie

CEPADUES-EDITIONS
111, rue Nicolas-Vauquelin – 31100 Toulouse – FRANCE
Tél. : 61 40 57 36

19e Colloque Annuel du Groupe Français de Rhéologie

COMITE D'HONNEUR
HONORARY COMMITTEE

Jean-Daniel WEBER
Président du Groupe

Maurice JOLY

Bernard PERSOZ

Pierre HABIB

Robert COURTEL
Anciens Présidents du Groupe

COMITE D'ORGANISATION
ORGANIZING COMMITTEE

Président	:	Christian HUET, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris
Vice-Président	:	Daniel BOURGOIN, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris
Secrétaire	:	Stéphane RICHEMOND, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris
Trésorier	:	Jean-Paul BOMBLED, Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie des Liants Hydrauliques, Paris

avec la participation des Elèves de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

Ouvrage publié avec le concours du Ministère de l'Equipement, du Logement, de l'Aménagement du Territoire et des Transports, Direction des Affaires Economiques et Internationales, et de l'Agence Française pour la Maîtrise de l'Energie

AVANT-PROPOS

Les deux parties de cet ouvrage contiennent les comptes rendus du 19e Colloque National Annuel du Groupe Français de Rhéologie, qui s'est tenu à Paris, dans les locaux du Centre National de la Recherche Scientifique, les 28, 29, 30 novembre 1984. Ce colloque, consacré à la Rhéologie des Matériaux Anisotropes, s'inscrivait dans la série des Colloques Annuels du Groupe, dont le premier remonte à 1965 et dont on trouvera la liste en fin de volume. Il a réuni plus d'une centaine de participants, auxquels furent présentés une quarantaine de Conférences ou Communications.

La Première Partie s'ouvre sur une Conférence générale du Professeur J.P. BOEHLER, de l'Université de Grenoble, consacrée aux méthodes générales de représentation des Propriétés des Matériaux Anisotropes. Il se poursuit par les textes de vingt-deux Communications portant sur certains aspects, tant théoriques qu'expérimentaux et allant du statique à l'électrodynamique, de ce type de problèmes, ainsi que sur divers matériaux particuliers tels que solides composites à fibres, fluides polymères chargés, sols renforcés, roches, maçonneries, polycristaux, dont certains manifestent une anisotropie induite par le processus même de la déformation.

La Seconde Partie est entièrement consacrée au matériau bois, matériau anisotrope par nature dont, du fait de son importance économique, l'étude des propriétés mécaniques et rhéologiques connaît actuellement en France un fort développement sous les impulsions conjuguées des Pouvoirs Publics, des Professions et du CNRS. Après la conférence générale en forme de Panorama mondial présentée par le Professeur M. MUDRY, de l'Université d'Orléans, cette partie présente les textes de treize Communications spécifiques à ce matériau.

Le plus grand nombre des Communications présentées dans les deux volumes se rapportent, conformément à la vocation principale des Colloques Nationaux Annuels du Groupe Français de Rhéologie, aux travaux d'équipes françaises. Toutefois, sept Communications proviennent d'équipes d'autres pays : Belgique, Etats-Unis, Pologne, Portugal, que nous remercions pour leur participation.

La publication de cet ouvrage, sous une forme accessible à un large public d'ingénieurs et de scientifiques, n'a été possible que grâce aux concours financiers apportés par le Ministère de l'Equipement, du

Logement, de l'Aménagement du Territoire et des Transports, Direction des Affaires Economiques et Internationales, et par l'Agence Française pour la Maîtrise de l'Energie, auxquels, au nom du Groupe, nous adressons ici nos vifs remerciements.

Nos remerciements et notre gratitude vont également à tous ceux qui nous ont aidés dans la préparation scientifique et matérielle de ce Colloque, et qui ont contribué à son bon déroulement. Citons tout particulièrement la Direction du Centre National de la Recherche Scientifique pour la mise à disposition de locaux bien situés et d'excellente qualité, nos collègues Jean-Paul BOMBLED, Daniel BOURGOIN et Stéphane RICHEMOND qui ont participé aux nombreuses tâches d'organisation, de contacts avec les auteurs ou de collecte des manuscrits. Citons également les Elèves de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées qui, par le canal de Ponts-Etudes-Projets (PEP), leur Junior-Entreprise, apportent depuis maintenant plusieurs années, leur concours efficace pour de nombreuses tâches matérielles, telles que la diffusion des programmes, la préparation des plaquettes de Résumés distribuées aux participants, et l'accueil ou l'aide à ceux-ci tout au long des trois journées du Colloque.

Nous remercions enfin les Editions CEPADUES pour l'intérêt qu'elles ont manifesté à l'édition de cet ouvrage, et pour le soin qu'elles ont apporté à sa réalisation.

Christian HUET

SOMMAIRE
CONTENTS

Comités d'honneur et d'organisation
Honorary and organizing committees 5

Avant-propos 7

L'Agence Française pour la Maîtrise de l'énergie et la Rhéologie du bois matériau
The French Agency for the Mastering of Energy and the Rheology of wood 11

Allocution d'ouverture – *Opening speech*
J.D. WEBER 13

PREMIERE PARTIE : Aspects généraux et matériaux divers
PART ONE : General features and various materials 15

Conférence générale – *Plenary lecture* 17

Anisotropie et comportement rhéologique des matériaux
Anisotropy and rheological behavior of materials
J.P. BOEHLER 19

Communications – *Contributed papers* 51

Lois de comportement des solides anisotropes
Constitutive laws for anisotropic solides
J.P. BOEHLER, J. RACLIN 53

Rhéologie anisotrope en grandes déformations
Anisotropic rheology at finite strain
A. DOGUI, F. SIDOROFF 69

Elastic-wave surfaces in anisotropic media
Surfaces d'ondes élastiques dans des milieux anisotropes
R.D. KRIZ, H.M. LEDBETTER 79

Sur l'électrodynamique des diélectriques élastiques anisotropes non dissipatifs de type intégro-différentiel
About electrodynamics of anisotropic elastic lossless dielectrics of integro-differential type
Ph. BOULANGER, G. MAYNE 93

Problèmes de modélisation du comportement mécanique des composites stratifiés
Problems of modelling of the mechanical behaviour of laminated composites
J. GERALD, J. FRELAT, D. RADENKOVIC 101

Le brisement de la symétrie thermomécanique en milieux anisotropes
The thermomechanical symmetry breaking in anisotropic media
M. FRIAS 115

Comportement viscoélastique non linéaire d'un composite à matrice polymérique sous l'effet d'un champ de contrainte biaxial
Non linear viscoelastic behaviour of a polymeric matrix composite in biaxial loading conditions
R. BROUWER, C. HIEL, A. CARDON 121

Hétérogénéité des champs de contraintes et de déformations dans les matériaux anisotropes
Heterogeneity of stress and strain fields in anisotropic materials
J.P. BOEHLER, L. EL AOUFI 131

Influence de la matrice sur la tenue à long terme des composites carbone-résine
Role of the matrix on the long term behavior of carbon-fiber-reinforced-epoxy resin
B. PONSOT, D. VALENTIN, A.R. BUNSELL 151

Etude de l'influence du biseautage des extrémités des substrats, sur le comportement mécanique d'un composite plan collé, sollicité à l'essai de cisaillement par traction
Analysis of the influence of scarfing of the ends of the adherends on the mechanical behaviour of a bonded plane composite, undergoing shear by the mean of a traction force
Y. GILIBERT 165

Etude expérimentale et théorique de l'orientation de fibres dans des écoulements de polymères chargés
Experimental and theoretical study of fiber orientation in reinforced plastics flows
M. VINCENT, J.F. AGASSANT 189

Birefringence de solutions de particules rigides à la transition régime laminaire – tourbillons de Taylor
Birefringence of solutions of rigid particles at the transition laminar – Taylor vortex flow
J.-P. DECRUPPE, R. HOCQUART, R. CRESSELY, T. WYDRO 199

Rhéologie des solutions d'hydroxypropylcellulose
Rheology of hydroxypropylcellulose solutions
P. NAVARD, J.-M. HAUDIN 205

Influence de l'anisotropie sur le comportement rotationnel de la kaolinite
The effect of anisotropy on the behaviour of a kaolin in rotational kinematic paths
Y. GOLCHECH 217

Propagation de fissure en mode II dans le schiste ardoisier
Mode crack propagation in a slaty schist
G. VALENTIN, H. LAQUECHE 235

Etude de l'anisotropie liée à la microfissuration des roches sédimentaires
Analysis of the anisotropy related to induced microcracks in sedimentary rocks
M. THIERCELIN 245

Etude du comportement de la maçonnerie sous sollicitations biaxiales irrotationnelles
The behaviour of masonry under biaxial irrotational stresses
R. SHAAN, J.-M. TORRENTI 261

Plasticité des matériaux polycristallins en chargements complexes

Plasticity of metallic polycrystals under complex loading path
C. BERADAI, M. BERVEILLER 273

Effective elastic properties of materials with inclusions
Propriétés élastiques effectives des matériaux à inclusions
H.M. LEDBETTER, S.K. DATA 291

Recherches sur l'évaluation des propriétés macroscopiques des matériaux hétérogènes viscoélastiques anisotropes
Researches on the evaluation of macroscopic properties of anisotropic heterogeneous materials with viscoelastic constituents
S. CHETOUI, P. NAVI, C. HUET 307

Approche de l'écrouissage textural des métaux aux grandes vitesses de déformations
Approach to the texture hardening of metals at high strain rates
G.R. CANOVA, A. MOLINARI, C. FRESSENGEAS 327

Ecrouissage anisotrope et courbes limites de formage
Anisotropic hardening and forming limit diagrams
D. DUDZINSKI, A. MOLINARI 339

DEUXIEME PARTIE : Le bois matériau
PART TWO : Wood as a material 349

Conférence générale – *Plenary lecture* 351

Panorama des travaux scientifiques mondiaux sur la mécanique et la rhéologie du bois
Survey of world scientific works on mechanics and rheology of wood
M. MUDRY 353

Communications – *Contributed papers* 411

Symétries matérielles du matériau bois : données morphologiques et conséquences physiques
Material symmetries in wood : morphological data and physical consequences
C. LE GOVIC, Y. TRENARD, C. HUET 413

Influence de l'orthotropie locale sur le comportement de poutres curvilignes massives
Influence of local orthotropy on the behaviour of curvilinear solid beams
J.-L. NIETO, M. MUDRY 427

Etude expérimentale de l'influence du taux d'humidité sur l'élasticité du bois
Experimental study of the effect of moisture on the elasticity of wood
J. LAUNAY, M. MUDRY, G. GILETTA 443

Anisotropy of dynamic wood viscoelasticity
Anisotropie de la viscoélasticité dynamique du bois
S. POLISZKO 453

Creep of wood forced by pulsating stress
Le fluage du bois sous chargement pulsatoire
W. KOKOCINSKI, S. POLISZKO, J. RACZKOWSKI 461

La vitesse des ultrasons et la qualité du bois
Ultrasonic velocity and wood quality
V. BUCUR 469

Détermination de la matrice élastique du bois dans la modélisation orthorhombique par une méthode statique de compression sur cylindres
Determination of the elastic matrix of wood in orthorhombic modelization by a static compression method on cylinders
A. HADJ HAMOU, P. BEGE, B. FELIX, M. AVALE 485

Conception d'une éprouvette pour la détermination de la résistance à la traction longitudinale du bois
Design of a specimen for the determination on tensile strength of wood parallel to grain
B. FELIX, A. HADJ HAMOU, C. HUET 501

Durée de vie en fissuration du pin maritime
Crack propagation and life time of wood
A.G. D'ALMEIDA, P. MORLIER 515

Propagation dynamique d'une fissure dans un matériau orthotrope : le bois
Dynamic crack propagation in an orthotropic material : the wood
A. ALLAILI, P. JODIN, G. PLUVINAGE 527

Problèmes rhéologiques dans la modélisation du séchage d'un bois résineux
Rheological problems in models of softwood drying
J.-C. RAZAFINDRAKOTO, G. VALENTIN 543

Les contraintes résiduelles dues au séchage : leur calcul, leur mesure et les conséquences sur la conduite des séchoirs
Residual stresses induced by drying : mathematical model, measure and consequences on the drying process
C. SALES, P. BORDONNE 561

Contribution à l'étude de la fissuration du bois sous l'effet des contraintes de séchage
Contribution at the study of the effect of drying stress on fracture toughness of wood
D. BAJOLET, N. SOBUE, G. PLUVINAGE 577

Liste des participants au 19e colloque du G.F.R. 587

Les Colloques annuels du G.F.R. 589

Le Groupe Français de Rhéologie 591

L'Agence Française pour la Maîtrise de l'Energie et la Rhéologie du bois matériau

The French Agency for the Mastering of Energy and the Rheology of wood

Le bois est un matériau éminemment anisotrope. Son étude se situe donc en plein dans le thème auquel ce Colloque est consacré.

Lors de sa création en 1982, l'Agence Française pour la Maîtrise de l'Energie a reçu pour mission de favoriser, non seulement l'utilisation rationnelle de l'énergie, mais aussi d'encourager les économies de matières premières. C'est dans ce but qu'elle a mis en œuvre, avec les industriels, avec les centres de recherches et les centres techniques, un ensemble d'actions visant à économiser les métaux non ferreux et à mieux utiliser le bois.

De grands progrès restent toutefois à accomplir pour mieux utiliser les bois ou les matériaux dérivés du bois. Grâce aux efforts de reboisements réalisés depuis 1945, avec l'aide du Fonds Forestier National, la récolte annuelle du bois de sciages résineux pourra doubler d'ici l'an 2000.

Il convenait alors d'établir, pour nos principales essences, des tables de classement des bois associés aux caractéristiques mécaniques, afin d'optimiser l'utilisation des bois ainsi produits. C'est pourquoi l'Agence Française pour la Maîtrise de l'Energie, en collaboration avec les Ministères chargés de la Forêt et du Logement, et avec la profession, a fortement appuyé le Centre Technique du Bois dans l'établissement de celles-ci. Les cahiers techniques (123 et 124) parus en 1984 concernaient le peuplier et les principaux résineux. D'autres suivront, notamment pour le Douglas.

Puis viendra sans doute le temps du classement des sciages par machines. Mais tout nouveau progrès dans ce domaine dépendra largement des recherches sur les comportements du bois. Il nous paraissait donc souhaitable que les comptes rendus de ce colloque sur les matériaux anisotropes, et en particulier sur le bois, soient, non seulement édités, mais encore connaissent une diffusion suffisante pour permettre à d'autres chercheurs de s'intéresser à ce domaine. C'est dans ce but que l'AFME a apporté son soutien financier à cette édition.

Arthur RIEDACKER
Directeur de Recherche à l'Institut National de la Recherche Agronomique
INRA
Chargé de la filière bois
à l'Agence Française pour la Maîtrise de l'Energie

ALLOCUTION D'OUVERTURE
OPENING SPEECH

Jean-Daniel WEBER
Président du Groupe Français de Rhéologie
President of the French Group of Rheology

Mes chers Collègues,

J'ai l'honneur d'ouvrir notre colloque annuel du Groupe Français de Rhéologie consacré à la Rhéologie des Matériaux Anisotropes. Ce colloque est celui du 20e anniversaire de la fondation du Groupe Français de Rhéologie par Jean MANDEL.

Je tiens à remercier Messieurs HUET, BOURGOIN, RICHEMOND, BOMBLED, qui ont organisé ce colloque avec beaucoup de compétence, ainsi que les élèves de l'E.N.P.C. Je tiens à remercier également la direction générale du CNRS qui a mis à notre disposition cette magnifique salle de conférences.

Le thème du colloque a été choisi en raison des nombreuses recherches qui se développent sur les matériaux anisotropes tels que le bois, les composites, les métaux laminés ou forgés, les sols, les roches et également certains fluides.

Le comportement du corps anisotrope peut être élastique, viscoélastique, plastique ou viscoplastique, les déformations infiniment petites ou finies.

On sait que pour décrire le comportement du corps élastique linéaire le plus général, il faut 21 coefficients d'élasticité.

Pour le corps viscoélastique linéaire le plus général, il faut 21 fonctions.

C'est-à-dire combien ces représentations sont difficiles à mettre en œuvre.

Heureusement, les cas d'orthotropie sont fréquents et réduisent ces difficultés.

Par contre, ces difficultés s'accroissent considérablement pour les comportements non linéaires et les grandes déformations.

En relation avec l'anisotropie des sols, je voudrais évoquer certains travaux de Pierre DANTU qui a dirigé mes premières recherches et a mis en évidence de façon remarquable, il y a une vingtaine d'années, l'anisotropie d'un milieu granulaire constitué par un empilement de cylindres de pyrex observé en lumière polarisée et soumis à deux contraintes principales de compression inégales.

Notre colloque comprendra une conférence générale et deux communications sur la théorie des lois de comportement des solides anisotropes.

Il comprendra 15 communications sur le bois, 4 communications sur les composites, 4 communications sur les sols, 2 communications sur les roches, 3 communications sur les métaux, 1 communication sur la biréfringence d'écoulement, et 8 communications diverses allant de la thermodynamique des milieux anisotropes aux ondes de surface dans ces milieux.

Le nombre élevé de communications à ce colloque montre combien le domaine de recherches sur les matériaux anisotropes est vivant et suscite de l'intérêt.

Les échanges d'idées que nous aurons ces jours-ci porteront certainement leurs fruits. Je vous souhaite de passer trois journées agréables et enrichissantes.

PREMIERE PARTIE

ASPECTS GENERAUX ET MATERIAUX DIVERS

FIRST PART

GENERAL FEATURES AND VARIOUS MATERIALS

1.1 Conférence générale

1.1 Plenary lecture

par – *by*

J.P. BOEHLER

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 19-50

CONFERENCE GENERALE
PLENARY LECTURE

Anisotropie et comportement rhéologique des matériaux
Anisotropy and rheological behavior of materials

J.P. BOEHLER

Institut de Mécanique de Grenoble
GRECO « Grandes Déformations et Endommagement »
B.P. n° 68, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex

RESUME

L'objet de cette conférence générale introductive est de présenter les concepts et les problèmes liés à la prise en compte de l'anisotropie dans l'étude du comportement rhéologique des matériaux.

Dans une première partie, nous abordons brièvement les origines de l'anisotropie macroscopique, c'est-à-dire de la variation de la réponse d'un matériau suivant l'orientation des sollicitations imposées. Ces origines résident dans le caractère orienté des structures internes des matériaux, dû aux modes de formation ou aux processus de fabrication (anisotropie initiale) ; au cours des déformations irréversibles, les structures internes sont modifiées et provoquent une évolution de l'anisotropie des propriétés macroscopiques (anisotropie induite). Des résultats expérimentaux concernant le comportement mécanique des aciers laminés montrent la complexité des phénomènes observés.

Dans la deuxième partie, nous considérons les propriétés physiques et mécaniques s'exprimant par des lois linéaires, à l'aide de tenseurs de différents ordres. Ces tenseurs doivent prendre en compte l'anisotropie, ainsi que les symétries matérielles du corps considéré. Les conséquences des symétries matérielles sur les propriétés d'invariance des tenseurs exprimant les lois linéaires sont présentées succinctement.

La troisième partie constitue une introduction élémentaire à la formulation invariante des lois de comportement anisotropes non-linéaires. Deux problèmes fondamentaux sont abordés : quelle est la forme générale invariante d'une loi de comportement anisotrope, c'est-à-dire une forme telle que les symétries matérielles du corps considéré soient automatiquement vérifiées ; quelles sont les variables essentielles, c'est-à-dire les variables indépendantes devant être observées au cours des études expérimentales, afin de pouvoir identifier la loi pour chaque matériau et chaque comportement considérés.

Dans la dernière partie, nous présentons les difficultés, spécifiques aux matériaux anisotropes, de l'étude expérimentale de leur comportement rhéologique. Ces difficultés apparaissent lorsque les directions principales de la sollicitation ne coïncident pas avec les axes de symétrie de la structure matérielle ; dans ce cas, les directions principales des contraintes et des déformations ne sont pas confondues et les essais classiques produisent des champs de contraintes et de déformations fortement non homogènes.

ABSTRACT

The aim of this introductory general lecture is to present the concepts and problems which appear when taking into account the anisotropy in the study of the rheological behavior of materials.

In the first part, we consider concisely the origins of the macroscopic anisotropy, i.e. of the variation of the material response with the orientation of the imposed agencies. These origins lie in the oriented character of the material internal structures, which is due to the formation modes or manufacturing processes (initial anisotropy) ; during irreversible deformations, the internal structures are modified and produce an evolution of the anisotropy of the macroscopic properties (induced anisotropy). Experimental results concerning the mechanical behavior of rolled steel show the complexity of the observed phenomena.

In the second part, we consider physical and mechanical properties, which are expressed by linear laws with the help of tensors of different orders. These tensors must take into account the anisotropy, as well as the material symmetries of the considered body. The consequences of the material symmetries on the invariance properties of the tensors expressing the linear laws are succinctly presented.

The third part constitutes an elementary introduction to the invariant formulation of non-linear anisotropic constitutive laws. Two fundamental problems are considered : what is the general invariant form of an anisotropic constitutive law, i.e. a form such that the material symmetries of the considered body are automatically satisfied ; what are the essential variables, i.e. the independant variables which have to be observed during experimental studies in order that the law can be identified for each considered material and behavior.

In the last part, we present the specific difficulties of the experimental studies of the rheological behavior of anisotropic materials. These difficulties arise when the principal directions of the imposed agency do not coincide with the axes of symmetry of the material structure ; in this case, the principal directions of the stress and strain tensors are not the same and the classical testing procedures produce strongly non-homogeneous strain and stress fields.

1 - ANISOTROPIE DES MATERIAUX : ORIGINES ET OBSERVATIONS EXPERIMENTALES

1.1 - Définition de l'anisotropie des propriétés physiques et rhéologiques

Une définition usuelle de l'anisotropie des propriétés physiques ou rhéologiques d'un matériau peut s'énoncer comme suit :

> Variation de la réponse (physique ou rhéologique) du matériau suivant l'orientation, par rapport au matériau, des sollicitations imposées.

Selon cette définition, l'anisotropie concerne les propriétés résultant d'une réponse à des sollicitations exprimées par des grandeurs vectorielles ou tensorielles, pour lesquelles une orientation peut être définie. Il convient de remarquer que si la sollicitation est exprimée par un tenseur isotrope, pour lequel aucune orientation n'est définie, la réponse du matériau peut révéler le caractère anisotrope de la propriété étudiée ; un exemple est donné par les déformations irréversibles à déviateur non nul d'une roche stratifiée soumise à des contraintes isotropes [1] ; cependant, une série de tests sous sollicitations isotropes ne permet pas de déterminer entièrement toutes les caractéristiques de l'anisotropie d'une propriété physique ou rhéologique.

Lorsque la variation de la réponse du matériau ne suit aucune règle, l'anisotropie de la propriété est appelée "anisotropie la plus générale" ; en réalité, ce cas est assez rare. Le plus souvent, la variation de la réponse du matériau présente certaines symétries ; d'une façon plus précise, pour une même position du corps, lorsque la sollicitation est transformée par une certaine transformation orthogonale, la réponse subit la même transformation. L'ensemble de ces transformations constitue un sous-groupe orthogonal $\mathcal{G}$, qui caractérise le type de l'anisotropie de la propriété étudiée ; évidemment, si $\mathcal{G}$ est identique au groupe orthogonal complet $\mathcal{O}$, la propriété est isotrope. Nous reviendrons sur les différents types d'anisotropie dans le § 1.2. ci-dessous.

L'expression "matériau anisotrope" est ambiguë et prête à confusion. Cette expression peut désigner aussi bien l'anisotropie des propriétés physiques ou rhéologiques du matériau, que l'anisotropie de ses structures internes. Ces deux notions sont intimement liées, l'une étant le résultat de l'autre (cf. § 1.2). Cependant, il est nécessaire de les distinguer, car le type de l'anisotropie d'une propriété physique ou rhéologique n'est pas nécessairement celui de la structure interne du matériau ; il peut même arriver qu'une propriété soit isotrope, alors que la structure interne du matériau est anisotrope (cf. § 2). Même si l'on précise "matériau à propriétés physiques ou rhéologiques anisotropes" ou "matériau à structure interne anisotrope", l'expression reste ambiguë. En effet, pour un même matériau, le type de l'anisotropie peut varier suivant la propriété considérée ; de plus, un matériau peut être anisotrope pour certaines propriétés et isotrope pour d'autres (cf. § 2). De même, le type de l'anisotropie de la structure interne dépend de l'échelle observée ; les structures internes d'un même matériau peuvent être anisotropes à une certaine échelle et isotropes à une autre. Pour lever ces ambiguïtés, il faudrait donc préciser chaque fois quelle propriété physique ou rhéologique est considérée ou quelle structure interne est observée et à quelle échelle. Cependant, l'expression "matériau anisotrope" est commode et le contexte dans lequel elle est utilisée permet le plus souvent de comprendre quelle notion précise est considérée. C'est pourquoi nous l'utiliserons parfois dans la suite de notre texte.

1.2 - Origines de l'anisotropie initiale

L'anisotropie initiale des propriétés physiques ou rhéologiques est celle qui résulte des processus de formation des matériaux naturels (sols, sables, roches, bois, tissus vivants mous, os, etc.) ou des procédés de fabrication des matériaux artificiels (métaux, eutectiques, matériaux composites, etc.). L'origine de l'anisotropie initiale réside dans les répartitions non-aléatoires ou les orientations préférentielles des différentes structures internes du matériau

(structures internes anisotropes).

Les notions de structures internes anisotropes et d'hétérogénéités pour un matériau sont intimement liées, l'une étant une conséquence de l'autre. Lorsqu'on descend dans l'échelle du volume considéré, un matériau présente toujours des hétérogénéités (échelle "microscopique"). Si à l'échelle de ces hétérogénéités, l'organisation des structures internes n'est pas aléatoire, mais suit des règles géométriques précises, alors à l'échelle "macroscopique", c'est-à-dire à l'échelle d'un volume grand par rapport aux hétérogénéités "microscopiques", le matériau peut être considéré comme un corps homogène et anisotrope. En réalité, un matériau peut présenter des anisotropies de structure à différents niveaux, les notions d'échelle microscopique et d'échelle macroscopique étant relatives à la nature des hétérogénéités considérées ; une échelle macroscopique correspondant à des hétérogénéités à un certain niveau peut devenir l'échelle microscopique pour des hétérogénéités situées à un niveau plus élevé. Considérons par exemple un matériau polycristallin monophasique. A l'échelle de quelques atomes, le matériau est hétérogène ; à l'échelle d'un grain, le matériau peut être considéré comme un corps homogène et anisotrope, l'anisotropie étant due à la répartition régulière des atomes suivant le réseau de la maille atomique. A l'échelle de quelques grains, le matériau est hétérogène ; à l'échelle du polycristal, le matériau peut être considéré comme un corps homogène et anisotrope, l'anisotropie, par exemple du type morphologique, étant due aux orientations préférentielles des grains.

Finalement, une anisotropie de structure est toujours la conséquence de l'existence d'une hétérogénéité ; le passage du matériau hétérogène au matériau homogène et anisotrope résulte d'un changement d'échelle, qui peut être réalisé à différents niveaux. Une discussion sur l'anisotropie d'un matériau et ses origines structurales est donnée dans [2].

Il existe différents types d'anisotropies structurales ; elles peuvent être classées en anisotropies des structures morphologiques, anisotropies des structures cristallographiques et anisotropies des discontinuités [3].

Parmi les matériaux présentant des anisotropies de structures morphologiques, on peut distinguer trois types :

a) matériaux monophasiques, dont les particules élémentaires présentent une anisotropie de forme : grains allongés dans une tôle d'acier laminé (Figure 1), particules de feldspath allongées dans un gneiss, particules plates de kaolinite dans une argile, molécules allongées dans les cristaux liquides, etc. Le degré de l'orientation privilégiée de la structure interne peut être quantifié par la mesure des orientations des axes géométriques principaux des particules [4]. Considérons par exemple un kaolin consolidé à l'oedomètre, dont l'arrangement des particules est de révolution autour de la direction de consolidation (anisotropie morphologique du type orthotrope de révolution [5,6]). Le plan cristallographique (001) de la kaolinite étant parallèle aux faces de la particule, la mesure de l'orientation de ce plan fournit une mesure de l'orientation de la particule. Dans une analyse aux rayons X, sur une surface dont la normale fait un angle θ avec la direction de la consolidation, l'intensité du faisceau diffracté est proportionnelle au nombre de particules parallèles à la surface analysée [5,6]. La Figure 2 présente les intensités relatives I_θ / I_o des pics des raies (001) et (002) en fonction de l'orientation θ ([7]).

b) matériaux à particules statistiquement arrondies : sables, matériaux granulaires, certaines roches, métaux à grains équiaxes, etc. Pour ces matériaux, l'orientation des particules élémentaires ne peut plus être définie, mais leur arrangement peut présenter un caractère non-aléatoire. Cette anisotropie de l'arrangement des particules peut être caractérisée par la mesure des orientations des plans de contact ([4], [8], [9]).

c) matériaux multiphasiques, pour lesquels l'anisotropie morphologique

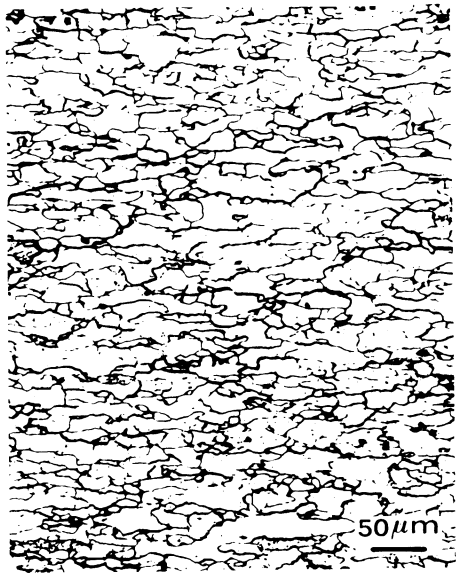


Fig. 1 - Grains allongés dans une tôle mince d'acier extra doux laminée à froid et recuite (d'après [10]).

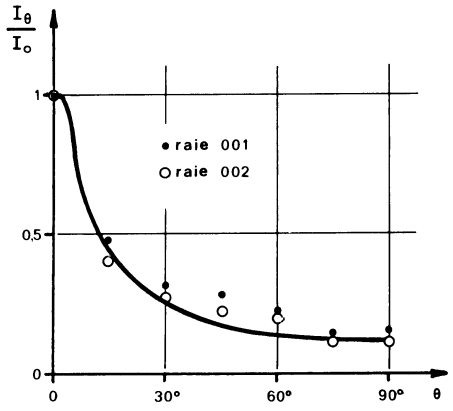


Fig. 2 - Anisotropie des intensités des raies de diffraction X dans un kaolin (d'après [7]).

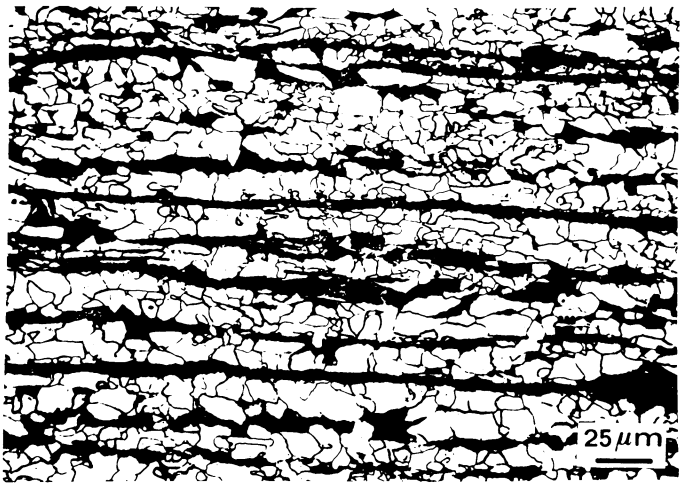


Fig. 3 - Structure en bande dans un acier 18 M 5 Nb brut de laminage à chaud (d'après [10]). La ferrite est en blanc, la perlite en noir.

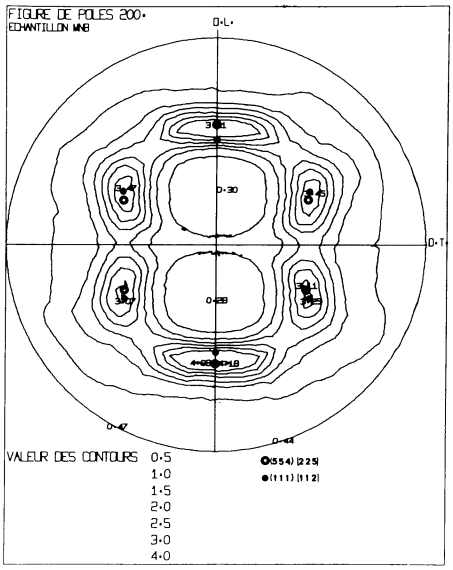


Fig. 4 - Figure de pôles {200} montrant la texture cristallographique d'une tôle d'acier extra doux contenant du Nobium (d'après [10]).

résulte de la répartition non-aléatoire des différentes phases : structure en bande dans les aciers laminés à chaud (Figure 3), orientation privilégiée des inclusions (par exemple inclusions de sulfure de manganèse dans les aciers [10]), orientation privilégiée des fibres dans les matériaux composites et renforcés, répartition des différentes phases dans une roche, etc. Pour les métaux et les roches, par exemple, la mesure du degré de cette anisotropie morphologique relève des observations micrographiques et des méthodes d'analyse développées dans le cadre de la "Morphologie Mathématique" [11,12].

Les anisotropies des structures cristallographiques résultent des orientations préférentielles des axes cristallographiques des différents grains dans les matériaux polycristallins. Dans une roche, ces orientations préférentielles sont définies par celles des axes optiques des grains [13] ; dans un métal, elles sont définies par l'orientation d'un trièdre lié à chaque monocristal [14]. La quantification des anisotropies cristallographiques peut être obtenue par la détermination des fonctions de répartition des orientations cristallographiques [15]. Une représentation de ces fonctions peut être réalisée sous la forme de figures de pôles, obtenues par diffraction des rayons X ou des neutrons (Figure 4).

Les anisotropies des discontinuités concernent différents phénomènes et différentes échelles d'observation : cellules de dislocations dans les métaux [16] ; microfissures, schistosité, failles, plans de stratification dans les roches [13] ; délaminage dans les matériaux composites ; fissures et cavités dans les métaux ; etc. Ces discontinuités présentent généralement des orientations privilégiées très prononcées.

Finalement, dans un même matériau, plusieurs anisotropies structurales peuvent exister, soit à la même échelle, soit à des échelles différentes. Pour un polycristal, les anisotropies des structures morphologiques et cristallographiques, résultant des orientations non-aléatoires des constituants, sont parfois désignées sous les termes de textures morphologiques et textures cristallographiques.

Les différentes origines de l'anisotropie macroscopique initiale sont regroupées dans le tableau ci-dessous. Dans ce tableau, nous n'avons pas mentionné les anisotropies des discontinuités, qui peuvent se présenter pour tous les types de matériaux.

Matériaux	Echelle de l'hétérogénéité	Origine de l'anisotropie macroscopique
Monocristaux	atomes	répartition régulière suivant le réseau atomique.
Polycristaux (métaux, roches, sables, argiles, etc.)	grains, plaquettes, lamelles, etc. } constituants	*orientations non-aléatoires des constituants ⇒ textures morphologiques et cristallographiques. *répartition non-aléatoire des grains statitiquement arrondis ou des différentes phases.

Matériaux	Echelle de l'hétérogénéité	Origine de l'anisotropie macroscopique
Matériaux fibreux (composites, os, cristaux liquides nématiques, bois, etc.)	fibres molécules allongées	orientation privilégiée des fibres ou molécules.
Matériaux stratifiés (composites, roches, cristaux liquides smectiques, etc.)	strates	orientation privilégiée des strates.

Lorsque les caractéristiques d'une anisotropie structurale (orientation ou répartition des constituants) varient dans l'espace en ne suivant aucune règle précise, elle est appelée "anisotropie la plus générale". Cependant, comme pour les anisotropies des propriétés physiques et rhéologiques, ce cas est assez rare. Le plus souvent, les structures internes matérielles présentent des symétries, c'est-à-dire qu'il existe des transformations orthogonales telles que les configurations du matériau avant et après transformation ne peuvent être distinguées pour la structure interne considérée. L'ensemble de ces transformations constitue un sous-groupe orthogonal $\mathcal{G}$, qui caractérise le type de l'anisotropie de la structure interne. Les relations entre le sous-groupe $\mathcal{G}$ et le sous-groupe $\mathcal{G}_{\mathcal{E}}$ caractérisant le type de l'anisotropie des propriétés physiques ou rhéologiques (cf § 1.1) seront évoquées dans le paragraphe 2.

Les propriétés de symétries matérielles des monocristaux conduisent à la considération de trente-deux classes cristallines, chacune étant définie par un groupe fini $\mathcal{G}$ de transformations orthogonales. Ces groupes de transformations sont présentées dans [17] par exemple ; les propriétés physiques des cristaux sont décrites dans [18].

Sur le plan macroscopique, les structures internes des matériaux polycristallins, fibreux et stratifiés admettent le plus souvent une seule direction privilégiée $\underset{\sim}{v}$, ou trois directions privilégiées ($\underset{\sim}{v}_1$, $\underset{\sim}{v}_2$, $\underset{\sim}{v}_3$), deux à deux orthogonales (Figure 5).

Dans le premier cas, l'anisotropie de structure est du type orthotrope de révolution, le groupe caractéristique étant donné par :

$$\mathcal{G} = \left\{ \pm \underset{\sim}{I},\ \underset{\sim}{S}_1 ,\ \underset{\sim}{S}_2 ,\ \underset{\sim}{S}_3 ,\ (\underset{\sim}{M}_\alpha ,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi) \right\} \qquad (1)$$

ou $\underset{\sim}{I}$ est la transformation identité, $\underset{\sim}{S}_1$ la symétrie par rapport au plan orthogonal à $\underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{S}_2$ et $\underset{\sim}{S}_3$ les symétries par rapport à deux plans orthogonaux quelconques parallèles à $\underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{M}_\alpha$ toutes les rotations autour de $\underset{\sim}{v}$.

Dans le deuxième cas, l'anisotropie de structure est du type orthotrope, le groupe caractéristique étant donné par :

$$\mathcal{G} = \left\{ \pm \underset{\sim}{I} ,\ \underset{\sim}{S}_1 ,\ \underset{\sim}{S}_2 ,\ \underset{\sim}{S}_3 \right\} \qquad (2)$$

où $\underset{\sim}{S}_1$, $\underset{\sim}{S}_2$, $\underset{\sim}{S}_3$ sont les symétries par rapport aux plans de normales respectives $\underset{\sim}{v}_1$, $\underset{\sim}{v}_2$ et $\underset{\sim}{v}_3$.

Une description complète des groupes de symétries matérielles et de leurs effets sur l'anisotropie du comportement mécanique des "corps matériellement simples" est donnée dans [3].

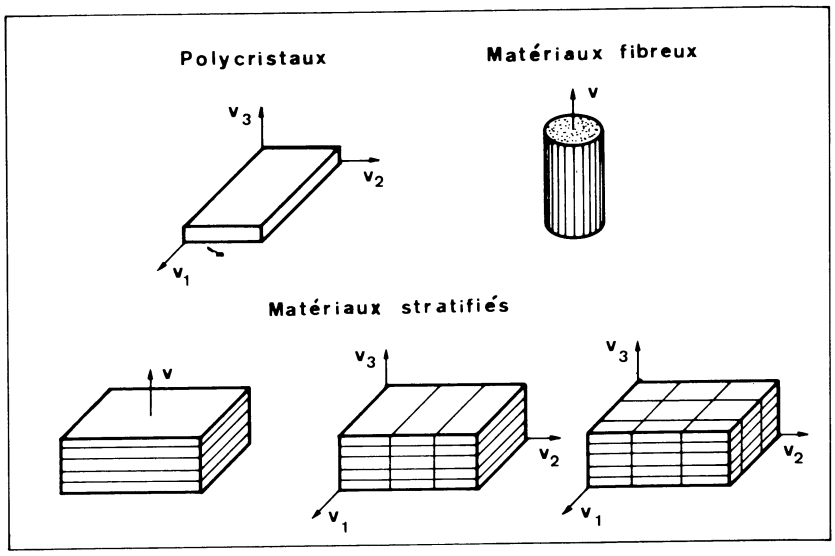


Fig. 5 - Symétries matérielles des polycristaux, des matériaux fibreux et des matériaux stratifiés.

1.3 - Anisotropie induite

Lorsqu'un matériau subit des déformations irréversibles (déformations des roches par mouvements tectoniques, opérations de mise en forme des métaux, déformations des structures, etc.), les structures internes sont modifiées : réorientation des particules, évolution de la répartition des grains statistiquement arrondis ou des différentes phases, glissements relatifs des strates avec changement de direction, etc. Il apparaît ainsi une anisotropie de structure induite, évoluant avec la déformation irréversible et se superposant à l'anisotropie de structure initiale. Cette superposition de l'anisotropie initiale et de l'anisotropie induite évolutive peut résulter en une anisotropie très générale, lorsque les directions privilégiées des deux types d'anisotropies ne coïncident pas [19]. Pour certains matériaux, comme par exemple les sables [20] et les argiles [21,22], si les déformations irréversibles sont assez grandes et si leurs directions principales gardent une orientation constante par rapport au matériau, l'anisotropie induite peut effacer entièrement l'anisotropie initiale ; dans ce cas, on obtient généralement une orthotropie évolutive [19].

L'évolution de l'anisotropie de structure au cours des déformations irréversibles résulte en une évolution de l'anisotropie des propriétés physiques ou rhéologiques du matériau, appelée écrouissage anisotrope. Nous verrons au paragraphe 1.4 ci-dessous, sur l'exemple d'un acier laminé, que les phénomènes liés à l'écrouissage anisotrope sont très complexes. Pour la modélisation de ces phénomènes, différentes lois ont été proposées [23] ; elles ne permettent pas en général de décrire toute la complexité des phénomènes observés. Dans le cadre de la théorie des représentations des fonctions tensorielles (cf. § 3 ci-dessous), une formulation rationnelle et générale de l'écrouissage anisotrope a été proposée dans [24].

Lorsque les déformations irréversibles sont assez importantes, des fissures et des cavités apparaissent dans la structure interne du matériau : c'est le phénomène de l'endommagement, qui conduit à la rupture du matériau ([25,26]). Le

plus souvent, ces fissures et cavités présentent des orientations préférentielles très prononcées (endommagement anisotrope). Les effets de l'endommagement anisotrope sur le comportement mécanique des solides ont été étudiés dans les références [27-31].

1.4 - Caractéristiques essentielles du comportement mécanique des matériaux à écrouissage anisotrope

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques caractéristiques essentielles du comportement mécanique anisotrope d'un acier laminé, ainsi que de l'évolution du comportement anisotrope au cours des déformations irréversibles (écrouissage anisotrope). Cette analyse permet de mettre en évidence la complexité des phénomènes observés, et en particulier leur caractère non-linéaire. Nous considérons trois questions.

a) Qu'est-ce que l'anisotropie mécanique ?

Sur la Figure 6, nous présentons schématiquement les courbes contraintes-déformations généralement observées pour des échantillons orientés d'acier laminé, soumis à des essais de traction simple ; L est la direction du laminage, θ l'angle entre la direction L et la direction de la traction. La figure présente les courbes obtenues dans la direction du laminage ($\theta = 0$), la direction transverse ($\theta = 90°$) et à 45° de la direction du laminage. Les caractéristiques essentielles sont les suivantes :

- la contrainte-limite dans la direction transverse est plus élevée que dans la direction du laminage, mais inférieure à celle dans la direction intermédiaire à 45°.
- les déformations correspondant aux différentes contraintes-limites varient avec l'orientation des échantillons.
- pour le comportement élastique, nous observons que le matériau est plus rigide dans les directions pour lesquelles la contrainte-limite est plus faible ; ce phénomène semble être assez général pour les matériaux anisotropes : il a été observé également pour une argile consolidée [7] et une roche stratifiée [34].

Nous pouvons déjà conclure que la description de ces phénomènes anisotropes n'est pas simple : il n'existe aucune règle a priori pour les variations de la rigidité, de la contrainte-limite et de la déformation correspondante ; de plus, ces trois variations sont généralement indépendantes et fortement non-linéaires.

Sur la Figure 7, nous présentons schématiquement l'évolution de la contrainte-limite en fonction de l'orientation θ des éprouvettes. Dans le cas isotrope, nous avons évidemment une droite horizontale. Dans le cas anisotrope, plus la courbe s'éloigne de la droite horizontale, plus le degré de l'anisotropie est prononcé.

b) Comment l'anisotropie du comportement mécanique évolue-t-elle au cours du laminage à froid ?

Sur la Figure 8, nous présentons des résultats expérimentaux ([32,33]) concernant le critère de rupture en traction simple pour des échantillons d'un même acier, soumis initialement à trois différents taux de réduction au laminage : r = 5%, 10% et 15%. Nous observons que l'anisotropie croît avec le taux de réduction au laminage (les courbes s'éloignent de plus en plus d'une droite horizontale), mais il n'existe aucune relation simple entre les trois courbes-limites. L'évolution du critère est non-linéaire ; il en est de même pour l'évolution des orientations correspondant aux contraintes-limites maximales (courbe en tirets).

Une autre façon d'étudier l'évolution de l'anisotropie du critère est présentée sur la Figure 9, qui montre l'évolution des contraintes-limites dans la direction du laminage, la direction transverse et à 45°, en fonction du taux de réduction au laminage. Dans le cas isotrope, les trois courbes coïncideraient ;

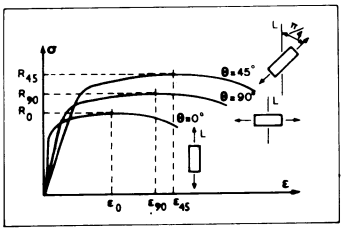


Fig. 6 - Caractéristiques essentielles du comportement anisotrope d'un acier doux laminé.

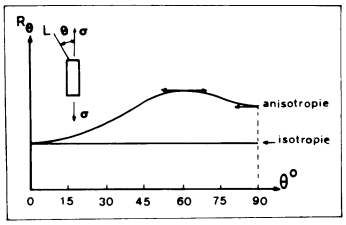


Fig. 7 - Critère anisotrope en traction simple.

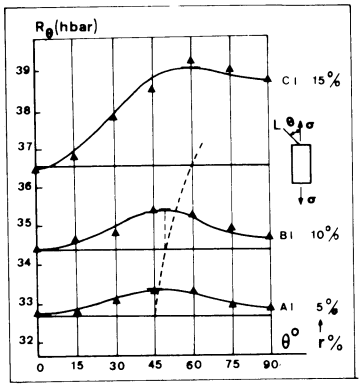


Fig. 8 - Evolution du critère avec le taux de réduction au laminage.

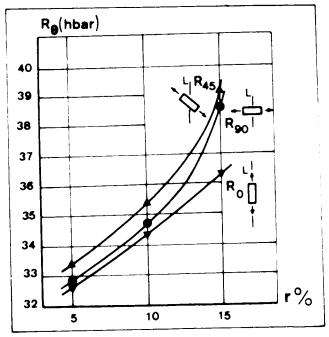


Fig. 9 - Evolution des contraintes-limites directionnelles avec le taux de réduction au laminage.

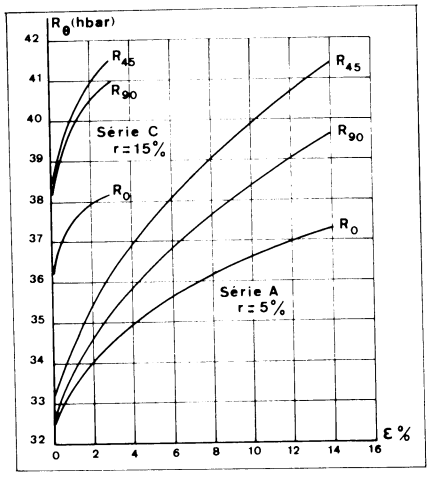


Fig. 10 - Evolution des contraintes-limites directionnelles pour une tôle laminée soumise à des prédéformations irréversibles.

dans le cas anisotrope, nous observons qu'elles présentent des allures nettement différentes et qu'il n'existe aucune relation simple entre elles.

c) Comment le comportement mécanique anisotrope d'un acier laminé évolue-t-il lorsqu'il est soumis à des déformations irréversibles (prédéformations) ?

Sur la Figure 10, nous présentons l'évolution du critère de rupture en traction simple dans la direction du laminage, la direction transverse et à 45°, en fonction de la prédéformation ε appliquée à des aciers initialement laminés à des taux de réduction de 5% et de 15% ([32,33]). Nous observons deux phénomènes :

- pour un taux de réduction au laminage donné, les trois courbes ne sont pas parallèles ; donc, l'anisotropie évolue avec la prédéformation : c'est le phénomène de l'écrouissage anisotrope.
- les évolutions respectives des trois courbes ne sont pas les mêmes pour les deux taux de réduction au laminage.

De ces observations expérimentales, nous pouvons conclure que le comportement mécanique anisotrope des matériaux concerne plusieurs phénomènes différents, qui sont très complexes et fortement non-linéaires. Il apparaît donc le besoin de développer une théorie rationnelle et objective, capable de décrire tous ces phénomènes avec une certaine unité. L'approche par la théorie des représentations des fonctions tensorielles anisotropes permet de répondre d'une manière efficace à ce besoin d'une théorie générale et unifiée (cf. § 3 ci-dessous et la communication à ce Colloque intitulée "Lois de comportement des solides anisotropes").

2 - LOIS ANISOTROPES LINEAIRES

Dans cette deuxième partie, nous analysons très succinctement les lois anisotropes s'exprimant par des relations linéaires du type :

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{D} \qquad (1)$$

où $\underset{\sim}{D}$ est un tenseur d'ordre q, représentant la sollicitation physique ou rhéologique ; $\underset{\sim}{T}$ est un tenseur d'ordre p, représentant la réponse du matériau à la sollicitation. Le tenseur $\underset{\sim}{A}$, exprimant la relation linéaire entre la sollicitation et la réponse, est un tenseur d'ordre p + q. Des exemples de lois du type (1) sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Loi	Tenseur-sollicitation $\underset{\sim}{D}$	Tenseur réponse $\underset{\sim}{T}$	Tenseur-loi $\underset{\sim}{A}$
Conductivité thermique	gradient thermique ordre 1	flux de chaleur ordre 1	tenseur conductivité thermique ordre 2
Piézo-électricité	tenseur des contraintes ordre 2	vecteur polarisation ordre 1	tenseur des modules piézo-électriques ordre 3
Elasticité	tenseur des déformations ordre 2	tenseur des contraintes ordre 2	tenseur de l'élasticité linéaire ordre 4

Dans la loi (1), le tenseur $\underset{\sim}{A}$ doit prendre en compte l'anisotropie du matériau et en particulier les propriétés de symétrie de la structure interne ([2], [18]). Nous analysons brièvement deux conséquences.

a) Soit $\mathcal{G}$ le groupe des transformations orthogonales caractérisant l'anisotropie de la structure interne du matériau et $\mathcal{G}$ le groupe caractérisant l'anisotro-

pie de la loi ; $\mathcal{G}$ est le groupe d'invariance du tenseur $\underset{\sim}{A}$. En Physique, le Principe de Neumann stipule que le tenseur $\underset{\sim}{A}$ doit être invariant au moins dans le groupe $\mathcal{S}$; le groupe $\mathcal{G}$ doit donc contenir le groupe $\mathcal{S}$ et ces deux groupes ne sont pas nécessairement identiques :

$$\mathcal{G} \supseteq \mathcal{S} \qquad (2)$$

En termes naïfs, le Principe de Neumann signifie que les symétries de la loi (1) sont égales ou supérieures aux symétries de la structure interne du matériau. En Mécanique des Milieux Continus, cette propriété résulte de l'application à la loi (1) du Principe d'Isotropie de l'Espace (cf. § 3).

Pour un matériau donné, c'est-à-dire un groupe $\mathcal{S}$ donné, le groupe d'invariance $\mathcal{G}$ du tenseur-loi $\underset{\sim}{A}$ dépend de son ordre. En général, le groupe croît lorsque l'ordre du tenseur $\underset{\sim}{A}$ diminue. Considérons par exemple les cristaux cubiques. Pour ces matériaux, la loi de l'élasticité linéaire est anisotrope (tenseur $\underset{\sim}{A}$ d'ordre 4), mais la loi de la conductivité thermique est isotrope (tenseur $\underset{\sim}{A}$ d'ordre 2). Une discussion détaillée des propriétés d'invariance des tenseurs-lois $\underset{\sim}{A}$ est donnée dans la référence [18].

b) Pour une loi donnée, c'est-à-dire pour un ordre donné au tenseur $\underset{\sim}{A}$, le groupe d'invariance $\mathcal{G}$ de la loi dépend du groupe $\mathcal{S}$ caractérisant les symétries matérielles du corps considéré. Un exemple de cette propriété est donné dans la référence [35], où l'on considère des corps pour lesquels le groupe $\mathcal{S}$ des symétries matérielles contient les rotations $2\pi/n$ autour d'un axe $\underset{\sim}{v}$; si l'ordre n des rotations est strictement supérieur à l'ordre du tenseur $\underset{\sim}{A}$, la loi est orthotrope de révolution autour de la direction $\underset{\sim}{v}$; si n est inférieur ou égal à l'ordre du tenseur $\underset{\sim}{A}$, l'anisotropie de la loi est plus générale.

Nous n'analyserons pas davantage les propriétés d'invariance des lois anisotropes linéaires. Les observations expérimentales présentées dans le paragraphe 1.4 montrent que le comportement mécanique des matériaux anisotropes est caractérisé par de fortes non-linéarités. La modélisation du comportement rhéologique des matériaux anisotropes exige donc un cadre plus général.

3 - INTRODUCTION A LA FORMULATION INVARIANTE DES LOIS RHEOLOGIQUES ANISOTROPES NON-LINEAIRES

3.1 - Introduction

Le but de cette troisième partie est de présenter aux non-spécialistes quelques notions simples dans le domaine de la formulation invariante des lois de comportement anisotropes non-linéaires. Nous analysons d'abord le "Principe d'Isotropie de l'Espace" et ses conséquences sur les propriétés d'invariance que doivent vérifier les lois de comportement des corps isotropes et anisotropes, en considérant chaque fois le concept physique et le concept mathématique correspondant. Nous donnons ensuite une introduction élémentaire à la théorie des représentations des fonctions tensorielles anisotropes dans le cas d'une loi de comportement très simple pour un corps orthotrope à deux dimensions, et nous montrons comment le problème de la formulation invariante des lois anisotropes non-linéaires peut être résolu par cette approche.

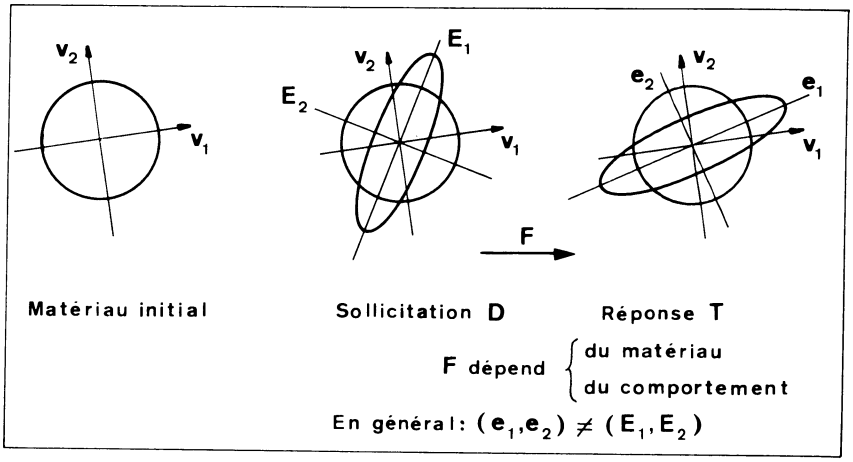
Nous considérons le cas très simple d'un corps anisotrope à deux dimensions et une loi de comportement spécifiant le tenseur $\underset{\sim}{T}$ des contraintes par une fonction $\underset{\sim}{F}$ de deux tenseurs symétriques du second ordre :

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{F}\ (\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{\xi}) \qquad (1)$$

où $\underset{\sim}{D}$ est le tenseur-sollicitation et $\underset{\sim}{\xi}$ le tenseur de structure prenant en compte les propriétés de symétrie de la structure interne du matériau. Le tenseur $\underset{\sim}{D}$ est par exemple le tenseur des déformations dans le cas du comportement élas-

tique ou le tenseur des vitesses de déformation dans le cas du comportement plastique. En général, les directions principales ($\underset{\sim}{e}_1$, $\underset{\sim}{e}_2$) du tenseur-réponse $\underset{\sim}{T}$ ne coïncident pas avec les directions principales ($\underset{\sim}{E}_1$, $\underset{\sim}{E}_2$) de la sollicitation $\underset{\sim}{D}$.

La loi de comportement (1) est schématisée sur la Figure ci-dessous, où le matériau, dans sa configuration initiale, est représenté par un cercle et un repère orthonormé ($\underset{\sim}{v}_1$, $\underset{\sim}{v}_2$) attaché ; les tenseurs $\underset{\sim}{T}$ et $\underset{\sim}{D}$ sont représentés par les ellipses associées. Des schémas similaires seront utilisés dans la suite du texte.

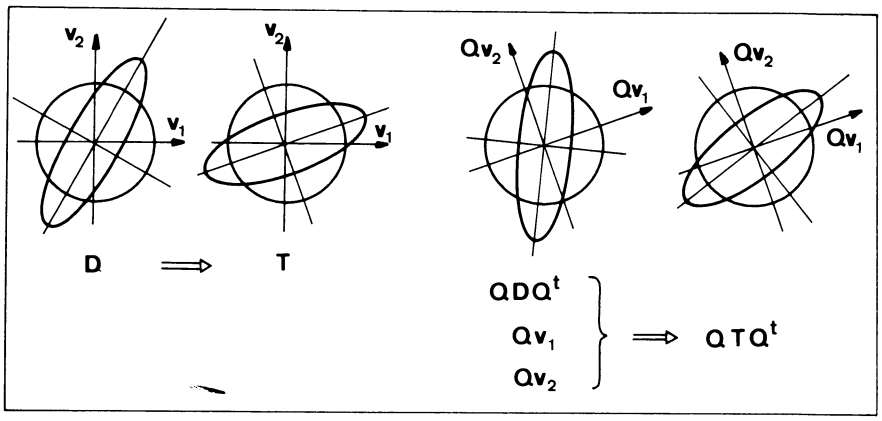


3.2 - Principe d'Isotropie de l'Espace

a) Concept physique

Les lois de comportement des matériaux sont soumises aux conditions d'invariance résultant du Principe d'Isotropie de l'Espace. Une présentation détaillée de ce principe est donnée par exemple dans la référence [36]. Nous n'énonçons pas ici le principe dans toute sa généralité, mais nous l'appliquons au cas très simple de la loi de comportement (1).

Une conséquence du Principe d'Isotropie de l'Espace est qu'une transformation arbitraire $\underset{\sim}{Q}$ du groupe orthogonal $\mathcal{O}$, appliquée à la fois au corps et à la sollicitation $\underset{\sim}{D}$, résulte en la même transformation de la réponse matérielle $\underset{\sim}{T}$. Un énoncé naïf de ce principe est le suivant : "L'orientation du corps dans l'espace n'a pas d'effet sur sa loi de comportement". Ceci est schématisé sur la Figure ci-dessous, où les deux dessins de droite se déduisent des deux dessins de gauche par la même rotation d'ensemble.



Conséquence du Principe d'Isotropie de l'Espace

b) Concept mathématique

Dans la loi de comportement (1), les transformations sur le corps se traduisent par des transformations du tenseur de structure $\underset{\sim}{\xi}$. Appliqué à la loi (1), le Principe d'Isotropie de l'Espace exige que, quelle que soit la transformation orthogonale $\underset{\sim}{Q}$:

la transformations du corps : $\underset{\sim}{\xi} \Rightarrow \underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{\xi}\ \underset{\sim}{Q}^t = \overline{\underset{\sim}{\xi}}$

et la même transformation de la sollicitation : $\underset{\sim}{D} \Rightarrow \underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{D}\ \underset{\sim}{Q}^t = \overline{\underset{\sim}{D}}$

résultent en la même transformation de la réponse : $\underset{\sim}{T} \Rightarrow \underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{T}\ \underset{\sim}{Q}^t$

Nous obtenons finalement :

$$\forall\, \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O} \quad : \quad \underset{\sim}{F}\,(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{Q}^t,\ \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{\xi}\,\underset{\sim}{Q}^t) = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{F}\,(\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{\xi})\,\underset{\sim}{Q}^t$$

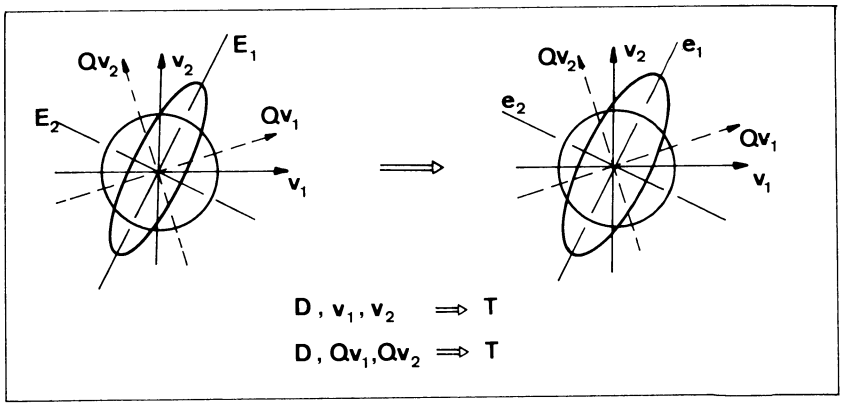
ou : $\forall\, \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O} \quad : \quad \underset{\sim}{F}\,(\overline{\underset{\sim}{D}}, \overline{\underset{\sim}{\xi}}) = \overline{\underset{\sim}{F}}\,(\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{\xi})$ (2)

La relation (2) indique les conditions d'invariance auxquelles est soumise la loi de comportement (1) par l'application du Principe d'Isotropie de l'Espace. La fonction tensorielle $\underset{\sim}{F}$, soumise aux conditions (2), est appelée fonction isotrope par rapport à l'ensemble de ses deux arguments ($\underset{\sim}{D}$, $\underset{\sim}{\xi}$).

3.3 - Corps isotropes

a) Concept physique

Un corps est appelé isotrope si une transformation arbitraire $\underset{\sim}{Q}$ du groupe orthogonal $\mathcal{O}$, appliquée au corps, mais pas à la sollicitation $\underset{\sim}{D}$, résulte en la même réponse $\underset{\sim}{T}$. Ceci est schématisé sur la Figure ci-dessous.



Définition d'un corps isotrope

Une conséquence directe de cette définition est que les directions principales ($\underset{\sim}{E}_1$, $\underset{\sim}{E}_2$) de la sollicitation $\underset{\sim}{D}$ et les directions principales ($\underset{\sim}{e}_1$, $\underset{\sim}{e}_2$) de la réponse $\underset{\sim}{T}$ sont les mêmes. En effet, appliquons à la fois au matériau et à la sollicitation $\underset{\sim}{D}$ la symétrie $\underset{\sim}{S}$ par rapport à la direction $\underset{\sim}{E}_1$. Nous obtenons trivialement :

$$\underset{\sim}{D} \Rightarrow \overline{\underset{\sim}{D}} = \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{S}^t = \underset{\sim}{D} \qquad (3)$$

Le Principe d'Isotropie de l'Espace exige que :

$$\underset{\sim}{T} \Rightarrow \overline{\underset{\sim}{T}} = \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{S}^t \qquad (4)$$

Mais, au vu de (3), la sollicitation $\underset{\sim}{D}$ n'est pas changée par la transformation $\underset{\sim}{S}$. L'isotropie du matériau exige donc que :

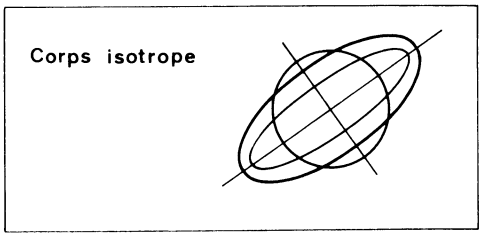
$$\overline{\underset{\sim}{T}} = \underset{\sim}{T} \qquad (5)$$

En considérant (4) et (5), nous obtenons finalement :

$$\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{S}^t = \underset{\sim}{T} \qquad (6)$$

La relation (6) implique que $\underset{\sim}{E}_1$ est une direction principale de $\underset{\sim}{T}$; finalement les directions principales de $\underset{\sim}{T}$ et de $\underset{\sim}{D}$ sont les mêmes.

Le comportement d'un corps isotrope peut donc être schématisé par la Figure suivante :



où le corps isotrope est représenté par un cercle, la sollicitation $\underset{\sim}{D}$ et la réponse $\underset{\sim}{T}$ par les ellipses associées, qui sont coaxiales.

b) Concept mathématique

Appliquons la définition d'un corps isotrope à la loi de comportement (1).

Cette définition implique que si nous :

transformons le corps : $\underset{\sim}{\xi} \Rightarrow \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{\xi}\,\underset{\sim}{Q}^t = \overline{\underset{\sim}{\xi}}$

et gardons la même sollicitation : $\underset{\sim}{D} \Rightarrow \underset{\sim}{D}$

alors la réponse est la même : $\underset{\sim}{T} \Rightarrow \underset{\sim}{T}$

Nous obtenons finalement :

$$\forall \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O} \quad : \quad \underset{\sim}{F}\,(\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{\xi}\,\underset{\sim}{Q}^t) = \underset{\sim}{F}\,(\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{\xi}) \tag{7}$$

Il est facile de voir que la condition (7) signifie que le tenseur de structure $\underset{\sim}{\xi}$ d'un corps isotrope est un tenseur isotrope :

$$\underset{\sim}{\xi} = \lambda\,\underset{\sim}{I}$$

Ceci est d'ailleurs physiquement évident. Finalement, pour les corps isotropes, la loi de comportement (1) se réduit en :

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{F}\,(\underset{\sim}{D}, \lambda\,\underset{\sim}{I}) = \underset{\sim}{F}\,(\underset{\sim}{D}) \tag{8}$$

Appliquons maintenant le Principe d'Isotropie de l'Espace. Nous obtenons :

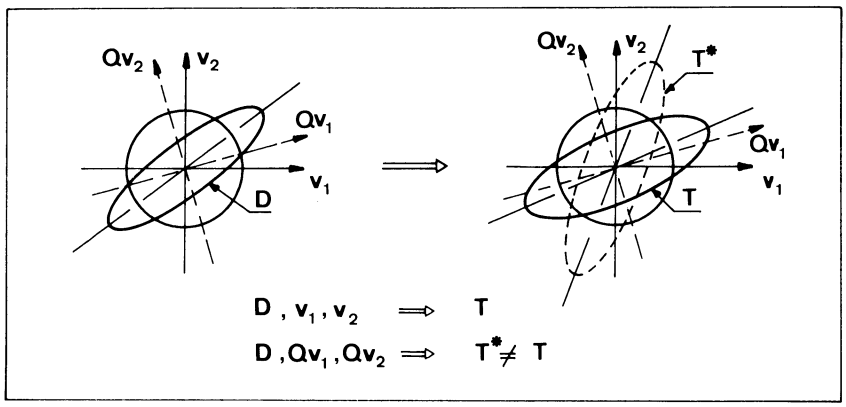
$$\forall \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O} \quad : \quad \underset{\sim}{F}\,(\overline{\underset{\sim}{D}}) = \overline{\underset{\sim}{F}}\,(\underset{\sim}{D}) \tag{9}$$

La relation (9) signifie simplement que pour les corps isotropes, la fonction de comportement $\underset{\sim}{F}$ est isotrope par rapport à la sollicitation $\underset{\sim}{D}$.

3.4 - Corps anisotropes

a) Concept physique

Un corps est appelé anisotrope si une transformation arbitraire $\underset{\sim}{Q}$ du groupe orthogonal $\mathcal{O}$, appliquée au corps, mais pas à la sollicitation $\underset{\sim}{D}$, résulte en général en une réponse $\underset{\sim}{T}^*$ différente de la réponse $\underset{\sim}{T}$ obtenue avant la transformation. Ceci est schématisé dans la Figure ci-dessous.



Définition d'un corps anisotrope

Le problème suivant se pose immédiatement : existe-t-il des transformations $\underset{\sim}{Q}$ telles que la réponse du corps anisotrope soit la même :

$$\exists\, \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O} \quad : \quad \underset{\sim}{T}^* = \underset{\sim}{T} \; ? \tag{10}$$

Si seules les transformations ($\underset{\sim}{I}$, $-\underset{\sim}{I}$) safisfont à (10), alors le matériau est appelé "anisotrope le plus général". Si d'autres transformations orthogonales $\underset{\sim}{Q}$ satisfont à (10), alors elles constituent un sous-groupe $\mathcal{G}$ du groupe orthogonal $\mathcal{O}$. Le sous-groupe $\mathcal{G}$ est le groupe caractéristique de l'anisotropie du comportement mécanique du matériau.

b) Concept mathématique

Analysons les conséquences du Principe d'Isotropie de l'Espace sur la loi de comportement (1) pour un corps anisotrope. Considérons le groupe $\mathcal{G}$ caractérisant l'anisotropie de la structure interne du corps. Le tenseur $\underset{\sim}{\xi}$, prenant en compte les symétries de la structure interne, doit être invariant dans le groupe $\mathcal{G}$ et seulement dans ce groupe :

$$\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{G} \Longleftrightarrow \overline{\underset{\sim}{\xi}} = \underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{\xi}\ \underset{\sim}{Q}^{t} = \underset{\sim}{\xi} \tag{11}$$

Le groupe $\mathcal{G}$, vérifiant (11) est appelé "groupe d'invariance" du tenseur de structure $\underset{\sim}{\xi}$. En introduisant (11) dans la loi de comportement (1), nous obtenons :

$$\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{G} \Rightarrow \underset{\sim}{F}\ (\overline{\underset{\sim}{D}}, \overline{\underset{\sim}{\xi}}) = \underset{\sim}{F}\ (\overline{\underset{\sim}{D}}, \underset{\sim}{\xi}) \tag{12}$$

Le Principe d'Isotropie de l'Espace exige que :

$$\forall \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O} \supset \mathcal{G} \quad : \underset{\sim}{F}\ (\overline{\underset{\sim}{D}}, \overline{\underset{\sim}{\xi}}) = \overline{\underset{\sim}{F}}\ (\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{\xi}) \tag{13}$$

En utilisant (13) dans (12), nous obtenons :

$$\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{G} \Rightarrow \underset{\sim}{F}\ (\overline{\underset{\sim}{D}}, \underset{\sim}{\xi}) = \overline{\underset{\sim}{F}}\ (\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{\xi}) \tag{14}$$

La relation (14) signifie que la fonction de comportement $\underset{\sim}{F}$, considérée comme une fonction de la sollicitation $\underset{\sim}{D}$, est nécessairement invariante dans le groupe $\mathcal{G}$. Pour des fonctions $\underset{\sim}{F}$ particulières, le groupe d'invariance $\mathcal{H}$, défini en a), peut être "plus grand" que le groupe $\mathcal{G}$ caractéristique de l'anisotropie de la structure interne du matériau : $\mathcal{H} \supset \mathcal{G}$; cf. également le paragraphe 2. Cependant, pour une fonction de comportement $\underset{\sim}{F}$ générale, le groupe d'invariance $\mathcal{H}$ est identique au groupe $\mathcal{G}$. En effet, supposons que la relation (14) est vérifiée pour une transformation orthogonale $\underset{\sim}{Q}^{*}$ donnée. En utilisant le Principe d'Isotropie de l'Espace (13), nous obtenons :

$$\underset{\sim}{Q}^{*} \in \mathcal{O} \quad : \underset{\sim}{F}\ (\overline{\underset{\sim}{D}}, \underset{\sim}{\xi}) = \underset{\sim}{F}\ (\overline{\underset{\sim}{D}}, \overline{\underset{\sim}{\xi}}) \tag{15}$$

pour une sollicitation arbitraire $\overline{\underset{\sim}{D}}$. Si $\underset{\sim}{F}$ est une fonction générale, il est facile de voir que la condition (15) résulte en :

$$\overline{\underset{\sim}{\xi}} = \underset{\sim}{\xi} \Rightarrow \underset{\sim}{Q}^{*} \in \mathcal{G} \tag{16}$$

En considérant les relations (12), (15) et (16), nous obtenons finalement l'implication réciproque suivante :

$$\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{G} \Longleftrightarrow \underset{\sim}{F}\ (\overline{\underset{\sim}{D}}, \underset{\sim}{\xi}) = \overline{\underset{\sim}{F}}\ (\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{\xi}) \tag{17}$$

qui signifie que, par rapport à la sollicitation $\underset{\sim}{D}$, la fonction $\underset{\sim}{F}$ est invariante dans le groupe $\mathcal{G}$ et seulement dans ce groupe. Il en résulte que la fonction $\underset{\sim}{F}$ est anisotrope par rapport à $\underset{\sim}{D}$, le type de cette anisotropie étant caractérisé par le groupe d'invariance $\mathcal{G}$ du tenseur de structure $\underset{\sim}{\xi}$. Nous obtenons ainsi le résultat fondamental suivant :

$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{F}\ (\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{\xi})$ + Principe d'Isotropie de l'Espace

$\Downarrow$

$\underset{\sim}{F}$ isotrope / $(\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{\xi})$

$\Downarrow$

$\underset{\sim}{F}$ anisotrope / $(\underset{\sim}{D})$

le groupe $\mathcal{G}$ caractéristique de cette anisotropie étant le groupe d'invariance du tenseur de structure $\underset{\sim}{\xi}$.

Le problème est maintenant de trouver un ou des tenseurs de structure pour chaque type d'anisotropie.Dans la loi de comportement (1), nous avons supposé que pour le matériau bidimensionnel considéré, la structure interne peut être prise en compte par un seul tenseur symétrique du second ordre ; ceci est bien le cas pour un matériau orthotrope à deux dimensions (cf. § 3.5 ci-dessous). Pour d'autres types d'anisotropie et dans le cas tridimensionnel, plusieurs tenseurs de structure peuvent être nécessaires. Par exemple, la structure d'un matériau orthotrope à trois dimensions est représentée par trois tenseurs symétriques du second ordre [37] ; dans ce cas, le groupe $\mathcal{G}$ est le groupe d'invariance de l'ensemble des tenseurs de structure.

3.5 - Corps orthotropes

Considérons un matériau orthotrope à deux dimensions, admettant $(\underset{\sim}{v}_1 , \underset{\sim}{v}_2)$ comme directions privilégiées. Le groupe caractéristique $\mathcal{G}$ est donné par :

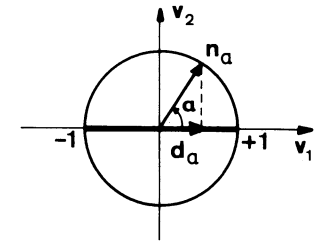
$$\mathcal{G} = \{ \pm \underset{\sim}{I} , \underset{\sim}{S}_1 , \underset{\sim}{S}_2 \} \tag{18}$$

où $\underset{\sim}{S}_1$ et $\underset{\sim}{S}_2$ sont les symétries par rapport aux directions $\underset{\sim}{v}_1$ et $\underset{\sim}{v}_2$. Introduisons le tenseur $\underset{\sim}{M}$ défini par :

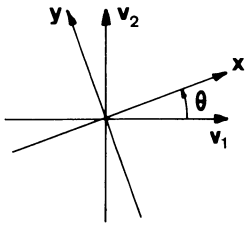
$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{v}_1 \otimes \underset{\sim}{v}_1 \tag{19}$$

Le tenseur $\underset{\sim}{M}$ est un tenseur symétrique du second ordre très particulier, qui transforme les vecteurs unitaires $\underset{\sim}{n}_\alpha$ en leurs projections sur l'axe $\underset{\sim}{v}_1$:

$$\underset{\sim}{n}_\alpha \begin{vmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{vmatrix} \xrightarrow{\underset{\sim}{M}} \underset{\sim}{d}_\alpha \begin{vmatrix} \cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$



Le tenseur $\underset{\sim}{M}$ transforme donc le cercle unitaire en le segment $[-1, +1]$ porté par l'axe $\underset{\sim}{v}_1$. Les directions principales de $\underset{\sim}{M}$ sont les directions privilégiées $(\underset{\sim}{v}_1 , \underset{\sim}{v}_2)$ du matériau. Dans les axes $(\underset{\sim}{v}_1 , \underset{\sim}{v}_2)$ et dans des axes $(\underset{\sim}{x} , \underset{\sim}{y})$ se déduisant des axes $(\underset{\sim}{v}_1 , \underset{\sim}{v}_2)$ par une rotation d'angle θ , le tenseur $\underset{\sim}{M}$ est représenté par :



$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}_{(\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2)} = \begin{vmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{vmatrix}_{(\underset{\sim}{x}\,\underset{\sim}{y})} \tag{20}$$

Il est facile de voir que le tenseur $\underset{\sim}{M}$ vérifie l'implication réciproque suivante :

$$\underset{\sim}{Q} \in \{ \pm \underset{\sim}{I} , \underset{\sim}{S}_1 , \underset{\sim}{S}_2 \} \Longleftrightarrow \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{Q}^t = \underset{\sim}{M} \tag{21}$$

Le groupe d'invariance du tenseur $\underset{\sim}{M}$ est donc le groupe caractéristique $\mathcal{G}$ d'une orthotropie bidimensionnelle, c'est-à-dire que $\underset{\sim}{M}$ est le tenseur de structure d'un matériau orthotrope à deux dimensions.

Appliquons maintenant le résultat fondamental du paragraphe 3.4. Considérons la loi de comportement :

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{F} \ (\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{M}) \tag{22}$$

Le Principe d'Isotropie de l'Espace implique que la fonction $\underset{\sim}{F}$ est isotrope par rapport à l'ensemble de ses arguments $(\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{M})$; elle est donc anisotrope par rapport à son argument mécanique $\underset{\sim}{D}$, le type de cette anisotropie étant caractérisé par le groupe d'invariance du tenseur de structure $\underset{\sim}{M}$. Finalement, la fonction $\underset{\sim}{F}$ est orthotrope par rapport à $\underset{\sim}{D}$:

$$\text{Isotropie de l'Espace} \Longrightarrow \forall \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O} : \underset{\sim}{F} \ (\overline{\underset{\sim}{D}}, \overline{\underset{\sim}{M}}) = \overline{\underset{\sim}{F}} \ (\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{M}) \tag{23}$$

$$\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{G} \Longleftrightarrow \underset{\sim}{F} \ (\overline{\underset{\sim}{D}}, \underset{\sim}{M}) = \overline{\underset{\sim}{F}} \ (\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{M}) \tag{24}$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{\sim}{F} \text{ orthotrope / } (\underset{\sim}{D})$$

Finalement, pour les corps orthotropes, la loi de comportement (1) prend la forme particulière (22), qui est soumise aux conditions d'invariance (23) imposées par le Principe d'Isotropie de l'Espace. Les équations (22) et (23) constituent la forme la plus générale d'une loi de comportement orthotrope bidimensionnelle, reliant deux tenseurs symétriques du second ordre.

3.6 - Représentation de la fonction $\underset{\sim}{F}$

a) Introduction

La formulation invariante des lois de comportement non-linéaires de la Mécanique des Solides Anisotropes pose un double problème. Il s'agit d'abord d'établir des formes telles que les symétries matérielles soient automatiquement vérifiées, c'est-à-dire des formes qui soient automatiquement invariantes dans le groupe caractéristique $\mathcal{G}$. Ceci n'est pas le cas de la loi de comportement (22), car elle est soumise aux conditions d'invariance (23). D'autre part, il s'agit de préciser les variables essentielles, c'est-à-dire le type et le nombre minimal des variables scalaires indépendantes devant apparaître dans la loi de comportement, et qui constituent l'ensemble des variables mécaniques indépendantes.

Les théorèmes de représentations des fonctions tensorielles anisotropes permettent de développer des formulations répondant à ces deux exigences.

b) Théorème de représentation

Le théorème de représentation pour les fonctions tensorielles orthotropes à deux dimensions ([37]), indique que la loi (22), soumise aux conditions (23), admet la forme canonique irréductible :

$$\underset{\sim}{T} = \alpha_0 \underset{\sim}{I} + \alpha_1 \underset{\sim}{M} + \alpha_2 \underset{\sim}{D} \tag{25}$$

$$\alpha_i = \alpha_i \ (\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{D}, \ \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{D}^2, \ \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D})$$

Dans la représentation (25), la réponse $\underset{\sim}{T}$ est exprimée par une combinaison linéaire de trois tenseurs bien déterminés :

$$\underset{\sim}{I}, \ \underset{\sim}{M}, \ \underset{\sim}{D} \tag{26}$$

qui constituent l'ensemble des tenseurs-générateurs de la représentation. Plus précisément, les générateurs (26) sont des tenseurs symétriques du second ordre, qui sont "formellement invariants" dans le groupe $\mathcal{G}$ caractérisant l'orthotropie bidimensionnelle. Les coefficients α_i sont des fonctions scalaires arbitraires, dont les arguments :

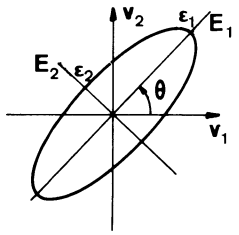
$$\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{D}, \ \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{D}^2, \ \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D} \tag{27}$$

sont appelés "invariants orthotropes" de $\underset{\sim}{D}$. Leur ensemble constitue la "base fonctionnelle" de $\underset{\sim}{D}$ dans le groupe des transformations orthotropes bidimension-

nelles. Les définitions précises des différents termes introduits ci-dessus sont données dans la référence [37].

c) Invariants orthotropes de $\underset{\sim}{D}$

Nous introduisons les expressions de la sollicitation $\underset{\sim}{D}$, d'une part dans son repère principal ($\underset{\sim}{E}_1$, $\underset{\sim}{E}_2$), d'autre part dans le repère privilégié ($\underset{\sim}{v}_1$, $\underset{\sim}{v}_2$) du matériau :



$$\underset{\sim}{D} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{vmatrix}_{(\underset{\sim}{E}_1, \underset{\sim}{E}_2)} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix}_{(\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2)} \tag{28}$$

Les deux premiers invariants (27) admettent les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{D} &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \mathrm{tr}\,(\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{Q}^t) \quad , \forall \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O} \\ \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{D}^2 &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\,\varepsilon_{12}^2 = \mathrm{tr}\,(\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{Q}^t)^2 \quad , \forall \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O} \end{aligned} \tag{29}$$

Les invariants tr $\underset{\sim}{D}$ et tr $\underset{\sim}{D}^2$ admettent donc les mêmes valeurs pour une transformation orthogonale arbitraire de $\underset{\sim}{D}$: ils sont appelés invariants isotropes de $\underset{\sim}{D}$. Comme ils sont invariants dans le groupe orthogonal complet $\mathcal{O}$, ils sont invariants dans le groupe $\mathcal{G}$ a fortiori ; ils constituent donc également des invariants orthotropes de $\underset{\sim}{D}$.

Les expressions du dernier invariant (27) sont données par :

$$\mathrm{tr}\ \underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D} = \varepsilon_{11} = \varepsilon_1 \cos^2\theta + \varepsilon_2 \sin^2\theta \quad ; \qquad \theta = (\underset{\sim}{v}_1\ ,\ \underset{\sim}{E}_1) \tag{30}$$

Les relations (30) indiquent que la valeur de l'invariant tr $\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D}$ est égale à la première composante ε_{11} de $\underset{\sim}{D}$ dans le repère privilégié ($\underset{\sim}{v}_1$, $\underset{\sim}{v}_2$). Si nous transformons à la fois $\underset{\sim}{D}$ et $\underset{\sim}{M}$ par une transformation orthogonale arbitraire $\underset{\sim}{Q}$, la valeur de cette composante reste la même : tr $\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D}$ est un invariant isotrope de l'ensemble ($\underset{\sim}{D}$, $\underset{\sim}{M}$). Si nous transformons $\underset{\sim}{D}$, mais pas $\underset{\sim}{M}$, la valeur de cette composante est modifiée, sauf si et seulement si la transformation $\underset{\sim}{Q}$ appartient au groupe orthotrope $\mathcal{G}$ donné par (18) ; l'invariant tr $\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D}$ est donc un invariant orthotrope de $\underset{\sim}{D}$. Nous avons finalement :

$$\forall\, \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O} \supset \mathcal{G} \quad : \mathrm{tr}\,\overline{\underset{\sim}{D}} = \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{D}\ ;\ \mathrm{tr}\,\overline{\underset{\sim}{D}}^2 = \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{D}^2\ ;\ \mathrm{tr}\,\overline{\underset{\sim}{M}}\,\overline{\underset{\sim}{D}} = \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D} \tag{31}$$

$$\forall\, \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{G} \quad : \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{M}\overline{\underset{\sim}{D}} = \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D} \tag{32}$$

d) Résultat fondamental

La représentation (25) vérifie automatiquement le Principe d'Isotropie de l'Espace. En effet, en tenant compte de (31), il vient :

$$\forall\, \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O} \quad : \alpha_i\,(\mathrm{tr}\,\overline{\underset{\sim}{D}},\ \mathrm{tr}\,\overline{\underset{\sim}{D}}^2,\ \mathrm{tr}\,\overline{\underset{\sim}{M}}\,\overline{\underset{\sim}{D}}) = \alpha_i\,(\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{D}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{D}^2, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D}) \tag{33}$$

et il en résulte que :

$$\begin{aligned} \forall\, \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O} \quad : \underset{\sim}{F}\,(\overline{\underset{\sim}{D}}, \overline{\underset{\sim}{M}}) &= \alpha_0 \underset{\sim}{I} + \alpha_1 \overline{\underset{\sim}{M}} + \alpha_2 \overline{\underset{\sim}{D}} \\ &= \underset{\sim}{Q}\,(\alpha_0 \underset{\sim}{I} + \alpha_1 \underset{\sim}{M} + \alpha_2 \underset{\sim}{D})\underset{\sim}{Q}^t \\ &= \overline{\underset{\sim}{F}}\,(\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{M}) \end{aligned} \tag{34}$$

La relation (34) signifie que la représentation (25) est automatiquement isotrope par rapport à l'ensemble des arguments ($\underset{\sim}{D}$, $\underset{\sim}{M}$) ; elle est donc automatiquement

orthotrope par rapport à la variable mécanique $\underset{\sim}{D}$. Les variables essentielles sont les arguments (tr $\underset{\sim}{D}$, tr $\underset{\sim}{D}^2$, tr $\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D}$) des fonctions scalaires arbitraires α_i ; ce sont les variables indépendantes qui doivent être observées au cours des études expérimentales, afin de pouvoir préciser les formes particulières des fonctions scalaires α_i pour chaque type de matériau et chaque type de comportement. Finalement, les deux exigences, énoncées en a) pour la formulation invariante de la loi de comportement $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{M})$ pour un milieu orthotrope bidimensionnel, sont satisfaites par la représentation (25).

Dans la représentation (25) :

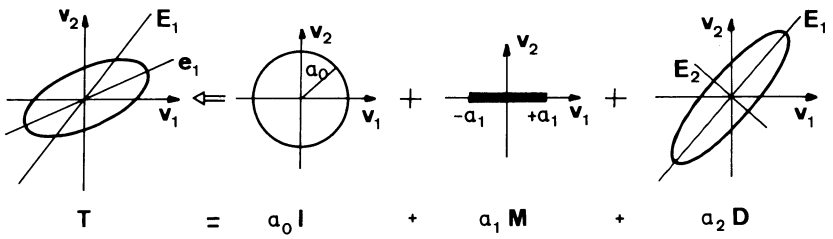
* le tenseur de structure $\underset{\sim}{M}$, de directions principales ($\underset{\sim}{v}_1$, $\underset{\sim}{v}_2$), caractérise l'orthotropie, c'est-à-dire qu'il indique quelles sont les directions privilégiées du matériau.
* l'invariant tr $\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D} = \varepsilon_1 \cos^2\theta + \varepsilon_2 \sin^2\theta$ caractérise le "degré" de cette orthotropie, c'est-à-dire qu'il prend en compte l'influence de l'orientation θ de la sollicitation $\underset{\sim}{D}$ par rapport aux axes privilégiés ($\underset{\sim}{v}_1$, $\underset{\sim}{v}_2$), sur la réponse mécanique $\underset{\sim}{T}$ du matériau orthotrope.

e) Propriété caractéristique

Si les directions privilégiées ($\underset{\sim}{v}_1$, $\underset{\sim}{v}_2$) ne sont pas les directions principales de la sollicitation $\underset{\sim}{D}$, alors les directions principales de $\underset{\sim}{D}$ et de la réponse $\underset{\sim}{T}$ ne coïncident pas en général. Cette propriété est évidente au vu de la combinaison linéaire de la représentation (25) :

$$\underset{\sim}{T} = \alpha_0 \underset{\sim}{I} + \alpha_1 \underset{\sim}{M} + \alpha_2 \underset{\sim}{D} \qquad (35)$$

Elle est également visible sur la représentation graphique ci-dessous :



Elle peut être démontrée en considérant l'expression de la combinaison linéaire (35) dans le repère principal ($\underset{\sim}{E}_1$, $\underset{\sim}{E}_2$) de $\underset{\sim}{D}$:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} = \alpha_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_1 \begin{vmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{vmatrix} \qquad (36)$$

où θ est l'angle ($\underset{\sim}{v}_1$, $\underset{\sim}{E}_1$). Si nous excluons le cas spécial $\alpha_1 \equiv 0$, la composante :

$$\sigma_{12} = \alpha_1 \sin\theta \cos\theta \qquad (37)$$

ne s'annule que si $\theta = 0$ ou $\pi/2$. Les conséquences de cette propriété caractéristique sont étudiées pour des lois de comportement particulières dans le paragraphe 4.

3.7 - Interprétation structurale de $\underset{\sim}{M}$

Au paragraphe 3.5, nous avons remarqué que le tenseur de structure $\underset{\sim}{M}$ transforme le cercle unitaire en le segment $[-1, +1]$ porté par l'axe $\underset{\sim}{v}_1$. Le cercle unitaire représente la distribution isotrope de la structure interne du matériau (orientations et répartitions aléatoires des axes cristallographiques, des grains, des particules, des fissures, des cavités, etc.). Le segment $[-1, +1]$ représente

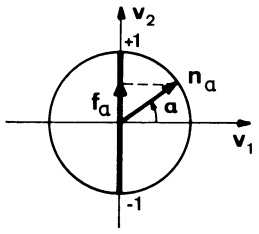
la distribution orthotrope idéale de la structure interne, parallèle à l'axe $\underset{\sim}{v}_1$. Le tenseur $\underset{\sim}{M}$ est donc le tenseur d'une structure orthotrope idéale. Une structure matérielle orthotrope réelle étant rarement idéale, le problème suivant se pose immédiatement : la représentation (25), dans laquelle n'intervient comme tenseur de structure que le tenseur idéal $\underset{\sim}{M}$, permet-elle de prendre en compte une structure orthotrope quelconque ?

Nous montrons d'abord que la représentation (25) permet de prendre en compte une distribution orthotrope elliptique. En effet, à partir de (25), nous pouvons construire le tenseur de structure :

$$\underset{\sim}{M}_2 = \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{v}_2 \otimes \underset{\sim}{v}_2 \quad ; \quad M_2 = \left| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right|_{(\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2)} \tag{38}$$

Le tenseur $\underset{\sim}{M}_2$ est un tenseur symétrique du second ordre très particulier, qui transforme les vecteurs unitaires $\underset{\sim}{n}_\alpha$ en leurs projections sur l'axe $\underset{\sim}{v}_2$:

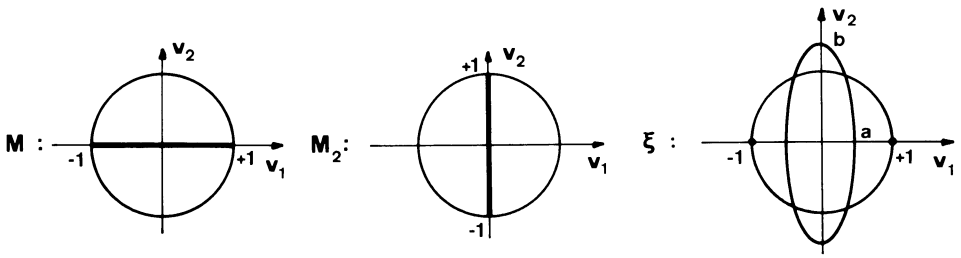
$$\underset{\sim}{n}_\alpha \left| \begin{matrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{matrix} \right. \xRightarrow{\underset{\sim}{M}_2} \underset{\sim}{f}_\alpha \left| \begin{matrix} 0 \\ \sin\alpha \end{matrix} \right. \qquad \mathbf{M_2}:$$



Le tenseur $\underset{\sim}{M}$ transforme donc le cercle unitaire en le segment $[-1, +1]$ porté par l'axe $\underset{\sim}{v}_2$. Considérons maintenant le tenseur de structure :

$$\underset{\sim}{\xi} = a\,\underset{\sim}{M} + b\,\underset{\sim}{M}_2 = b\,\underset{\sim}{I} + (a-b)\,\underset{\sim}{M} \quad ; \quad \xi = \left| \begin{matrix} a & 0 \\ 0 & b \end{matrix} \right|_{(\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2)} \tag{39}$$

La relation (39) indique que le tenseur $\underset{\sim}{\xi}$ peut être construit à partir de la représentation (25). Il transforme le cercle unitaire en l'ellipse de directions principales ($\underset{\sim}{v}_1$, $\underset{\sim}{v}_2$) et de valeurs principales a et b .



Finalement, le tenseur de structure $\underset{\sim}{\xi}$ est le tenseur d'une distribution orthotrope elliptique.

En fait, la représentation (25) permet de prendre en compte une distribution orthotrope quelconque. En effet, cette représentation fait intervenir les arguments des fonctions scalaires arbitraires α_i , qui sont les invariants :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \underset{\sim}{D} &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \operatorname{tr} \underset{\sim}{D}^2 &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \\ \operatorname{tr} \underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D} &= \varepsilon_1 \cos^2\theta + \varepsilon_2 \sin^2\theta \end{aligned} \tag{40}$$

où ε_1 et ε_2 sont les valeurs principales de la sollicitation $\underset{\sim}{D}$ et où θ est l'angle ($\underset{\sim}{v}_1$, $\underset{\sim}{E}_1$). Supposons que les valeurs de ces trois invariants sont connues. Les expressions de tr $\underset{\sim}{D}$ et de tr $\underset{\sim}{D}^2$ permettent de déterminer les valeurs de ε_1 et ε_2 . En introduisant ces valeurs dans l'expression de tr $\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D}$, on obtient une et une seule valeur pour θ comprise entre 0 et $\pi/2$, les autres solutions s'en

déduisant par symétries par rapport aux axes $\underset{\sim}{v}_1$ et $\underset{\sim}{v}_2$. Or, à partir de la donnée d'une distribution orthotrope pour $0 \leq \theta \leq \pi/2$, on obtient cette distribution pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$, par les mêmes symétries par rapport aux directions privilégiées $\underset{\sim}{v}_1$ et $\underset{\sim}{v}_2$. A partir des fonctions scalaires arbitraires α_i, on peut donc construire des fonctions scalaires orthotropes arbitraires $a(\theta)$ et $b(\theta)$.

Finalement, à partir de la représentation (25), on peut construire le tenseur de structure :

$$\underset{\sim}{\xi} = a(\theta)\,\underset{\sim}{M} + b(\theta)\,\underset{\sim}{M}_2 = b(\theta)\underset{\sim}{I} + \left[a(\theta) - b(\theta)\right]\,\underset{\sim}{M} \qquad (41)$$

qui est la représentation polaire d'un tenseur de structure orthotrope quelconque.

3.8 - Conclusion

La théorie des représentations des fonctions tensorielles est un outil puissant et efficace pour la formulation invariante des lois rhéologiques anisotropes non-linéaires. Elle permet de déterminer les tenseurs-générateurs formellement invariants devant intervenir dans la forme générale d'une loi de comportement non-linéaire, ainsi que le type et le nombre des variables scalaires indépendantes, qui sont des invariants mixtes des arguments mécaniques et des tenseurs de structure.

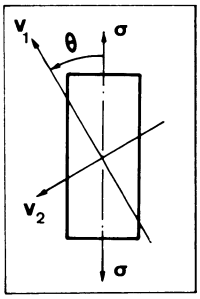
Dans cette introduction élémentaire, nous avons considéré le cas très simple d'un matériau orthotrope à deux dimensions, dont la loi de comportement exprime le tenseur des contraintes par une fonction d'un seul argument mécanique. La forme invariante la plus générale d'une telle loi de comportement est donnée par la représentation (25). Dans le cas tridimensionnel, les représentations des fonctions tensorielles d'un nombre arbitraire d'arguments mécaniques sont données dans la référence [37] pour les matériaux orthotropes et orthotropes de révolution. Dans la communication à ce Colloque, intitulée "Lois de comportement des solides anisotropes", la théorie des représentations des fonctions tensorielles est introduite dans un cadre plus général et des applications à la formulation invariante de lois rhéologiques anisotropes non-linéaires spécifiques sont développées.

Dans les formes générales invariantes ainsi obtenues pour les lois de comportement anisotrope non-linéaires, apparaissent un certain nombre de fonctions scalaires arbitraires, dont les arguments sont les variables essentielles bien déterminées. Ce sont les formes spécifiques de ces fonctions arbitraires qui permettent de préciser les formes invariantes particulières des lois de comportement pour chaque type de matériau anisotrope. Cette spécification des fonctions scalaires arbitraires exige des études expérimentales cohérentes et bien axées, permettant effectivement d'observer et de mesurer les évolutions des variables essentielles. L'étude expérimentale du comportement rhéologique des matériaux anisotropes présente des difficultés particulières, qui sont exposées dans le paragraphe 4 ci-dessous.

4 - DIFFICULTES DE L'ETUDE EXPERIMENTALE DU COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DES MATERIAUX ANISOTROPES

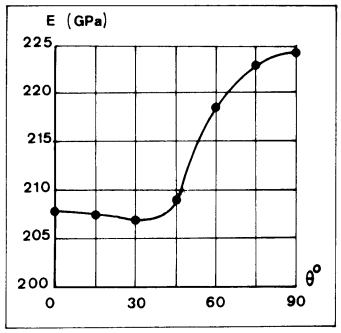
4.1 - Nécessité des essais "hors-axes"

On appelle essai "hors-axes" sur un matériau anisotrope, un essai dans lequel les directions principales des sollicitations ne coïncident pas avec les axes de symétrie de la structure interne du matériau.



Considérons par exemple un matériau orthotrope à deux dimensions, d'axes privilégiés ($\underset{\sim}{v}_1$, $\underset{\sim}{v}_2$), soumis à des essais de tractions simples $\underset{\sim}{\Sigma}$. Soit θ l'angle entre la direction de la traction et l'axe privilégié $\underset{\sim}{v}_1$. Si $\theta = 0$ ou $\pi/2$, l'essai est appelé "dans les axes" ; si $\theta \neq 0$ et $\pi/2$, l'essai est "hors-axes".

Les essais hors-axes sont indispensables pour évaluer les évolutions des caractéristiques mécaniques des matériaux anisotropes suivant l'orientation des sollicitations. La Figure 11 présente par exemple les variations du module élastique E d'une tôle d'acier doux laminé orthotrope, en fonction de l'angle θ entre la direction de la traction simple et la direction du laminage, qui est une direction privilégiée de la structure orthotrope du matériau. De même, la Figure 12 présente



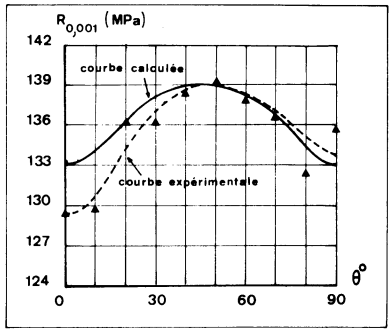


Fig. 11 - Anisotropie du module élastique d'une tôle d'acier doux laminé orthotrope (d'après [10]).

Fig. 12 - Anisotropie de la limite élastique d'une tôle d'acier doux laminé orthotrope (d'après [38]).

les variations de la limite élastique R ($\varepsilon = 0{,}001$) d'une tôle similaire. Nous remarquons que les évolutions de ces deux caractéristiques mécaniques sont nettement différentes. Il est bien évident que les seules mesures des modules E_0 et E_{90} et des limites élastiques R_0 et R_{90}, obtenues à l'aide d'essais "dans les axes", sont totalement insuffisantes pour la prévision des variations de ces caractéristiques mécaniques.

4.2 - Directions principales des contraintes et des déformations dans les essais de traction "hors-axes"

Nous avons déjà remarqué au § 3.6, sur l'exemple de la loi de comportement d'un matériau orthotrope à deux dimensions, que si les directions principales de la sollicitation ne coïncident pas avec les axes d'orthotropie, alors les directions principales de la réponse mécanique sont en général différentes de celles de la sollicitation. Considérons un matériau tridimensionnel, orthotrope de révolution autour de la direction $\underset{\sim}{v}$. Le comportement élastique linéaire de ce matériau est exprimé par la relation :

$$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{\underset{\sim}{A}}\,\underset{\sim}{T} \qquad (1)$$

où $\underset{\sim}{D}$ est le tenseur des déformations, $\underset{\sim}{T}$ le tenseur des contraintes et $\underset{\sim}{\underset{\sim}{A}}$ le tenseur du quatrième ordre de l'élasticité linéaire orthotrope de révolution, dont le tableau tronqué, invariant dans tous les repères orthonormés $(\underset{\sim}{v}, .,.)$, est donné par :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_1}{E_1} & -\frac{\nu_1}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-\frac{\nu_1}{E_1} & -\frac{\nu_2}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_2}{2E_2} & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4G} & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4G} \\
\hline
\end{array} \qquad (2)$$

où E_1 et E_2 sont les modules d'Young, ν_1 et ν_2 les coefficients de Poisson et G le module déviatoire du matériau orthotrope de révolution.

Appliquons à ce matériau une traction simple dans une direction faisant un angle θ avec l'axe privilégié $\underset{\sim}{v}$, et appelons ψ l'angle entre les directions principales de cette traction et celles du tenseur des déformations correspondant. En appliquant la loi (1), nous obtenons ([39]) :

$$tg\,2\psi = \frac{\left[\left(\frac{1+\nu_1}{E_1} - \frac{1}{2G}\right)\cos^2\theta - \left(\frac{\nu_1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{2G}\right)\sin^2\theta\right]\sin 2\theta}{\frac{1+\nu_1}{E_1}\cos^4\theta + \left(\frac{1}{E_2} + \frac{\nu_1}{E_1}\right)\sin^4\theta - \left(\frac{1+2\nu_1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta} \qquad (3)$$

Les directions principales de $\underset{\sim}{D}$ et de $\underset{\sim}{T}$ ne coïncident que si $tg2\psi = 0$. La relation (3) montre que cette condition est toujours vérifiée si $\theta = 0$ ou $\pi/2$, c'est-à-dire pour les essais "dans les axes". Pour les essais "hors-axes", les directions principales de $\underset{\sim}{D}$ et de $\underset{\sim}{T}$ ne peuvent pas coïncider, sauf éventuellement pour une seule direction θ intermédiaire entre 0 et $\pi/2$, définie par :

$$tg^2\theta = \frac{\frac{1+\nu_1}{E_1} - \frac{1}{2G}}{\frac{\nu_1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{2G}} \qquad (4)$$

à condition que les valeurs des coefficients d'élasticité du matériau soient telles que le membre de droite de l'égalité (4) est positif.

Considérons maintenant le comportement plastique parfait d'un matériau orthotrope de révolution. Dans le cadre de la théorie proposée dans [40,41], la loi d'écoulement plastique pour un matériau orthotrope de révolution incompressible est donnée par :

$$\frac{\underset{\sim}{D}}{\sqrt{tr\,\underset{\sim}{D}^2}} = \frac{1}{3}\left[(\gamma-\alpha)\,tr\,\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T} - \gamma\,tr\,\underset{\sim}{T}\right]\underset{\sim}{I} + \left[(\alpha+\gamma-2\beta)\,tr\,\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}\right]\underset{\sim}{M} + (\beta-\gamma)(\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}+\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{M}) + \gamma\,\underset{\sim}{T} \qquad (5)$$

où $\underset{\sim}{D}$ est le tenseur des vitesses de déformation, $\underset{\sim}{T}$ le tenseur des contraintes, $\underset{\sim}{M}$ le tenseur de structure du matériau orthotrope de révolution ($\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{v}\otimes\underset{\sim}{v}$) ; α,

β et γ sont les coefficients d'anisotropie plastique. En appliquant une traction simple dans une direction θ par rapport à l'axe privilégié $\underset{\sim}{v}$, l'angle ψ entre les directions principales du tenseur des contraintes et celles du tenseur des vitesses de déformation est donné par ([39]) :

$$tg\,2\psi = \frac{\left[(\alpha-\beta)\cos^2\theta + (\beta-\gamma)\sin^2\theta\right]\sin 2\theta}{\alpha\cos^4\theta + \gamma\sin^4\theta + (4\beta-\alpha-\gamma)\sin^2\theta\cos^2\theta} \qquad (6)$$

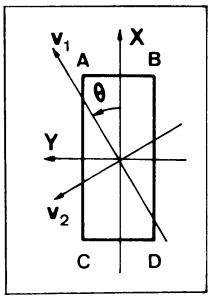
De même que dans le cas du comportement élastique, les directions principales de $\underset{\sim}{T}$ et de $\underset{\sim}{D}$ ne coïncident que dans les essais "dans les axes" ($\theta = 0$ ou $\pi/2$) et éventuellement pour une seule direction θ intermédiaire, définie par :

$$tg^2\theta = \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} \qquad (7)$$

à condition que les valeurs des coefficients d'anisotropie plastique soient telles que le membre de droite de l'égalité (7) est positif.

En conclusion, les directions principales du tenseur des contraintes et du tenseur cinématique ne coïncident pas en général dans les essais "hors-axes", aussi bien dans le domaine du comportement élastique, que dans celui du comportement plastique.

4.3 - Analyse de l'essai de traction "hors-axes" classique



Considérons un échantillon rectangulaire d'un matériau orthotrope de révolution autour de $\underset{\sim}{v}$ (Figure ci-contre). Nous désignons par ($\underset{\sim}{X}$, $\underset{\sim}{Y}$) les axes de l'échantillon et par θ l'angle entre la direction axiale $\underset{\sim}{X}$ et la direction privilégiée $\underset{\sim}{v}$ du matériau. Dans les essais de traction simple classiques, les extrémités AB et CD de l'échantillon sont fixées dans des mors rigides et soumises à une translation parallèle à la direction axiale $\underset{\sim}{X}$. Sur les frontières AB et CD, les directions principales du tenseur des déformations imposé sont donc les axes de l'échantillon. Sur les côtés AC et BD de l'échantillon, le vecteur-contrainte imposé est nul. Sur les frontières AC et BD, les directions principales du tenseur des contraintes imposé sont donc également les axes de l'échantillon.

Si le champ des contraintes et le champ des déformations développés au cours de l'essai étaient homogènes dans la totalité de l'échantillon, ils devraient vérifier les conditions imposées aux limites, c'est-à-dire que les axes ($\underset{\sim}{X}$, $\underset{\sim}{Y}$) de l'échantillon devraient être les directions principales à la fois pour le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations. Or, nous avons vu au § 4.2 que, pour les essais "hors-axes", les directions principales des contraintes et des déformations ne peuvent pas coïncider en général. Finalement, nous pouvons conclure que les conditions aux limites imposées dans les essais de traction simple classiques sont incompatibles avec le développement de champs de contraintes et de déformations homogènes dans les échantillons "hors-axes".

Les champs de contraintes et de déformations se développant dans les essais classiques de traction simple "hors-axes" sont donc nécessairement hétérogènes. Les échantillons "hors-axes" se déforment en "S" (Figure 13) ; de tels effets sont bien connus dans le domaine du comportement élastique [42] ; dans le domaine du comportement plastique, ils ont été observés pour des argiles consolidées [43], des roches stratifiées [34] et une tôle d'acier doux laminé [39,44]. Les déformations en "S" sont donc caractéristiques des matériaux anisotropes soumis à des essais "hors-axes" classiques. Le tenseur des contraintes réel n'est pas en

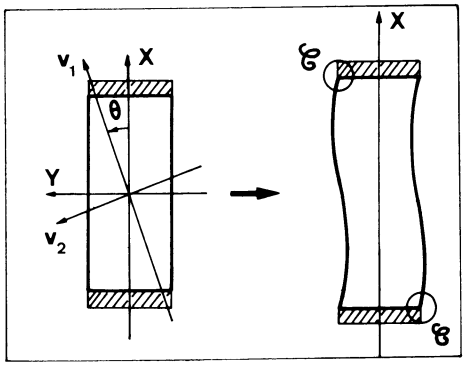


Fig. 13 - Champ de déformation hétérogène dans les essais classiques de traction simple "hors-axes".

général un tenseur de traction simple, même au centre de l'échantillon. En fait, de fortes concentrations de contraintes se développent dans les zones $\mathcal{C}$ (Figure 13), où la rupture du matériau s'initialise en premier. Tous ces effets sont décrits dans la référence [39]et dans la communication à ce Colloque, intitulée "Hétérogénéité des champs de contraintes et de déformations dans les matériaux anisotropes".

Les essais de traction simple classiques sur les matériaux anisotropes sont généralement interprétés dans l'hypothèse de l'homogénéité pour les champs de contraintes et de déformations. Les données expérimentales ainsi obtenues sont donc erronées et conduisent à des spécifications non réalistes des lois rhéologiques. Afin de pouvoir évaluer correctement les propriétés mécaniques des matériaux anisotropes, il est nécessaire d'imaginer des techniques d'essais nouvelles, spécifiques pour les matériaux anisotropes et capables de produire des champs de contraintes et de déformations homogènes dans les échantillons "hors-axes". Une telle technique d'essais a été proposée dans [33] ; elle est présentée dans la communication mentionnée ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

1. ALLIROT, D., BOEHLER, J.P. and SAWCZUK, A., Irreversible deformations of an anisotropic rock under hydrostatic pressure, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., 14 (1977) : 77-83.

2. STÜWE, H.P., Anisotropie und ihre strukturellen Ursachen, in : H.P. STÜWE ed., Mechanische Anisotropie, Springer-Verlag (1974) : 1-13.

3. RACLIN, J., Contributions théoriques et expérimentales à l'étude de la plasticité, de l'écrouissage et de la rupture des solides anisotropes, Thèse de Doctorat ès-Sciences, Grenoble, 1984.

4. BOEHLER, J.P. and GIROUD, J.P., Measurements of soil anisotropy, Proc. Ninth Annual Engng and Soils Engng Geology Symposium, Boise, Idaho (1971) : 175-187.

5. BOEHLER, J.P. and BONAZ, R., Evolution of structural and mechanical anisotropy in kaolinite during plastic deformation, Proc. Second Int. Conf. on Mechanical Behavior of Materials, Boston (1976) : 313-317.

6. BOEHLER J.P., LEFEVRE, F. et BONAZ, R., Relations quantitatives entre l'anisotropie de structure et l'anisotropie mécanique dans une argile ; évolutions au cours d'une déformation irréversible, Rapport final ATP Propriétés Mécaniques des Solides, Grenoble, 1979.

7. BOEHLER, J.P., Contributions théoriques et expérimentales à l'étude des milieux plastiques anisotropes, Thèse de Doctorat ès-Sciences, Grenoble, 1975.

8. FIELD, W.G., Fundamental properties of particulate materials, Thesis, Newcastle University College, New South Wales, Australia, 1962.

9. FIELD, W.G., Towards the statistical definition of a granular mass, Proc. Fourth Australia-New Zealand Conf. on Soil Mechanics, Adelaide (1963) : 143-148.

10. PARNIERE, P., Relations entre textures et comportement mécanique anisotrope des métaux, in : J.P. BOEHLER ed., Mechanical Behavior of Anistropic Solids, Proc. Euromech Colloquium 115 - Colloque International 295 du CNRS, Editions du CNRS, Paris, and Martinus Nijhoff, The Hague (1982) : 303-332.

11. HERSANT, T., JEULIN, D. et PARNIERE, P., Notions de base de morphologie mathématique utilisée en métallographie quantitative, Rapport IRSID RE 332, Saint-Germain-en-Laye, 1976.

12. SERRA, J., Traité d'Informatique Géologique, Masson, Paris, 1972.

13. SIRIEYS, P.M., Anisotropie mécanique des roches, in : J.P. BOEHLER ed., Mechanical Behavior of Anistropic Solids, Proc. Euromech Colloquium 115-Colloque International 295 du CNRS, Editions du CNRS, Paris, and Martinus Nijhoff, The Hague (1982) : 482-532.

14. PARNIERE, P., Analyse de la formation des textures ; applications, Mémoires Scientifiques Revue Métallurgie (1978) : 713-731.

15. BUNGE, H.J., Mathematische Methoden der Texturanalyse, Akademie Verlag, Berlin, 1969.

16. FERNANDES, J.V. and SCHMITT, J.H., Dislocation microstructures in steel during deep drawing, Phil. Magazine, 48, 6 (1983) : 841-870.

17. SPENCER, A.J.M., Theory of invariants, in : C. ERINGEN ed., Continuum Physics, Academic Press (1971) : 239-353.

18. NYE, J.F., Physical Properties of Crystals, Clarendon Press, London, 1957.

19. BOEHLER, J.P. et RACLIN, J., Ecrouissage anisotrope des matériaux orthotropes prédéformés, J. de Mécanique Théorique et Appliquée, Numéro Spécial (1982) : 23-44.

20. WIENDIECK, K., L'anisotropie des milieux pulvérulents et son influence sur les tassemements, Thèse de Docteur-Ingénieur, Grenoble, 1964.

21. BONAZ, R., Quantification des corrélations entre l'anisotropie de structure et l'anisotropie mécanique des argiles, Thèse de Doctorat de Spécialité, Grenoble, 1976.

22. LEFEVRE, F., Corrélations quantitatives entre l'anisotropie de structure et l'anisotropie mécanique d'un kaolin ; évolutions au cours d'une déformation irréversible, Thèse de Docteur-Ingénieur, Grenoble, 1980.

23. REES, D.W.A., A survey of hardening in metallic materials, in : J.P. BOEHLER ed., Failure Criteria of Structured Media, Proc. Colloque International 351 du CNRS (in print).

24. BOEHLER, J.P., On a rational formulation of isotropic and anisotropic hardening, in : A. SAWCZUK and G. BIANCHI eds., Plasticity Today, Elsevier Applied Science Publishers (1985) : 483-502.

25. KACHANOV, L.M., Time of the rupture process under creep conditions, Izv. Akad. Nauk SSR Otd. Tekh. Nauk, 8 (1958) : 26-31 (en russe).

26. LEMAITRE, J. et CHABOCHE, J.L., Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement, J. Mécanique Appliquée, 2, 3 (1978) : 317-365.

27. MURAKAMI, S. and OHNO, N., A continuum theory of creep and creep damage, in : A.R.S. PONTER and D.R. HAYHURST eds., Creep in Structures, Proc. IUTAM Symp., Springer, Berlin (1981) : 422-444.

28. HANCOCK, J.W., Plastic anisotropy in porous solids, in : J.P. BOEHLER ed., Plastic Behavior of Anisotropic Solids, Proc. Colloque International 319 du CNRS, Editions du CNRS, Paris (1985) : 507-517.

29. BETTEN, J., Damage tensors in Continuum Mechanics, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, 2 (1983) : 13-32.

30. CHABOCHE, J.L., Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscosité en présence d'un endommagement anisotrope, in : J.P. BOEHLER ed., Mechanical Behavior of Anisotropic Solids, Proc. Euromech Colloquium 115-Colloque International 295 du CNRS, Editions du CNRS, Paris, and Martinus Nijhoff, The Hague (1982) : 737-760.

31. MUDRY, F., Influence of loading direction on the ductile fracture process in structural steels, in : J.P. BOEHLER ed., Plastic Behavior of Anisotropic Solids, Proc. Colloque International 319 du CNRS, Editions du CNRS, Paris (1985) : 521-546.

32. BOEHLER, J.P. and RACLIN, J., Anisotropic hardening of prestrained rolled sheet-steel, in : Current Advances in Mechanical Design and Production, Proc. 2nd Cairo University MDP Conference, Cairo University (1982) : 483-492.

33. BOEHLER, J.P., RACLIN, J. et BENEFICE, P., Etude des champs cinématiques non homogènes, de l'écrouissage et de la fissuration des milieux anisotropes, Rapport final contrat ATP Comportement Mécanique des Solides, Grenoble, 1981.

34. ALLIROT, D. et BOEHLER, J.P., Evolution des propriétés mécaniques d'une roche stratifiée sous pression de confinement, Proc. Fourth Int. Congress on Rock Mechanics, Vol. 1, A.A. Balkema, Rotterdam (1979) : 15-22.

35. RATHKJEN, A., Symmetry relations for anisotropic materials, in : J.P. BOEHLER ed., Mechanical Behavior of Anisotropic Solids, Proc. Euromech Colloquium 115-Colloque International 295 du CNRS, Editions du CNRS, Paris, and Martinus Nijhoff, The Hague (1982) : 47-63.

36. ANGLES D'AURIAC, P., Les principes en Mécanique des Milieux Continus, La Houille Blanche, 5 (1970) : 427-432.

37. BOEHLER, J.P., Lois de comportement anisotrope des milieux continus, Journal de Mécanique, 17, 2 (1978) : 153-190.

38. BUNGE, H.J. and ROBERT, W.T., J. Applied Cryst., 9 (1969) : 116.

39. EL AOUFI, L., Contributions à l'étude expérimentale et numérique du comportement mécanique des matériaux anisotropes, Thèse de Doctorat de Spécialité, Grenoble, 1984.

40. BOEHLER, J.P., Contribution à l'étude de l'équilibre limite des sols anisotropes, Thèse de Doctorat de Spécialité, Grenoble, 1968.

41. BOEHLER, J.P. and SAWCZUK, A., On yielding of oriented solids, Acta Mechanica, 27 (1977) : 185-204.

42. PAGANO, N.J. and HALPIN, J.C., Influence of end constraints in the testing of anisotropic bodies, J. Composite Materials, 2, 1 (1968) : 18-31.

43. SAADA, A.S., Testing of anisotropic clay soils, J. Soil Mech. and Found. Div., 96 SM5 (1970) : 1847-1852.

44. BOEHLER, J.P., EL AOUFI, L. and RACLIN, J., On experimental testing methods for anisotropic materials, Res Mechanica (in print).

1.2 Communications

1.2 Contributed papers

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 53-68

Lois de comportement des solides anisotropes

Constitutive laws for anisotropic solids

J.P. BOEHLER, J. RACLIN

Institut de Mécanique de Grenoble
GRECO « Grandes Déformations et Endommagement »
B.P. n° 68, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex

RESUME

Les matériaux naturels et artificiels à structure interne orientée jouent un rôle de plus en plus important dans la Mécanique des Solides et la Technologie modernes. Ces matériaux sont caractérisés par une forte non-linéarité et une anisotropie prononcée de leur réponse mécanique aux sollicitations appliquées. La complexité des phénomènes observés exige une approche à la fois générale et unifiée pour la modélisation de leur comportement mécanique. Dans le cadre de la théorie des représentations des fonctions tensorielles, nous présentons d'abord les formes générales invariantes des lois de comportement non-linéaires et anisotropes dans les domaines de la plasticité, de l'écrouissage, de la rupture et du fluage des solides à structure interne orientée initiale ou induite par les déformations irréversibles. Des lois spécifiques sont ensuite proposées et comparées avec des résultats expérimentaux pour les matériaux composites et les métaux laminés.

ABSTRACT

Natural and artificial materials with oriented internal structure play an increasingly important role in modern Mechanics of Solids and Technology. Such materials are characterized by a strong non-linearity and a pronounced anisotropy of their mechanical response to applied agencies. Owing to the complexity of the observed phenomena, the modelization of the mechanical behavior of oriented solids needs both a general and unified approach. Within the framework of the theory of representations for tensor functions, we first present the general invariant forms of the constitutive laws in the ranges of plasticity, hardening, failure and creep of solids with initial or deformation-induced oriented internal structure. Specific laws are then proposed and compared with experimental results concerning composite materials and rolled metals.

1 - INTRODUCTION

Le comportement mécanique des solides présente souvent un caractère anisotrope, c'est-à-dire une variation de la réponse mécanique suivant l'orientation des sollicitations extérieures. L'origine de cette anisotropie mécanique réside dans le caractère orienté de la structure interne matérielle, dû aux modes de formation des matériaux naturels ou aux processus de fabrication des matériaux artificiels (anisotropie initiale). Lorsque le matériau est soumis à des déformations irréversibles, la structure interne évolue jusqu'à la rupture, provoquant ainsi des modifications de l'anisotropie mécanique macroscopique (écrouissage anisotrope).

Une bonne compréhension et une description fiable du comportement mécanique des solides anisotropes, en relation avec les modifications des structures internes orientées, sont indispensables dans la technologie moderne pour la sélection et l'amélioration de matériaux naturels adéquats, la fabrication de matériaux artificiels présentant des propriétés mécaniques appropriées, l'optimisation des procédés de mise en forme, l'analyse et la conception des structures et ouvrages de la science de l'ingénieur. La complexité des phénomènes observés (cf.la Conférence Générale à ce Colloque) exige une approche rationnelle et unifiée pour la modélisation des lois de comportement des solides anisotropes. Une telle approche doit être capable de prendre en compte les conditions d'invariance auxquelles sont soumises les lois de comportement anisotropes et résultant des symétries des structures internes des matériaux, de décrire les fortes non-linéarités du comportement réel des solides anisotropes et de préciser les variables indépendantes devant être observées dans les études expérimentales, afin de pouvoir identifier des lois de comportement spécifiques.

La théorie des représentations des fonctions tensorielle apporte une solution au problème de la formulation invariante des lois de comportement anisotropes non-linéaires, dans un cadre à la fois très général et unifié. Après la présentation de cette approche, nous donnons une synthèse des résultats obtenus dans la modélisation du comportement des matériaux composites et des métaux dans les domaines de la plasticité, de l'écrouissage et du fluage anisotropes.

2 - FORMULATION INVARIANTE DES LOIS DE COMPORTEMENT ANISOTROPES

Les premières applications de la théorie des représentations des fonctions tensorielles pour la formulation des lois de comportement des milieux continus remontent aux travaux de REINER [1], RICHTER [2] et PRAGER [3]. Cette approche s'était révélée nécessaire pour la prise en compte des non-linéarités dans les domaines de la viscosité, de l'élasticité et de l'écrouissage des corps isotropes. Par la suite, c'est dans le domaine de la formulation invariante des lois de comportement non-linéaires anisotropes que la théorie des représentations des fonctions tensorielles a montré son efficacité pour une approche rationnelle et unifiée.

Dans la Conférence Générale à ce Colloque, une introduction à la formulation invariante des lois rhéologiques anisotropes non-linéaires est présentée et développée plus particulièrement pour les solides orthotropes à deux dimensions. Nous rappelons ici brièvement le problème de la formulation invariante des lois anisotropes dans le cas général tridimensionnel et nous montrons comment ce problème est résolu dans l'approche par la théorie des représentations des fonctions tensorielles.

Considérons une loi de comportement exprimant le tenseur des contraintes $\underset{\sim}{T}$ par une fonction tensorielle $\underset{\sim}{F}$ des variables mécaniques $\underset{\sim}{A}_i$ (n tenseurs symétriques du second ordre) :

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{F}\left(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \cdots, \underset{\sim}{A}_n\right) \qquad (1)$$

Si le corps considéré présente des symétries matérielles caractérisées par un groupe $\mathcal{G}$ de transformations orthogonales, la loi de comportement (1) est soumise à la condition d'invariance :

$$\forall \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{G} \iff \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{A}_1\underset{\sim}{Q}^t, \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{A}_2\underset{\sim}{Q}^t, \dots, \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{A}_n\underset{\sim}{Q}^t) = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \dots, \underset{\sim}{A}_n)\underset{\sim}{Q}^t \qquad (2)$$

Pour les matériaux anisotropes, la loi de comportement (1) est donc nécessairement accompagnée de la condition (2). Une telle formulation est impraticable pour les développements ultérieurs et les applications à des comportements particuliers. C'est ici qu'apparaît le problème de la formulation invariante des lois de comportement anisotropes ; il s'agit d'établir une formulation telle que :

a) les symétries matérielles du corps soient automatiquement vérifiées ;
b) le nombre et le type des variables essentielles, c'est-à-dire des variables indépendantes associées aux arguments mécaniques tensoriels $\underset{\sim}{A}_i$ et aux propriétés de symétries matérielles du corps, soient clairement spécifiés.

La théorie des représentations des fonctions tensorielles [4,5] indique que la loi (1), soumise à la condition (2), admet la forme canonique :

$$\begin{cases} \underset{\sim}{T} = \alpha_i \underset{\sim}{G}_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \alpha_i = \alpha_i(I_1, I_2, \dots, I_p) \end{cases} \qquad (3)$$

Dans (3), le tenseur $\underset{\sim}{T}$ des contraintes est exprimé par une combinaison linéaire de n tenseurs-générateurs $\underset{\sim}{G}_i$, qui sont des tenseurs symétriqus du second ordre connus et formellement invariants dans le groupe $\mathcal{G}$ des symétries matérielles du corps considéré ; les α_i sont des fonctions scalaires quelconques arbitraires, dont les arguments $I_1, I_2, \dots, I_p$ sont des fonctions scalaires connues des variables mécaniques $\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \dots, \underset{\sim}{A}_n$ et invariantes dans le groupe $\mathcal{G}$. L'ensemble des fonctions scalaires invariantes $I_1, I_2, \dots, I_p$ constitue une base fonctionnelle associée aux variables $\underset{\sim}{A}_i$ et au groupe $\mathcal{G}$, et possède la propriété que toute fonction scalaire des $\underset{\sim}{A}_i$, invariante dans $\mathcal{G}$, peut être exprimée par une fonction à valeur unique des invariants de base I_k.

La représentation (3) est irréductible si aucun des générateurs $\underset{\sim}{G}_i$ n'est une combinaison linéaire des autres, formée avec des fonctions scalaires quelconques α_i, et si aucun des invariants de base I_k n'est une fonction à valeur unique des autres invariants de base. Une représentation irréductible (3) constitue la forme invariante la plus générale de la loi de comportement (1) soumise à la condition (2). Les fonctions scalaires arbitraires α_i sont soumises à des restrictions spécifiques pour chaque type de comportement particulier ; pour un matériau donné, elles doivent être entièrement spécifiées à partir de résultats expérimentaux.

La représentation (3) satisfait aux deux conditions énoncées ci-dessus :

a) la représentation étant invariante dans le groupe $\mathcal{G}$, les symétries matérielles sont automatiquement vérifiées ;
b) les invariants de base I_k sont les variables essentielles ; ils précisent le nombre et le type des variables indépendantes devant être observées au cours des études expérimentales, afin de pouvoir identifier la loi de comportement.

Le problème de la formulation invariante des lois de comportement anisotropes non-linéaires est ainsi résolu.

Les théorèmes de représentations des fonctions tensorielles et leurs applications à la formulation des lois de comportement ont été développées par différentes écoles : RIVLIN et ses élèves SPENCER, SMITH, WINEMAN, PIPKIN ; ADKINS ; TRUESDELL et WANG ; SEDOV et LOKHIN ; BOEHLER avec RACLIN et SAWCZUK. Des listes de références sont données dans [4,5]. Des exemples d'applications sont présentés dans la suite de cette communication.

3 - COMPORTEMENT PLASTIQUE DES SOLIDES ORTHOTROPES DE REVOLUTION

Dans ce paragraphe, nous présentons une synthèse des résultats obtenus pour la formulation invariante de la loi de comportement plastique des solides orthotropes de révolution ([4],[6],[7]) et pour la formulation des critères de rupture des matériaux composites verre/résine soumis à des contraintes complexes ([5],[8],[9]).

3.1 - Forme générale invariante de la loi de comportement plastique

Considérons un solide homogène orthotrope de révolution, le vecteur unitaire $\underset{\sim}{y}_3$ précisant la direction privilégiée du matériau. Pour un matériau composite mat de verre-résine, par exemple, le vecteur $\underset{\sim}{y}_3$ est perpendiculaire au plan des mats ; pour un composite à fibres unidirectionnelles, le vecteur $\underset{\sim}{y}_3$ représente la direction des fibres (Figure 1).

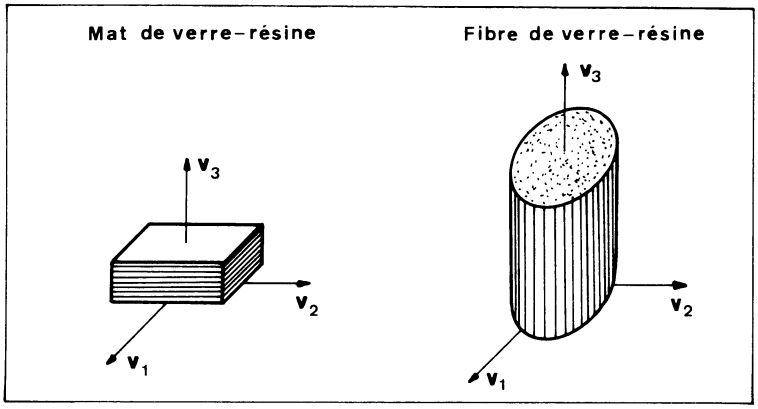


Fig. 1 - Matériaux composites orthotropes de révolution

Le groupe $\mathcal{G}$ des symétries matérielles d'un solide orthotrope de révolution est donné par :

$$\mathcal{G} = \left\{ \pm \underset{\sim}{I} \; , \; \underset{\sim}{S}_1 \; , \; \underset{\sim}{S}_2 \; , \; \underset{\sim}{S}_3 \; , \; (\underset{\sim}{M}_\alpha \; , \; 0 \leq \alpha \leq 2\pi) \right\} \tag{4}$$

où $\underset{\sim}{S}_1$, $\underset{\sim}{S}_2$, $\underset{\sim}{S}_3$ sont les symétries par rapport aux plans de normales $\underset{\sim}{y}_1$, $\underset{\sim}{y}_2$, $\underset{\sim}{y}_3$ respectivement et où $\underset{\sim}{M}_\alpha$ représente toutes les rotations autour de l'axe privilégié $\underset{\sim}{y}_3$; ($\underset{\sim}{y}_1$, $\underset{\sim}{y}_2$, $\underset{\sim}{y}_3$) est un repère orthonormé.

Nous considérons une loi de comportement plastique parfait, exprimant le tenseur $\underset{\sim}{T}$ des contraintes par une fonction $\underset{\sim}{F}$ du tenseur $\underset{\sim}{D}$ des vitesses de déformation :

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{F} (\underset{\sim}{D}) \tag{5}$$

En raison des symétries matérielles des corps considérés, la loi (5) est soumise aux conditions d'invariance :

$$\forall \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{G} \iff \underset{\sim}{F} (\underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{Q}^t) = \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{F} (\underset{\sim}{D}) \underset{\sim}{Q}^t \tag{6}$$

La forme générale invariante de la loi de comportement (5), soumise aux conditions (6), est donnée par la représentation irréductible :

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{T} = \alpha_i \underset{\sim}{G}_i \quad \Rightarrow \quad \underset{\sim}{T} = \alpha_0 \underset{\sim}{I} + \alpha_1 \underset{\sim}{M} + \alpha_2 \underset{\sim}{D} + \alpha_3 (\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{D}\underset{\sim}{M}) + \alpha_4 \underset{\sim}{D}^2 + \alpha_5 (\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D}^2 + \underset{\sim}{D}^2\underset{\sim}{M}) \\ \alpha_i = \alpha_i (I_1, \cdots, I_p) \Rightarrow \alpha_i = \alpha_i (tr\underset{\sim}{D}, tr\underset{\sim}{D}^2, tr\underset{\sim}{D}^3, tr\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D}, tr\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D}^2) \end{array}\right\} \quad (7)$$

Comme annoncé précédemment, les tenseurs-générateurs $\underset{\sim}{G}_i$ sont connus et les arguments des fonctions scalaires arbitraires α_i indiquent le nombre et le type des variables indépendantes. Dans la représentation (7), $\underset{\sim}{M}$ est le tenseur de structure du matériau orthotrope de révolution :

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{y}_3 \otimes \underset{\sim}{y}_3 \quad ; \quad M = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|_{(\cdot,\cdot,\underset{\sim}{y}_3)} \quad (8)$$

Le groupe d'invariance de $\underset{\sim}{M}$, c'est-à-dire le groupe de transformations orthogonales transformant $\underset{\sim}{M}$ en lui-même, est identique au groupe $\mathcal{G}$ de l'orthotropie de révolution.

Pour que la représentation (7) décrive effectivement le comportement plastique parfait, elle doit être homogène de degré zéro par rapport à la vitesse de déformation :

$$\frac{\partial \underset{\sim}{T}}{\partial \underset{\sim}{D}} \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{0} \quad \text{si} \quad \frac{\partial \underset{\sim}{T}}{\partial \underset{\sim}{D}} \neq \underset{\sim}{0} \quad (9)$$

En introduisant la condition d'homogénéité (9) dans la représentation (7), nous obtenons à la fois les formes générales invariantes de la loi d'écoulement :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\underset{\sim}{D}}{\sqrt{tr\underset{\sim}{D}^2}} = \psi_0 \underset{\sim}{I} + \psi_1 \underset{\sim}{M} + \psi_2 \underset{\sim}{T} + \psi_3 (\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{M}) + \psi_4 \underset{\sim}{T}^2 + \psi_5 (\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}^2 + \underset{\sim}{T}^2\underset{\sim}{M}) \\ \psi_i = \psi_i (tr\underset{\sim}{T}, tr\underset{\sim}{T}^2, tr\underset{\sim}{T}^3, tr\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}, tr\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}^2) \end{array}\right\} \quad (10)$$

et du critère de plasticité :

$$f(tr\underset{\sim}{T}, tr\underset{\sim}{T}^2, tr\underset{\sim}{T}^3, tr\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}, tr\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}^2) = 0 \quad (11)$$

Dans cette approche très générale du comportement plastique parfait des solides orthotropes de révolution, la loi d'écoulement (10) n'est pas nécessairement associée au critère (11) par la règle du potentiel plastique, qui apparaît ici comme un cas particulier. La présence du tenseur de structure $\underset{\sim}{M}$ dans l'expression de la loi d'écoulement entraîne que les directions principales du tenseur des contraintes et du tenseur des vitesses de déformation ne coïncident pas en général. Dans le critère (11), les deux invariants $tr\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}$ et $tr\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}^2$ prennent en compte l'orientation du tenseur des contraintes par rapport à l'axe privilégié $\underset{\sim}{y}_3$ du matériau orthotrope de révolution. En introduisant le déviateur $\underset{\sim}{S}$ des contraintes :

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{T} - \left(\frac{1}{3} tr\underset{\sim}{T}\right) \underset{\sim}{I} \quad (12)$$

une forme équivalente au critère (11) est donnée par :

$$g(tr\underset{\sim}{T}, tr\underset{\sim}{S}^2, tr\underset{\sim}{S}^3, tr\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{S}, tr\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{S}^2) = 0 \quad (13)$$

3.2 - Critères de rupture des matériaux composites verre-résine sous contraintes complexes

La forme générale invariante (11) ou (13) du critère d'un solide orthotrope de révolution doit être spécifiée pour chaque type de matériau particulier à partir d'observations expérimentales. Dans ce but, nous avons réalisé une série d'essais sur un composite mat de verre-résine, consistant en des compressions sous différentes pressions de confinement et des tractions simples.

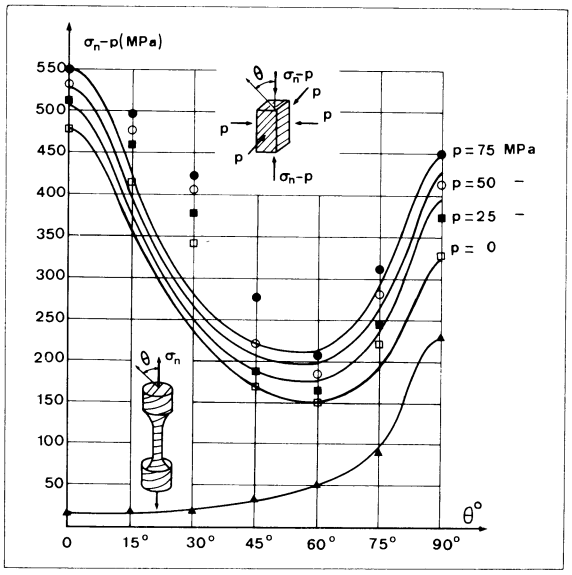


Fig. 2 - Résistances directionnelles d'un composite mat de verre-résine en compression sous pressions de confinement et en traction simple.

● ○ ■ □ ▲ : points expérimentaux

——— : critère de Tsai et Wu

Sur la Figure 2, θ représente l'orientation des échantillons (angle entre la direction de la contrainte de compression ou de traction et la normale au plan des mats), P la pression de confinement et σ_n la résistance directionnelle ; les points représentent les valeurs expérimentales moyennes obtenues.

Nous avons d'abord essayé d'appliquer le critère de Tsai et Wu, qui est communément accepté par les bureaux d'études. Pour un matériau orthotrope de révolution, la forme invariante de ce critère est donnée par ([10]) :

$$b_1 I_{\underset{\sim}{T}} + b_2 I_{\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}} + b_3 I^2_{\underset{\sim}{T}} + b_4 I^2_{\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}} + b_5 I_{\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}} I_{\underset{\sim}{T}} + b_6 I^2_{\underset{\sim}{T}} + b_7 I^2_{\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}} = 1 \qquad (14)$$

qui est bien un cas particulier de la forme générale invariante (11). Sur la Figure 2, nous présentons les courbes théoriques obtenues par l'application du critère (14). Les valeurs numériques des constantes matérielles sont données dans [9]. Nous constatons un très bon accord entre les prévisions théoriques et les données expérimentales en traction simple ; pour les essais de compression sous pressions de confinement, nous remarquons que le critère de Tsai et Wu sous-estime très largement les résistances directionnelles pour les orientations θ = 15°, 30° et 45° et ne permet donc pas de prévoir correctement le comportement réel des composites mat de verre-résine.

Cette divergence est due au fait que le critère de Tsai et Wu ne prend pas en compte un phénomène essentiel, qui est l'apparition de deux modes de rupture différents, suivant l'orientation des échantillons (Figure 3) :

+ rupture parallèle aux plans des mats pour θ = 45°,60° et 75° ;
+ rupture en-travers des plans de mats pour θ = 0°, 15°, 30°, 90°.

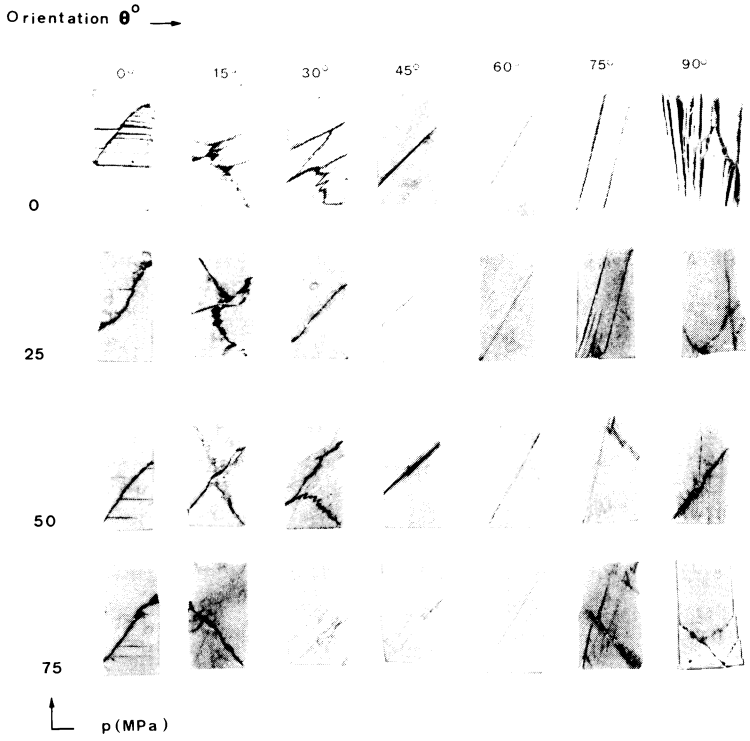


Fig. 3 - Modes de ruptures en compression sous pression de confinement

Un critère de rupture fiable doit tenir compte de ce phénomène et prédire le mode de rupture correspondant à chaque orientation du tenseur des contraintes par rapport au matériau. C'est pourquoi nous avons proposé pour les composites mat de verre-résine un critère composé de deux branches continûment dérivables, chaque branche caractérisant un mode de rupture donné. Une approche similaire a déjà été proposée par HASHIN [11] dans une étude sur les critères de rupture des composites à fibres unidirectionnelles, soumis à des contraintes de traction simple.

Pour la rupture en "mode parallèle", nous avons proposé une généralisation de la loi de frottement de Coulomb, prenant en compte l'anisotropie du matériau et les effets de la pression de confinement :

$$(\sigma_n - p)\cos\theta\sin\theta = (1 + a_0 p + a_1 p^2)(\sigma_n \cos^2\theta + p\sin^2\theta)\operatorname{tg}\varphi_0 + (1 + a_2 p + a_3 p^2)\, c_0 \qquad (15)$$

où φ_0 est l'angle de frottement pour $p = 0$ et c_0 la résistance au cisaillement sur le plan des mats. Dans le critère (15), les variables admettent les expressions invariantes :

$$
\begin{aligned}
|\sigma_n - p| \sin\theta\cos\theta &= \sqrt{\operatorname{tr}\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{S}^2 - \operatorname{tr}^2\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{S}} \\
\sigma_n \cos^2\theta + p\sin^2\theta &= \operatorname{tr}\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{S} + \frac{1}{3}\operatorname{tr}\underset{\sim}{T} \\
3p &= \operatorname{tr}\underset{\sim}{T} - \sqrt{\tfrac{3}{2}\operatorname{tr}\underset{\sim}{S}^2}
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

Au vu des relations (16), le critère (15) est bien un cas particulier de la forme générale invariante (13).

Pour la rupture en "mode en-travers", nous proposons un critère plus général, reliant la surcharge axiale $\sigma_n - p$, l'orientation θ et la pression de confinement p par :

$$
\begin{aligned}
&(1 + a_1 p + a_2 p^2)(\sigma_n - p)^2 + (b_0 + b_1 p + b_2 p^2)(\sigma_n - p)^2\cos^2\theta + \\
&\qquad + (c_0 + c_1 p + c_2 p^2)(\sigma_n - p)^2\cos^4\theta = K^2
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

où K est la constante du critère. Les variables du critère (17) admettent les expressions invariantes :

$$
0 < \sigma_n - p = \sqrt{\tfrac{3}{2}\operatorname{tr}\underset{\sim}{S}^2} \quad ; \quad \cos^2\theta = \frac{1}{3} + \frac{\operatorname{tr}\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{S}}{\sqrt{\tfrac{3}{2}\operatorname{tr}\underset{\sim}{S}^2}} \quad ; \quad 3p = \operatorname{tr}\underset{\sim}{T} - \sqrt{\tfrac{3}{2}\operatorname{tr}\underset{\sim}{S}^2}
\qquad (18)
$$

Au vu des relations (18), le critère (17) est bien un cas particulier de la forme générale invariante (13). Pour les états de contrainte en traction simple, le critère (17) se réduit en :

$$
\sigma_n^2 = \frac{K^2}{1 + b_0\cos^2\theta + c_0\cos^4\theta}
\qquad (19)
$$

Sur la Figure 4, nous avons reporté les points expérimentaux et les courbes théoriques obtenues par l'application des critères proposés. Les valeurs numériques des constantes matérielles des critères (17) à (19) sont données dans [9].

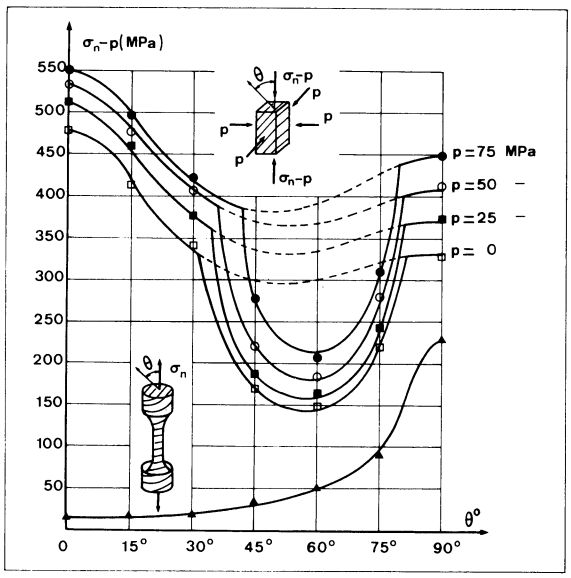


Fig. 4 - Comparaison entre les données expérimentales et les prévisions des critères proposés

Nous observons que les prévisions théoriques obtenues à partir des critères proposés sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux, quelles que soient la pression de confinement P et l'orientation θ . L'association des deux critères proposés permet d'obtenir un critère unique, composé de deux branches continûment dérivables, donnant des prévisions correctes à la fois pour les valeurs des résistances directionnelles et pour le mode de rupture correspondant à chaque orientation du tenseur des contraintes par rapport à l'axe privilégié du matériau orthotrope de révolution.

4 - COMPORTEMENT PLASTIQUE DES SOLIDES ORTHOTROPES A ECROUISSAGE ANISOTROPE

Dans ce paragraphe, nous présentons une synthèse de nos études sur la formulation invariante du comportement plastique des solides orthotropes prédéformés et sur l'écrouissage anisotrope des aciers laminés ([5], [12-15]). Par souci de concision des écritures, nous considérons ici un matériau orthotrope à 2 dimensions ; le cas tridimensionnel ne présente pas de difficultés spécifiques.

4.1 - Formulation invariante de la loi de comportement d'un solide orthotrope prédéformé

Considérons un matériau orthotrope plan, de directions privilégiées $(\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2)$. Dans le cas d'une tôle laminée, $\underset{\sim}{v}_1$ est la direction du laminage, $\underset{\sim}{v}_2$ la direction transverse. Le groupe $\mathcal{G}$ des symétries matérielles d'un solide orthotrope bidimensionnel est:

$$\mathcal{G} = \left\{ \pm \underset{\sim}{I} \, , \underset{\sim}{S}_1 \, , \underset{\sim}{S}_2 \right\} \tag{20}$$

où $\underset{\sim}{S}_1$ et $\underset{\sim}{S}_2$ sont les symétries par rapport aux axes $\underset{\sim}{v}_1$ et $\underset{\sim}{v}_2$.

Nous supposons que le matériau a d'abord été soumis à une prédéformation irréversible $\underset{\sim}{\mathcal{P}}$, de directions principales $(\underset{\sim}{E}_1, \underset{\sim}{E}_2)$, Ψ étant l'angle entre les directions $\underset{\sim}{v}_1$ et $\underset{\sim}{E}_1$. Une contrainte plane $\overline{\underset{\sim}{\mathcal{T}}}$ est ensuite appliquée, de directions principales $(\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2)$, θ étant l'angle entre les directions $\underset{\sim}{v}_1$ et $\underset{\sim}{e}_1$ (Figure 5).

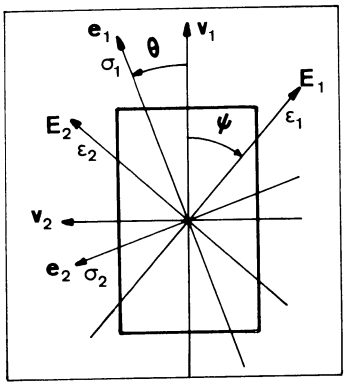


Fig. 5 - Matériau orthotrope prédéformé soumis à des contraintes planes.

Nous considérons une classe de comportement mécanique exprimant le tenseur $\overline{\underset{\sim}{\mathcal{T}}}$ des contraintes en fonction d'un tenseur cinématique $\underset{\sim}{\mathcal{D}}$ et nous supposons que la loi de comportement ne dépend de l'histoire des prédéformations que par le tenseur prédéformation actuel $\underset{\sim}{\mathcal{P}}$ de Green-Lagrange. Les tenseurs $\overline{\underset{\sim}{\mathcal{T}}}$ et $\overline{\underset{\sim}{\mathcal{D}}}$ sont introduits par rapport à la configuration prédéformée du solide, le tenseur $\underset{\sim}{\mathcal{P}}$ par rapport à la configuration initiale. Nous ramenons les tenseurs $\overline{\underset{\sim}{\mathcal{T}}}$ et $\underset{\sim}{\mathcal{D}}$ dans la configuration initiale par :

$$\underset{\sim}{\mathcal{T}} = \underset{\sim}{R}^{t}\,\overline{\underset{\sim}{\mathcal{T}}}\,\underset{\sim}{R} \quad ; \quad \underset{\sim}{\mathcal{D}} = \underset{\sim}{R}^{t}\,\overline{\underset{\sim}{D}}\,\underset{\sim}{R} \tag{21}$$

où $\underset{\sim}{R}$ est le tenseur rotation de la décomposition polaire du tenseur gradient de prédéformation. La loi de comportement du matériau prédéformé s'écrit finalement :

$$\underset{\sim}{\mathcal{T}} = \underset{\sim}{\mathcal{F}}\,(\underset{\sim}{\mathcal{D}}, \underset{\sim}{\mathcal{F}}) \tag{22}$$

En raison des symétries matérielles du corps orthotrope considéré, la loi (22) est soumise aux conditions d'invariance :

$$\forall \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{G} \iff \underset{\sim}{\mathcal{F}}\,(\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{\mathcal{D}}\,\underset{\sim}{Q}^{t}, \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{\mathcal{F}}\,\underset{\sim}{Q}^{t}) = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{\mathcal{F}}\,(\underset{\sim}{\mathcal{D}}, \underset{\sim}{\mathcal{F}})\,\underset{\sim}{Q}^{t} \tag{23}$$

La forme générale invariante de la loi de comportement (22), soumise aux conditions (23), est donnée par la représentation irréductible :

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{\mathcal{T}} = \alpha_0\,\underset{\sim}{I} + \alpha_1\,\underset{\sim}{M} + \alpha_2\,\underset{\sim}{\mathcal{D}} + \alpha_3\,\underset{\sim}{\mathcal{F}} \\ &\alpha_i = \alpha_i\,(\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\mathcal{D}}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\mathcal{D}}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\mathcal{D}}^{2}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\mathcal{F}}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\mathcal{F}}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\mathcal{F}}^{2}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\mathcal{D}}\,\underset{\sim}{\mathcal{F}}) \end{aligned} \tag{24}$$

qui spécifie les tenseurs-générateurs et précise le nombre et le type des variables indépendantes. Dans (24), $\underset{\sim}{M}$ est le tenseur de structure du matériau orthotrope bidimensionnel :

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{v}_1 \otimes \underset{\sim}{v}_1 \quad ; \quad M = \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right|_{(\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2)} \tag{25}$$

Suivant la signification physique du tenseur cinématique $\underset{\sim}{\mathcal{D}}$, la représentation (24) constitue la forme invariante la plus générale par exemple de la loi de l'élasticité non-linéaire ou de la loi de la plasticité non-linéaire d'un matériau orthotrope à écrouissage anisotrope.

Sans préciser davantage le type de loi de comportement considéré, les différents modes d'écrouissage peuvent être directement analysés à partir de la représentation (24). La discussion complète est présentée dans ([13],[14]). Nous rappelons simplement ici les principaux résultats obtenus :

a) si les directions principales de la prédéformation $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ coïncident avec les axes privilégiés initiaux du matériau ($\psi = 0$ ou $\pi/2$), l'orthotropie de directions privilégiées $(\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2)$ est conservée, mais son degré varie avec les valeurs des invariants $\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\mathcal{F}}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\mathcal{F}}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\mathcal{F}}^{2}$.

b) dans le cas général, lorsque les directions principales de $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ ne coïncident pas avec les directions privilégiées initiales $(\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2)$, la superposition de l'orthotropie initiale avec celle induite par $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ résulte en une anisotropie du type le plus général, c'est-à-dire sans symétrie ; pour certaines formes particulières des fonctions scalaires α_i de la représentation (24), la relation entre $\underset{\sim}{\mathcal{T}}$ et $\underset{\sim}{\mathcal{D}}$ reste orthotrope, mais les directions privilégiées de cette nouvelle orthotropie ne coïncident ni avec les directions privilégiées initiales, ni avec les directions principales de la prédéformation $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$.

Ces résultats montrent la puissance et l'efficacité de la théorie des représentations des fonctions tensorielles, qui permet d'analyser les caractéristiques de phénomènes très complexes, comme l'écrouissage anisotrope d'un matériau initialement orthotrope.

4.2 - Formulation invariante du comportement plastique d'un solide orthotrope à écrouissage anisotrope

La représentation (24) peut décrire le comportement plastique si $\underset{\sim}{\mathcal{D}}$ représente le tenseur des vitesses de déformation et si, comme précédemment (cf. paragraphe 3), le tenseur $\underset{\sim}{\mathcal{T}}$ des contraintes est homogène d'ordre zéro par rapport à $\underset{\sim}{\mathcal{D}}$:

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{D}} \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{0} \qquad \text{si} \qquad \frac{\partial \underset{\sim}{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{D}} \neq 0 \tag{26}$$

En introduisant la condition (26) dans la représentation (24), nous obtenons à la fois les formes générales invariantes de la loi d'écoulement :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\underset{\sim}{D}}{\sqrt{\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{D}^2}} &= \psi_0 \underset{\sim}{I} + \psi_1 \underset{\sim}{\mathbb{M}} + \psi_2 \underset{\sim}{\sigma} + \psi_3 \underset{\sim}{P} \\ \psi_i &= \psi_i \left(\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\mathbb{M}}\,\underset{\sim}{\sigma}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma}^2, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{P}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\mathbb{M}}\,\underset{\sim}{P}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{P}^2, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma}\,\underset{\sim}{P}\right) \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

et du critère de plasticité :

$$f\left(\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\mathbb{M}}\,\underset{\sim}{\sigma}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma}^2, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{P}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\mathbb{M}}\,\underset{\sim}{P}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{P}^2, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma}\,\underset{\sim}{P}\right) = 0 \tag{28}$$

Dans la loi d'écoulement (27), la relation entre $\underset{\sim}{D}$ et $\underset{\sim}{\sigma}$ est anisotrope. En général, les directions principales des tenseurs $\underset{\sim}{D}$ et $\underset{\sim}{\sigma}$ ne coïncident pas, leur orientation relative dépendant des orientations relatives des tenseurs mécaniques $\underset{\sim}{D}$ et $\underset{\sim}{P}$ et du tenseur de structure $\underset{\sim}{\mathbb{M}}$. De même que précédemment (cf. paragraphe 3), la loi d'écoulement (27) n'est pas associée au critère (28) par la règle du potentiel plastique, qui est ici un cas particulier. L'expression (28) indique le type et le nombre minimal des invariants de base devant intervenir dans la forme la plus générale du critère de plasticité d'un matériau orthotrope à écrouissage anisotrope. Les variables essentielles devant être observées dans les études expérimentales sont ainsi précisées.

A partir de la forme générale (28), nous avons proposé pour les aciers prédéformés une nouvelle généralisation du critère de Von Mises, en développant une forme homogène d'ordre deux par rapport aux contraintes et en utilisant les combinaisons les plus simples des invariants de base :

$$A_1 \mathrm{tr}^2\underset{\sim}{\sigma} + A_2 \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma}^2 + (A_3 \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\mathbb{M}}\,\underset{\sim}{\sigma} + A_4 \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma})\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\mathbb{M}}\,\underset{\sim}{\sigma} + (A_5 \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma} + A_6 \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\mathbb{M}}\,\underset{\sim}{\sigma})\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma}\,\underset{\sim}{P} = 2A_7 k^2 \tag{29}$$

où les A_i sont des polynômes d'ordre deux par rapport aux invariants $\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{P}$, $\sqrt{\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{P}^2}$ et $\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\mathbb{M}}\,\underset{\sim}{P}$. Dans le critère (29), les termes en A_1 et A_2 prennent en compte la partie isotrope du critère initial et l'écrouissage isotrope induit par $\underset{\sim}{P}$; les termes en A_3 et A_4 décrivent la partie orthotrope du critère initial et l'évolution de son degré avec $\underset{\sim}{P}$; le terme en A_5 prend en compte la nouvelle anisotropie induite par $\underset{\sim}{P}$ et le terme en A_6 décrit le couplage entre l'anisotropie initiale et l'anisotropie induite.

Pour le matériau non prédéformé ($\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{0}$), le critère (29) se réduit à un critère pour les matériaux orthotropes soumis à des contraintes planes [4] ; pour le matériau non prédéformé et isotrope, on retrouve le critère de Von Mises. Le critère (29) proposé constitue donc une double généralisation du critère de Von Mises :

+ généralisation pour les milieux initialement orthotropes ;
+ généralisation pour la description de l'anisotropie induite et de son couplage avec l'anisotropie initiale.

4.3 - Ecrouissage anisotrope des tôles d'acier doux prédéformés

Afin de tester la fiabilité du critère proposé, nous avons réalisé une série d'essais sur des tôles d'acier doux, laminées suivant trois différents taux de réduction : r = 5%, 10%, 15%. Pour chaque taux de réduction, les tôles ont été soumises à quatre différents taux de prédéformation irréversible dans la direction du laminage. Pour chaque taux de réduction au laminage et chaque taux de prédéformation, nous avons prélevé des échantillons suivant sept différentes orientations θ par rapport à la direction de prédéformation : θ = 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75° et 90°. Les échantillons ainsi obtenus ont été testés en traction simple (Figure 6).

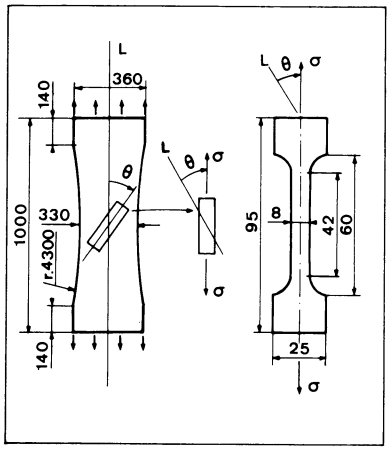


Fig. 6 - Prélèvement des échantillons testés

Les résultats obtenus pour les résistances directionnelles en traction simple sont présentés sur la Figure 7. Chaque diagramme correspond à un taux de réduction au laminage ; sur un diagramme, chaque type de point correspond à un taux de prédéformation irréversible. Nous constatons deux phénomènes principaux : pour un taux de réduction au laminage donné, le degré de l'anisotropie initiale de la tôle croît avec la prédéformation irréversible ; l'anisotropie initiale, ainsi que l'écrouissage anisotrope dû aux prédéformations, sont fortement influencés par le taux de réduction au laminage.

Dans l'hypothèse de l'incompressibilité du matériau et de la loi d'écoulement associée, le critère proposé (29) résulte en l'expression suivante pour les résistances directionnelles en traction simple :

$$R_\theta^2(\varepsilon) = \frac{2k^2(1+H\varepsilon+L\varepsilon^2)}{(\frac{2}{3}+A_1\varepsilon+A_2\varepsilon^2)+(B_0+B_1\varepsilon+B_2\varepsilon^2)\cos^2\theta+(C_0+C_1\varepsilon+C_2\varepsilon^2)\cos^4\theta} \qquad (30)$$

où ε est le taux de prédéformation irréversible et θ l'orientation des échantillons ; k est la constante du critère ; H, L, A_i, B_i et C_i sont des constantes matérielles reliées à l'écrouissage isotrope et anisotrope.

Les 11 constantes apparaissant dans (30) ont été calculées à partir de nos résultats expérimentaux pour les trois conditions de laminage ; les valeurs numériques sont données dans [12]. Les courbes théoriques obtenues, paramétrées par le taux ε de la prédéformation, sont présentées sur la Figure 7.

Pour chaque taux de réduction au laminage, nous avons quatre différents taux de prédéformation et sept différentes orientations, soit 28 points expérimentaux. Onze données sont nécessaires pour calculer les constantes du critère (30) ; dix-sept données expérimentales servent donc de test pour la fiabilité du critère proposé, pour chaque taux de réduction au laminage. Malgré la complexité des phénomènes observés, la concordance entre les prévisions théoriques et les résultats expérimentaux est excellente. Cet exemple d'application montre bien l'efficacité de la théorie des représentations des fonctions tensorielles comme approche de la formulation invariante des lois de comportement anisotropes non-linéaires.

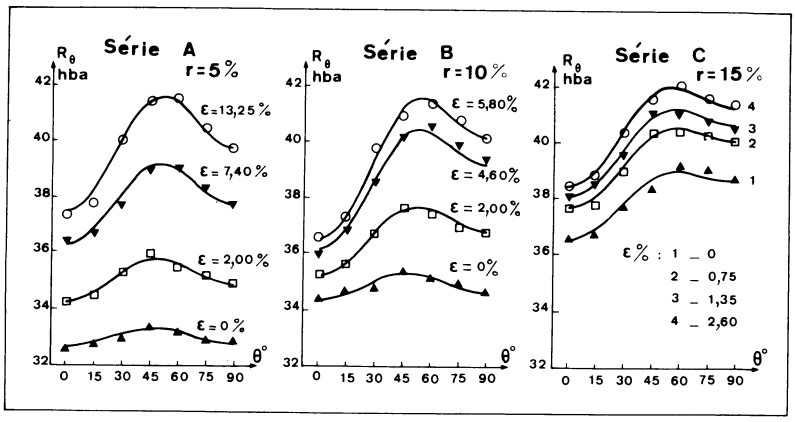


Fig. 7 - Evolution du critère en fonction du taux de réduction au laminage, du taux de prédéformation et de l'orientation des éprouvettes

5 - FLUAGE ANISOTROPE DES METAUX PREDEFORMES

Dans ce paragraphe, nous présentons une autre application de la théorie des représentations des fonctions tensorielles, en exposant brièvement une théorie du fluage anisotrope des métaux prédéformés, qui a été proposée par A. SAWCZUK et W.A. TRAMPCZYNSKI [16]. L'approche adoptée par ces auteurs diffère des approches classiques reposant sur l'hypothèse a priori de l'existence d'un potentiel dissipatif ; elle est basée sur les propriétés des fonctions tensorielles, obtenues à partir des théorèmes de représentations.

La loi de comportement considérée pour le fluage stationnaire est de la forme :

$$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}, \underset{\sim}{P}) \tag{31}$$

où $\underset{\sim}{D}$ est le tenseur des vitesses de déformation en fluage, $\underset{\sim}{T}$ le tenseur des contraintes et $\underset{\sim}{P}$ la prédéformation irréversible préalablement subie par le matériau.

Le matériau étant supposé initialement isotrope, le groupe $\mathcal{G}$ des symétries matérielles est identique au groupe orthogonal complet $\mathcal{O}$. La loi de comportement (31) est donc soumise aux conditions d'invariance :

$$\forall \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O} \iff \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{Q}^t, \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{P}\,\underset{\sim}{Q}^t) = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}, \underset{\sim}{P})\,\underset{\sim}{Q}^t \tag{32}$$

La forme invariante de la loi de comportement (31), soumise aux conditions (32), est donnée par la représentation irréductible :

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{D} &= \alpha_0 \underset{\sim}{I} + \alpha_1 \underset{\sim}{T} + \alpha_2 \underset{\sim}{T}^2 + \alpha_3 \underset{\sim}{P} + \alpha_4 \underset{\sim}{P}^2 + \alpha_5 (\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{T}) + \alpha_6 (\underset{\sim}{T}^2\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{T}^2) + \alpha_7 (\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{P}^2 + \underset{\sim}{P}^2\underset{\sim}{T}) \\ \alpha_i &= \alpha_i (\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{T}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{T}^2, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{T}^3, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{P}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{P}^2, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{P}^3, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{P}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{T}^2\underset{\sim}{P}, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{P}^2, \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{T}^2\underset{\sim}{P}^2) \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

La loi (33) est la forme invariante la plus générale du fluage anisotrope des matériaux prédéformés ; elle doit être spécifiée pour chaque type de matériau particulier. Pour les métaux, les auteurs introduisent différentes simplifications basées sur la forme des lois standards du fluage isotrope et sur l'incom-

pressibilité du matériau. Une loi de fluage anisotrope est finalement proposée sous la forme :

$$\underset{\sim}{E} = A\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}\underset{\sim}{S}^2}\right)^{m-1}\left[1-B\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}\underset{\sim}{Q}^2}\right)^{m}\right]\underset{\sim}{S} + C\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}\underset{\sim}{Q}^2}\right)^{n}\left(\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{Q}+\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{S}\right) \qquad (34)$$

où A, B, C, m, m et n sont six constantes matérielles et où $\underset{\sim}{E}$, $\underset{\sim}{S}$ et $\underset{\sim}{Q}$ sont respectivement les déviateurs des tenseurs des vitesses de déformation en fluage, du tenseur des contraintes et du tenseur prédéformation :

$$\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{D} - \left(\tfrac{1}{3}\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{D}\right)\underset{\sim}{I} \;;\; \underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{T} - \left(\tfrac{1}{3}\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{T}\right)\underset{\sim}{I} \;;\; \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{P} - \left(\tfrac{1}{3}\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{P}\right)\underset{\sim}{I} \qquad (35)$$

Dans la loi de comportement (34), le premier terme en $\underset{\sim}{S}$ prend en compte les effets de la prédéformation préservant la coaxialité entre le déviateur des contraintes et le déviateur de la vitesse de déformation ; il s'agit donc d'un terme d'écrouissage isotrope. Le terme en $(\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{Q}+\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{S})$ décrit l'anisotropie induite dans le fluage par la prédéformation, puisque ce terme entraîne en général la non-coïncidence des directions principales de $\underset{\sim}{S}$ et $\underset{\sim}{E}$; il s'agit donc d'un terme d'écrouissage anisotrope.

Lorsque l'écrouissage anisotrope est uniquement du type cinématique, les auteurs proposent une forme simplifiée pour la loi de comportement (34) :

$$\underset{\sim}{E} = A\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}\underset{\sim}{S}^2}\right)^{m-1}\left[1-B\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}\underset{\sim}{Q}^2}\right)^{m}\right]\left(\underset{\sim}{S}-\alpha\underset{\sim}{Q}\right) \qquad (36)$$

où α est le paramètre d'écrouissage cinématique.

La loi (36) a été testée à partir des résultats d'une série d'essais sur du cuivre [17]. Des tôles de cuivre ont été soumises à deux taux de prédéformations irréversibles en traction : ε = 3,5% et 7,3%. Dans chaque tôle prédéformée, des échantillons ont été prélevés suivant sept orientations différentes (Figure 8) et soumis à des essais de fluage sous une charge constante de 111 MPa et à une température de 300°C. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 9, où la vitesse minimum de fluage en % par heure est donnée en fonction de l'orientation des échantillons. Nous constatons deux phénomènes : d'une part, les vitesses de fluage diminuent lorsque la prédéformation augmente ; d'autre part, la prédéformation entraîne une anisotropie de la vitesse de fluage.

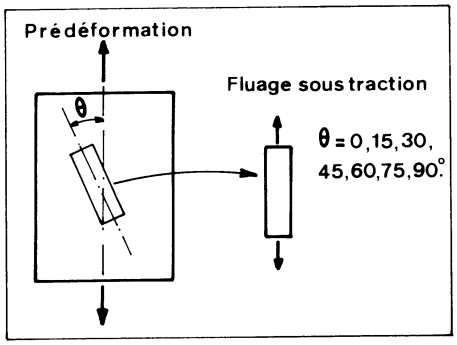


Fig. 8 - Prélèvement des échantillons testés en fluage sous traction

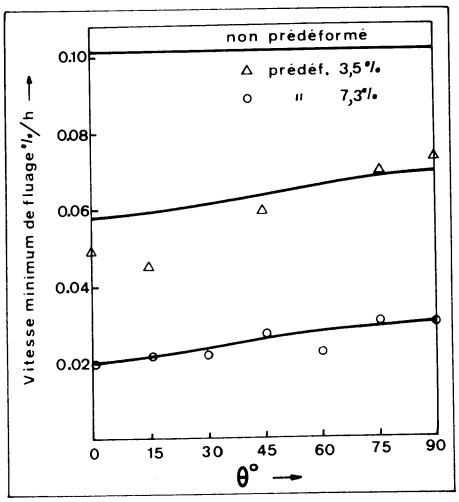


Fig. 9 - Vitesses de fluage d'un cuivre prédéformé ; points expérimentaux et courbes théoriques (d'après [16])

Les cinq constantes matérielles de la loi de fluage anisotrope (36) ont été calculées à partir des données expérimentales. Les courbes théoriques obtenues sont présentées sur la Figure 9. Les prévisions théoriques sont qualitativement bonnes. Le modèle pourra être amélioré en considérant une loi d'écrouissage anisotrope plus générale que celle de l'écrouissage cinématique.

6 - CONCLUSIONS

Les exemples de formulation invariante de lois de comportement anisotropes non-linéaires que nous avons présentés montrent que la théorie des représentations des fonctions tensorielles est un outil puissant et efficace pour le développement de lois très générales, prenant en compte les propriétés de symétries matérielles des corps à structures internes orientées et permettant de décrire d'une manière unifiée les phénomènes très complexes du comportement mécanique des solides anisotropes. Les formes générales des lois de comportement anisotropes ainsi établies doivent être spécifiées pour chaque classe de matériaux à partir des observations expérimentales. Les lois présentées n'ont pas pu être entièrement testées, en raison des lacunes qui apparaissent dans les études expérimentales sur le comportement mécanique des solides anisotropes, en particulier dans les domaines des sollicitations complexes et des grandes déformations irréversibles.

Le développement de la Rhéologie des Matériaux Anisotropes exige maintenant des études expérimentales cohérentes et bien axées, capables d'évaluer correctement la réponse multiaxiale des solides anisotropes soumis à de grandes déformations irréversibles, et guidées par les progrès récents dans le domaine de la structure mathématique des lois de comportement anisotropes non-linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

1. REINER, M., A mathematical theory of dilatancy, Amer. J. Math., 67 (1945) : 350-362.
2. RICHTER, H., Das isotrope Elastizitätsgesetz, ZAMM, 28 (1948) : 205-209.
3. PRAGER, W., Strain hardening under combined stress, J. Appl. Phys., 16 (1945) : 837-840.
4. BOEHLER, J.P., Lois de comportement anisotrope des milieux continus, Journal de Mécanique, 17, 2 (1978) : 153-190.
5. RACLIN, J., Contributions théoriques et expérimentales à l'étude de la plasticité, de l'écrouissage et de la rupture des solides anisotropes, Thèse de Doctorat ès-Sciences, Grenoble, 1984.
6. BOEHLER, J.P., Contributions théoriques et expérimentales à l'étude des milieux plastiques anisotropes, Thèse de Doctorat ès-Sciences, Grenoble, 1975.
7. BOEHLER, J.P. and SAWCZUK, A., On Yielding of oriented solids, Acta Mechanica, 27 (1977) : 185-204.
8. BOEHLER, J.P., RACLIN, J. et DELAFIN, M., Comportement des composites verre-résine à l'état critique, Compte-rendu de fin d'étude, Contrat DGRST, Action Concertée Mécanique, 1981.
9. BOEHLER, J.P. and RACLIN, J., Failure criteria for glass-fiber reinforced composites under confining pressure, Journal of Structural Mechanics, 13, 4 (1985).

10. BOEHLER, J.P. and DELAFIN, M., Failure criteria for unidirectional fiber-reinforced composites, in: J.P. BOEHLER ed., Mechanical Behavior of Anisotropic Solids, Proc. Euromech Colloquium 115 - Colloque International 295 du CNRS, Martinus Nijhoff, The Hague, and Editions du CNRS, Paris (1982) : 449-470.

11. HASHIN, Z., Failure criteria for unidirectional fiber composites, J. Applied Mechanics, 47 (1980) : 329-334.

12. BOEHLER, J.P., RACLIN, J. et BENEFICE, P., Etude des champs cinématiques non-homogènes, de l'écrouissage et de la fissuration des milieux anisotropes, Rapport de contrat ATP Comportement Mécanique des Solides, 1981.

13. BOEHLER, J.P. and RACLIN, J., A unified theoretical and experimental study of anisotropic hardening, Trans. 6th Int. Conf. on SMIRT, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1981, Invited Lecture n° L 3/2.

14. BOEHLER, J.P. et RACLIN, J., Ecrouissage anisotrope des matériaux orthotropes prédéformés, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Numéro Spécial (1982) : 23-44.

15. BOEHLER, J.P. and RACLIN, J., Anisotropic hardening of prestrained rolled sheet-steel, in: Current Advances in Mechanical Design and Production, Proc. 2nd Cairo University MDP Conference, Cairo University (1982) : 483-492.

16. SAWCZUK, A. and TRAMPCZYNSKI, W.A., A theory of anisotropic creep after plastic pre-straining, Int. J. Mech. Sci., 24, 11 (1982) : 647-653.

17. TRAMPCZYNSKI, W.A., The influence of cold work on the creep of copper under biaxial states of stress, Acta. Met., 30 (1982) : 1035-1041.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials*
CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 69-78

Rhéologie anisotrope en grandes déformations

Anisotropic rheology at finite strain

A. DOGUI, F. SIDOROFF

Laboratoire de Mécanique des Solides – Ecole Centrale de Lyon – Ecully
GRECO « Grandes Déformations et Endommagement »

RESUME

Nous présentons une discussion générale des problèmes que pose la description de l'anisotropie des matériaux plastiques ou viscoplastiques anisotropes en grandes déformations. Après avoir montré que les écritures habituelles - eulérienne et lagrangienne - ne conviennent pas, nous proposons d'écrire la loi de comportement dans un référentiel tournant.Nous montrons ensuite que le référentiel corotationnel ne convient pas et nous discutons le choix d'un autre référentiel tournant. Nous illustrons ces résultats sur deux exemples relatifs à l'anisotropie initiale et l'anisotropie induite.

ABSTRACT

A general discussion of the problems arising from the description of plastic or viscoplastic anisotropic behaviour under finite strain is presented. Since the usual eulerian and lagrangian formulations cannot be used, a rotating frame formalism is proposed. It is shown that the corotational frame is not a good one and the choice of this rotating frame is then discussed. These results are illustrated on two examples related to induced and initial anisotropy.

1 - INTRODUCTION

Si l'on s'en tient à la définition première du terme, la rhéologie, science des écoulements, ne peut être qu'isotrope : un des premiers succès de la mécanique des milieux matériellement simples de Noll {1} réside en effet dans la classification des matériaux d'après leur groupe d'isotropie $\mathcal{G}$, c'est-à-dire d'après leurs symétries matérielles. Si l'on excepte le cas particulier - quelque peu exotique - des sous-fluides de Wang, on ne peut se trouver que dans l'un des trois cas suivants {2} :

. solide anisotrope : $\mathcal{G}$ est un sous groupe strict du groupe orthogonal $\mathcal{O}$
. solide isotrope : $\mathcal{G}$ est le groupe orthogonal entier $\mathcal{U}$
. fluide : $\mathcal{G}$ est le groupe unimodulaire

Puisque $\mathcal{O} \subset \mathcal{U}$, un fluide sera donc nécessairement isotrope. Par ailleurs l'idée même d'écoulement implique que les déformations puissent devenir infinies sous contrainte finie, ce qui est une des caractéristiques traditionnelles de l'état fluide. Il y a donc un certain paradoxe à parler de rhéologie anisotrope.

D'un point de vue physique, ce paradoxe a été rencontré - et résolu - une première fois dans le cas des cristaux liquides. La solution consiste alors à élargir le cadre dynamique des milieux matériellement simples en prenant en compte la microstructure du matériau. On obtient ainsi, par exemple, le modèle de fluide anisotrope introduit par Ericksen {3}. Les polémiques récentes sur l'écrouissage cinématique en grandes déformations plastiques {4 - 6} traduisent une nouvelle manifestation de ce paradoxe : un matériau plastique ou viscoplastique présente en effet certains caractères fluides (déformations infinies sous contraintes finies, déformations permanentes après relâchement des contraintes..) et la prise en compte d'une anisotropie quelconque - qu'elle soit induite ou initiale - soulève les difficultés conceptuelles évoquées plus haut. Pourtant le cadre dynamique des milieux matériellement simples n'est pas en cause et il n'y a pas de microstructure - plus précisément, il peut y avoir une microstructure mais celle-ci est alors dynamiquement transparente {7} . Le travail que nous présentons ici est consacré à une discussion générale de ce problème et de quelques solutions possibles à la lumière des travaux récents sur la plasticité en grandes déformations. Pour mieux dégager les idées essentielles et minimiser les aspects techniques, nous nous placerons délibérement dans un cadre très simple : matériau rigide plastique ou viscoplastique standard généralisé et incompressible.

2 - LE CADRE GENERAL

Avant d'aborder les grandes déformations, nous allons présenter, en petites déformations, le cadre général des modèles qui nous intéressent ici ainsi que quelques cas particuliers qui nous serviront d'exemples. Ce type de modèle est en effet classique et déja largement utilisé en petites déformations. En fait, les problèmes que nous discutons ici sont apparus lorsque, pour aborder l'anisotropie d'écrouissage, on a cherché à étendre aux grandes déformations le plus simple d'entre eux, le modèle de Prager (écrouissage cinématique linéaire).

Nous nous interessons donc aux modèles rigides plastiques ou viscoplastiques standard généralisés. Nous supposons de plus que l'écrouissage pourra être décrit par une variable interne tensorielle symétrique α_{ij} . L'énergie de déformation w sera donc fonction des variables internes d'écrouissage α_{ij} et la dissipation ϕ s'écrira sous la forme :

$$\phi = \sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij} - X_{ij}\,\dot{\alpha}_{ij} \qquad X_{ij} = \partial w / \partial \alpha_{ij} \qquad (1)$$

Nous introduisons ensuite un potentiel de dissipation Ω fonction convexe de $\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\alpha}_{ij}$ qui nous permettra d'écrire :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} \qquad X_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\alpha}_{ij}} \qquad (2)$$

ou en introduisant le potentiel conjugué $\omega(\sigma_{ij}, X_{ij})$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \dot{\alpha}_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial X_{ij}} \qquad (3)$$

Dans le cas plastique, la fonction Ω est positivement homogène de degré un et ω sera la fonction indicatrice d'un convexe que nous supposerons défini par une fonction seuil de la forme

$$\bar{\sigma}(\sigma_{ij}, X_{ij}) - \sigma_0 \leqslant 0 \qquad (4)$$

où la fonction $\bar{\sigma}$ peut être interprétée comme une contrainte équivalente. On aura donc :

$$\begin{aligned} &\omega = 0 \quad \text{si} \quad \bar{\sigma} \leqslant \sigma_0 \;,\; +\infty \;\text{sinon} \\ &\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\alpha}_{ij} = 0 \qquad \text{si} \quad \bar{\sigma} < \sigma_0 \qquad (5) \\ &\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \dot{\alpha}_{ij} = -\lambda \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X_{ij}} \qquad \text{si} \quad \bar{\sigma} = \sigma_0 \end{aligned}$$

Dans le cas viscoplastique au contraire, la fonction ω sera différentiable et le sous-différentiel de (3) deviendra une dérivée usuelle. Plus précisément nous envisagerons la viscoplasticité de Norton-Hoff

$$\omega = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}\right)^{n+1}$$
$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}\right)^{n} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \dot{\alpha}_{ij} = -\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}\right)^{n} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X_{ij}} \tag{6}$$

et la viscoplasticité de Bingham- Perzyna

$$\omega = \frac{1}{2\eta} \langle \bar{\sigma} - \sigma_0 \rangle^2$$
$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{\eta} \langle \bar{\sigma} - \sigma_0 \rangle \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \dot{\alpha}_{ij} = -\frac{1}{\eta} \langle \bar{\sigma} - \sigma_0 \rangle \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X_{ij}} \tag{7}$$

La plasticité ou la viscoplasticité parfaite s'obtiendra en supprimant les variables d'écrouissage. Pour fixer les idées, nous nous limiterons à un critère quadratique et indépendant de la pression hydrostatiques ce qui donnera dans le cas isotrope la contrainte équivalente de Von Mises :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{s_{ij}\, s_{ij}} \qquad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\,\delta_{ij} \tag{8}$$

et dans le cas orthotrope la contrainte équivalente de Hill

$$\bar{\sigma} = \left\{ F(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 2L\,\sigma_{23}^2 + 2M\,\sigma_{13}^2 + 2N\,\sigma_{12}^2 \right\}^{1/2} \tag{9}$$

Dans le cas de l'écrouissage cinématique X_{ij} est interprétée comme étant une contrainte interne. Nous prendrons donc dans le cas isotrope

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{(s_{ij} - X_{ij})(s_{ij} - X_{ij})} \qquad X_{ij} = \beta\, \alpha_{ij} \tag{10}$$

ce qui donnera directement $\dot{\alpha}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ soit par intégration $\alpha_{ij} = \varepsilon_{ij}$
Nous pourrions écrire de la même manière un critère de Hill avec écrouissage cinématique mais nous nous limiterons aux trois cas (8), (9) et (10) respectivement représentatifs du cas isotrope, de l'anisotropie initiale et de l'anisotropie induite. Ces trois cas pourront ensuite être indifféremment injectés dans (5), (6) ou (7).

3 - ECRITURE LAGRANGIENNE ET EULERIENNE

L'extension aux grandes déformations des lois de comportement décrites précédemment pose le problème de l'objectivité : toute loi de comportement doit être objective, c'est-à-dire invariante par changement de référentiel {1} La manière la plus simple d'assurer cette objectivité consiste à travailler en représentation lagrangienne, c'est-à-dire dans la configuration de Lagrange en utilisant le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\mathbb{S}$ et le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\mathbb{E}$. En introduisant un tenseur d'écrouissage lagrangien α_0 , l'inégalité de Clausius-Duhem (1) se généralise trivialement

$$\phi = \mathbb{S} : \dot{\mathbb{E}} - X_0 : \dot{\alpha}_0 \qquad X_0 = \frac{\partial w}{\partial \alpha_0} \tag{11}$$

et toutes les équations écrites en petites déformations restent valables à condition de remplacer simplement σ_{ij} , $\dot{\varepsilon}_{ij}$, X_{ij} et α_{ij} respectivement par $\mathbb{S}$, $\dot{\mathbb{E}}$, X_0 et α_0 . Dans le cas le plus simple - plasticité ou viscoplasticité parfaite isotrope - on utilise la contrainte équivalente de Von Mises (8) qui deviendra donc :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbb{S}^D : \mathbb{S}^D} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, S_{II}^D \tag{12}$$

où l'on note $\mathbb{M}^D$ le déviateur d'un tenseur $\mathbb{M}$ et M_{II} sa norme euclidienne. La loi de comportement (5) pourra alors s'écrire :

$$\dot{\mathbb{E}} = (\dot{E}_{II} / S^D_{II}) \, \mathbb{S}^D \qquad (13)$$

avec $\dot{E}_{II} = \sqrt{3/2}\,\lambda$ indéterminé. Cette écriture reste également valable en viscoplasticité à condition de remarquer que le scalaire $\dot{E}_{II}$ est alors fonction de S^D_{II} par (6) ou (7).

Malheureusement, cette loi de comportement, qui satisfait au principe d'objectivité, n'est pas mécaniquement satisfaisante. En effet la condition $\dot{\varepsilon}_{ii} = 0$ qui traduisait en petites déformations l'incompressibilité, devient alors $\mathrm{tr}\,\dot{\mathbb{E}} = 0$. Cette liaison n'est pas l'incompressibilité et n'a aucune signification physique. En particulier, en traction simple, elle conduit à l'annulation du volume pour un allongement $\ell/\ell_0 = \sqrt{3}$. De manière similaire, la contrainte équivalente de Von Mises (12) est sensible à la pression hydrostatique : sous une déformation $\mathbb{E}$, une pression hydrostatique se traduit par :

$$\mathbb{S} = -p\, J\, (\mathbb{1} + 2\mathbb{E})^{-1} \qquad J^2 = \det\,(\mathbb{1} + 2\mathbb{E}) \qquad (14)$$

de sorte que le déviateur de $\mathbb{S}$ est non nul conduisant donc d'après (12) à une plastification sous pression hydrostatique. Il n'est donc pas possible de transcrire directement le formalisme petites déformations en variables lagrangiennes.

Dans le cas isotrope, l'extension grandes déformations des lois du § 2 est bien connue : il suffit d'utiliser un formalisme eulérien utilisant le tenseur des contraintes de Cauchy $\mathbb{T}$ et le tenseur des taux de déformations $\mathbb{D}$. En introduisant une variable interne eulérienne α, on peut en effet écrire l'inégalité de Clausius-Duhem sous la forme générale

$$\phi = \mathbb{T} : \mathbb{D} - X \dot{\alpha} \qquad X = \partial w / \partial \alpha \qquad (15)$$

En plasticité parfaite isotrope, α disparaît et on introduit la contrainte équivalente de Von Mises :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbb{T}^D : \mathbb{T}^D} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, T^D_{II} \qquad (16)$$

Les lois de comportement (5) (6) ou (7) pourront alors s'écrire :

$$\mathbb{D} = (D_{II} / T^D_{II})\, \mathbb{T}^D \qquad (17)$$

écriture formellement analogue à (13) mais qui est, elle, tout-à-fait raisonnable. En effet, la condition $\mathrm{tr}\,\mathbb{D} = 0$ traduit bien l'incompressibilité tandis que la pression hydrostatique n'intervient pas dans $\bar{\sigma}$. Ces lois - plastiques ou viscoplastiques - sont bien les lois classiques utilisées en mise en forme.

Dans le cas isotrope le bon formalisme est le formalisme eulérien. La raison en est claire : ce sont les tenseurs eulériens $\mathbb{T}$ et $\mathbb{D}$ qui ont une signification physique. Au contraire, les tenseurs lagrangiens $\mathbb{S}$ et $\dot{\mathbb{E}}$ déforment cette signification physique par la déformation totale qui n'est pas une variable significative.

4 - ECRITURE EN REFERENTIEL TOURNANT

Cette approche eulérienne n'est cependant utilisable que pour les matériaux isotropes. En présence d'une quelconque anisotropie - qu'elle soit initiale ou induite - la formulation eulérienne introduite plus haut ne satisfait plus au principe d'indifférence matérielle : pour un matériau initialement anisotrope, il est clair que la contrainte équivalente de Hill obtenue en introduisant le tenseur des contraintes de Cauchy $\mathbb{T}$ dans (9) n'est pas une quantité objective tandis que dans le cas de l'écrouissage cinématique, il est bien connu que le flux thermodynamique $\dot{\alpha}$ qui intervient dans (15) n'est pas objectif. Les tenseurs eulériens $\mathbb{T}$ et $\mathbb{D}$, physiquement significatifs par leurs valeurs propres, voient cette signification déformée par la rotation d'ensemble du milieu continu. Dans le cas isotrope, la loi de comportement est invariante par rotation et ces rotations parasites n'ont pas d'éffet mais cette difficulté réapparait dans le cas anisotrope.

En d'autres termes, la description physiquement satisfaisante doit être eulérienne par ses valeurs propres mais lagrangienne par son orientation. Il convient donc de représenter les contraintes par exemple par un tenseur $\overline{\mathbb{T}}$ lagrangien mais ayant comme valeurs propres les contraintes principales, c'est-à-dire les valeurs propres du tenseur de Cauchy $\mathbb{T}$. Le tenseur $\overline{\mathbb{T}}$ se déduira donc de $\mathbb{T}$ par une rotation $\overline{\mathbb{Q}}^T$. Il faudra donc étendre les lois de comportement du § 2 en remplaçant les tenseurs σ_{ij} , $\dot{\varepsilon}_{ij}$, α_{ij} et X_{ij} par :

$$\overline{\mathbb{T}} = \overline{\mathbb{Q}}^T \mathbb{T} \overline{\mathbb{Q}} \qquad \overline{\mathbb{D}} = \overline{\mathbb{Q}}^T \mathbb{D} \overline{\mathbb{Q}} \qquad \overline{\alpha} = \overline{\mathbb{Q}}^T \alpha \overline{\mathbb{Q}} \quad \ldots \tag{18}$$

où $\overline{\mathbb{Q}}$ est une rotation choisie pour rendre les tenseurs $\overline{\mathbb{T}}$, $\overline{\mathbb{D}}$, $\overline{\alpha}$ invariants par changement de référentiel. Ceci revient à écrire les lois petites déformations dans un référentiel $\overline{\mathcal{R}}$ tournant localement avec la matière

$$x = \overline{\mathbb{Q}}(t)\, \overline{x} \tag{19}$$

En plasticité parfaite isotrope, cela ne change rien à ce qui a été fait précédemment car l'isotropie permet d'écrire les lois de comportement, (17) par exemple, dans n'importe quel référentiel. Dans le cas de l'écrouissage cinématique, la dissipation pourra s'écrire :

$$\phi = \overline{\mathbb{T}} : \overline{\mathbb{D}} - \overline{X} : \dot{\overline{\alpha}} = \mathbb{T} : \mathbb{D} - X : \mathring{\alpha}$$
$$\mathring{\alpha} = \overline{\mathbb{Q}}\, \dot{\overline{\alpha}}\, \overline{\mathbb{Q}}^T = \dot{\alpha} - \overline{\Omega}\alpha + \alpha\overline{\Omega} \qquad \overline{\Omega} = \dot{\overline{\mathbb{Q}}}\, \overline{\mathbb{Q}}^T \tag{20}$$

Compte tenu de l'isotropie des fonctions w et $\overline{\sigma}$, on pourra donc encore écrire un formalisme eulérien à condition d'utiliser pour $\dot{\alpha}_{ij}$ une dérivée objective $\mathring{\alpha}$. Il faut cependant remarquer que l'on ne peut pas choisir n'importe quelle dérivée objective. La dérivée $\mathring{\alpha}$ est une dérivée en rotation, ce qui assure en autre :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} : \dot{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} : \mathring{\alpha} \tag{21}$$

pour toute fonction f isotrope. Cette condition est nécessaire pour pouvoir écrire (20) ainsi que pour obtenir une loi incrémentale. En particulier, les dérivées convectives sont exclues. Dans le cas anisotrope, enfin, on ne peut plus utiliser un formalisme eulérien et il est nécessaire de travailler dans $\overline{\mathcal{R}}$

5 - REFERENTIEL COROTATIONNEL

Il reste à choisir le référentiel tournant $\overline{\mathcal{R}}$ et la rotation $\overline{\mathbb{Q}}(t)$ ou, dans le cas particulier de l'écrouissage cinématique, la dérivée en rotation objective $\mathring{\alpha}$. Parmi les dérivées objectives classiques, la seule dérivée en rotation est celle de Jaumann

$$\alpha^J = \dot{\alpha} - W\alpha + \alpha W \qquad W = \left(\dot{\mathbb{F}}\, \mathbb{F}^{-1}\right)^A \tag{22}$$

Le référentiel tournant correspondant est le référentiel corotationnel dans lequel le tenseur taux de rotation est identiquement nul. Il est donc défini par :

$$\overline{W} = 0 \qquad \frac{d\overline{\mathbb{Q}}}{dt} = W\overline{\mathbb{Q}} \qquad \mathbb{Q}(0) = \mathbb{1} \tag{23}$$

C'est le choix qui apparaît le plus naturel, et ce d'autant plus que l'on sait que la dérivée de Jaumann s'introduit naturellement lorsuqe l'on cherche à étendre les relations de Prandtl-Reuss en grandes déformations élasto-plastiques {8}. C'est donc tout naturellement cette dérivée de Jaumann qui a été utilisée pour étendre aux grandes déformations le modèle de Prager - modèle plastique d'écrouissage cinématique basé sur (5) et (10) avec $X = \beta\alpha$:

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\mathbb{T}^D - X\right)_{II} = \sigma_0$$
$$\mathbb{T}^D = X + \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sigma_0}{D_{II}}\mathbb{D} \qquad X^J = \beta\mathbb{D} \tag{24}$$

Malheureusement, ce modèle naturel conduit à un comportement physiquement déraisonnable en glissement simple {4} :

$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{T} = \begin{bmatrix} N_1 & \tau & 0 \\ \tau & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

On obtient alors en effet par intégration de (24) :

$$\tau = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} + \frac{\beta}{2} \sin\gamma \qquad N_1 = -N_2 = \frac{\beta}{2}(1 - \cos\gamma) \tag{26}$$

Le référentiel corotationnel a également été utilisé en {9}, associé au critère de Hill (9) pour modéliser l'anisotropie initiale en plasticité grandes déformations. Mais là encore, on peut montrer qu'il conduit à un comportement oscillatoire en glissement simple {10} .

L'origine de ces oscillations est assez claire : on sait que dans le glissement simple (25), le référentiel corotationnel tourne régulièrement avec une "vitesse angulaire" ω constante égale à 1/2. En particulier, il réalise un tour complet chaque fois que γ varie de 4π . La variation oscillatoire de τ correspond donc directement à la variation de la limite élastique avec l'orientation du chargement,cette variation découlant elle-même de l'anisotropie.
En d'autres termes, un référentiel tournant est un référentiel qui d'une certaine manière tourne avec la matière ; le référentiel corotationnel est celui qui, sur un intervalle de temps infiniment court, suit le mieux la matière, mais il la suit malheureusement très mal sur les intervalles de temps finis qui nous intéressent.

6 - REFERENTIEL EN ROTATION PROPRE

Une fois exclue la dérivée de Jaumann et le référentiel corotationnel, la gamme de choix devient assez large et on trouvera en {4} une revue des principales possibilités. Nous privilégierons ici le référentiel et la dérivée en rotation propre issues de la rotation $\mathbb{R}$ associée à la décomposition polaire du tenseur gradient de la déformation :

$$\mathbb{F} = \mathbb{R}\mathbb{U} = \mathbb{V}\mathbb{R} \qquad \mathbb{R} = \mathbb{F}(\mathbb{F}^T\mathbb{F})^{-1/2} \tag{27}$$

En effet, comme nous l'avons souligné plus haut, le référentiel corotationnel est construit pour suivre incrémentalement la rotation de la matière alors que nous avons besoin, pour décrire l'anisotropie, de suivre cette rotation globalement. Il est donc naturel de choisir la rotation $\mathbb{R}$ qui est justement construite pour cela. Tous les autres choix reviennent plus ou moins à privilégier certaines directions matérielles {4}. Nous poserons donc :

$$\overline{\Omega} = \dot{\mathbb{R}}\mathbb{R}^T \qquad \overset{\circ}{\alpha}{}^R = \dot{\alpha} - \dot{\mathbb{R}}\mathbb{R}^T\alpha + \alpha\dot{\mathbb{R}}\mathbb{R}^T \tag{28}$$

On utilise habituellement pour rejeter ce choix des arguments de deux ordres. D'un point de vue technique d'abord, son utilisation est relativement laborieuse puisqu'il faut réaliser explicitement la décomposition polaire (27) ou bien calculer $\dot{\mathbb{R}}\mathbb{R}^T$, ce qui n'est guère plus facile. Ces difficultés existent mais elles sont surmontables :nous donnons par exemple en {10} une forme calculable de $\dot{\mathbb{R}}\mathbb{R}^T$. D'un point de vue plus fondamental on objecte le fait que la dérivée en rotation propre et l'évolution du référentiel associé dépendent de la configuration de référence choisie, ce qui n'est pas admissible pour un matériau de type fluide ou plastique pour lesquels il existe plusieurs configurations de référence équivalentes. Cependant cette objection tombe car la notion même d'anisotropie n'est définie que par rapport à une configuration de référence privilégiée.

En glissement simple, l'utilisation de ce référentiel supprime les oscillations indésirables. Pour le modèle de Prager, cela a été montré en {4} et nous envisagerons au prochain paragraphe le cas du modèle initialement anisotrope basé sur {5} et{10}. L'absence d'oscillation tient au fait que dans un glissement simple, le référentiel en rotation propre tourne moins que le référentiel corotationnel et se stabilise pour $\gamma \to \infty$.

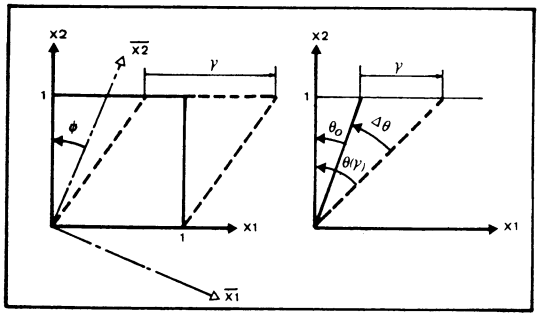
En effet son orientation ψ est donnée en fonction de γ par

$$\psi = \text{Arc tg}\,\frac{\gamma}{2} \qquad \omega = \frac{d\psi}{d\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+4}} \tag{29}$$

par opposition à $\psi = \gamma/2$ pour le référentiel corotationnel.

7 - ANISOTROPIE INITIALE

Dans le cas des modèles avec écrouissage cinématique, Dafalias a présenté en {4} l'étude complète du glissement simple. Nous nous proposons ici de réaliser une étude similaire pour les modèles initialement orthotropes associés à (5) et (9)



a. Référentiel tournant b. Rotation matérielle

Fig.1 Glissement simple

Nous considérons donc dans le repère cartésien d'observation Ox_1x_2 le glissement simple défini par (25) et nous notons $\psi(\gamma)$ l'angle définissant l'orientation du référentiel tournant pour une valeur quelconque de γ - Figure 1a. On écrit ensuite ensuite la loi de comportement :

$$\overline{\sigma} = \left\{\overline{T} : H : \overline{T}\right\}^{1/2} = \sigma_o \qquad \overline{T} = \overline{Q}^T T \overline{Q}$$
$$\mathbb{D} = \overline{Q}\,\overline{\mathbb{D}}\,\overline{Q}^T = \frac{\lambda}{\sigma_o}\,\overline{Q}\left(H : \overline{Q}^T T \overline{Q}\right)\overline{Q}^T \tag{30}$$

où H est le tenseur du 4è ordre qui definit le critère de plasticité (9). On peut alors calculer les composantes de $\mathbb{D}$ en fonction de celles de T et de l'angle ψ définissant Q . L'annulation de D_{11} et D_{22} permet de calculer N_1 et N_2 en fonction de τ et on obtient ensuite τ en reportant dans le critère. Tous calculs faits, on trouve , {10}

$$\tau = g(\psi)\,\tau_o \qquad g(\psi) = \left[1 + (a-1)\sin^2 2\psi\right]^{1/2}$$
$$\tau_o = \sigma_o/\sqrt{2}\,N \qquad a = (F+G)N/2(FG+GH+HF) \tag{31}$$

La fonction $g(\psi)$ ne dépend que de l'anisotropie du matériau et elle traduit simplement le fait que le seuil τ en glissement simple dépend de l'orientation ψ de ce glissement par rapport au système d'axe $\overline{x}_1\overline{x}_2$. Au contraire, la fonction $\psi(\gamma)$ ne dépendra que du choix du référentiel tournant. Ce résultat est illustré sur la Figure 2 où l'on a tracé graphiquement la courbe $\tau(\gamma)$ pour une anisotropie - donc une courbe $g(\psi)$ - fixée et pour les deux référentiels tournants définis précédemment.
Cette courbe a été obtenue pour a = 2,03.

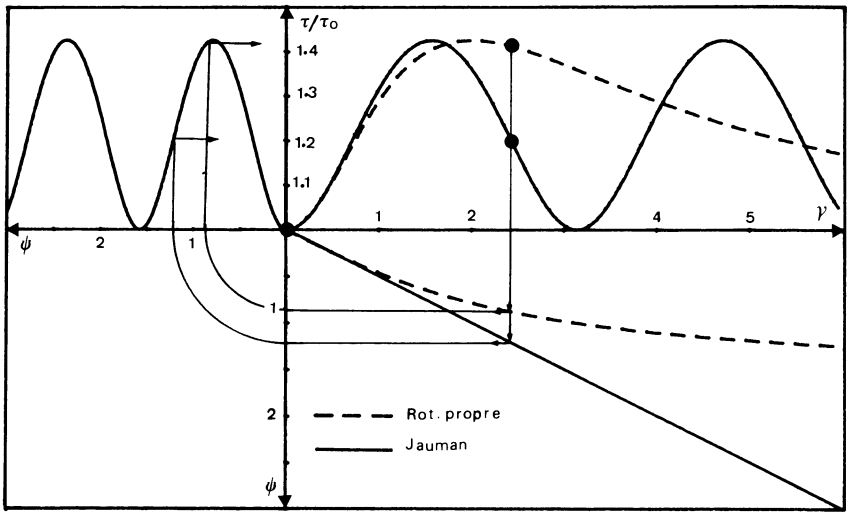


Figure 2. Comportement anisotrope en glissement simple

Référentiel corotationnel Rotation propre

Cette figure montre clairement que les oscillations observées avec le référentiel corotationnel proviennent de sa rotation trop importante pour γ grand. Plus généralement, pour un référentiel tournant quelconque, l'allure de la courbe $\tau(\gamma)$ dépendra essentiellement de la variation de ψ pour γ variant de 0 à $+\infty$.

8 - REFERENTIEL TOURNANT ET ROTATION MATERIELLE

Plus généralement, la qualité première d'un référentiel tournant est de suivre au mieux la rotation de la matière. Pour donner un contenu plus précis à cette notion, nous allons discuter plus finement la manière dont un référentiel tournant moyenne les rotations matérielles des divers vecteurs matériels. Nous partons donc d'un vecteur matériel OM_o repéré par son orientation θ_o pour $\gamma = 0$. Après un glissement γ son orientation devient θ (Fig.1b).

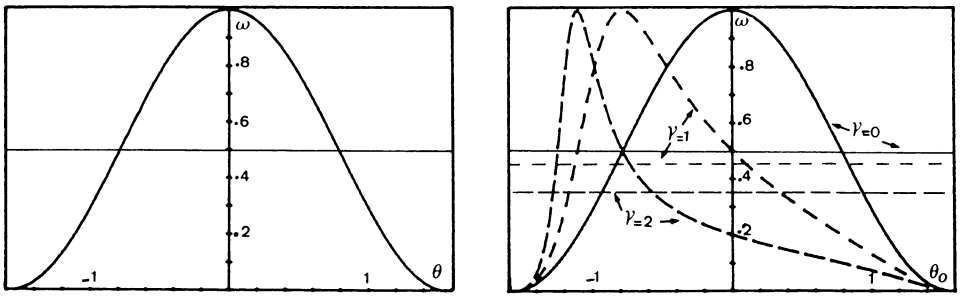
$$tg\,\theta = tg\,\theta_o + \gamma \tag{32}$$

Sa vitesse de rotation sera donc :

$$\frac{d\theta}{d\gamma} = \frac{1}{1 + tg^2\theta} = \frac{1}{1 + (tg\,\theta_o + \gamma)^2} \tag{33}$$

et elle dépend, bien évidemment, du segment matériel choisi. Au contraire, dans un référentiel tournant, toutes les directions tournent à la même vitesse $\omega = d\psi/d\gamma$ ($\omega = 1/2$ pour le référentiel corotationnel. ω donné par (29) pour le référentiel en rotation propre. On peut donc comparer cette valeur moyenne ω à l'ensemble des valeurs $d\theta/d\gamma$ qu'elle est supposée représenter.

C'est l'objet de la Figure 3.



a) en fonction de θ b) en fonction de θ_o

Figure 3. Vitesses de rotation matérielle

La Figure 3a représente ces vitesses en rotation en fonction de l'orientation actuelle θ . Cette courbe est indépendante de γ et il est clair que le référentiel corotationnel ($\omega = 1/2$) est celui qui instantanément suit le mieux la matière. La Figure 3b. les représente maintenant en fonction de l'orientation initiale θ_o .On obtient alors une courbe qui dépend de γ et le référentiel en rotation propre représenté par les traits horizontaux et dont la vitesse de rotation décroît et tend vers 0 lorsque γ augmente, devient plus représentatif Ceci est encore plus manifeste si l'on compare les courbes donnant en fonction de γ les rotations ψ à celles qui décrivent les rotations matérielles associées à divers valeurs de θ_o. (Figure 4)

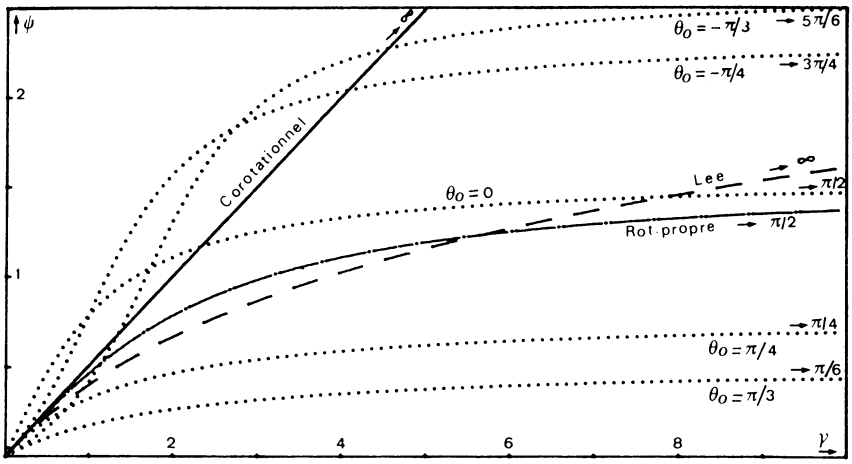


Figure 4. Rotation matérielle et Référentiel tournant.

et l'on voit bien ainsi que pour γ grand , le référentiel corotationnel s'écarte de toutes les rotations matérielles tandis que le référentiel en rotation propre reste toujours représentatif. Plus généralement, cette représentation permet de juger la manière dont un référentiel tournant quelconque suit la matière. A titre d'exemple, nous avons également représenté la rotation introduite par Lee en {5} pour l'écrouissage cinématique.

9 - CONCLUSION

L'écriture en grandes déformations d'une loi rigide plastique ou visco-plastique anisotrope pose de difficiles problèmes conceptuels. Nous avons présenté quelques lignes directrices permettant de les aborder mais nous avons également montré par quelques exemples, combien il fallait être vigilant. L'écriture de lois de comportement cohérentes et raisonnables en grandes déformations, même simples, n'est pas et ne sera sans doute jamais un problème facile.

10 - BIBLIOGRAPHIE

{1} Truesdell C.A. - Noll W. " The non linear field theories of Mechanics" Handbuchder Physik Bd III/3 - Berlin, Springer, 1965.

{2} Noll N. -"Proof of the maximalty of the orthogonal group in the unimodular group". Arch. Rat. Mech. Anal. Vol 18, 1965, pp. 100/102.

{3} Ericksen J.L. "Theory of anisotropic fluids" Trans. Soc. Rheology. Vol 4, 1960, pp. 29/39.

{4} Dafalias Y. " Amissing link in the macroscopic constitutive formulation at large plastic deformations". Plasticity Today - Udine , Juin 1983.

{5} Lee E.H. - Mallet R.L. - Wertheimer T.B. " Stress analysis for kinematic hardening in finite deformation plasticity ". J.Appl. Mech. Vol 50, 1983 , pp. 554/560.

{6} Dogui A. - Sidoroff F. " Kinematic hardening in large elastoplastic strain" Plasticity Today - Udine, Juin 1983.

{7} Sidoroff F. " Microstructure and plasticity " Mech. Res. Comm. Vol 2, 1975, pp. 73/77.

{8} Sidoroff F. " Incremental constitutive equation for large strain elasto-plasticity". Int. J. Eng. Sc. Vol 20, 1982, pp. 19/26.

{9} Ladeveze P. " Sur la théorie de la plasticité en grandes déformations". Rapport interne L.M.T. - ENSET, 1980.

{10} Dogui A. - Sidoroff F. " Quelques remarques sur la plasticité anisotrope en grandes déformations ". C.R.A.S. Paris (à paraître).

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials*
CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 79-92

Elastic-wave surfaces in anisotropic media

Surfaces d'ondes élastiques dans des milieux anisotropes

R.D. KRIZ, H.M. LEDBETTER

Materials Research Engineer and Metallurgist Center for Materials Science
National Bureau of Standards
Boulder, Colorado U.S.A. 80303

RÉSUMÉ

A l'aide des solutions de l'équation de Christoffel, certaines particularités topologiques intéressantes de surfaces d'ondes sont décrites pour des milieux anisotropes. Ces particularités comprennent des intersections surface transversale-surface longitudinale et une conversion continue mode transversal-mode longitudinal sur une meme surface. Pour la symétrie orthorhombique (mmm), des intersections surface transversale-surface transversale se produisent pour tous les cristaux: les surfaces transversales s'interconnectent et forment une seule surface. De plus, certains cristaux orthorhombiques présentent une intersection surface longitudinale-surface transversale telle que les trois surfaces s'interconnectent pour former une seule surface. Une intersection surface longitudinale-surface transversale signifie qu'une vitesse d'onde transversale sera supérieure à une vitesse d'onde longitudinale. Une conversion mode longitudinal-mode transversal signifie que les deux modes, longitudinal et transversal, co-existent sur la meme surface. Plusieurs cas réels sont considérés, y compris le bois et un matériau composite renforcé de fibres.

ABSTRACT

Based on Christoffel-equation solutions, some interesting wave-surface topological features are described for anisotropic media. These features include crossovers of transverse-longitudinal surfaces and continuous transverse-longitudinal mode conversion over a single surface. For orthorhombic symmetry (mmm), crossovers of transverse-transverse surfaces occur for all known cases: the transverse surfaces interconnect and form a single surface. Beyond this, some orthorhombic crystals exhibit a longitudinal-transverse crossover that causes all three surfaces to interconnect into a single surface. Crossover of longitudinal and transverse surfaces means that a transverse wave velocity will exceed a longitudinal wave velocity. A longitudinal-transverse mode conversion means that both longitudinal and transverse modes exist on the same wave surface. We consider several real cases, including wood and reinforced composites.

1 - INTRODUCTION

Representation of solid-state physical properties by geometric surfaces has obvious utility, as described by Nye [1]. For high symmetry materials, Nye [2] and Lekhnitskii [3] describe the construction of elastic-constant representation surfaces. For lower-symmetry cases the increased complexity of the elastic-constant tensor prevents simple representations. The present study focuses on the motion of stress-wave deformation fields in anisotropic materials and, especially, their graphical representation. We find several peculiarities of velocity surfaces and deformation fields. These peculiarities relate to relationships among components of the elastic-stiffness tensor.

Stress-wave deformation fields in anisotropic media can be approximated by plane-wave solutions to the elastic-wave equation. This simplification leads to Christoffel equations [4]:

$$(C_{ijk\ell}\, \nu_j \nu_k - \rho v^2 \delta_{i\ell})\, p_\ell = 0, \tag{1}$$

where $C_{ijk\ell}$ is the fourth-rank elastic-stiffness tensor, ν_i are direction cosines of the wave vector (normal to the plane wave) relative to the material axes, X_i, ρ is the mass density, v is the phase velocity of the plane wave parallel to ν_i, and $\delta_{i\ell}$ is the Kronecker delta. Equation (1) represents an eigenvalue problem with three eignvalues, ρv^2, and three eigenvectors that correspond to particle-displacement direction cosines (or polarizations), p_ℓ. The orientation of the particle displacement with respect to the wave vector is denoted by subscripts (t, qt, qℓ) on phase velocities: t means p_i is transverse to ν_i ($p_i \nu_i = 0$), qt (quasi-transverse) means the largest component of p_i is transverse to ν_i ($0 < \nu_i p_i < 1/\sqrt{2}$), and q$\ell$ (quasi-longitudinal) means the largest component of p_i is parallel to ν_i ($1/\sqrt{2} < \nu_i p_i < 1$). Along principal material axes, pure transverse waves and pure longitudinal waves must exist for all wave velocities.

From eq. (1) we can draw the phase-velocity surface (eigenvalues) and displacement field (eigenvectors) by considering all possible propagation directions (wave vectors). Both Musgrave [5] and Auld [6] used this method to study the influence of a material's elastic symmetry on the wave-surface geometries. Recently, Musgrave [7] described new wave-surface geometries where all surfaces interconnect into a single-surface for spruce wood. Independently, Ledbetter and Kriz [8] explained how peculiar mode transitions in the deformation field relate to this single surface geometry for a calcium-formate crystal. In both studies the unique wave-surface geometries relate to inequalities among elastic-stiffness tensor components. Studies by Al'shits and Lothe [9] also show a special case where no degeneracy occurs for a hypothetical orthorhombic material and a single surface cannot exist. In the present study we summarize these elastic-topological peculiarities for both crystalline and fiber-reinforced materials. When examined from the viewpoint of wave propagation, physically realizable combinations of these peculiarities lead to remarkable deformation fields.

The propagation direction of moving displacement fields in anisotropic media is also influenced by peculiarities in elastic anisotropy. Using Huygens's principle, Musgrave [5] demonstrated graphically how the propagation direction can deviate from the wave vector. This direction is called the energy-flux vector,

$$E_j = -C_{ijk\ell}\, u_{k,\ell} \dot{u}_i \tag{2}$$

where u_i is the displacement vector for a plane wave,

$$u_i = A p_i \cos\nu(vt - \nu_i X_i / v) \tag{3}$$

where t is time and $\nu = (\nu_i \nu_i)^{1/2}$. The velocity of propagation in the direction of E_i is called the group velocity, v_g. For isotropic materials E_i and v_g coincide with ν_i and v. For anisotropic materials, E_i deviates from ν_i by

an angle, $\Delta = \cos^{-1} v_i L_i$, where L_i are the direction cosines of E_i. For plane homogeneous waves Hayes and Musgrave [10] show that the same deviation angle, Δ, exists between v_g and v.

For hexagonal-symmetry fiber-reinforced materials, we demonstrate the influence of fiber volume fraction on the propagation direction and mode transitions. We also consider fiber-reinforced materials such as wood, which has orthorhombic symmetry.

2 - ANALYSIS

2.1 - Wave surfaces and displacement fields

For materials with orthorhombic elastic symmetry, the 21 independent elastic stiffnesses, $C_{ijk\ell}$, reduce to nine that can be written as a 6x6 symmetrical matrix using Voigt's notation,

$$C_{ij} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

The characteristic equation of the eigenvalue problem defined in eq. (1) becomes for orthorhombic symmetry, the symmetrical determinant.

$$\begin{vmatrix} (C_{11}v_1^2 + C_{66}v_2^2 + C_{55}v_3^2) - \rho v^2 & (C_{12} + C_{66})v_1v_2 & (C_{13} + C_{55})v_3v_1 \\ & (C_{66}v_1^2 + C_{22}v_2^2 + C_{44}v_3^2) - \rho v^2 & (C_{23} + C_{44})v_2v_3 \\ & & (C_{55}v_1^2 + C_{44}v_2^2 + C_{33}v_3^2) - \rho v^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

For all possible orientations of the wave vector v_i, the roots of eq. (5) can be graphed as three unique phase-velocity surfaces. It is convenient to examine the intersections of these surfaces with the three principal orthogonal planes. Relationships describing the phase-velocity surfaces in each plane can be derived from (5). Reference [6] gives

$\underline{X_1 - X_2 \text{ plane}}$: $v_t = [(C_{44}n + C_{55}m)/\rho]^{1/2}$ (6)

$$v_{q\ell},\ v_{qt} = \{[C_{66} + C_{11}m + C_{22}n \pm \sqrt{(C_{66} + C_{11}m + C_{22}n)^2 - 4C}]/2\rho\}^{1/2} \qquad (7,8)$$

where $C = (C_{11}m + C_{66}n)(C_{66}m + C_{22}n) - (C_{12} + C_{66})^2mn$, where $m = \cos^2\theta$ and $n = \sin^2\theta$. The angle θ is measured positively from X_i to X_j such that $i < j$. Similarly for the other two planes,

$\underline{X_1 - X_3 \text{ plane}}$: $v_t = [(C_{44}n + C_{66}m)/\rho]^{1/2}$ (9)

$$v_{q\ell},\ v_{qt} = \{[C_{55} + C_{11}m + C_{33}n \pm \sqrt{(C_{55} + C_{11}m + C_{33}n)^2 - 4C']}/2\rho\}^{1/2} \qquad (10,11)$$

where $C' = (C_{11}m + C_{55}n)(C_{55}m + C_{33}n) - (C_{13} + C_{55})^2mn$;

X_2-X_3 plane: $v_t = [(C_{66}m + C_{55}n)/\rho]^{1/2}$ (12)

$$v_{q\ell},\ v_{qt} = \{[C_{44} + C_{22}m + C_{33}n \pm \sqrt{(C_{44} + C_{22}m + C_{33}n)^2 - 4C'}]/2\rho\}^{1/2} \quad (13,14)$$

where $C'' = (C_{22}m + C_{44}n)(C_{44}m + C_{33}n) - (C_{23} + C_{44})^2mn$.

For hexagonal materials with the unique axis X_3, the velocity surface is axially symmetric. Thus, solutions are calculated as functions of $+\theta$ from X_3:

$$v_t(\theta) = [(C_{44}m + C_{66}n)/\rho]^{1/2} \quad (15)$$

$$v_{qt}(\theta),\ v_{q\ell}(\theta) = [(C_{44} + C_{11}n + C_{33}m \mp \sqrt{C})/2\rho]^{1/2} \quad (16, 17)$$

where $C = [(C_{11}-C_{44})n + (C_{44} - C_{33})m]^2 + (C_{13} + C_{44})^2 \sin^2 2\theta$.

One should note that subscripts (t, qt, qℓ) assigned to the wave velocities are only labels. In special cases, displacement polarizations t, qt, qℓ, and ℓ may coexist on the same velocity surface [8]. Thus, rarely, eqs. (7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17) yield polarizations different from the designated qt, qℓ subscripts. Equations (6, 9, 12, 15) represent exceptions where v_t is always a pure-transverse wave for all orientations.

Because of algebraic complexity, eigenvector solutions of eq. (1) for orthorhombic materials were calculated numerically by backsubstituting ρv^2 into eq. (1). For hexagonal symmetries, eigenvector solutions of eq. (1) are much simpler and are written here as the ratio $P_1:P_2:P_3$.

$$P_1 = [\nu_1^2(C_{11} + C_{12})/2]^{1/2}/[\rho v^2 - (C_{11} - C_{12})/2 - C_{44}\nu_3^2] \quad (18)$$

$$P_2 = [\nu_2^2(C_{11} + C_{12})/2]^{1/2}/[\rho v^2 + (\nu_2^2 - \nu_1^2)C_{11}/2 + C_{12}/2 - \nu_3^2 C_{44}] \quad (19)$$

$$P_3 = [2\nu_3^2(C_{23} + C_{44})/(C_{11} + C_{12})]^{1/2} / \{\rho v^2 + (\nu_2^2 - \nu_1^2)C_{44} + \nu_3^2[2(C_{23} + C_{44})^2/(C_{11} + C_{12}) - C_{33}]\} \quad (20)$$

2.2 - Propagation directions

The angular deviation between the propagation direction (energy-flux vector) and the wave vector is calculated by

$$\Delta = \cos^{-1}\nu_i L_i \quad (21)$$

where L_i are the direction cosines of E_i. Kriz and Stinchcomb [11] calculated L_i for orthorhombic materials. For materials with hexagonal symmetry, Kriz and Ledbetter [12] calculated L_i for transformations in the X_2-X_3 plane ($\nu_1 = 0$):

$$L_1 = C_{66}p_1p_2\nu_2 + C_{44}p_1p_3\nu_3 \quad (22)$$

$$L_2 = C_{66}p_1^2\nu_2 + C_{22}p_2^2\nu_2 + C_{23}p_2p_3\nu_3 + C_{44}(p_2p_3\nu_3 + p_3^2\nu_2) \quad (23)$$

$$L_3 = C_{22}p_3^2\nu_3 + C_{33}p_2p_3\nu_2 + C_{44}(p_1^2\nu_3 + p_2p_3\nu_2) \quad (24)$$

For fiber-reinforced materials we studied the influence of fiber volume fraction on the properties listed above. This is accomplished by calculating effective C_{ij} from relationships derived by Datta, Ledbetter, and Kriz [13].

3 - RESULTS AND DISCUSSION

For elastically isotropic solids, the phase-velocity surfaces are concentric spheres where t and qt surfaces coincide (see Fig. 1). All waves are pure mode. Mechanical stability requires that v_ℓ exceed $v_t\sqrt{4/3}$. Thus, the ℓ and

surfaces cannot intersect for isotropic media.

For anistropic materials, e.g. calcium formate, wave surfaces can intersect. The most common intersection occurs for the t and qt surfaces; Figs. 2 and 3 exemplify this type of intersection.

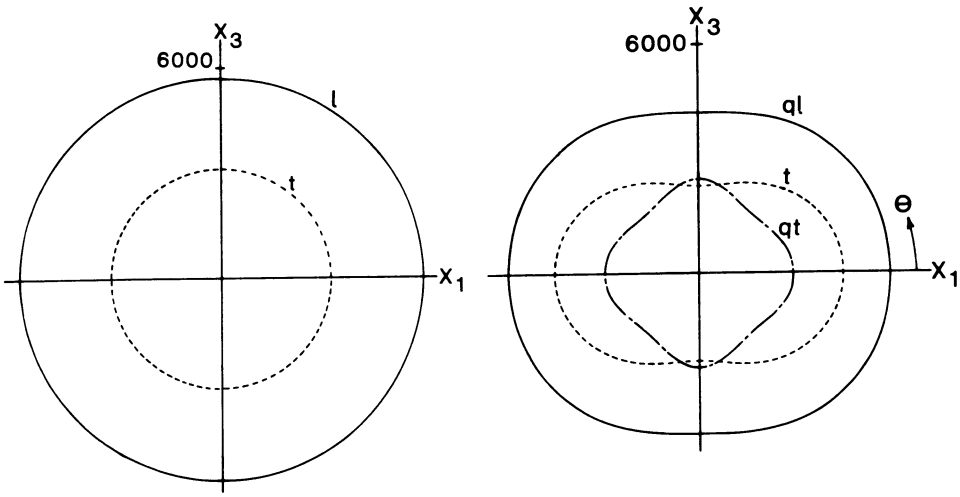


Fig. 1. Polar diagram of phase velocity (m/s) for a typical isotropic material: polycrystalline 304 stainless steel. Elastic constants [14] are C_{11} = 261, C_{12} = 106 GPa; ρ = 7.88 g/cm^3.

Fig. 2. Polar diagram of phase velocity (m/s) in the X_1-X_3 plane of a material that exhibits t-qt intersections: calcium formate [$Ca(HCOO)_2$], which is orthorhombic. Elastic constants [15] are C_{11} = 49.2, C_{22} = 24.4, C_{33} = 35.4, C_{12} = 24.8, C_{13} = 24.5, C_{23} = 14.5, C_{44} = 10.5, C_{55} = 12.1, C_{66} = 28.2 GPa; ρ = 2.02 g/cm^3.

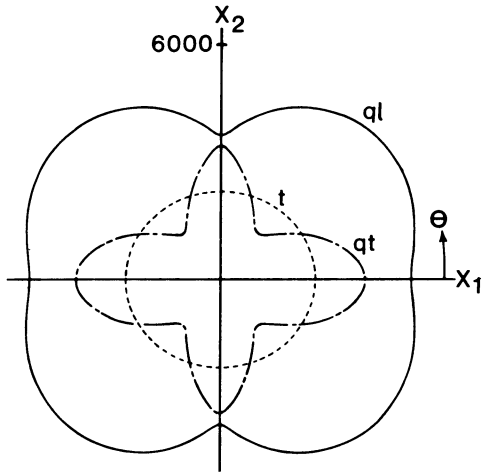


Fig. 3. Same as Fig. 2, except for X_1-X_2 plane, which exhibits t-qt intersections in each quadrant. See also Fig. 5.

Less common is an intersection of a ql surface with a qt or t surface; Fig. 4 shows such an example. Thus, for this one case, in one direction $v_{q\ell} = v_t$; and along X_2 (and near X_2) v_t actually exceeds $v_{q\ell}$. In the X_1-X_2 plane for this

same material no intersection occurs but a polarization-mode transition occurs. Figure 5 illustrates this mode transition; it shows polarization vectors at 9° increments as double-headed arrows. To more clearly understand the relationship between surface intersections and mode transitions, Ledbetter and Kriz [8] drew an isometric combination of principal planes shown in Figs. 2-4. Figure 6 shows this isometric diagram.

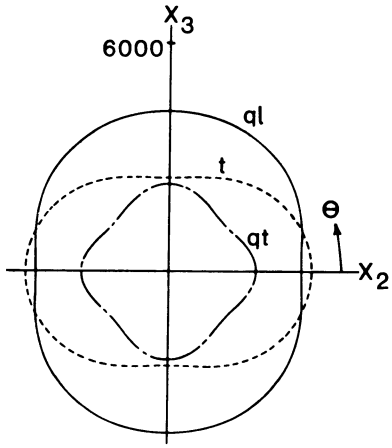


Fig. 4. Same as Fig. 2, except for X_2-X_3 plane, which exhibits t-qℓ intersections in each quadrant.

From Fig. 6 we observe that for calcium formate all surfaces interconnect into a single surface. Close examination of eqs. (6-14) reveals that necessary and sufficient conditions for this geometry are

$$C_{11} > C_{33} > C_{66} > C_{22} > C_{55} > C_{44} \tag{25}$$

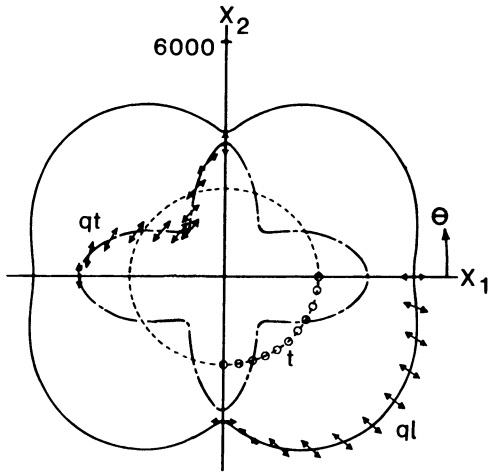


Fig. 5. Same as Fig. 3, but with polarization (particle displacement) vector indicated by arrows. Fastest wave is pure longitudinal along X_1, but pure transverse along X_2. Second wave is pure transverse along X_1, but pure longitudinal along X_2, where $v_{q\ell}$ becomes a transverse wave and exceeds a longitudinal wave speed. Third wave is pure transverse for all directions.

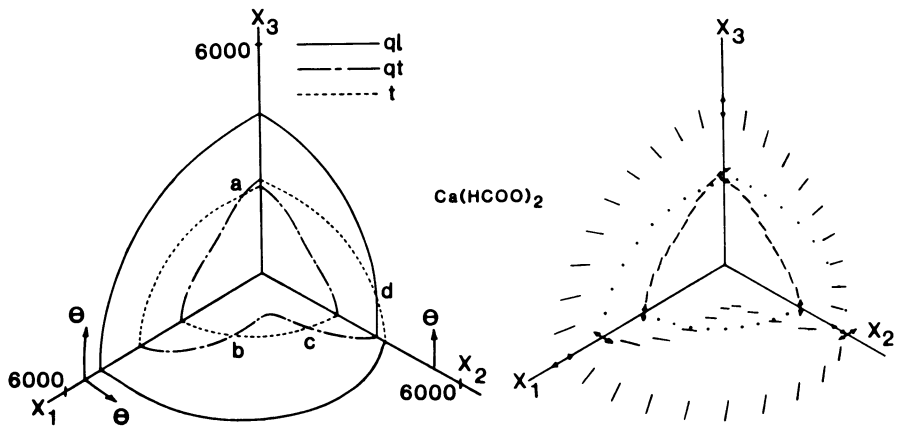


Fig. 6. (a) Isometric plot of phase-velocity (m/s) surfaces intersecting the three principal orthogonal planes: calcium formate; see Figs. 2, 3, and 4. This figure summarizes the qt-t intersections at a, b, and c, and the t-qℓ intersection at d. Together, these topological features reduce the usual three velocity surfaces to a single surface. (b) Isometric plot of displacement fields coincident with phase-velocity surfaces of the same material. Line segments represent displacement direction contained within orthogonal planes. Dots represent displacements normal to orthogonal planes. Arrows represent pure modes. Mode transitions occur only in the X_1-X_2 plane.

Closer examination of other inequalities leads to several geometries [8]. From these studies we concluded that, except for calcium formate, all reported orthorhombic cases require interconnection of the qt and t surfaces into a single surface (see Fig. 7).

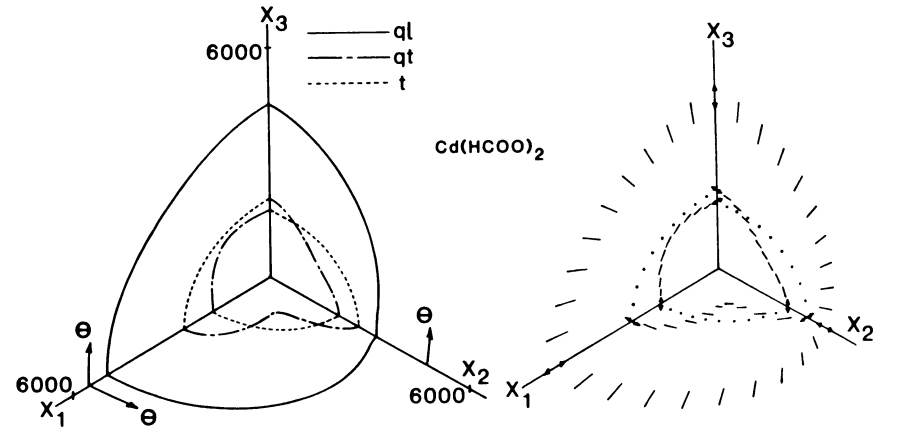


Fig. 7. (a) Isometric plot of phase-velocity (m/s) surfaces intersecting the three principal orthogonal planes: cadmium formate [$Cd(HCOO)_2$], which is orthorhombic. Elastic constants [15] are C_{11} = 50.0, C_{22} = 20.5, C_{33} = 41.1, C_{12} = 24.6, C_{13} = 27.3, C_{23} = 16.4, C_{44} = 8.53, C_{55} = 6.32, C_{66} = 14.1 GPa; ρ = 2.02 g/cm^3. (C_{11}, C_{22}, C_{33}) > (C_{44}, C_{55}, C_{66}). (b) Isometric plot of displacement fields coincident with phase-velocity surfaces of the same material. Graphical conventions are same as Fig. 6(b). There are no mode transitions. Two additional geometries shown in Figs. 8 and 9 are also possible but, as yet, no examples are known.

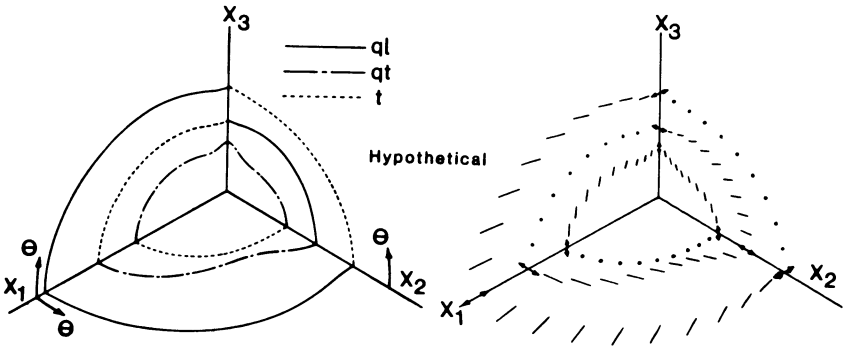


Fig. 8. (a) Isometric plot of phase-velocity surfaces intersecting the three principal orthogonal planes of a hypothetical orthorhombic material whose elastic constants satisfy the inequalities $C_{11} > C_{66} > C_{55} > C_{22} > C_{44} > C_{33}$. This figure demonstrates three unconnected wave-velocity surfaces. See also Musgrave [7] and Al'shits and Lothe [9]. (b) Isometric plot of displacement fields coincident with phase-velocity surfaces of the same material. Graphical conventions are same as Fig. 6(b). Mode transitions occur in all planes.

Independently, Musgrave [7] used similiar inequalities to classify the various geometries of materials with orthorhombic symmetry. Musgrave observed that spruce wood also satisfies an inequality similar to eq. (25) except $C_{66} > C_{11}$ (see also Fig. 10). Musgrave ex-plained the inequality requirements for surfaces with no intersections (see Fig. 8). These wave surfaces were also studied by Al'shits and Lothe [9]. Later, Holm and Lothe [14] studied the displacement polarization fields for body waves in anisotropic media without an acoustic axis.

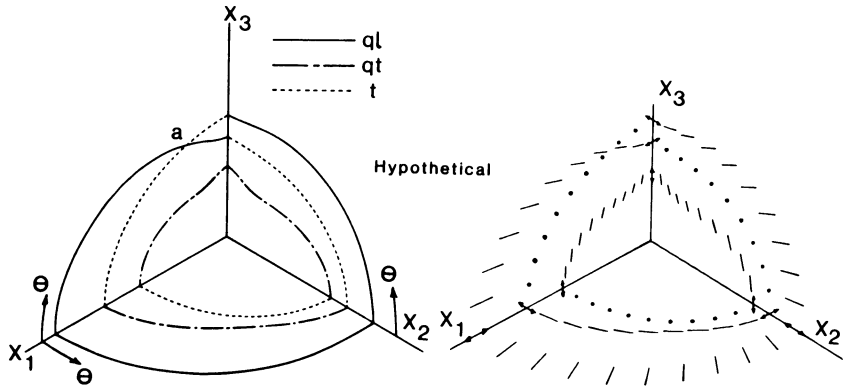


Fig. 9. (a) Isometric plot of phase-velocity surfaces intersecting the three principal orthogonal planes of a hypothetical orthorhombic material whose elastic constants satisfy the inequalities $C_{11} > C_{22} > C_{66} > C_{44} > C_{55} > C_{33}$. This figure demonstrates a ql-qt crossover at a. (b) Isometric plot of displacement fields coincident with phase-velocity surfaces of the same material. Graphical conventions are same as in Fig. 6(b). Mode transitions occur only in the X_1-X_3 and X_3-X_2 planes.

From studies of Jaswon and Gillis [17, 18] we observe that the orthorhombic elastic symmetry for spruce wood can be modeled by aligned rectangular cellulose fibers arranged in a rectangular array (see Fig. 11) where the cellulose fibers also have orthorhombic symmetry. With the present model it would be possible to transition between geometries of Fig. 6 and Fig. 7 by changing the ratios a:b and c:d for dimensions shown in Fig. 11. It may also be possible to construct special fiber-array geometries that satisfy conditions for orthorhombic symmetries shown in Figs. 8 and 9, which are presently only hypothetical possibilities.

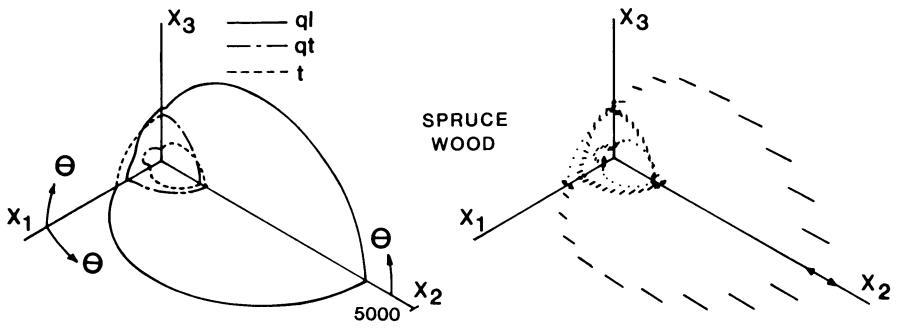


Fig. 10. (a) Isometric plot of phase-velocity (m/s) surfaces intersecting the three principal orthogonal planes for spruce wood, which is orthorhombic [7]. Elastic constants are C_{11} = 0.44, C_{22} = 16.3, C_{33} = 0.78, C_{12} = 0.31, C_{13} = 0.20, C_{23} = 0.43, C_{44} = 0.62, C_{55} = 0.40, C_{66} = 0.77 GPa; ρ = 1 g/cm^3. A single surface exists similar to Fig. 6 except $C_{66} > C_{11}$ hence t-ql occurs in the X_1-X_3 plane. (b) Isometric plot of displacement fields coincident with phase-velocity surfaces of the same material. Graphical conventions are same as in Fig. 6(b). Mode transitions occur only in the X_1-X_2 plane.

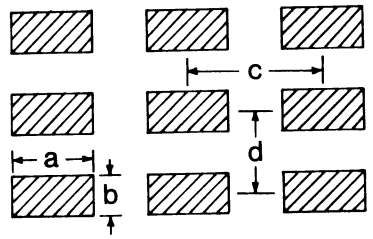


Fig. 11. Cross-section showing morphology of wood after Gillis [18]. Cross-hatched region represents rectangular cellulose fibers surrounded by isotropic matrix.

For aligned fiber-reinforced graphite/epoxy materials with hexagonal symmetry (random array) Kriz and Ledbetter [12] observed several peculiarities in elastic-wave surfaces and displacement fields caused by variations in the fiber volume fraction (see Figs. 12-16). Figures 12 and 13 demonstrate the influence of fiber volume fraction on phase-velocity and group-velocity surfaces. Here we follow Musgrave [5] and plot group velocity as a function of $\theta' = \theta + \Delta$. Large changes in flux-deviation angles, shown in Fig. 15, occur at low fiber volume fractions. Hence, the distorted group-velocity surfaces in Fig. 13 result from these changes in flux-deviation angles with fiber volume fraction.

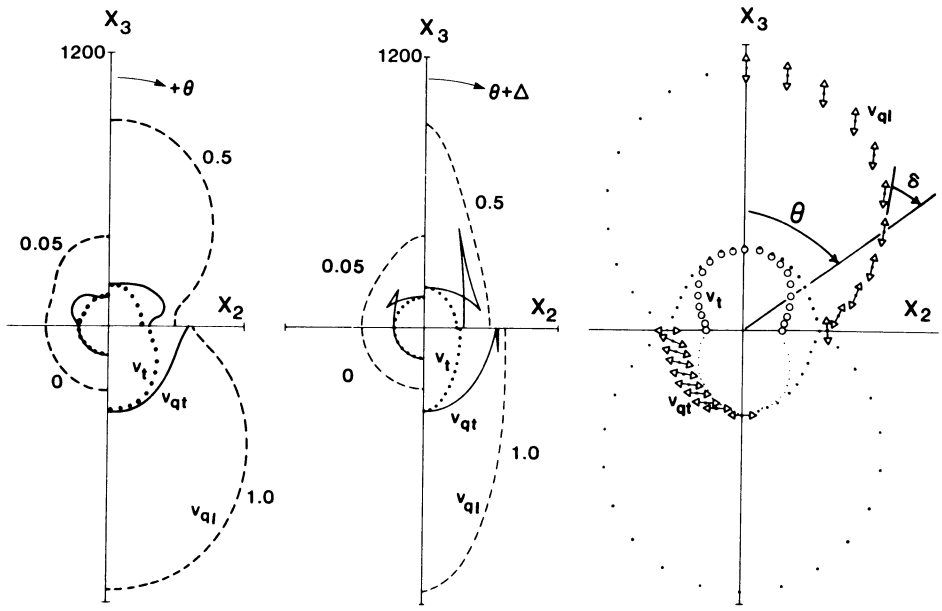


Fig. 12. Phase-velocity (m/s) polar diagram for unidirectional graphite/epoxy at four fiber volume fractions.

Fig. 13. Group-velocity (m/s) polar diagram corresponding to Fig. 12.

Fig. 14. Polar diagram of displacement direction coincident with phase-velocity surfaces at a fiber volume-fraction of 1.0. For clarity, only one quadrant shown.

At a fiber volume fraction of 100% (see Fig. 14) we observed mode transitions similar to calcium formate and spruce wood except that surfaces do not interconnect into a single surface. For the qℓ surface the displacement in the X_2-X_3 plane changes from pure longitudinal along X_3 to pure shear along X_2. Consequently, in the X_1-X_2 plane one observes $v_t > v_\ell$ along X_2 when $C_{44} > C_{22}$.

This mode transition can also be observed in Fig. 16 for various fiber volume fractions. Here the displacement deviations, $\delta = \cos^{-1} v_i p_i$, from the wave vectors are shown versus θ. In Fig. 16 we observe that fiber volume fraction effects a smooth mode transition. The mode transition starts at $V_f = 0.3$ where $v_{q\ell}$ transitions into v_{qt} at $\theta = 56°$. As V_f increases, this mode transition continues predictably; for $V_f > 0.96$, v_{qt} transitions into v_t. Thus, ℓ, qℓ, qt, and t particle displacements are also observed along a single surface for a fiber-reinforced material.

Unlike crystalline materials, variations in propagation directions can occur for fixed orientations in fiber-reinforced materials. Kriz [19] demonstrated how changes in the elastic properties of the matrix component of a unidirectional graphite/epoxy composite can influence the flux deviation angle, Δ. Figure 17 shows the comparison of measurement with theory for the configuration shown in Fig. 18. Here we find that an increase in deviation angle, Δq_t, occurs when absorbed moisture degrades the resin properties. When fiber elastic properties degrade, we predict a decrease in deviation angle, Δ_{qt}. Values of elastic properties are given in [19].

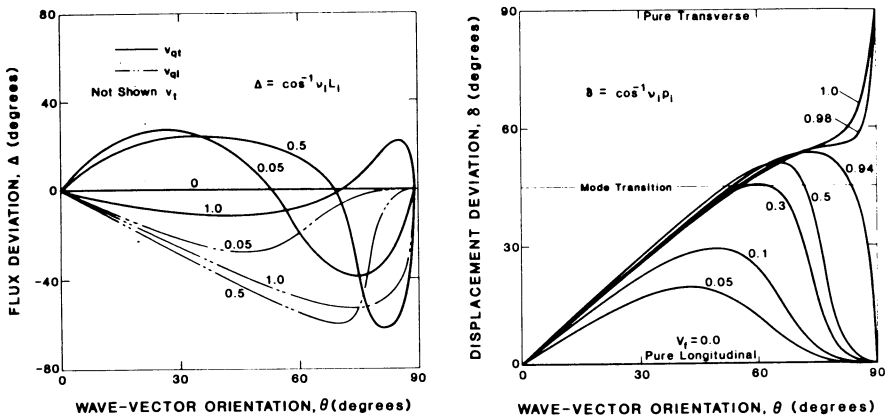


Fig. 15. Flux-deviation angles for various fiber volume-fractions. For clarity, v_t curves are omitted.

Fig. 16. Displacement-direction deviations for $v_{q\ell}$. For higher fiber volume-fractions, a mode transition occurs.

For all materials considered here, we find that all components of the elastic-stiffness tensor satisfy the mechanical-stability conditions (positive-definite strain-energy density).

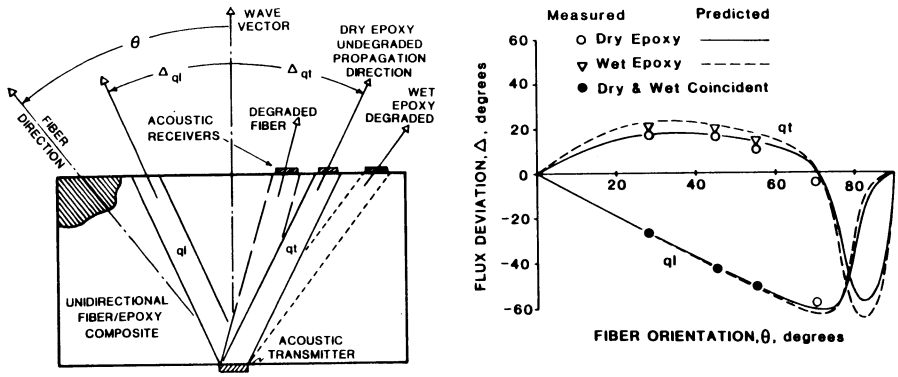


Fig. 17. Schematic diagram of variation in propagation directions in a unidirectional graphite epoxy material.

Fig. 18. Comparison of measured and predicted flux-deviation angles resulting from absorbed moisture degrading only the epoxy elastic properties.

4 - SUMMARY

From previous studies discussed above, for anisotropic media, we find many remarkable topological features of elastic-wave surfaces. For orthorhombic materials we observe that qt and t surfaces must always interconnect into a single surface. Calcium formate and spruce wood are exceptions where qℓ, qt, and t surfaces all interconnect into one surface. These geometries and others are sufficiently defined by inequalities among the diagonal components of the elas-

tic-stiffness tensor. Associated with these geometries we find peculiarities in the displacement fields. For calcium formate and spruce wood we find mode transitions where ℓ, qℓ, qt, and t displacements coexist on the same surface. For fiber-reinforced materials we find that similar mode transitions occur at high fiber volume fractions but interconnections do not result in single surfaces. In both symmetries we observe transverse waves faster than longitudinal waves. For fiber-reinforced materials we also observe a strong influence of fiber volume fraction on propagation direction. For graphite/epoxy we found that variations in propagation direction arise from changes in either fiber or matrix elastic properties.

5 - ACKNOWLEDGMENTS

These studies were supported partly by the Department of Energy, Office of Fusion Energy.

6 - REFERENCES

[1] J. F. Nye, Physical Properties of Crystals, Oxford University Press, London, 1957 (p. 16).

[2] J. F. Nye, Physical Properties of Crystals, Oxford University Press, London, 1957 (p. 143).

[3] S. G. Lekhnitskii, Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Holden-Day, San Francisco, 1963 (p. 15).

[4] M. J. P. Musgrave, Crystal Acoustics, Holden-Day, San Francisco, 1970 (p. 83).

[5] M. J. P. Musgrave, Crystal Acoustics, Holden-Day, San Francisco, 1970 (p. 108).

[6] B. A. Auld, Acoustic Fields and Waves in Solids, Vol.1, Wiley, New York, 1973 (p. 401).

[7] M. J. P. Musgrave, "On an elastodynamic classification of orthorhombic media," Proc. R. Soc. Lond. A374, 401 (1981).

[8] H. M. Ledbetter and R. D. Kriz "Elastic Wave Surfaces in Solids," Phys. Stat. Sol. (b) 114, 475 (1982).

[9] V. I. Al'shits and J. Lothe, "Elastic waves in triclinic crystals II. Topology of polarization fields and some general theorems," Kristallografiya 24, 75 (1979).

[10] M. Hayes and M. J. P. Musgrave, "On Energy Flux Group Velocity," Wave Motion 1, 75 (1979).

[11] R. D. Kriz and W. W. Stinchcomb, "Elastic Moduli of Tranversely Isotropic Fibers and their Composites," Exper. Mech. 19, 41 (1979).

[12] R. D. Kriz and H. M. Ledbetter, "Elastic Representation Surfaces of Unidirectional Graphite/Epoxy Composites in , "Recent Advances in Composites in the United States and Japan, ASTM STP864, J. R. Vinson and M. Taya, Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1985 (in press).

[13] S. K. Datta, H. M. Ledbetter, and R. D. Kriz, "Calculated Elastic Constants of Composites Containing Anisotropic Fibers," Int. J. Solids Structures 20, 429 (1984).

[14] H. M. Ledbetter and N. V. Frederick and M. W. Austin, "Elastic-constant variability in stainless-steel 304," J. Appl. Phys. 51, 305 (1980).

[15] S. Haussühl, Z. Krist. 118, 33 (1963).

[16] P. Holm and J. Lothe, "The topological nature of the polarization field for body waves in anisotropic elastic media," Proc. R. Soc. Lond. A370, 331 (1980).

[17] M. A. Jaswon, P. P. Gillis, and R. E. Mark, "The elastic constants of crystalline native cellulose," Proc. Roy. Soc. Lond. A306, 389 (1968).

[18] P. P. Gillis, "Elastic moduli for plane stress analyses of unidirectional composites with anisotropic rectangular reinforcement," Fibre Sci. Tech. 2, 193 (170).

[19] R. D. Kriz, "Monitoring Elastic Stiffness Degradation in Graphite/Epoxy Composites," to be published.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 93-100

Sur l'électrodynamique des diélectriques élastiques anisotropes non dissipatifs de type intégro-différentiel

About electrodynamics of anisotropic elastic lossless dielectrics of integro-differential type

Ph. BOULANGER, G. MAYNE

Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique
Campus Plaine – C.P. 218/1, boulevard du Triomphe
B – 1050 Bruxelles

RESUME

Pour décrire le comportement électromagnétique des diélectriques à plusieurs espèces de charges, on introduit généralement des vecteurs de polarisation partielle. Dans le cadre d'une théorie linéaire à deux espèces de charges, on peut éliminer les polarisations partielles pour obtenir une équation constitutive de type intégro-différentiel qui contient deux dérivées par rapport au temps du champ électrique et quatre dérivées par rapport au temps du vecteur de polarisation totale. Dans ce travail nous montrons que pour des diélectriques anisotropes non dissipatifs, cette équation constitutive fait intervenir quatre tenseurs symétriques et trois tenseurs antisymétriques. Dans le cas d'une anisotropie de type uniaxial, nous étudions la propagation d'ondes sinusoïdales planes suivant l'axe de symétrie, ce qui montre que le diélectrique présente une activité optique fonction de la fréquence. Nous comparons la théorie à une théorie à deux polarisations partielles inspirée des travaux de Voigt, qui ne fait intervenir que deux tenseurs antisymétriques au lieu de trois.

ABSTRACT

A usual way of describing the electromagnetic behaviour of dielectrics with several kinds of charges is to introduce partial polarization vectors. In the case of linear theory with two kinds of charges, the partial polarization vectors can be eliminated to obtain a constitutive equation of integro-differential type (rate type) with two time derivatives of the electric field and four time derivatives of the total polarization vector. In this work, it is shown that, for anisotropic lossless dielectrics, this constitutive equation contains four symmetric tensors and three skew-symmetric tensors. For uniaxial anisotropy, the propagation of plane harmonic waves in the direction of the symmetry axis is studied. In this way, we derive frequency-depend optical activity for this dielectric. The present theory is compared to a theory with two partial polarization vectors suggested by Voigt, which includes two skew-symmetric tensors instead of three.

1. INTRODUCTION

Pour décrire le comportement électromagnétique des diélectriques à plusieurs espèces de charges, on introduit généralement des vecteurs de polarisation par-

tielle $P_{(1)}, P_{(2)}, \ldots$. Dans le cadre d'une théorie linéaire à deux espèces de charges, on peut, en s'inspirant des travaux de Voigt [1], formuler les équations constitutives d'un diélectrique anisotrope sous la forme

$$\begin{cases} E = \alpha_o P_{(1)} + \gamma \dot{P}_{(1)} + \alpha_2 \ddot{P}_{(1)} \\ E = \alpha'_o P_{(2)} + \gamma' \dot{P}_{(2)} + \alpha'_2 \ddot{P}_{(2)} \end{cases} , \tag{1}$$

où E désigne le champ électrique, et où α_o, α'_o, α_2, α'_2, γ, γ' sont des tenseurs du second ordre. Le point qui surmonte une grandeur désigne sa dérivée par rapport au temps. Les équations (1) peuvent être interprétées comme des équations de mouvement pour les deux espèces de charge, du moins dans le cas où α_2 et α'_2 sont des tenseurs sphériques. Elles permettent de rendre compte d'effets de dispersion, dissipation, et de gyration (activité optique). Dans le cas où α_o, α'_o, α_2, α'_2 sont des tenseurs symétriques et γ, γ' des tenseurs antisymétriques (*), le diélectrique représenté par les équations (1) est non dissipatif.

Toutefois, si on préfère formuler une seule équation constitutive en terme du vecteur de polarisation totale

$$P = P_{(1)} + P_{(2)} , \tag{2}$$

on peut éliminer les polarisations partielles des équations (1) et (2) pour obtenir l'équation constitutive

$$b_o E + b_1 \dot{E} + b_2 \ddot{E} = a_o P + a_1 \dot{P} + a_2 \ddot{P} + a_3 \dddot{P} + a_4 \ddddot{P} , \tag{3}$$

où b_o, b_1, b_2, a_o, a_1, a_2, a_3, a_4 sont des tenseurs du second ordre. Nous dirons qu'une telle équation est de type intégro-différentiel car elle permet d'expliciter le champ électrique E à un instant t en fonction de quatre dérivées par rapport au temps de la polarisation à l'instant t, et d'une intégrale qui fait intervenir l'histoire de la polarisation jusqu'à l'instant t. L'élimination des polarisations partielles donne en général lieu à des expressions algébriques assez lourdes. Celles-ci se simplifient considérablement lorsque le groupe d'anisotropie du diélectrique est tel que les tenseurs α_o, α'_o, α_2, α'_2, γ, γ' commutent. C'est le cas notamment pour les milieux uniaxiaux que nous étudierons plus particulièrement au paragraphe 3. Les coefficients de l'équation constitutive (3) sont alors donnés par

$$b_o = \alpha_o + \alpha'_o \quad , \quad b_1 = \gamma + \gamma' \quad , \quad b_2 = \alpha_2 + \alpha'_2$$
$$a_o = \alpha_o \alpha'_o \ , \ a_1 = \alpha'_o \gamma + \alpha_o \gamma' \ , \ a_2 = \alpha_o \alpha'_2 + \alpha'_o \alpha_2 + \gamma\gamma' \ , \ a_3 = \alpha'_2 \gamma + \alpha_2 \gamma' \ , \ a_4 = \alpha_2 \alpha'_2 . \tag{4}$$

(*) ce que nous supposerons toujours dans la suite de ce travail.

Il nous a semblé intéressant d'étudier l'équation constitutive purement macroscopique (3) indépendamment des équations (1). Dans ce travail, nous montrons que pour un diélectrique non dissipatif les coefficients de cette équation s'expriment en fonction de quatre tenseurs symétriques et trois tenseurs antisymétriques. Nous étudions ensuite certaines conséquences de l'équation ainsi obtenue du point de vue de la propagation d'ondes sinusoïdales planes.

2. CONDITIONS DE NON-DISSIPATION

Nous exprimerons que le diélectrique représenté par l'équation constitutive (3) est non dissipatif en exigeant que les ondes sinusoïdales planes ne soient pas absorbées, quelle que soit leur direction de propagation et leur fréquence. Nous exigerons donc que le tenseur de susceptibilité complexe χ, fonction de la fréquence angulaire ω

$$\chi = (b_o + i\omega b_1 - \omega^2 b_2)^{-1}(a_o + i\omega a_1 - \omega^2 a_2 - i\omega^3 a_3 + \omega^4 a_4) \qquad (5)$$

soit hermitien pour toute valeur de ω. De manière équivalente, nous pouvons exprimer que le tenseur

$$(a_o + i\omega a_1 - \omega^2 a_2 - i\omega^3 a_3 + \omega^4 a_4)(b_o + i\omega b_1 - \omega^2 b_2)^t$$

est hermitien pour toute valeur de ω, d'où on tire les conditions de symétrie ou d'antisymétrie suivantes :

$$a_o b_o^t \qquad \text{symétrique} \qquad (6)_o$$

$$a_1 b_o^t - a_o b_1^t \qquad \text{antisymétrique} \qquad (6)_1$$

$$a_2 b_o^t + a_o b_2^t - a_1 b_1^t \qquad \text{symétrique} \qquad (6)_2$$

$$a_2 b_1^t - a_1 b_2^t - a_3 b_o^t \qquad \text{antisymétrique} \qquad (6)_3$$

$$a_2 b_2^t + a_4 b_o^t - a_3 b_1^t \qquad \text{symétrique} \qquad (6)_4$$

$$a_3 b_2^t - a_4 b_1^t \qquad \text{antisymétrique} \qquad (6)_5$$

$$a_4 b_2^t \qquad \text{symétrique.} \qquad (6)_6$$

Des conditions $(6)_o$ et $(6)_6$, on tire aisément

$$a_o = b_o A_o \quad , \quad a_4 = b_2 A_2 \quad , \qquad (7)$$

où A_o et A_2 sont des tenseurs symétriques. En tenant compte de (7) dans $(6)_1$ et $(6)_5$, on tire

$$a_1 = b_1 A_o + b_o(W_1 - W_1') \quad , \quad a_3 = b_1 A_2 + b_2(W_1 + W_1') \quad , \qquad (8)$$

où W_1 et W'_1 sont des tenseurs antisymétriques. En tenant compte de (7) et (8) dans $(6)_2$ et $(6)_4$ on tire les deux expressions de a_2 suivantes :

$$a_2 = b_2A_o + b_1(W_1 - W'_1) + b_oS_2 = b_oA_2 + b_1(W_1 + W'_1) + b_2S_o \quad , \qquad (9)$$

où S_2 et S_o sont deux tenseurs symétriques. Par raison de symétrie nous remplacerons les expressions (9) par leur demi-somme, qui, en posant

$$S_2 = A_2 + 2A'_2 \quad , \quad S_o = A_o + 2A'_o$$

s'écrit

$$a_2 = b_o(A_2 + A'_2) + b_1W_1 + b_2(A_o + A'_o) \ . \qquad (10)$$

A ce stade, il nous reste deux conditions portant sur les tenseurs b_o, b_1, b_2. La première provient de l'égalité des deux expressions (9) de a_2 :

$$b_2A'_o + b_1W'_1 - b_oA'_2 = 0 \ . \qquad (11)$$

La seconde provient de la condition $(6)_3$, où l'on a tenu compte de (8) et (10) :

$$b_oA'_2b_1^t + b_2A'_ob_1^t + b_oW'_1b_2^t - b_2W'_1b_o^t \quad \text{antisymétrique.} \qquad (12)$$

Grâce à (11), cette dernière condition peut se transformer en

$$b_1A'_2 - b_2W'_1 = b_oW_3 \quad , \qquad (13)$$

où W_3 est un nouveau tenseur antisymétrique. Les conditions (11) et (13) peuvent être considérées comme deux équations qui permettent de calculer b_1, b_2 en fonction de b_o. Avec des hypothèses d'inversibilité appropriées, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} b_1 &= b_o(A'_2A'^{-1}_oW'_1 - W_3)(A'_2 + W'_1A'^{-1}_oW'_1)^{-1} \ , \\ b_2 &= b_o(A'_2 + W_3A'^{-1}_2W'_1)(A'_o + W'_1A'^{-1}_2W'_1)^{-1} \ . \end{aligned} \qquad (14)$$

Grâce à (7) (8) (10) (14), on peut conclure que, pour un diélectrique non dissipatif, les coefficients de l'équation (3) s'expriment tous en fonction du coefficent indéterminé b_o, des quatre tenseurs symétriques A_o, A'_o, A_2, A'_2 et des trois tenseurs antisymétriques W_1, W'_1, W_3. Il est intéressant de noter que les équations (1) inspirées des travaux de Voigt font également intervenir quatre tenseurs symétriques α_o, α'_o, α_2, α'_2 mais seulement deux tenseurs antisymétriques γ, γ'. Une théorie des diélectriques anisotropes non dissipatifs basée sur l'équation constitutive macroscopique (3) est donc plus générale qu'une théorie à polarisations partielles basée sur les équations (1).

Lorsque l'équation (3) est obtenue par élimination des polarisations partielles dans les équations (1), les tenseurs A_o, A'_o, A_2, A'_2, W_1, W'_1, W_3 peu-

vent s'exprimer en fonction des tenseurs α_o, α'_o, α_2, α'_2, γ, γ'. Dans le cas où ces tenseurs commutent, c-à-d. où les coefficients de l'équation (3) sont donnés par les formules (4), nous avons obtenu

$$A_o = \alpha_o(\alpha_o + \alpha'_o)^{-1}\alpha'_o \quad , \quad A_2 = \alpha_2(\alpha_2 + \alpha'_2)^{-1}\alpha'_2 \quad ,$$

$$2A'_o = (\alpha_2 + \alpha'_2)^{-2}[(\alpha_o + \alpha'_o)^{-1}(\alpha_o\alpha'_2 - \alpha'_o\alpha_2)^2 - (\alpha_2 + \alpha'_2)^{-1}(\alpha_2\gamma' - \alpha'_2\gamma)^2] ,$$

$$2A'_2 = (\alpha_o + \alpha'_o)^{-2}[(\alpha_2 + \alpha'_2)^{-1}(\alpha_o\alpha'_2 - \alpha'_o\alpha_2)^2 - (\alpha_o + \alpha'_o)^{-1}(\alpha_o\gamma' - \alpha'_o\gamma)^2] ,$$

$$2W_1 = (\alpha_o + \alpha'_o)^{-2}(\alpha_o^2\gamma' + \alpha_o'^2\gamma) + (\alpha_2 + \alpha'_2)^{-2}(\alpha_2^2\gamma' + \alpha_2'^2\gamma) \quad , \qquad (15)$$

$$W'_1 = (\alpha_2\alpha'_o - \alpha'_2\alpha_o)(\alpha_o+\alpha'_o)^{-1}(\alpha_2+\alpha'_2)^{-1}[(\alpha_o+\alpha'_o)^{-1}(\alpha_o\gamma' - \alpha'_o\gamma) + (\alpha_2+\alpha'_2)^{-1}(\alpha_2\gamma' - \alpha'_2\gamma)]$$

$$W_3 = (\alpha_o + \alpha'_o)^{-3}(\alpha_2\alpha'_o - \alpha'_2\alpha_o)(\alpha_o\gamma' - \alpha'_o\gamma) + \tfrac{1}{2}(\alpha_o + \alpha'_o)^{-4}(\gamma + \gamma')(\alpha_o\gamma' - \alpha'_o\gamma)^2 .$$

On remarque dans ce cas que W_1, W'_1, W_3 ne sont pas indépendants puisqu'ils s'expriment en termes de deux tenseurs antisymétriques γ, γ'.

Signalons enfin que l'on peut également exprimer que le diélectrique représenté par l'équation constitutive (3) est non dissipatif en introduisant une énergie interne. Cette méthode, exploitée dans un travail précédent [2], fournit des résultats équivalents à ceux présentés ici. La forme de ceux-ci nous paraît toutefois mieux adaptée à une comparaison avec les modèles à polarisations partielles.

3. ACTIVITE OPTIQUE

Pour étudier la propagation d'ondes sinusoïdales planes, nous supposerons que $E(x,t)$, $P(x,t)$ sont de la forme

$$E = \mathrm{Re}\{e \exp i\omega(t - \tfrac{n}{c}\, s.x)\} \quad , \quad P = \mathrm{Re}\{p \exp i\omega(t - \tfrac{n}{c}\, s.x)\} \quad , \qquad (16)$$

où e et p sont les vecteurs amplitudes complexes de E et P, où s est un vecteur unité dans la direction de propagation, et n est l'indice de réfraction complexe. En introduisant ces expressions dans l'équation constitutive (3) et en désignant par $d = e + p$ le vecteur amplitude du déplacement électrique, on obtient

$$d = \kappa(\omega)e \quad , \quad \text{avec} \quad \kappa(\omega) = 1 + \chi^{-1} \quad , \qquad (17)$$

où χ est donné par (5), et où les tenseurs b_1, b_2, a_o, a_1, a_2, a_3, a_4 sont donnés par (7) (8) (10) (14). Le tenseur κ appelé tenseur de permitivité complexe est hermitien.

Par souci de simplicité, nous nous sommes limités à des milieux à symétrie uniaxiale pour lesquels les quatre tenseurs symétriques et les trois tenseurs antisymétriques du modèle obtenu au paragraphe 2 sont de la forme

$$\begin{pmatrix} A_o \\ A_2 \\ A'_o \\ A'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_o \\ a_2 \\ a'_o \\ a'_2 \end{pmatrix} 1 + \begin{pmatrix} \hat{a}_o \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}'_o \\ \hat{a}'_2 \end{pmatrix} 1_z \otimes 1_z \quad , \quad \begin{pmatrix} W_1 \\ W'_1 \\ W_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g'_1 \\ g_3 \end{pmatrix} (1_x \otimes 1_y - 1_y \otimes 1_x), \tag{18}$$

où 1_x, 1_y, 1_z est une base orthonormée dont le vecteur 1_z est orienté suivant l'axe de symétrie. Le tenseur κ est alors de la forme

$$\kappa = \kappa_{11} 1 + (\kappa_{33} - \kappa_{11}) 1_z \otimes 1_z + i\kappa_{12}(1_x \otimes 1_y - 1_y \otimes 1_x) . \tag{19}$$

En utilisant les équations aux amplitudes

$$ns \times e = b \quad , \quad ns \times b = - d \tag{20}$$

résultant des équations de Maxwell, et l'équation (17), on obtient pour la propagation d'ondes dans la direction $s = 1_z$:

$$n^2 = \kappa_{11} \pm \kappa_{12} \quad , \quad e_x = \pm i e_y \quad . \tag{21}$$

Ceci met en évidence le phénomène de biréfringence circulaire, et donc d'activité optique. Celle-ci est mesurée par la valeur de κ_{12}. Nous avons calculé les expressions de κ_{11}, κ_{12} en fonction des coefficients constitutifs a_o, $a_2, \ldots, g_1, g'_1, g_3$ du modèle.

Si, dans un premier temps, on suppose $W_1 = W'_1 = W_3 = 0$, l'activité optique disparaît et l'indice de réfraction est alors donné par

$$n^2 - 1 = \kappa_{11} - 1 = \frac{a'_o - a'_2\omega^2}{a_o a'_o - [a'_2(a_o + a'_o) + a'_o(a_2 + a'_2)]\omega^2 + a_2 a'_2 \omega^4} \tag{22}$$

ou encore en introduisant $\omega_*^2 = \dfrac{a'_o}{a'_2}$ et les racines (supposées réelles et positives) ω_1^2, ω_2^2 du dénominateur

$$n^2 - 1 = \kappa_{11} - 1 = \frac{\omega_*^2 - \omega^2}{a_2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad . \tag{23}$$

C'est l'expression classique de l'indice de réfraction d'un diélectrique qui présente deux fréquences de résonances ω_1, ω_2, du moins si on suppose que $\omega_1 < \omega_* < \omega_2$ [3].

Dans le cas où les tenseurs antisymétriques W_1, W'_1, W_3 ne sont pas nuls, nous avons calculé les expressions de κ_{11} et κ_{12} au premier ordre en les coefficients g_1, g'_1, g_3 supposés petits. A cette approximation, l'expression de κ_{11} est toujours donnée par (22) ou (23) tandis que l'expression de κ_{12} en fonction de ω est

$$\kappa_{12} = \omega \frac{\omega_*^4(g_1' - g_1) - 2\omega_*^2(g_1' - g_1 - \omega_*^2 g_3)\omega^2 - (g_1' + g_1)\omega^4}{a_2^2\omega_*^4(\omega^2 - \omega_1^2)^2(\omega^2 - \omega_2^2)^2} \quad . \quad (24)$$

Celle-ci peut encore se mettre sous la forme

$$\kappa_{12} = \omega \frac{\Gamma - \Lambda(\omega^2 - \omega_1^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2} + \omega \frac{\Gamma' + \Lambda(\omega^2 - \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega_2^2)^2} \quad , \quad (25)$$

où les coefficients Γ, Γ', Λ s'expriment comme combinaisons linéaires de g_1, g_1', g_3.

Si on calcule κ_{12} à partir du modèle (1) qui ne comporte que deux tenseurs antisymétriques, on obtient une expression de la forme (25) avec $\Lambda = 0$. Dans ce cas, on constate aisément que si Γ et Γ' sont de même signe, ce qui signifie que l'activité optique du diélectrique a le même sens au voisinage des deux fréquences de résonance, la fonction κ_{12} ne peut s'annuler. L'activité optique a donc le même sens pour toutes les fréquences $\omega > 0$. Par contre, si Γ et Γ' sont de signes contraires, la fonction κ_{12} change une fois de signe entre ω_1 et ω_2, ce qui signifie que l'activité optique s'annule avec changement de sens entre ω_1 et ω_2. Un autre changement de sens peut se produire pour une fréquence située en dehors de l'intervalle $[\omega_1,\omega_2]$.

Considérons maintenant l'expression (25) avec $\Lambda \neq 0$, obtenue à partir du modèle macroscopique comportant trois tenseurs antisymétriques.

Supposons d'abord que Γ et Γ' sont de même signe, ce qui signifie toujours que l'activité optique du diélectrique a le même sens au voisinage des deux fréquences de résonance. Il y a maintenant lieu de distinguer deux cas. Si $\Lambda^2(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 < 4\Gamma\Gamma'$, la fonction κ_{12} ne peut s'annuler et l'activité optique a donc le même sens pour toutes les fréquences $\omega > 0$. Si $\Lambda^2(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 > 4\Gamma\Gamma'$ la fonction κ_{12} peut éventuellement s'annuler pour deux fréquences situées toutes deux dans l'intervalle $[\omega_1,\omega_2]$ ou toutes deux en dehors de cet intervalle. L'activité optique peut donc changer deux fois de sens dans l'intervalle $[\omega_1,\omega_2]$, ou à l'extérieur de cet intervalle, ce qui ne peut jamais se produire dans un diélectrique représenté par le modèle (1).

Supposons maintenant que Γ et Γ' sont de signes contraires. Dans ce cas, la fonction κ_{12} change une fois de signe entre ω_1 et ω_2, et un autre changement de signe peut se produire pour une fréquence située en dehors de l'intervalle $[\omega_1,\omega_2]$. Dans ce cas, le résultat ne diffère donc pas qualitativement de celui obtenu à partir du modèle (1).

4. CONCLUSIONS

Une théorie des diélectriques anisotropes non dissipatifs à deux fréquences de résonance basée sur l'équation constitutive macroscopique (3) est plus géné-

rale qu'une théorie à deux polarisations partielles basée sur les équations (1). En effet, la théorie basée sur les équations (3) fait intervenir un tenseur antisymétrique de plus que la théorie basée sur les équations (1).

Les tenseurs antisymétriques apparaissant dans les deux théories permettent de caractériser l'activité optique de ces diélectriques en fonction de la fréquence des ondes. Dans le cas du modèle (3), l'activité optique peut changer deux fois de sens entre les deux fréquences de résonance, ou en dehors de ces deux fréquences, ce qui ne peut jamais se produire pour le modèle (1).

Enfin, on peut se demander s'il n'y a pas moyen de généraliser le modèle (1) de manière à obtenir un modèle à polarisations partielles équivalent au modèle intégro-différentiel étudié dans ce travail. On peut par exemple songer à introduire une interaction entre les deux espèces de charges. Cette question sera étudiée ultérieurement.

5. BIBLIOGRAPHIE

[1] VOIGT, W., Ann.der Phys., 67, 345 (1899)

[2] BOULANGER, Ph. and MAYNE, G., in "The Mechanical Behaviour of Electromagnetic Solid Continua" (Proceedings of the IUTAM-IUPAP Symposium - Paris 1983, G.A.Maugin editor), 93, North-Holland, Amsterdam (1984).

[3] STONE, J.M., Radiation and Optics, Mc Graw Hill, New York (1963).

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 101-114

Problèmes de modélisation du comportement mécanique des composites stratifiés

Problems of modelling of the mechanical behaviour of laminated composites

J. GERALD

ELF Aquitaine, Cedex 27, 92096 Paris la Défense

J. FRELAT, D. RADENKOVIC

Laboratoire de Mécanique des Solides
Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex

R E S U M E

Le matériau non-homogène des composites stratifiés - un assemblage de strates orientées, constituées de fibres noyées dans une matrice - est représenté normalement par un Corps Homogène Anisotrope Numériquement Equivalent (CHANE). La modélisation appropriée soulève plusieurs problèmes qui sont considérés dans la présente communication. Cette discussion est suivie par la présentation de résultats numériques (flexion d'un quart de tore) obtenus grâce à un programme de calcul développé au L.M.S. (Laboratoire de Mécanique des Solides), correspondant à un modèle simple : coque mince élastique anisotrope. Enfin une description d'essais sur tubes minces, conçus pour l'identification expérimentale directe des constantes d'élasticité de cette modélisation du stratifié, est donnée.

A B S T R A C T

The non-homogeneous laminated composite material - an assembly of oriented lamina composed of fibers in a matrix - is normally represented as a Numerically Equivalent Homogeneous Anisotropic Material (NEMAM). The appropriate modelling gives rise to several problems which are considered in the present communication. This discussion is followed by the presentation of numerical results (bending of a quarter of a torus) obtained by means of a programme, developped in the L.M.S. (Laboratoire de Mécanique des Solides), corresponding to a simple model : elastic, anisotropic thin shell. Finally, tests on thin tubes devised for a direct experimental identification of the elastic moduli involved in this modelling of the laminate are described.

1 - INTRODUCTION

1.1 - Principe

Dans les applications industrielles des composites, on trouve une vaste gamme de matériaux et de structures dont la modélisation mécanique et numérique se fait, selon les besoins, depuis la Résistance des Matériaux la plus rudimentaire jusqu'aux calculs tridimensionnels très sophistiqués. Les descriptions détaillées des matériaux et des modèles sont donnés dans des ouvrages bien connus, par exemple [1], [2], [3], [4], sur lesquels s'appuie en partie le présent exposé. Le matériau non homogène (fibres + matrice) est représenté dans tous les cas par un Corps Homogène Anisotrope Numériquement Equivalent (CHANE).

La modélisation appropriée soulève plusieurs problèmes, différents selon le matériau envisagé et l'information requise. On peut mentionner ainsi :

i. Choix des modèles et de leur structure. Entre le comportement en service (supposé élastique linéaire) et la rupture (domaine fortement non-linéaire) se développe l'endommagement entraînant des variations de l'anisotropie. Par ailleurs, pour les plaques et les coques, on est souvent amené à négliger des effets numériquement secondaires, mais physiquement importants (contraintes pouvant provoquer des glissements ou des décollements entre les couches).

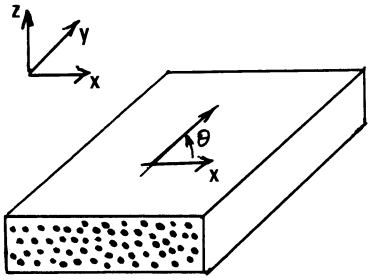
ii. Identification des constantes des modèles. Les caractéristiques d'un modèle continu (CHANE) doivent être déterminées à partir des mesures physiques sur un corps effectivement non-homogène. Le raccord, parfois difficile se fait alors à l'aide d'un passage "micro-macro" plus ou moins bien justifié. Par ailleurs, il ne semble pas utile de retenir des modèles plus précis que ne l'est l'information disponible.

Pour concrétiser les problèmes qui se posent nous nous sommes attachés à traiter un exemple utile du point de vue industriel et représentatif du point de vue théorique : le dimensionnement d'accessoires de tuyauterie en matériau composite.

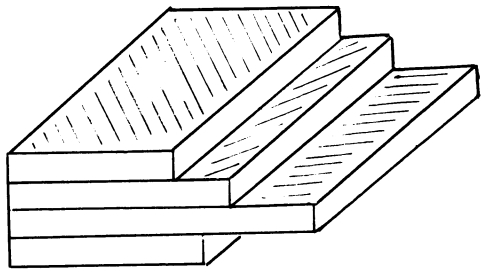
2 - MODELES DE COMPORTEMENT DES STRATIFIES

Rappelons brièvement la description des structures dont nous voulons modéliser le comportement. La figure 1 représente une couche ou une strate en matériau composite : la matrice, en général peu résistante, entoure et unit les fibres longues unidirectionnelles (angle θ par rapport à l'axe des x) qui ont une très bonne résistance en traction. Une structure mince stratifiée (plaque, coque) ou un stratifié est formée par plusieurs strates superposées figure 2, rendues solidaires par divers procédés de fabrication. Afin d'obtenir la résistance requise dans les différentes directions les strates sont orientées de manière appropriée. On a ainsi, en suivant z croissant, des séquences θ_1, θ_2,... θ_i,... θ_n. Si les strates forment des paires $\pm\theta$ on dit que le stratifié est équilibré ; la disposition peut être symétrique par rapport à la surface médiane.

La modélisation du comportement d'un stratifié consiste en la définition d'un Corps Homogène Anisotrope Numériquement Equivalent (CHANE) tel que le calcul de la structure pour le matériau équivalent ainsi défini donne avec la meilleure approximation les efforts dans la structure réelle. Cette modélisation passe normalement par deux stades : (i) comportement d'une strate formée des fibres et de la matrice ; (ii) comportement du stratifié formé par un empilement de strates. Pour chacun de ces stades le passage "micro-macro" (structure locale → structure globale) est beaucoup plus grossier que dans les cas classiques de structure fine périodique ou quasipériodique (tissus, polycristaux) où une approche statistique (explicite ou implicite) sous-tend le raisonnement. Toutefois les procédés mathématiques dits d'"homogénéisation" peuvent rendre des services décisifs dans l'étude des strates.



- Figure 1 -
Modèle de composite
unidirectionnel (couche/strate)



- Figure 2 -
Modèle de composite
stratifié (multicouche)

Une strate se comporte, dans son plan, comme un matériau orthotrope ; la déformation due au cisaillement transverse (dans le sens de l'épaisseur) est en général mal connue. Pour des chargements en-dessous d'un certain niveau on peut considérer que la réponse est élastique-linéaire et la plupart des procédés existants de calcul sont basés sur cette hypothèse. Mais d'une part, on est en fait en présence d'un comportement viscoélastique (éventuellement linéaire) et du vieillissement dû aux effets de l'environnement (humidité, température etc) et/ou de la fatigue. D'autre part, selon le niveau du chargement on a une réponse non-élastique , voire fortement non-linéaire due aux contraintes initiales internes et à d'autres phénomènes : endommagement progressif de la matrice, rupture des liaisons fibre-matrice, flambage des fibres en compression etc. La définition des domaines, tant du comportement linéaire (limite d'endommagement) que d'intégrité de la strate (limite de rupture) demande des études approfondies.

En partie courante, le comportement du stratifié est défini, par combinaison des réponses des strates en contrainte plane, donc par intégration dans l'épaisseur, ce qui aboutit aux formulations classiques des coques minces (KIRCHHOFF-LOVE), tandis qu'à proximité des bords libres une répartition tridimensionnelle doit être prise en compte. Le stratifié est élastique-linéaire tant que les strates le sont et tant qu'il y a continuité des déplacements aux interfaces ; la non-linéarité (et l'anélasticité) du comportement proviennent de l'endommagement progressif des strates, et de leur glissement relatif, allant jusqu'à la délamination. La description du stratifié intègre donc les propriétés des strates plus des effets tridimensionnels dus au cisaillement transverse (dans les deux domaines : linéaire et non-linéaire). La prise en compte des non-linéarités peut se faire par un calcul incrémental qui reflète surtout l'évolution de l'anisotropie au fur et à mesure de la progression de la déformation. Les effets tridimensionnels sont décrits lorsqu'il est nécessaire et dans la mesure du possible, par des théories de coques qui introduisent la rotation de la normale matérielle par rapport à la surface médiane (par exemple REISSNER).

Un modèle numérique qui prendrait en compte tous ces effets, depuis le domaine élastique linéaire jusqu'à la ruine de la structure, serait trop complexe pour être utilisable dans la pratique industrielle ; sans parler du fait que l'état actuel des connaissances ne permettrait même pas une identification fiable de toutes les constantes physiques impliquées dans une telle description. Ici, comme ailleurs, le choix du modèle dépend de la précision des données sur le matériau, mais aussi et surtout de ce que l'on veut faire avec ce modèle, donc en particulier de l'approche choisie pour le dimensionnement. Déjà historiquement, pour les constructions métalliques deux approches se sont succédées alternativement (en parallèle avec l'évolution des connaissances) : dimensionnement par rapport à la limite de l'élasticité ou par rapport à la rupture, étant entendu que dans chaque cas on introduit un "coefficient de sécurité" tel que le comportement de la structure en service reste élastique linéaire.

Dans le cas présent nous avons choisi une modélisation simple, cependant

légèrement plus complète que l'option de base prise dans beaucoup de codes industriels ; notamment, nous considérons une structure stratifiée comme une coque mince dont la normale matérielle reste perpendiculaire à la surface médiane mais avec une anisotropie complète.

Nous avons plusieurs raisons pour un tel choix :

(i) Un tel modèle répond aux premiers besoins du calcul industriel en ce sens qu'il permet (avec le support de quelques expériences) le dimensionnement et surtout la comparaison des variantes éventuelles d'un projet de structure. Notons cependant que le domaine de validité d'une telle approche reste encore à définir avec une précision suffisante.

(ii) Malgré l'effort expérimental qui est en cours, nous ne disposons pas actuellement de données fiables sur les constantes du matériau qui justifieraient, pour les applications directes, une extension, même aux coques de Reissner par exemple.

(iii) Le modèle le plus simple facilite la mise en place des logiciels nécessaires quel que soit le modèle d'élément de coque retenu : calcul de la matrice de rigidité globale, interface avec le programme de base de coque anisotrope, autres interfaces, post-processeurs divers.

(iv) La maîtrise du modèle simple une fois acquise permettra et même entraînera les extensions qui pourront s'imposer dans des conditions particulières : prise en compte des effets secondaires, des non-linéarités diverses...

Notons, chemin faisant, une autre voie que les études de modélisation des stratifiés (ou plus généralement des divers composites) pourraient prendre et qui correspondrait au calcul à la rupture, développé en particulier dans le cas du comportement élastique - parfaitement plastique. Une telle approche demanderait d'élucider préalablement un certain nombre de questions de base : définition appropriée du domaine de la rupture , étude fine de sa dépendance ou de son indépendance du trajet de charge etc. C'est probablement la raison pour laquelle on ne trouve pas dans la littérature, au moins à notre connaissance, de tentatives systématiques d'une telle modélisation.

3 - COMPORTEMENT ELASTIQUE-LINEAIRE

Avant de passer à la description numérique on peut revenir sur trois questions, qui ont été mentionnées dans le paragraphe précédent : (i) la place des modèles numériques par rapport à la théorie des coques, minces élastiques, (ii) l'évaluation des constantes d'élasticité (matrice de rigidité), (iii) l'importance des effets de bord.

(i) La théorie des coques minces élastiques vue soit comme approximation cohérente de l'élasticité tridimensionnelle soit comme description indépendante d'un milieu de Cosserat bidimensionnel a été largement débattue dans les années 1960, voir par exemple Naghdi [5]. La théorie classique, dite de Kirchhoff-Love, qui admet que la normale matérielle reste normale à la surface médiane déformée avait été discutée et précisée auparavant ; les variantes possibles qui prennent en compte la rotation indépendante de la normale matérielle, comme celle énoncée pour les plaques par Reissner [6] dans les années 1940, ont été formulées et même des approximations d'ordre supérieur ont été tentées. Les descriptions numériques (éléments finis) se rattachent à l'un ou l'autre de ces modèles de base ; une revue de différents types d'éléments est donnée par Batoz [7]. Une modélisation plus évoluée a été proposée par Verchery [8]. Nous avons donné au paragraphe précèdent certaines des raisons qui nous ont incités à choisir en première alternative un modèle assez simple.

(ii) L'évaluation effective des constantes d'élasticité (coefficients de la matrice de rigidité) reste un point faible dans la modélisation des stratifiés. Une approche par le calcul est normalement utilisée, elle est basée sur plusieurs hypothèses simplificatrices et les méthodes de vérification expérimentale se heurtent à de nombreuses difficultés.

Rappelons ici très brièvement la construction de la matrice de rigidité, ne serait-ce que pour indiquer les hypothèses essentielles faites au cours des dif-

férentes étapes de cette modélisation.

En supposant qu'une strate a un comportement en contrainte plane (en accord avec l'interprétation de la théorie classique des coques due à KOITER) et en faisant coincider les coordonnées avec les axes d'orthotropie on écrit (ici avec les notations habituelles des traités techniques)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Les quatre coefficients indépendants de la matrice de (1) sont déterminés de différentes manières. On obtient le plus souvent Q_{11} par la loi des mélanges et les autres coefficients par un modèle "en série" ; mais plusieurs approches plus élaborées ont été proposées. L'analyse de telles approches devrait faire l'objet d'un chapitre à part sur la modélisation du comportement des composites. Nous n'abordons pas ce chapitre ici.

La rotation des axes, toujours en contrainte plane et en attribuant aux indices grecs le sens usuel, donne

$$\sigma_{\alpha\beta} = \bar{Q}_{\alpha\beta\gamma\delta}\ \varepsilon_{\gamma\delta} \qquad (\alpha,\ldots = 1,2) \qquad (2)$$

La définition des efforts ($N_{\alpha\beta}$ efforts de membrane, $M_{\alpha\beta}$ moments)

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}(z)\, dz \qquad M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}(z)\, z\, dz \qquad (3)$$

et l'hypothèse de base de la théorie des coques classique

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(z) = \varepsilon^{\circ}_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta}\, z \qquad (4)$$

avec $\varepsilon^{\circ}_{\alpha\beta}$ allongements de la surface médiane, $\kappa_{\alpha\beta}$ courbures.

permettent alors de calculer la matrice de rigidité

$$\begin{pmatrix} N \\ --- \\ M \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & D \end{array}\right) \begin{pmatrix} \varepsilon^{\circ} \\ --- \\ \kappa \end{pmatrix} \qquad (5)$$

où les sous-matrices A, B, D sont symétriques.

Soulignons que l'écriture de (5) présuppose l'hypothèse de base (4) et l'état de contraintes plan (1). La présence des contraintes internes (dues par exemple à la fabrication), mais surtout l'effet du cisaillement transverse, qui peut être important près d'un bord libre, peuvent sensiblement modifier l'état réel de la structure. Il serait alors intéressant de disposer de vérifications expérimentales des coefficients tant près du bord qu'en pleine surface de la coque.

Avec un modèle du type de Reissner il faut introduire dans le calcul l'effort de cisaillement transverse.

$$Q_{\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3}\, dz \qquad (6)$$

et l'angle δ_α entre la normale matérielle et la normale géométrique de la surface médiane, après déformation.

Avec ceci, on obtient par exemple une relation de la forme

$$\begin{pmatrix} N \\ --- \\ M \\ --- \\ Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} A & B & & \\ B & D & \multicolumn{2}{c}{(0)} \\ \hline & & C_{44} & C_{45} \\ \multicolumn{2}{c|}{(0)} & C_{54} & C_{55} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \varepsilon^\circ \\ --- \\ \kappa \\ --- \\ \delta_x \\ \delta_y \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Nous avons explicité ici la dernière sous-matrice dont la structure, en fait, n'est pas évidente.

(iii) En proximité d'un bord libre, la solution obtenue avec le modèle coque mince peut satisfaire les conditions limites (efforts et moments nuls), alors que les contraintes correspondantes dans les strates ne sont pas nulles, mais simplement autoéquilibrées. Plusieurs études théoriques ont montré que le rééquilibrage nécessaire pour rétablir les conditions physiques (contraintes nulles) introduit des effets importants de cisaillement transverse ainsi que des contraintes normales interlaminaires qui dépendent de la succession des strates orientées. Ces contraintes disparaissent à très courte distance (effet de Saint-Venant), cependant elles peuvent provoquer localement des glissements ou des décollements entre les couches, (comme ceci a été montré expérimentalement) ce qui justifie le besoin d'études attentives de ces phénomènes.

Pour des configurations géométriques très simples, des solutions analytiques approchées ont été trouvées, mais la prise en compte de tels résultats dans un modèle de coque ne semble pas évidente. La comparaison soigneuse entre les résultats de calculs par différentes approches et des expériences aideront à clarifier cet important problème.

4 - MODELISATION NUMERIQUE

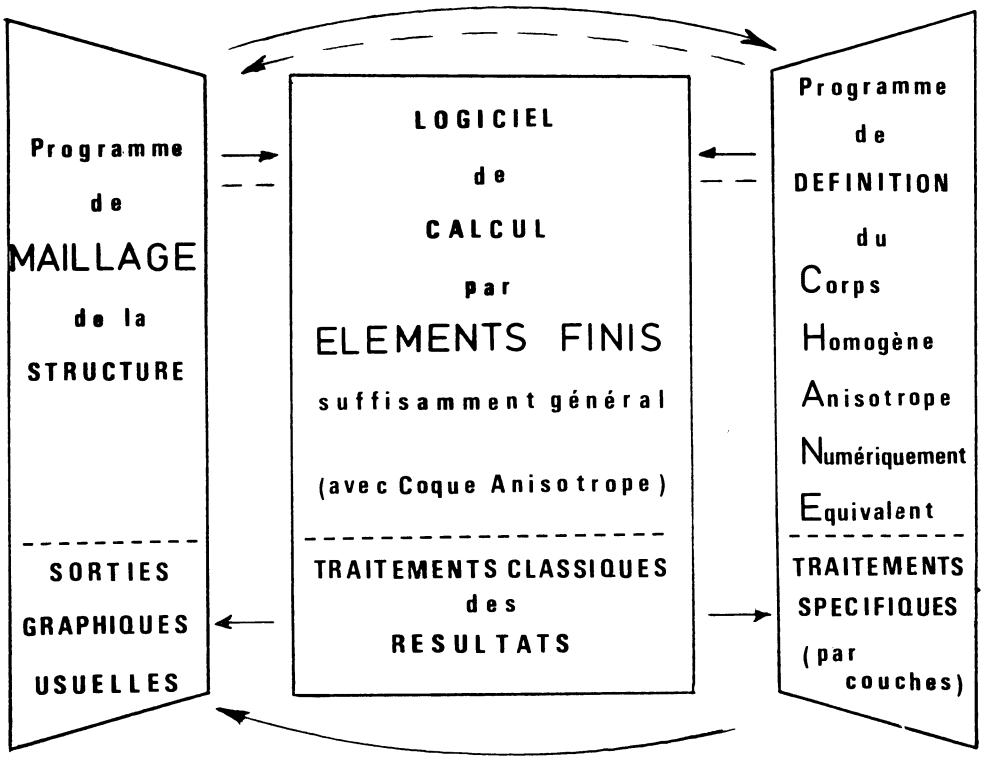
4.1 - Structure et contenu des codes de calcul

Le schéma type d'un logiciel ayant pour objet le calcul par éléments finis des structures en matériaux composites est présenté à la figure 3. Autour du code de calcul proprement dit s'articulent deux volets, l'un, classique, est celui des entrées-sorties (maillages, tracés graphiques....), l'autre, spécifique, est celui de la modélisation numérique des matériaux composites (calcul du CHANE, traitement des résultats au niveau des couches...)

Il convient de bien avoir à l'esprit que dans le cas des composites, le matériau n'existe que par le matériel, c'est-à-dire objet réalisé, et qu'il en résulte, au niveau numérique, un certain nombre d'imbrications spécifiques telles les interdépendances entre la description géométrique du matériel, la modélisation du matériau et la nature et le type d'éléments finis disponibles ou mis en oeuvre. Par conséquent le choix d'un modèle numérique cohérent n'est pas unique. On comprend alors aisément la grande complexité qui en résulte dans l'analyse des problèmes, en particulier de ceux d'évolution ainsi que d'optimisation (de la structure, du matériau).

Les modèles numériques actuellement disponibles sont tous plus ou moins incomplets. On notera avec Griffin [9], que bon nombre de codes existants ne prennent pas en compte les matériaux anisotropes les plus généraux, voir par exemple Gérald [10], et sont limités soit aux structures de révolution anisotropes, soit au cas orthotrope. Dans le cas particulier des coques en matériaux stratifiés cette dernière restriction constitue une limitation aux composites

symétriques-équilibrés (matrice B nulle) ce qui restreint sérieusement les cas abordables par le calcul. Enfin certains codes, sans toujours le dire explicitement, ne simulent le couplage M-N que sous la forme d'une pondération numérique de la sous-matrice D. Ceci revient à faire supporter l'effet de couplage uniquement aux moments et à étudier un matériau orthotrope. Si une telle approche peut avoir un intérêt pratique - on s'est ramené à un cas numériquement plus simple - elle ne peut être considérée comme étant du côté de la sécurité.



- Figure 3 -
Schéma type de logiciel de calcul des structures en matériaux composites
(exemple : logiciel du L.M.S.)

Dans le cadre de la présente étude, nous avons choisi de représenter la structure du matériau composite stratifié par une modélisation de coque mince élastique linéaire, selon la théorie classique de Kirchhoff-Love. Notre modèle introduit le couplage M-N explicitement, dans le cas de l'anistropie la plus générale, c'est-à-dire en prenant intégralement en compte les matrices A, B et D de (5).

Compte tenu de son aspect "éléments finis" une telle méthode décrit la structure comme un assemblage de matériaux pouvant être différents (un par maille). On notera qu'une telle modélisation s'adapte tout à fait bien aux matériaux composites dont les caractéristiques (orientations relatives des directions des fibres, variations d'épaisseur...) changent avec le profil de la pièce réalisée et ne sont connues qu'en moyenne. Pour chaque maille les coefficients des matrices de rigidité, A, B et D, sont obtenus par une modélisation du stratifié

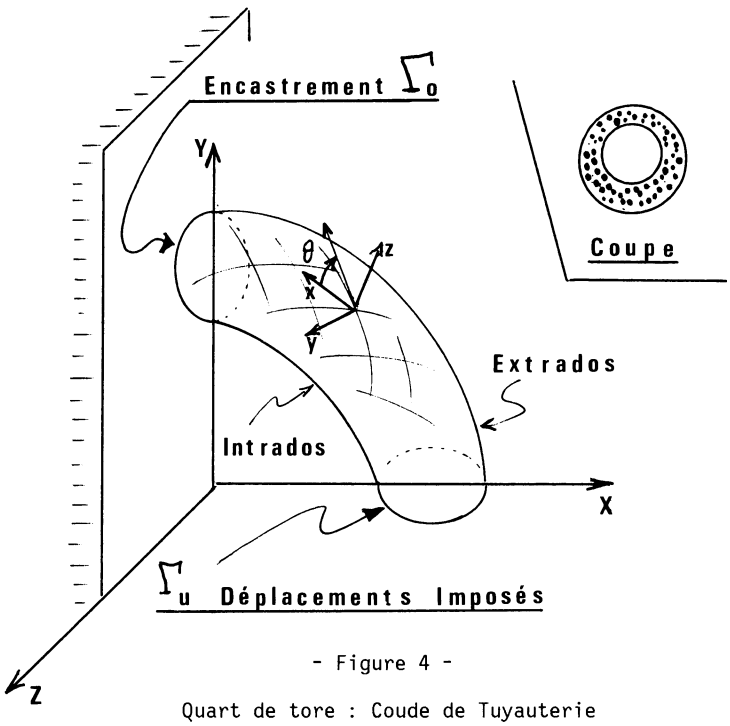
(CHANE) assumant la continuité des déformations aux interfaces (i.e. en collage parfait). Quelles que soient les simplifications admises au niveau des choix, cette démarche complète permet de disposer d'un ensemble cohérent pour aborder dès maintenant des problèmes industriels, dont un exemple est donné au paragraphe suivant. Dans le même temps du point de vue de la recherche, un tel modèle est évolutif et permet de discuter certaines options, il est aussi ouvert à toutes les améliorations.

4.2 - Un exemple : le calcul d'un coude de tuyauterie

4.2.1 - Hypothèses

Géométrie

La structure étudiée est présentée à la figure 4. Il s'agit d'un quart de tore qui représente un coude de tuyauterie obtenu par enroulement filamentaire.



- Figure 4 -

Quart de tore : Coude de Tuyauterie

Comme notre propos ici est principalement de mettre en évidence certains effets globaux induits par l'anisotropie et le couplage M-N, nous avons fait des hypothèses plus ou moins arbitraires sur la réalisation de ce coude :
- l'angle d'enroulement reste, en repère local, constant en tout point du tore,
- la quantité de matière (fibre + résine) reste la même en volume et le taux de fibre reste constant.

Ceci nous conduit à une épaisseur variable de l'extrados à l'intrados.

Les dimensions du coude étudié sont :
- rayon du tube 25 mm
- rayon du tore 100 mm
- épaisseur 3,2 mm (extrados) à 5,3 mm (intrados)

Matériau stratifié

Afin de tester différents effets trois types de stratifiés ont été étudiés (indice s pour symétrique selon notation industrielle) :

(a) - $(+30, -30)_s$: i.e. $A \neq 0$, $B = 0$, $D \neq 0$

(b) - $(+60, -60)_s$: i.e. id

(c) - $(+60, -60, +60, -60)$: i.e. $A \neq 0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$

Deux types de comparaisons sont donc possibles numériquement
- influence de la direction des fibres (a-b)
- influence du couplage M-N (b-c)

Dans le plan local, pour le repère de symétrie matérielle, chaque couche a pour coefficients d'élasticité :

$E_L = 42\,000$ MPa
$E_T = 14\,000$ MPa
$\nu_{LT} = .24$
$G_{LT} = 7\,000$ MPa

Le tableau 1 présente, pour les trois cas envisagés et à titre de comparaison, les matrices obtenues par calcul, au niveau de l'extrados du coude. La variation des coefficients entre l'extrados et l'intrados est conforme au profil de la structure.

TABLEAU 1

Matrices de Rigidité (Unités : force MN, longueur mm)

Cas $(+30, -30)_s$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & D \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 101000 & 24500 & 0 & & & \\ & 55000 & 0 & & (0) & \\ & & 35500 & & & \\ \hline & & & 86000 & 20500 & 17500 \\ & (\text{symétrique}) & & & 47000 & 7500 \\ & & & & & 30500 \end{array}\right)$$

Cas $(+60, -60)_s$

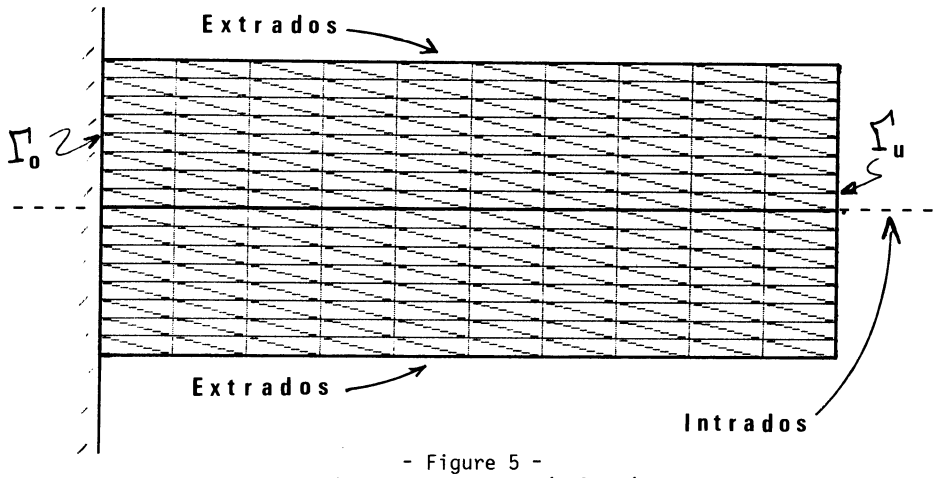
$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & D \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 55000 & 24500 & 0 & & & \\ & 101000 & 0 & & (0) & \\ & & 35500 & & & \\ \hline & & & 47000 & 20500 & 7500 \\ & (\text{symétrique}) & & & 86000 & 17500 \\ & & & & & 30500 \end{array}\right)$$

Cas $(+60, -60, +60, -60)$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & D \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 55000 & 24500 & 0 & 0 & 0 & 5000 \\ & 101000 & 0 & 0 & 0 & 11000 \\ & & 35500 & 5000 & 11000 & 0 \\ \hline & & & 47000 & 20500 & 7500 \\ & (\text{symétrique}) & & & 86000 & 17500 \\ & & & & & 30500 \end{array}\right)$$

4.2.2 - Résultats

Une vue du maillage est donnée à la figure 5. Elle présente une "pseudo développée" de la surface du coude, le tore n'étant pas une surface développable.



- Figure 5 -
Maillage en pseudo-développée

Les figures 6 (a, b, c) présentent quelques résultats obtenus par le calcul : le tracé des déformations principales en surface extérieure du tore. Une étude et des comparaisons de ces premiers résultats s'imposent. Sans développer une analyse fine de la figure 6 - ce qui n'est pas le propos direct de cette communication - on peut noter en particulier par comparaison des figures 6b et 6c l'effet du couplage M-N. Il se traduit par un transfert des efforts sur une des faces du tore. Ce couplage introduit également un déplacement global hors du plan, non négligeable, qu'il est indispensable de prendre en compte.

5 - REMARQUE SUR L'APPROCHE EXPERIMENTALE

5.1 - Situation de l'approche expérimentale

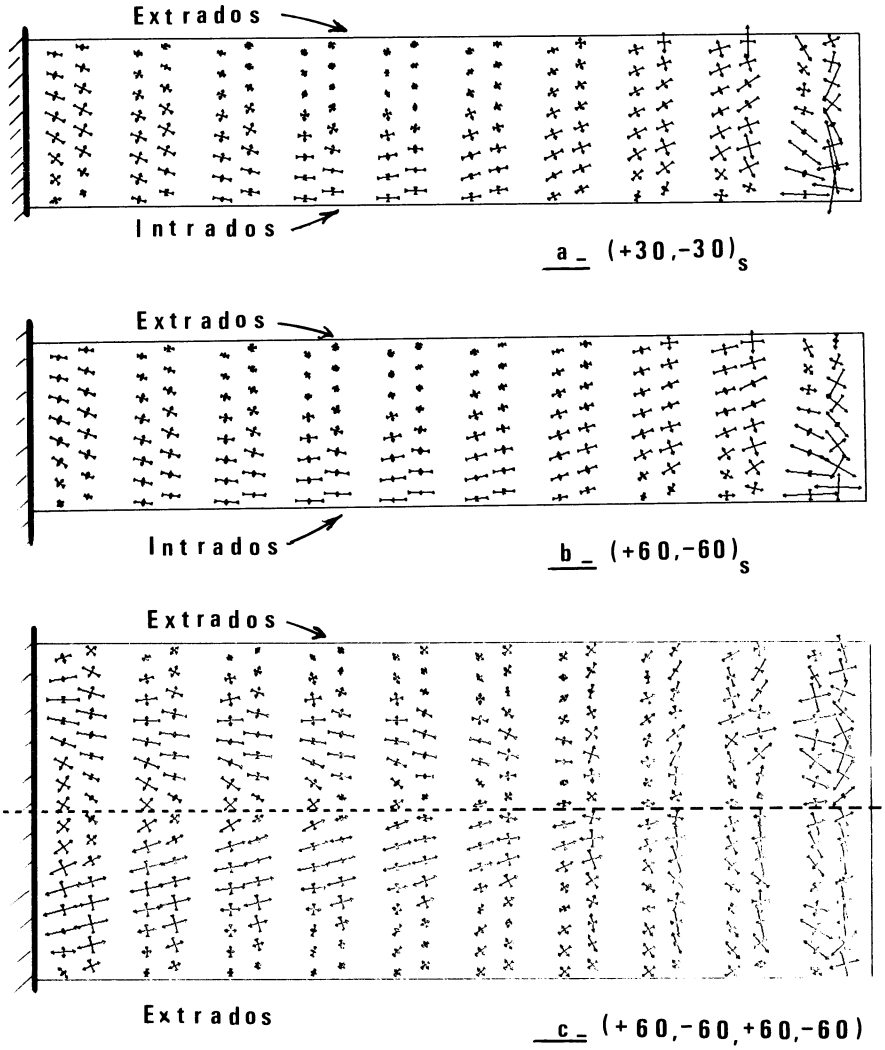
Comme nous l'avons vu au cours des paragraphes précédents l'approche théorique de la modélisation des matériaux composites stratifiés s'appuie sur de multiples hypothèses et nécessite donc des validations expérimentales.

La pratique habituelle se fonde sur des essais d'éprouvette de géométrie simple, la plupart du temps sollicitée en traction ou compression simple, voire en flexion ou en torsion. Bien que plus rares, il faut tout de même signaler l'existence d'essais sous chargement complexe. Pour les éprouvettes les effets de bord ne sont pas négligeables.

L'information obtenue ainsi est très fragmentaire et nécessite toujours un certain nombre de calculs complémentaires, soit pour accéder aux coefficients à introduire dans les matrices de rigidité, soit pour valider un critère limite.

Or les calculs de structures sont menés en élasticité. Il est donc essentiel de connaître la limite de validité de ces calculs. Pour cela, il convient de mieux cerner le domaine d'élasticité des matériaux composites, domaine assimilable, a priori, au domaine de non endommagement macroscopique.

Puisque l'on observe le comportement des matériaux composites à une échelle où ceux-ci sont considérés comme homogènes anisotrope, il faut rechercher la frontière de non-endommagement sous sollicitations complexes par une méthode directe.

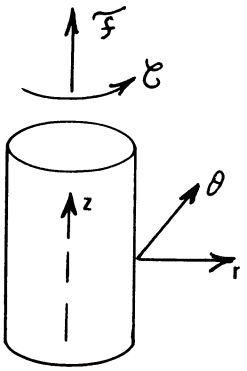


- Figure 6 -
Comparaison de résultats : déformations principales en peau extérieure
(nota : dans le cas "symétrique" une demi-structure seulement a été calculée)

5.2 - Essais sur tube en Traction-Torsion

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à des structures tubulaires réalisées par un enroulement filamentaire. Les essais et les résultats en question ont déjà été présentés par Frelat [11]. Nous en rappelons ici les grandes lignes.

La figure 7 donne le principe de l'application des efforts et le repère utilisé.



- Figure 7 -
L'éprouvette tubulaire :
application des charges

L'état de contrainte sous les sollicitations envisagées est considéré comme homogène et les contraintes, non nulles, qui règnent dans le tube sont :

$$\bar{\sigma}_{\theta z} = \bar{\tau} \cong C/2\,\pi\, r_m^2 e$$
$$\bar{\sigma}_{zz} = \bar{\sigma} \cong F/2\,\pi\, r_m e \qquad (8)$$

avec r_m rayon moyen du tube mince, e épaisseur.

Le dispositif qui permet de fixer l'éprouvette à la machine est très simple, il s'agit de deux plateaux centrés par des ergots cylindriques et tenus par des boulons. L'éprouvette est collée sur ces plateaux, son positionnement pendant le collage est assuré par deux plaques vissées.

Des jauges de déformations dites "rosettes", posées symétriquement de part et d'autre du plan médian de l'éprouvette, permettent d'évaluer les déformations $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{\theta z}$ et ε_{zz}.

Afin de contrôler les propriétés de régularité du matériau et l'homogénéité du champ de contrainte au sein de l'éprouvette toutes les déformations possibles ont été observées séparément au cours d'un essai préliminaire. Ensuite, des essais systématiques ont été menés dans le but d'obtenir des mesures des constantes d'élasticité ainsi que de détecter le seuil des premiers endommagements macroscopiques.

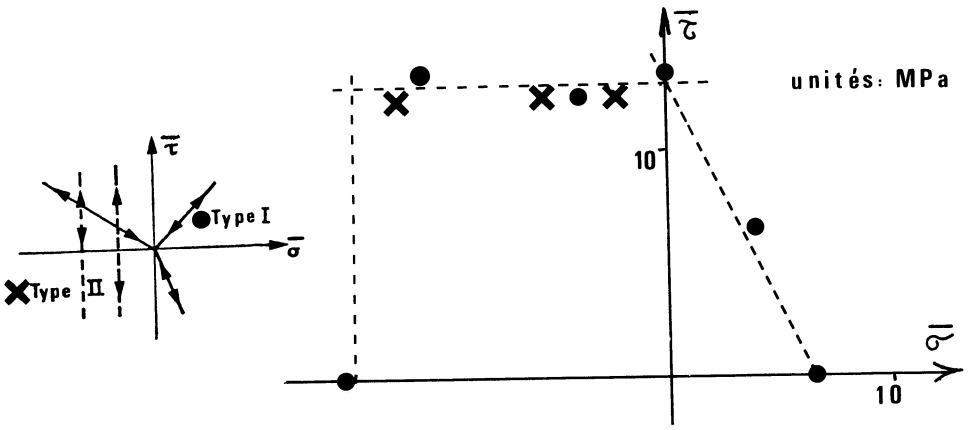
L'application d'une force axiale F et d'un couple de torsion C, permettent d'obtenir les modules E_{zzzz}, $E_{\theta z\theta z}$ ainsi que le coefficient de Poission $\nu_{\theta z}$.

Deux types de trajets de chargement ont été réalisés pour trouver le seuil de reversibilité (figure 8) :

. Le type I, défini comme trajet radial consiste à faire croître en même temps la force axiale et le couple suivant un rapport constant (plusieurs rapports ont été utilisés).
. Le type II, défini comme trajet rectangulaire consiste à imposer d'abord une valeur de la force axiale puis à augmenter le couple de torsion (plusieurs montées pour des valeurs de force axiale différentes ont été réalisées).

Les montées en charge ayant été effectuées très lentement on a pu constater que le matériau obéissait bien aux lois de l'élasticité linéaire anisotrope.

Pour chacun des trajets décrits, le point (F,C) où apparaît une non-linéarité a été relevé. Ces points traduits dans le plan $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$ ont été portés sur la figure 8. Bien qu'il s'agisse de points relativement éloignés les uns des autres, nous pouvons estimer la frontière du premier endommagement macroscopique. Les résultats peuvent être symétrisés par rapport à l'axe $\bar{\tau} = 0$ puisqu'il s'agit d'un enroulement symétrique.



- Figure 8 -
Recherche de la frontière du domaine d'élasticité

Pour le matériau testé, il semble que l'on puisse admettre de modéliser cette frontière, par trois segments de droite :

$$\begin{aligned} &\bar{\sigma} > \sigma_{y_1} \quad ; \quad |\bar{\tau}| < |\tau_y| && \text{(pour } \sigma < 0) \\ &a\,\bar{\sigma} + b\,|C| < \sigma_{y_2} && \text{(pour } \sigma > 0) \end{aligned} \tag{9}$$

Ayant ainsi accédé au comportement en membrane de la structure étudiée (matrice A et son domaine de validité), on pourrait imaginer des essais sur tube en flexion locale pour accéder au comportement en flexion et aux effets du couplage M-N (matrice D et B).

6 - CONCLUSIONS

Le but du travail présenté dans cette communication n'a pas été la recherche directe de nouveaux résultats théoriques mais le choix d'une orientation claire pour les développements futurs avec d'une part la mise en place d'un outil de calcul évolutif, utilisable dans la pratique à très court terme et d'autre part l'amélioration de la connaissance expérimentale du comportement des stratifiés.

En effet, disposant d'un outil de calcul simple mais efficace, on peut comparer des variantes d'un projet de structure (optimisation), quelle que soit la précision absolue des résultats. On peut aussi, par le biais d'expériences, bien conçues, contrôler la validité du modèle choisi en déterminer la limite et discuter les possibilités de développement du modèle.

Une approche expérimentale reste indispensable pour conforter un tel travail.

7 - BIBLIOGRAPHIE

[1] SANDER G., NYSSEN C., 1979
Modélisation des Matériaux Composites dans les Méthodes d'Eléments Finis
XIVe Congrès International Aéronautique, Paris (France)

[2] AGARWAL B.D., BROUTMAN L.J., 1980
Analysis and Performance of Fiber Composites
WILEY Ed., New-York (USA)

[3] TSAI S.W., HAHN H.T., 1980
Introduction to Composite Materials
TECHNOMIC Ed., Westport Connecticut (USA)

[4] WHITNEY S.M., DANIEL I.M., PIPES R.B., 1982
Experimental Mechanics of Fiber Reinforced Composite Materials
SESA Ed., Brookfield, Connecticut (USA)

[5] NAGHDI P.M., 1963
Foundations of Elastic Shell Theory
Progress in Solid Mechanics Vol. IV
Edited by I.N. SNEDDON, NORTH-HOLLAND, Amsterdam (Pays-Bas)

[6] REISSNER E., 1945
The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates
J.A.M., Vol. 12

[7] BATOZ J.L., 1977
Analyse non linéaire des coques minces élastiques de formes arbitraires par éléments triangulaires courbes
THESE - Université de Laval Québec (Canada)

[8] VERCHERY G., NOR S., EL SHEIKH M.S., 1980
Equivalent Material for the Analysis of Laminated Plates and Shells
I.C.C.M. 3, Paris (France)

[9] GRIFFIN O.H. Jr., 1982
Evaluation of Finite Element Software Packages for Stress Analysis of Laminated Composites
Composite Technology Review, Vol. 4, n° 4

[10] GERALD J., 1984
Design Aspects of a Multilayered L.P.G. Vessel
International Symposium "Composites : Materials and Engineering"
C.C.M., U. of Delaware (USA)

[11] FRELAT J., 1984
Caractérisation expérimentale du domaine de réversibilité pour des matériaux composites
J.N.C. 4, Paris (France)

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 115-120

Le brisement de la symétrie thermomécanique en milieux anisotropes

The thermomechanical symmetry breaking in anisotropic media

M. FRIAS

Professeur, Université de Lisbonne

RESUME

Il y a une symétrie entre les coordonnées et les forces dans l'expression lagrangienne des systèmes mécaniques. Néanmoins cette symétrie n'est complète que pour les systèmes conservatifs, des brisements de sens physique particulier se présentant quand la complexité du système progresse vers les systèmes dissipatifs et anisotropes.

ABSTRACT

The lagrangian expression of the mechanical systems presents a symmetry between the forces and the coordinates. Nevertheless this symmetry is complete only for the conservative systems, some symmetry breaks appearing as the system complexity progresses towards the dissipative and anisotropic systems.

1 - LA SYMETRIE LAGRANGIENNE

Le principe de D'Alembert, exprimant l'équilibre en-

tre les forces et les moments linéaires,

$$\underset{\sim}{F}_i^o = \dot{\underset{\sim}{p}}_i \qquad (1.1)$$

réduit la dynamique à la statique.

Les forces F_i^o agissant sur la particule i de rayon vecteur r_i peuvent être analysées en forces appliquées F_i et forces de liaison f_i, $F_i = F_i^o + f_i$ et, admettant en plus que le travail virtuel des forces de liaison et nul, les équations de mouvement s'expriment

$$(\underset{\sim}{F}_i - \dot{\underset{\sim}{p}}_i) \cdot \delta \underset{\sim}{r}_i = 0 \qquad (1.2)$$

Les liaisons holonomes nous permettent de décrire le système mécanique par coordonnées indépendantes

$$\underset{\sim}{r}_i = \underset{\sim}{r}_i (q_1, \ldots, q_n, t) \qquad (1.3)$$

associées à forces Q_i, généralisées, $Q_i \delta q_i$ ayant les dimensions de travail,

$$Q_i = F_i \, \partial r_i / \partial q_k \qquad (1.4)$$

et les équations de mouvement deviennent

$$\delta q_i \, [(\partial T/\partial \dot{q}_i)^{\cdot} - \partial T/\partial q_i - Q_i] = 0 \qquad (1.5)$$

Les liaisons étant holonomes, les q_i sont indépendantes et ainsi

$$(\partial T/\partial \dot{q}_i)^{\cdot} - \partial T/\partial q_i = Q_i \qquad (1.6)$$

Il y a une symétrie complète entre les coordonnées et les forces. Si le système est conservatif, les forces sont dérivables d'un potentiel V,

$$Q_i = - \partial V/\partial q_i \qquad (1.7)$$

et avec la lagrangienne L = T-V, T étant l'énergie cinétique du système, on obtient l'expression classique

$$(\partial L/\partial \dot{q}_i)^{\cdot} - \partial L/\partial q_i = 0 \qquad (1.8)$$

et la symétrie est complète.

2 - LES EXTENSIONS CLASSIQUES

2.1 Forces électromagnétiques

Pour le champ de forces électromagnétiques agissant sur charges e avec un potentiel scalaire ϕ et un potentiel magnétique scalaire A, on définit souvent un potentiel Z dépendant des vitesses $\underset{\sim}{v}$ et c étant la vitesse de la lumière, Z s'exprime

$$Z = e\phi - e/c \, \underset{\sim}{A}.\underset{\sim}{v} = Z(\underset{\sim}{v}) \; ; \; L = T - Z \qquad (2.1)$$

2.2 Forces de friction

La définition de Lord Rayleigh d'une fonction de dissipation D telle que

$$2D = a_{i_{x\alpha}} v^2_{i_{x\alpha}} \qquad (2.2)$$

permet de maintenir la forme lagrangienne,

$$(\partial L/\partial \dot{q}_i)^{\cdot} - \partial L/\partial q_i + \partial D/\partial \dot{q}_i = 0 \qquad (2.3)$$

On y observe un premier brisement de symétrie, les forces non conservatives dérivant du scalaire D et non du scalaire L.

3 - LES PHENOMENES DE TRANSFERT ET LES MILIEUX ANISOTROPES

Pour les phénomènes de transfert, de masse, moment et énergie, l'analyse, soit locale, soit intégrale, nous met en général en présence de processus non conservatifs. Des "actions minimales" qui, pour les systèmes conservatifs représentent des expressions élevées du caractère conservatif,

$$\delta \int mv\, ds = 0 \quad , \quad \delta \int (T-V)\, dt = 0 \qquad (3.1)$$

deviennent pour les champs de transfert et les systèmes themomécaniques en général des expressions de base, soit parce que le "resolution threshold" est mal aisé à définir, soit parce que, au moins pour le domaine linéaire, le principe de dissipation minimale d'énergie est bien établi, [1] ,

$$\delta(\psi - \sigma) = 0 \; ; \; \psi = 1/2\, L_{ik} Q_i Q_k \; , \; \sigma = q_i Q_i \qquad (3.2)$$

Quand on a affaire à deux ou plus de deux phénomènes de transfert, il faut considérer l'interaction des forces et des coordonnées,

$$Q_i = \alpha_{ik}\, q_k \quad \text{ou} \quad q_i = \beta_{ik}\, Q_k \qquad (3.3)$$

avec les effets de Dufour, de Soret, etc.

Pour un milieu anisotrope, une complexité pareille est à considérer même pour un seul phénomène de transfert, comme est le cas, par exemple, de la conduction de chaleur dans un milieu crystallin triclinique. On peut choisir les directions principales, correspondant à un ellipsoide

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = \text{const.} \qquad (3.4)$$

et écrire les équations de conduction,

$$q_1 = \beta_1 Q_1 + \gamma_3 Q_2 - \gamma_2 Q_3$$
$$q_2 = \gamma_3 Q_1 + \beta_2 Q_2 + \gamma_1 Q_2 \qquad (3.5)$$
$$q_3 = \gamma_2 Q_1 - \gamma_1 Q_2 + \beta_3 Q_3$$

Dans le domaine linéaire, les relations physiques de réciprocité nous permettent d'écrire, simplement,

$$q_1 = \beta_1 Q_1$$
$$q_2 = \beta_2 Q_2 \qquad (3.6)$$
$$q_3 = \beta_3 Q_3$$

Pour les milieux crystallins tetragonaux, on aura

$$q_1 = \beta_1 Q_1 + \gamma_3 Q_2$$
$$q_2 = \gamma_3 Q_1 + \beta_1 Q_2 \qquad (3.7)$$
$$q_3 = \beta_3 Q_3$$

γ_3 pouvant devenir nul si les rotations autour de x_3 sont équivalentes. S'il n'est pas le cas, alors le flux de chaleur et le gradient de température auront des orientations différentes.

En général, pour un milieu anisotrope, on aura un flux de chaleur $J_{\sim q}$ et la force thermodynamique associée $X_{\sim q} = -\text{grad}T/T$. Le potentiel de (3.2) s'écrit alors

$$\psi = 1/2\ L_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_k} \qquad (3.8)$$

Alors la fonction intégrande extrémale s'exprime

$$1/2\ L_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_k} - J_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i} \left(1/2\ L_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k} - J_i \right) \qquad (3.9)$$

Pour un $\partial T/\partial x_i$ arbitraire, il faut que

$$J_i = 1/2\ L_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k} \qquad (3.10)$$

qui est la loi de Fourier, dont (3.5), par exemple est une application en expression lagrangienne générale.

Du point de vue formel ou mathématique, on peut écrire, au lieu de (3.2),

$$\delta(\phi - \sigma)_Q = 0 \qquad (3.11)$$

pour des forces constantes, mais ayant que varier sur les forces pour obtenir les équations de transfert, cet-

te alternative n'a pas d'intérêt ou même de sens physique.

Un système avec des phénomènes de transfert introduit donc un brisement de symétrie entre les coordonnées intensives et les coordonnées extensives.

Un autre brisement de symétrie résulte du fait qu'il n'existe pas de système qui réponde à une variation instantanée de la dérivée de la force, le réciproque n'étant pas valable. La viscosité n'a pas de dual.

Ces brisements de symétrie, dont la complexité augmente pour les milieux anisotropes, [2], [5], [7], ainsi que le fait que les contraintes eulériennes, par exemple, sont modifiées par rotation du matériau ou milieu physique continu, nous conduisent de la mécanique céleste à une mécanique nouvelle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Frias,M. General Viscoelasticity,16th Polish Solid Mechanics Conf.,IPPT,59,Polish Ac.Sci.,1974;

[2] Frias M. Curso de Reologia,Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia,1977;

[3] Frias,M. Rheology,III,749,Plenum Press,1980;

[4] Germain,P. Cours de Mécanique des Milieux Continus, I,Masson,1973;

[5] Mandel,J. C.R.Acad.Sci.Paris,264-A,416,1967;

[6] Sayir,M. Mechanics of Viscoelastic Media and Bodies,207,IUTAM,Springer,1975;

[7] Verhás,J. The construction of dissipation potentials,Zeit.Phys.Chemie,249,119,1972;

[8] Weber,J.D. Mechanics of Viscoelastic Media and Bodies,147,IUTAM,Springer,1975.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 121-130

Comportement viscoélastique non linéaire d'un composite à matrice polymérique sous l'effet d'un champ de contrainte biaxial

Non linear viscoelastic behaviour of a polymeric matrix composite in biaxial loading conditions

R. BROUWER, Assistant
C. HIEL, Maître-Assistant
A. CARDON, Professeur

Département de Mécanique Appliquée des Milieux Continus
Facultés des Sciences Appliquées
Vrije Universiteit Brussel (V.U.B.)
Pleinlaan, 2
B – 1050 Bruxelles (Belgique)

RESUME

Pour analyser le comportement viscoélastique nonlinéaire d'un composite à matrice polymérique renforcé par des longues fibres parallèles, nous partons d'un modèle thermodynamique proposé par R. Schapery. L'anisotropie et la nonlinéarité induite par la présence des fibres nécessite une analyse de comportement sous des sollicitations biaxiales afin d'examiner les effets de couplage. Des essais sur des composites graphite-époxy sont effectués tant sur des échantillons plans que sur des cylindres creux, permettant de contrôler la validité des équations proposées. On montre que pour des états de contrainte biaxiales pures, un paramètre lié à la matrice polymérique peut décrire les effets de couplage.

ABSTRACT

For the analysis of the nonlinear viscoelastic behaviour of a polymeric matrix composite reinforced by long parallel fibres we start from a thermodynamic model proposed by R. Schapery. The anisotropy and the nonlinearities induced by the presence of the fibres make it necessary to analyse the mechanical behaviour under the influence of biaxial loadings in order to investigate coupling effects. Tests were conducted on graphite-epoxy laminae of plane and hollow cylindrical form, to assess the validity of the developed constitutive equations. It is shown that, at least for purely biaxial stress states, a simplified form of the general Schapery-equations can be used with a matrix-related parameter in order to describe coupling effects.

1. INTRODUCTION

La nature viscoélastique de la matrice polymérique induit un comportement anisotrope viscoélastique dans un composite à fibres longues et parallèles. Dans la direction des fibres le comportement est pratiquement élastique et dans des directions perpendiculaires le comportement mécanique du composite est largement dominé par celui de la matrice auquel il convient d'ajouter la nature de l'adhésion fibre-matrice. Dans d'autres directions le caractère du composite dépend des caractéristiques des fibres, de la matrice et des propriétés de l'adhésion. Même si la matrice pure a un comportement linéaire ainsi que le composite dans la direction perpendiculaire aux fibres, dans d'autres directions le comportement du composite peut être viscoélastique nonlinéaire, c'est-à-dire que les fonctions caractéristiques du matériau dépendent du taux de contrainte uniaxial.

Nous sommes dès lors en présence d'un "matériau" dont le caractère anisotrope est extrêment général, puisque la nature même du matériau, y compris son comportement à la limite et son caractère linéaire, ou non, dépendent de la direction de la sollicitation par rapport à la direction du renforcement.

Il y a donc lieu non seulement d'étudier le comportement vis-à-vis des sollicitations uniaxiales, mais en vue d'étudier des possibles effets de couplage, il faut également effectuer des mesures dans le cas de sollicitations biaxiales ou triaxiales. Ce type de nonlinéarité se produit par exemple quand on veut déterminer le module de cisaillement en effectuant des essais sur des échantillons plans en traction, la direction de la sollicitation étant différente de la direction du renforcement [1]. Les diagrammes contraintes-déformations en cisaillement sont dépendants de l'angle α du renforcement, et donc forcément du taux de contrainte σ_1 (dans la direction des fibres) et de σ_2 (perpendiculaire aux fibres).

Cette étude doit se faire à partir d'une loi de comportement anisotrope permettant de mettre en évidence théoriquement les nonlinéarités et les effets de couplage. Comme point de départ nous avons pris la formulation thermodynamique proposée par R. Schapery, [2].

Dans le domaine viscoélastique linéaire les fonctionsmatérielles ne dépendent que du temps. Lorsque le taux de contrainte est plus élevé des effets nonlinéaires apparaissent et les fonctions matérielles dépendent du temps et du taux de contrainte. Dans le cas uniaxial ceci a été étudié par R. Schapery, [3] et plus récemment par Cl. Hiel, [4].

Pour des contraintes multiaxiales les fonctions matérielles dépendront en général du temps et de l'état de contrainte imposé (Σ). Dans le cas d'un matériau à isotropie transversale, sous sollicitation plane, les 4 éléments restants de la matrice de complaisance dépendront tous de Σ :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \\ \varepsilon_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} S_{11}(\Sigma,t) & S_{12}(\Sigma,t) & 0 \\ S_{21}(\Sigma,t) & S_{22}(\Sigma,t) & 0 \\ 0 & 0 & S_{66}(\Sigma,t) \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

(1 : direction des fibres ; 2 : direction perpendiculaire aux fibres)

Avec comme modèle descriptif la formulation thermodynamique de Schapery nous essayons d'interpreter les résultats d'essais dans lesquels peuvent intervenir des effets de couplage entre les différentes composantes du tenseur des contraintes.

2. LOI DE COMPORTEMENT DE SCHAPERY

Nous partons du système d'équations :

$$q_m = - \frac{\partial G_R}{\partial Q_m} + \frac{\partial \hat{Q}_n}{\partial Q_m} \int_o^t \Delta S_{np} \, (\psi - \psi') \, \frac{\partial [\hat{Q}_p / a_\sigma]}{\partial u} \, du \qquad (2)$$

dans lesquelles :

q_m : sont les composantes du tenseur des déformations ;

$\hat{Q}_n$: sont les contraintes généralisées, fonctions des contraintes, de la température,... ;

Q_m : sont les composantes du tenseur des contraintes ;

ΔS_{np} : la complaisance transitoire ;

$\psi = \int_o^t \frac{d\xi}{a_\sigma}$; $\psi' = \psi(t = u)$: les temps réduits ;

G_R : le terme constant de l'énergie libre de Gibbs, développée en une série de Taylor ;

n, m et p : varient de 1 à 6.

Ces équations ne sont valables strictement que dans les cas isothermes. En général une dépendence de la température T et d'autres conditions d'environnement peuvent être incorporées.

Dans le cas orthotrope et pour une sollicitation plane, nous trouvons :

$$\varepsilon_1(t) = - \frac{\partial G_R}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial \hat{\sigma}_1}{\partial \sigma_1} \left[\int \Delta S_{11} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\hat{\sigma}_1}{a_G} \right) du + \int \Delta S_{12} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\hat{\sigma}_2}{a_G} \right) du \right]$$

$$+ \frac{\partial \hat{\sigma}_2}{\partial \sigma_1} \left[\int \Delta S_{21} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\hat{\sigma}_1}{a_G} \right) du + \int \Delta S_{22} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\hat{\sigma}_2}{a_G} \right) du \right]$$

$$+ \frac{\partial \hat{\sigma}_{12}}{\partial \sigma_1} \left[\int \Delta S_{66} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\hat{\sigma}_{12}}{a_G} \right) du \right] \qquad (3.1)$$

$$\varepsilon_2(t) = - \frac{\partial G_R}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial \hat{\sigma}_1}{\partial \sigma_2} \left[\int \Delta S_{11} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\hat{\sigma}_1}{a_G} \right) du + \int \Delta S_{12} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\hat{\sigma}_2}{a_G} \right) du \right]$$

$$+ \frac{\partial \hat{\sigma}_2}{\partial \sigma_2} \left[\int \Delta S_{21} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\hat{\sigma}_1}{a_G} \right) du + \int \Delta S_{22} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\hat{\sigma}_2}{a_G} \right) du \right]$$

$$+ \frac{\partial \hat{\sigma}_{12}}{\partial \sigma_2} \left[\int \Delta S_{66} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\hat{\sigma}_{12}}{a_G} \right) du \right] \qquad (3.2)$$

$$\varepsilon_{12}(t) = -\frac{\partial G_R}{\partial \sigma_{12}} + \frac{\partial \hat{\sigma}_1}{\partial \sigma_{12}}[.] + \frac{\partial \hat{\sigma}_2}{\partial \sigma_{12}}[.] + \frac{\partial \hat{\sigma}_{12}}{\partial \sigma_{12}}[.] \qquad (3.3)$$

Si nous introduisons les hypothèses suivantes :

(H.1) $\hat{\sigma}_{ab}$ sont des fonctions tensorielles isotropes de σ_{ab}, c.à.d. $\hat{\sigma}_{ab} = \lambda_1 \delta_{ab} + \lambda_2 \sigma_{ab} + \lambda_3 \sigma_{ac} \sigma_{cb}$ dans lesquelles les λ_i sont des fonctions des 3 invariants du tenseur des contraintes, de la température T, et .... ;

(H.2) λ_2 et λ_3 ne dépendent que faiblement de σ_{ij} ; c.à.d. $\frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma_{ij}}$ et $\frac{\partial \lambda_3}{\partial \sigma_{ij}} \sim 0$;

(H.3) $\lambda_3 = 0$,

nous pouvons réduire les équations précédentes aux équations suivantes, [5] :

$$\varepsilon_i(t,T,\Sigma) = g_o(\Sigma,T)\, S_o\, \sigma_i + g_1(\Sigma,T) \int_{-\infty}^{t} [\Delta S_{ij}\, (\psi-\psi') \frac{\partial}{\partial u} (g_2(\Sigma,T)\, \sigma_j)]\, du \qquad (4)$$

$$(i = 1,..,3)$$

Dans ces équations ne subsistent que 4 fonctions nonlinéarisantes g_o, g_1, g_2 et a_σ, fonction de l'état de contrainte imposé. Cette dépendence décrit donc d'une façon implicite les effets de couplage.

Si nous posons $g_o = g_1 = g_2 = a_\sigma = 1$, dans les équations précédentes, nous retrouvons l'équation du comportement viscoélastique linéaire

$$\varepsilon(t) = S_o\, \sigma + \int_{-\infty}^{t} S_{ij}(t-u) \frac{\partial[\sigma]}{\partial u}\, du \qquad (5)$$

Pour une sollicitation uniaxiale, les équations (4) se réduisent à :

$$\varepsilon(t) = g_o\, S_o\, o + g_1 \int_o^t \Delta S(\psi-\psi') \frac{\partial(g_2 \sigma)}{\partial u}\, du \quad , \qquad (6)$$

expression qui a été utilisée par Cl. Hiel, [6], de manière satisfaisante. Dans ce cas les fonctions g_o, g_1, g_2 et a_σ dépendent seulement du taux de contrainte uniaxial σ.

3. SOLLICITATION BIAXIALE

Nous nous limitons ici au cas où ne subsistent que σ_1 et σ_{12}.
Les équations (3), avec les hypothèses mentionnées, se réduisent dès lors à :

$$\varepsilon_1 = g_o\, S^o_{11}\, \sigma_1 + g_1(I_i) \int \Delta S_{11}\, \frac{\partial(g_2\sigma_1)}{\partial u}\, du \qquad (7.1)$$

$$\varepsilon_2 = g_o\, S^o_{21}\, \sigma_1 + g_1(I_i) \int \Delta S_{21}\, \frac{\partial(g_2\sigma_1)}{\partial u}\, du \qquad (7.2)$$

$$\varepsilon_{12} = g_o\, S^o_{66}\, \sigma_{12} + g_1 \int \Delta S_{66}\, \frac{\partial(g_2\sigma_{12})}{\partial u}\, du \qquad (7.3)$$

Si lors des observations expérimentales les fonctions g_o, g_1 et g_2 restent voisins de 1, la nonlinéarité s'introduit principalement par la fonction a_σ.
On peut alors introduire un paramètre lié à la matrice pour exprimer la nonlinéarité et faire dépendre a_σ de l'invariant :

$$\tau^m_o = \tau^m_{oct} + \mu\, \sigma^m_I \qquad (8)$$

dans lequel τ^m_{oct} est la tension octahédrale dans la matrice ;

et σ^m_I est la composante isotrope du tenseur des contraintes dans la matrice.

Le paramètre μ, indépendant de l'état de contrainte, peut être considéré comme une constante caractéristique de la matrice.

Cette hypothèse est basée sur une critère de plasticité d'application pour les polymères [7]
Pour obtenir ce paramètre matriciel un modèle micromécanique simple a été employé [5].

La dépendence a_σ, τ^m_o est ensuite introduite sous la forme :

$$a_\sigma = A\, e^{-B\tau^m_o} \qquad (9)$$

Les constantes A et B, ainsi que le paramètre μ seront déterminées par des techniques d'adaptation à une forme géométrique des résultats expérimentaux.
La fonction (9) et la technique que nous proposons permet de décrire d'une manière satisfaisante les effets de couplage pour les directions où l'influence de la matrice est prépondérante.

4. METHODE EXPERIMENTALE

Les expériences ont été effectuées sur une machine Instron, qui permet de soumettre des éprouvettes à des sollicitations en traction (compression)-torsion combinées. Nous avons effectué des mesures à une température constante de 80°C. Des échantillons tubulaires avec des renforcements à 0° et 90° ont été fabriqué à partir de feuilles préimpregnées de Fiberite hy-E 1048 avec des fibres en graphite Union Carbide T300. Les échantillons ont subi un cuisson dans un autoclave à 175°C, et ont été recuit. Un conditionnement mécanique des échantillons n'a pas été effectué. Les dimensions des cylindres étaient : une longueur de 20 cm, diamètre extérieur de 2,30 cm et une épaisseur d'un millimètre. Tous les échantillons ont été soumis à un programme de fluage (1 heure) et de décharge (pendant 7 heures) pour différents niveaux de sollicitation et combinaisons traction/torsion.
Le déplacement axial a été mesuré avec un extensomètre, l'angle de torsion par la rotation de la section terminale.
Les fonctions nonlinearisantes g_o, g_1, g_2 et a_σ, toutes fonctions de τ_o^m ont été obtenues des courbes fluage-décharge selon une méthode décrite par Schapery [3].

5. RESULTATS EXPERIMENTAUX

5.1. Etats de contraintes unidirectionnels

Les complaisances de fluage linéaires obtenues sous des sollicitations simples ont été modelées par des lois de puissance. Ces lois donnent une description satisfaisante du comportement loin de la température de transition du polymère ou pour des temps relativement courtes. Pour le matériaux composite considéré ici, les complaisances linéaires suivantes ont été obtenues :

$$S_{11} = 7{,}6 \cdot 10^{-12}\ Pa^{-1}$$

$$S_{12} = -2{,}66 \cdot 10^{-12}\ Pa^{-1}$$

$$S_{22} = (144 + 4{,}93\ t^{0.28})\ 10^{-12}\ Pa^{-1}$$

$$S_{66} = (317 + 33{,}33\ t^{0.15})\ 10^{-12}\ Pa^{-1}$$

S_{11} et S_{12} sont indépendents du temps, ce qui indique un comportement linéaire élastique dans la direction des fibres. Uniquement pour les directions, dominées par la matrice on observe un comportement viscoélastique.
On note également que la cinétique du fluage est plus élevée pour la direction perpendiculaire aux fibres, qu'en cisaillement.

La figure 1, qui donne la courbe maîtresse en cisaillement, indique que les équations de Schapery décrivent le comportement uniaxial d'une manière satisfaisante. Le même résultat a été obtenu pour des sollicitations transversales aux fibres. Les résultats expérimentaux montrent que g_o reste constant ; g_1 et g_2 sont voisins de 1 et la nonlinéarité ne s'introduit que par a_σ pour laquelle la modellisation (9) s'applique.
Notons également que dans le cas unidirectionnel la fonction τ_o^m se réduit à la contrainte de traction ou à la contrainte de cisaillement.

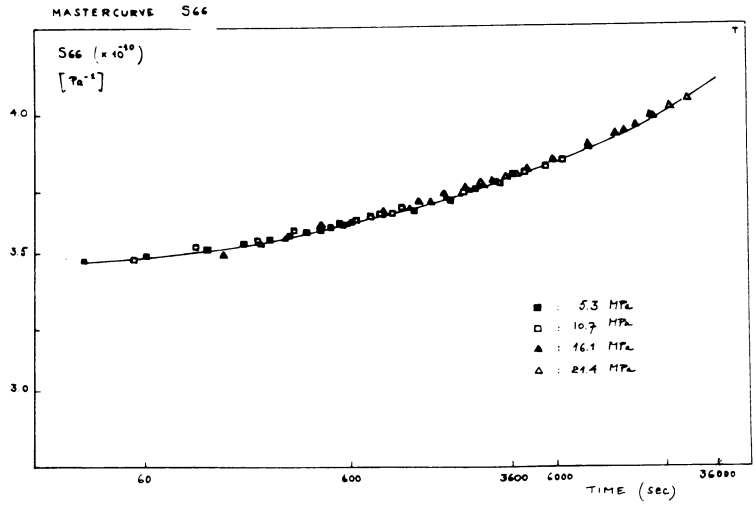


Figure 1

5.2. Etats de contrainte bidirectionnel

La méthode proposée pour décrire le couplage entre différentes composantes du tenseur de contraintes, peut être contrôlé dans des champs de contraintes bidirectionnels par des essais en traction-torsion de tubes avec des fibres à 0° et 90°. Quand l'angle de renforcement est différent de 0° et 90°, un champs tridirectionnel est imposé.
La figure 2, obtenue sur des tubes à 90° en traction-torsion montre que la même valeur de la fonction a_σ est obtenue en traction et en cisaillement pour un même rapport $\tau_{x\theta}/\sigma_x$. Ceci indique que la proposition d'un seul paramètre τ_0^m (qui a une valeur fixe pour un certain rapport $\tau_{x\theta}/\sigma_x$) est valable pour décrire le couplage.

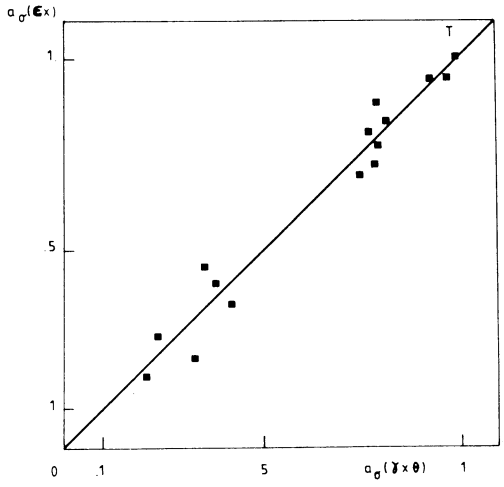


Figure 2

La figure 3 donne les courbes de fluages en fonction du logarithme du temps pour une direction perpendiculaire aux fibres, et ceci pour différents rapports de $\tau_{x\theta}/\sigma_x$ (torsion/traction).
Il est à nouveau possible de construire une courbe maîtresse à partir de ces données, (figure 4). Le facteur de translation a_σ correspondant à ce cas est donné dans la figure 5. Les paramètres A, B et μ ont été obtenus par la meilleure comparaison entre les données et la forme $a_\sigma = A \exp(-B\tau_o^m)$. Notons que la dépendence de a_σ du paramètre τ_o^m est décrite de manière satisfaisante par la forme proposée.
Des nonlinéarités commencent à se manifester à partir d'une contrainte octahédrale de la matrice d'environ 14 MPa.
Notons également que l'effet de σ_I^m ne joue pas pour les essais en torsion pure.
Faisons enfin mention du fait que, comme l'était le cas d'ailleurs sous des contraintes uniaxiales, les fonctions g_o, g_1 et g_2 sont peu influencées par le taux de contrainte, du moins pour les niveaux considérés dans cette étude.

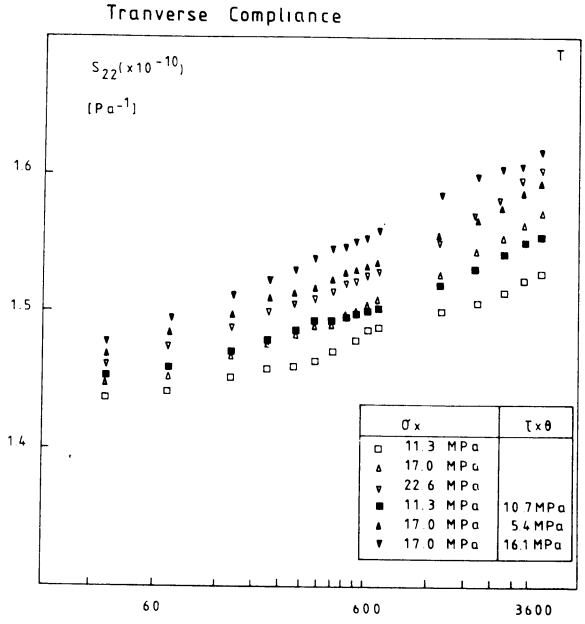


Figure 3

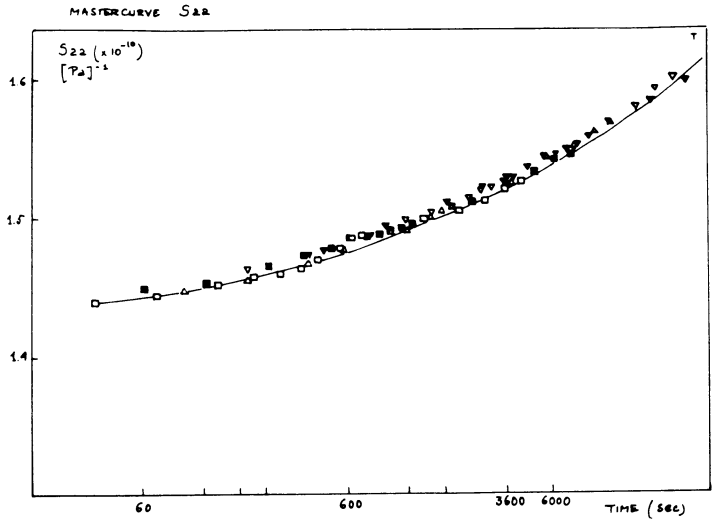


Figure 4

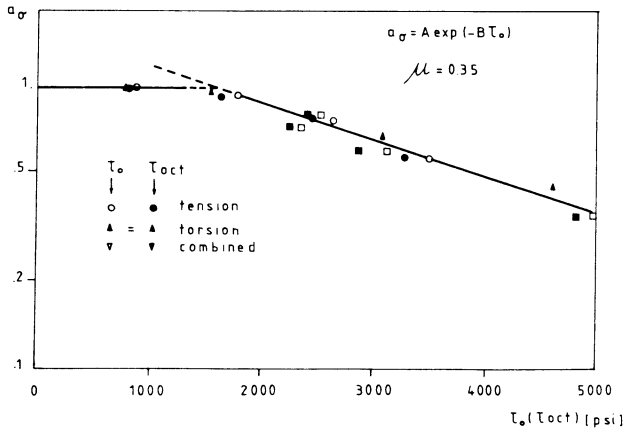


Figure 5

6. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

6.1. Nous avons pu vérifier que la formulation d'origine thermodynamique donne une description satisfaisante du comportement nonlinéaire dissipatif du matériau composite étudié dans un champ de contrainte uniaxial.
Nous avons également pu constater qu'une modification de cette formulation afin de décrire des effets de couplage, donne des résultats satisfaisants pour des champs de contraintes biaxiaux.
Un paramètre τ_o^m, lié au champ de contrainte dans la matrice, a été introduit à cet effet.

6.2. Des résultats préliminaires sur des échantillons plans en traction (donc en fait soumis à des champs de contraintes triaxiaux, lorsque la direction des fibres ne correspond pas à la direction de la sollicitation) indiquent que les effets nonlinéaires sont sous-estimés lorsque l'angle de renforcement α est voisin de 0°. Cette effet a été attribué à l'existence de contraintes résiduelles d'ordre thermique. Ce point n'est pas encore résolu complètement.

6.3. Des essais sur des tubes en matrice pure sont actuellement en cours afin d'obtenir une estimation plus précise du rôle joué par les fibres, et une compréhension meilleure du paramètre μ.
Afin de mieux contrôler l'apparence de fissures internes et d'isoler la réponse élastique retardée, nous avons entrepris l'étude des échantillons conditionnées.

7. BIBLIOGRAPHIE

[1] SANDHU, R.S. (1976) : "Nonlinear behaviour of unidirectional and angleply laminates", J. Aircraft, 13, p. 104-111.

[2] SCHAPERY, R.A. (1969) : "Further development of a thermodynamic constitutive theory : stress formulation", Purdue University, report n°69-2.

[3] SCHAPERY, R.A. and LOU, Y.C. (1977) : "Viscoelastic characterisation of a nonlinear fiber-reinforced plastic", J. of Composite Materials, vol. 5.

[4] HIEL, C., CARDON, A.H. and BRINSON, H.F. (1983) : "The nonlinear viscoelastic response of resin matrix composite laminates", VPI-report n°3-83-6.

[5] BROUWER, R. and CARDON, A.H., unpublished research, Laboratory for Applied Mechanics of the Free University of Brussels (V.U.B.), 1983.

[6] HIEL, C., "The nonlinear viscoelastic response of resin matrix composites", Ph.D.-thesis, Free University of Brussels (V.U.B.), 1983.

[7] STERNSTEIN, S.S. and MYERS, F.A. (1974) : "Yielding of glassy polymers in the second quadrant of principal stress space", J. Macromolecular Science, B8(3-4), p. 539-571.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 131-150

Hétérogénéité des champs de contraintes et de déformations dans les matériaux anisotropes

Heterogeneity of stress and strain fields in anisotropic materials

J.P. BOEHLER, L. EL AOUFI

Institut de Mécanique de Grenoble
GRECO « Grandes Déformations et Endommagement »
B.P. n° 68, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex

RESUME

Les études expérimentales des propriétés mécaniques des matériaux anisotropes présentent des difficultés spécifiques. En effet, lorsque les directions principales des sollicitations ne coïncident pas avec les axes de symétrie de la structure matérielle (essais "hors-axes"), les directions principales des contraintes et des déformations ne sont pas confondues. Il en résulte que des champs de contraintes et de déformations homogènes sont incompatibles avec les conditions aux limites imposées dans les essais classiques, c'est-à-dire ceux utilisés pour les matériaux isotropes. Les fortes hétérogénéités se développant au cours de ces essais classiques conduisent à des interprétations erronées des données expérimentales et à des spécifications non réalistes des lois de comportement.

Dans ce travail, nous présentons d'abord des simulations numériques, en éléments finis, pour les essais de traction "hors-axes", dans le domaine élastique, sur un matériau composite. Les résultats obtenus confirment les fortes hétérogénéités des champs de contraintes et de déformations se développant au cours des essais classiques. Nous proposons une nouvelle technique d'essais, spécifique aux matériaux anisotropes, pour laquelle les simulations numériques indiquent que les champs obtenus sont homogènes dans la quasi-totalité de la partie utile des éprouvettes.

Nous présentons ensuite une analyse, par stéréophotogrammétrie à parallaxes de déformation, des champs cinématiques obtenus dans des essais de traction "hors-axes" effectués sur une tôle d'acier laminé. Les résultats obtenus montrent que la nouvelle technique d'essais proposée permet d'obtenir des champs homogènes également dans le domaine des déformations plastiques et apportent une confirma-

tion expérimentale de la validité de cette technique pour la mesure correcte des caractéristiques mécaniques des solides anisotropes.

ABSTRACT

In experimental studies on the mechanical properties of anisotropic materials, specific difficulties arise. Indeed, when the principal directions of the sollicitations do not coincide with the symmetry axes of the material internal structure ("off-axes" tests), then the principal directions of stress and strain are not the same. As a result, homogeneous stress and strain fields are incompatible with the boundary conditions imposed in the classical testing procedures, i.e. those that are employed for isotropic materials. The strong heterogeneities which develop during the classical tests lead to erroneous interpretations of the experimental data and to non-realistic specifications of the constitutive laws.

In this work, we first present finite element numerical simulations of tensile "off-axes" tests on composite materials in the elastic range. The obtained results confirm that the classical testing procedure produces strongly heterogeneous stress and strain fields. A new testing device, specific for anisotropic materials, is proposed ; the numerical simulations indicate that the fields obtained with this new device are homogeneous in nearly the whole working-length of the specimens.

An analysis, with the help of the stereophotogrammetric method, of the kinematic fields obtained in "off-axes" tensile tests on rolled sheet-steel are then presented. The obtained results show that the proposed new testing device produces homogeneous fields in the domain of plastic deformations as well and thus confirm the capacity of this technique to furnish proper measurements of the mechanical characteristics of anisotropic solids.

1 - INTRODUCTION

Une utilisation rationnelle des matériaux anisotropes exige une bonne compréhension et une modélisation réaliste de leur comportement mécanique, en particulier des variations de leur réponse mécanique suivant l'orientation des sollicitations externes. La structure mathématique des lois de comportement des solides anisotropes est maintenant bien établie dans toute sa généralité (cf. la communication à ce Colloque, intitulée "Lois de comportement des solides anisotropes"). Le problème actuellement posé au théoricien est la spécification de ces lois pour des matériaux et des comportements particuliers. Cette spécification exige des études expérimentales cohérentes et bien axées, ainsi que des mesures correctes de la réponse directionnelle des solides anisotropes.

Pour la caractérisation expérimentale des propriétés mécaniques des matériaux anisotropes, il est nécessaire d'effectuer un certain nombre d'essais "hors-axes", c'est-à-dire des essais pour lesquels les directions principales des sollicitations appliquées ne coïncident pas avec les axes de symétrie de la structure matérielle. Lorsque les techniques expérimentales classiques, bien mises au point pour les matériaux isotropes, sont utilisées pour la réalisation des essais "hors-axes" sur les matériaux anisotropes, des difficultés spécifiques apparaissent (cf. la 4° partie de la Conférence Générale à ce Colloque). Ces difficultés sont essentiellement dues à non-coïncidence des directions principales des contraintes et des déformations, ayant pour résultat une incompatibilité entre les conditions aux limites imposées dans les essais classiques et la production de champs de déformations et de contraintes homogènes. Cette incompatibilité conduit à une déformation en "S" des échantillons "hors-axes".

Bien que les fortes hétérogénéités des champs de contraintes et de déformations, se développant au cours des essais "hors-axes" classiques, soient bien

connues des expérimentateurs, ces essais sont généralement interprétés dans l'hypothèse de l'homogénéité. Les données expérimentales ainsi obtenues sont donc erronées et conduisent à des spécifications non réalistes des lois de comportement. Il s'agit là d'un problème essentiel dans l'étude du comportement mécanique des solides anisotropes. Afin de remédier à ce problème, il est nécessaire, d'une part d'imaginer et de mettre au point des techniques d'essais spécifiques pour les matériaux anisotropes, permettant d'obtenir des champs homogènes, et, d'autre part, de développer des simulations numériques et des méthodes de mesures à champs complets, permettant de tester et de quantifier l'homogénéité de ces champs.

Dans cette communication, nous présentons d'abord un nouveau dispositif expérimental, qui est une approximation du dispositif idéal pour l'obtention de champs homogènes dans les essais "hors-axes". Nous présentons ensuite des simulations numériques, en éléments finis, des essais de tractions "hors-axes", en élasticité orthotrope de révolution, sur un matériau composite. Les simulations des essais "hors-axes" classiques (montage en mors fixes) montrent clairement les déformées en "S" des échantillons et les fortes hétérogénéités des champs de contraintes et de déplacements obtenus. Nous analysons ensuite les essais réalisés à l'aide du nouveau dispositif proposé (montage en rotules ponctuelles). Les résultats des simulations numériques sont assez spectaculaires : les déformées des maillages, les champs de déplacements et les champs de contraintes sont parfaitement homogènes dans la quasi-totalité de la partie utile des éprouvettes, même pour un matériau très fortement anisotrope comme le composite T300/5208. Il s'agit là d'un résultat essentiel pour l'étude expérimentale du comportement mécanique des solides anisotropes, puisqu'il indique que le montage en rotules ponctuelles des essais "hors-axes" permet effectivement de produire un champ de traction homogène et conduit donc à une interprétation correcte des essais "hors-axes". Dans la dernière partie, nous présentons des exemples typiques des résultats obtenus dans une étude expérimentale en tractions simples orientées sur un acier doux orthotrope. Les champs cinématiques créés ont été quantifiés à l'aide de la méthode de la stéréophotogrammétrie et de procédures numériques associées. Ces résultats expérimentaux confirment totalement les conclusions des simulations numériques ; ils indiquent en particulier que le montage en rotules ponctuelles permet de produire des champs homogènes, aussi bien dans le domaine des déformations plastiques, que dans celui des déformations élastiques. Avec le nouveau dispositif proposé, des mesures fiables des caractéristiques mécaniques des matériaux anisotropes peuvent donc être obtenues et des lois de comportement réalistes peuvent être spécifiées.

2 - NOUVELLE TECHNIQUE POUR LES ESSAIS "HORS-AXES"

Afin d'éviter la déformation en "S" des échantillons de matériaux anisotropes au cours des essais de traction simple hors-axes, le dispositif idéal devrait assurer à la fois une répartition uniforme de la contrainte de traction sur toute la largeur des extrémités de l'échantillon et une déformation entièrement libre de cet échantillon (Figure 1). Dans ce cas, les champs de contraintes et de déformations se développant au cours de l'essai seraient homogènes. Les directions principales du champ de contraintes homogène seraient alors les axes de l'échantillon ; comme les directions principales du champ de déformations homogène ne coïncident pas avec celles des contraintes, un échantillon initialement rectangulaire serait transformé en un parallélogramme gauche.

Ce dispositif idéal ne peut pas être réalisé pratiquement. Afin d'approcher le cas idéal, nous avons conçu un nouveau dispositif d'essais [1-3], consistant à transmettre l'effort sur l'échantillon par l'intermédiaire de couteaux fixés sur les deux faces aux extrémités de l'échantillon et autorisant la rotation libre de ces extrémités autour de la normale au plan de l'échantillon (Figure 2). Dans ce "montage en rotules ponctuelles", la charge axiale est appliquée aux couteaux par des étriers en acier.

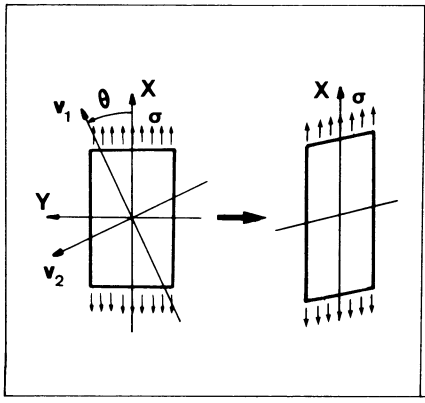


Fig. 1 - Essais "hors-axes sur matériaux anisotropes ; dispositif idéal.

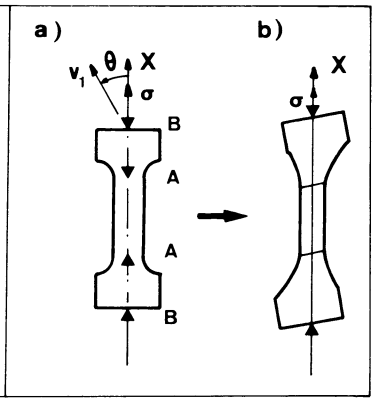


Fig. 2 - Nouveau dispositif proposé.

Dans une étude préliminaire, les couteaux ont d'abord été fixés aux extrémités de la partie utile de l'échantillon (position A, Figure 2a). Dans ce cas, nous avons observé pour tous les échantillons "hors-axes" une instabilité en rotation des extrémités ; pour les échantillons "dans les axes" ($\theta = 0$ ou $\pi/2$), cette instabilité disparaît. La position optimale pour les couteaux est aux extrémités de l'échantillon (position B, Figure 2a). Dans ce cas, la rotation des extrémités se stabilise au cours de l'essai de traction et les champs de contraintes et de déformations obtenus sont homogènes dans pratiquement toute la longueur de la partie utile de l'échantillon (Figure 2b). Ces conclusions sont confirmées par les simulations numériques présentées dans le paragraphe 3 pour le domaine élastique et par les observations expérimentales présentées dans le paragraphe 4 pour le domaine plastique. Le principe du nouveau dispositif proposé, ainsi que la forme et les dimensions des échantillons utilisés sont schématisés sur la Figure 3.

3 - SIMULATION NUMERIQUE DES ESSAIS DE TRACTION SUR UN MATERIAU COMPOSITE

3.1 - Matériau et modèle numérique

Nous avons effectué une série de simulations numériques en éléments finis des essais de traction simple "dans les axes" et "hors-axes" sur un matériau composite dans le domaine élastique. Pour chaque orientation des échantillons, nous avons simulé d'une part le montage classique en mors fixes, d'autre part le nouveau montage en rotules ponctuelles.

Le matériau considéré est le composite T300/5208 à matrice en résine époxy, renforcée par des fibres de graphite. Il s'agit donc d'un matériau orthotrope de révolution, l'axe de révolution de l'orthotropie étant la direction $\underset{\sim}{V1}$ des fibres. Dans un repère orthonormé ($\underset{\sim}{V1}$,$\underset{\sim}{V2}$,$\underset{\sim}{V3}$), les coefficients d'élasticité sont les suivants :

$E_1 = 18\ 100$ kgf/mm² ; $E_2 = 1\ 030$ kgf/mm² ; $G = 717$ kgf/mm²

$\nu_1 = 0{,}28$; $\nu_2 = 0{,}30$

où E_1 est le module d'Young dans la direction $\underset{\sim}{V1}$; E_2 le module d'Young dans le plan isotrope ($\underset{\sim}{V2}$,$\underset{\sim}{V3}$) ; G le module déviatoire dans les plans ($\underset{\sim}{V1}$,$\underset{\sim}{V2}$) et ($\underset{\sim}{V1}$,$\underset{\sim}{V3}$) ; ν_1 le coefficient de Poisson dans le plan isotrope ($\underset{\sim}{V2}$,$\underset{\sim}{V3}$), associé à une traction simple suivant $\underset{\sim}{V1}$; ν_2 le coefficient de Poisson dans la direc-

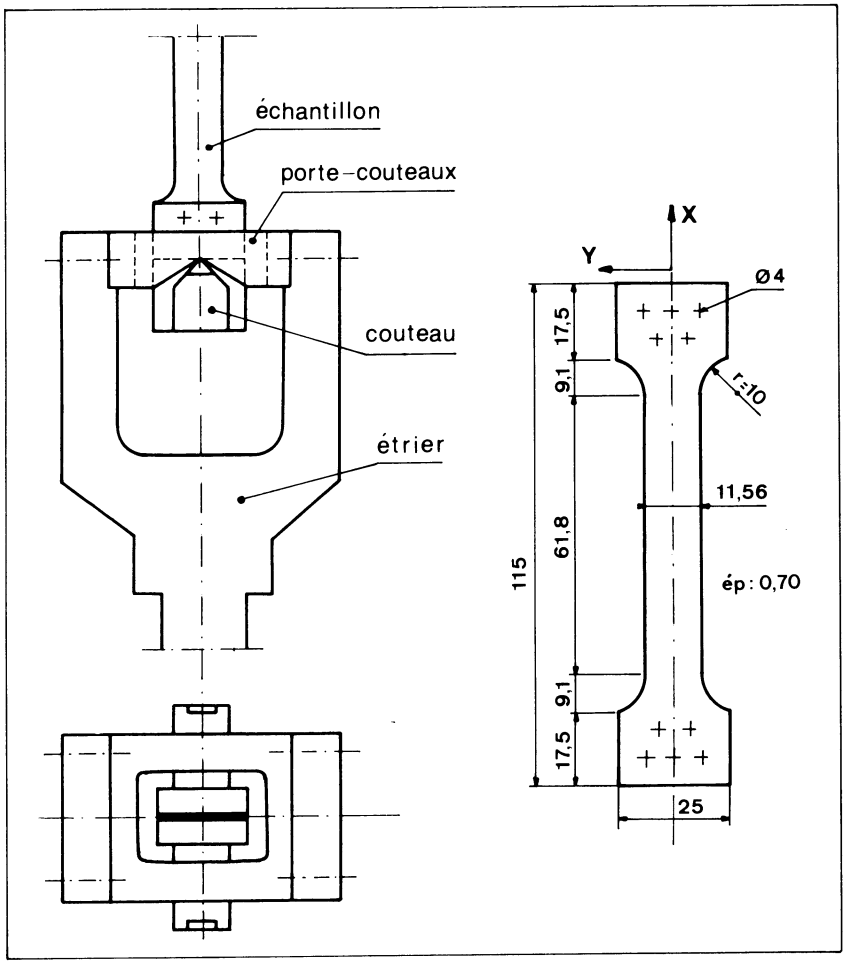


Fig. 3 - Schéma du nouveau dispositif d'essai.

tion $\underset{\sim}{V3}$, associé à une traction simple suivant $\underset{\sim}{V2}$, qui est également le coefficient de Poisson dans la direction $\underset{\sim}{V2}$, associé à une traction simple dans la direction $\underset{\sim}{V3}$. Dans le repère $(\underset{\sim}{V1},\underset{\sim}{V2},\underset{\sim}{V3})$, le tableau des coefficients d'élasticité est donné par :

	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}	σ_{23}	σ_{31}	σ_{12}
ε_{11}	$\frac{1}{E_1}$	$-\frac{\nu_1}{E_1}$	$-\frac{\nu_1}{E_1}$	0	0	0
ε_{22}	$-\frac{\nu_1}{E_1}$	$\frac{1}{E_2}$	$-\frac{\nu_2}{E_2}$	0	0	0
ε_{33}	$-\frac{\nu_1}{E_1}$	$-\frac{\nu_2}{E_2}$	$\frac{1}{E_2}$	0	0	0
ε_{23}	0	0	0	$\frac{1+\nu_2}{2E_2}$	0	0
ε_{31}	0	0	0	0	$\frac{1}{4G}$	0
ε_{12}	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4G}$

$(\underset{\sim}{V_1},\underset{\sim}{V_2},\underset{\sim}{V_3})$

Les détails sur le modèle numérique utilisé sont donnés dans [4]. La partie utile de l'échantillon a été discrétisée en 40 éléments dans le sens axial, 12 éléments dans le sens tranversal et 1 élément dans le sens normal, soit 480 éléments tridimensionnels et 1066 points nodaux. L'échantillon total a été discrétisé en 600 éléments tridimensionnels et 1326 points nodaux. Les éléments utilisés sont du type hexaèdrique à 8 noeuds et à interpolation linéaire. Les déplacements ont été calculés aux points nodaux pour un déplacement axial global de 0,4 mm à chaque extrémité. Les contraintes ont été calculées au centre de gravité de chaque élément. Le programme de calcul utilisé a été développé à partir d'une première version fournie par M. A. BOTTERO.

3.2 - Présentation des résultats

Les échantillons sont repérés dans les axes $(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y},\underset{\sim}{Z})$, $\underset{\sim}{X}$ étant la direction axiale, $\underset{\sim}{Y}$ la direction transversale et $\underset{\sim}{Z}$ la direction normale coïncidant avec la direction $\underset{\sim}{V3}$. Dans le plan $(\underset{\sim}{V1},\underset{\sim}{V2})$, l'orientation des échantillons est repérée par l'angle $\theta = (\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{V1})$.

Les résultats obtenus sont présentés sous la forme de différents tracés : déformées du maillage, lignes d'isodéplacements et lignes d'isocontraintes, permettant de quantifier les champs de déplacements et de contraintes et en particulier d'étudier l'homogénéité de ces champs en fonction de l'orientation des éprouvettes et du type de montage simulé. Les réseaux des lignes d'isodéplacements et d'isocontraintes ont été tracés à l'aide du programme ISOVAL du logiciel CARTOLAB.

Les résultats du calcul numérique indiquent que les déplacements u (suivant l'axe $\underset{\sim}{X}$) et v (suivant l'axe $\underset{\sim}{Y}$) des points nodaux du maillage sont identiques dans le plan Z = 0 et dans le plan Z = 0,64 mm (plan supérieur du modèle numérique), quelle que soit l'orientation des échantillons et quel que soit le type de montage simulé. Pour chaque simulation, nous présentons donc la déformée du maillage dans le plan Z = 0. Pour le tracé de ces déformées, nous avons multiplié les déplacements u et v par le facteur 25, afin de bien mettre en évidence les caractéristiques géométriques des déformées.

Les lignes d'isodéplacements u = cste (lieu des points présentant le même déplacement suivant l'axe $\underset{\sim}{X}$) et v = cste (lieu des points présentant le même déplacement suivant l'axe $\underset{\sim}{Y}$) permettent de quantifier les champs cinématiques obtenus. Les réseaux de ces lignes ont été tracés uniquement dans la partie utile des éprouvettes et pour le plan Z = 0 ; dans le plan supérieur (Z = 0,64 mm) de l'échantillon, ces réseaux sont exactement les mêmes.

Afin de pouvoir interpréter correctement les champs cinématiques obtenus, nous analysons brièvement les propriétés des réseaux de lignes d'isodéplacements. Dans le plan $(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y})$, considérons en un point P deux lignes d'isodéplacements u = cste et v = cste. Nous désignons par $\underset{\sim}{e_1}$ et $\underset{\sim}{e_2}$ les tangentes aux lignes d'isodéplacements, par μ l'angle $(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{e_1})$, par ν l'angle $(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{e_2})$ et par $\alpha = \nu - \mu$ l'angle $(\underset{\sim}{e_1}, \underset{\sim}{e_2})$ entre les deux tangentes (Figure 4a). En considérant au point P le déplacement linéaire tangent, nous obtenons :

$$u = aX + bY \quad ; \quad v = cX + dY \; ;$$
$$tg\,\mu = -\frac{a}{b} \quad ; \quad tg\,\nu = -\frac{c}{d} \quad ; \quad tg\,\alpha = \frac{ad - bc}{ac + bd} \qquad (1)$$

Dans le repère $(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y})$, le tenseur déformation pure linéaire tangente $\underset{\sim}{D}$ et la rotation ω sont données par :

$$D = \begin{vmatrix} a & \frac{1}{2}(b+c) \\ \frac{1}{2}(b+c) & d \end{vmatrix} \quad ; \quad \omega = \frac{1}{2}(b-c) \qquad (2)$$

En désignant par ($\underset{\sim}{E}_1$, $\underset{\sim}{E}_2$) les directions principales du tenseur $\underset{\sim}{D}$, par φ l'angle ($\underset{\sim}{X}$, $\underset{\sim}{E}_1$) et par ψ l'angle ($\underset{\sim}{e}_1$, $\underset{\sim}{E}_1$), nous obtenons :

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{b+c}{a-d} \quad ; \quad \operatorname{tg} 2\psi = \operatorname{tg} 2(\varphi-\alpha) = \frac{a(ac+bd)+b(ad-bc)-b(a^2+b^2)}{b(ac+bd)-a(ad-bc)+a(a^2+b^2)} \tag{3}$$

Considérons maintenant le cas où les tangentes $\underset{\sim}{e}_1$ et $\underset{\sim}{e}_2$ sont orthogonales, $\underset{\sim}{e}_2$ étant parallèle à l'axe $\underset{\sim}{X}$ (Figure 4b). A partir des équations (1) à (3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\alpha = \mu = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = c = 0 \Rightarrow \varepsilon_{xy} = \omega = 0 \\ &u = aX \quad ; \quad v = dY \quad ; \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg} 2\psi = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Dans ce cas, les directions principales de la déformation pure $\underset{\sim}{D}$ sont parallèles aux tangentes ($\underset{\sim}{e}_1$, $\underset{\sim}{e}_2$), donc aux axes ($\underset{\sim}{X}$,$\underset{\sim}{Y}$). Réciproquement, si les directions principales du tenseur déformation pure sont parallèles aux axes ($\underset{\sim}{X}$,$\underset{\sim}{Y}$), alors les tangentes ($\underset{\sim}{e}_1$, $\underset{\sim}{e}_2$) sont orthogonales et parallèles aux axes ($\underset{\sim}{X}$,$\underset{\sim}{Y}$).

Considérons maintenant un champ de déformation homogène. Dans ce cas, les équations (1) sont valables en tout point du plan ($\underset{\sim}{X}$,$\underset{\sim}{Y}$). Les lignes d'isodéplacements sont alors des droites d'équations :

$$\begin{aligned} &u = u_0 \Rightarrow Y_1 = -\frac{a}{b}X + \frac{u_0}{b} \\ &v = v_0 \Rightarrow Y_2 = -\frac{c}{d}X + \frac{v_0}{d} \end{aligned} \tag{5}$$

Le réseau des lignes d'isodéplacements est alors constitué de deux familles de droites parallèles. Si le pas affecté aux lignes d'isodéplacements est constant, les droites sont régulièrement espacées (Figure 4c). Réciproquement, si le réseau des lignes d'isodéplacements consiste en deux familles de droites parallèles et équidistantes, alors le champ de déformations correspondant est homogène.

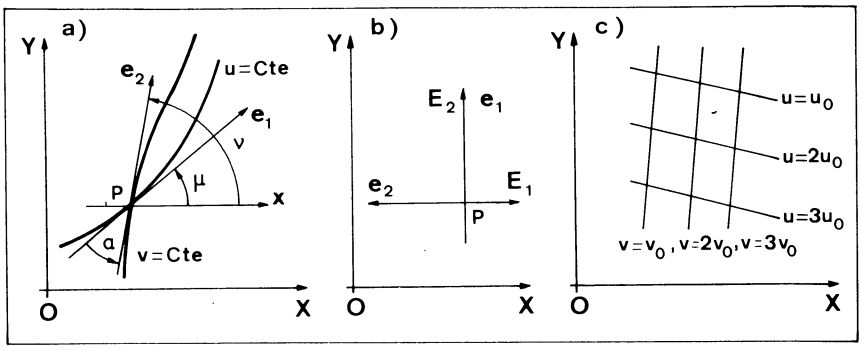


Fig. 4 - Analyse des réseaux des lignes d'isodéplacements.
a) Cas général ;
b) Lignes d'isodéplacements orthogonales et parallèles aux axes de référence ;
c) Lignes d'isodéplacements d'un champ de déformation homogène.

Les composantes dans les axes ($\underset{\sim}{X}$,$\underset{\sim}{Y}$) du tenseur $\underset{\sim}{T}$ des contraintes ont été calculées dans la partie utile des échantillons et au centre de gravité de chaque élément. Pour chaque essai simulé, nous présentons les lignes d'isocontraintes σ_x , σ_y et σ_{xy} . Chaque ligne d'isocontraintes est affectée de la valeur en kgf/mm² de la contrainte correspondante. Pour toutes les simulations réalisées, les résultats montrent que les contraintes σ_{yz} et σ_{zx} sont pratiquement nulles en tout point. On peut donc considérer que la direction normale Z est principale pour le tenseur $\underset{\sim}{T}$ en tout point.

3.3 - Simulation des essais de traction "dans les axes"

Dans le cas des essais de traction "dans les axes", c'est-à-dire lorsque l'angle θ entre la direction de la traction et l'axe $\underset{\sim}{V1}$ de révolution de l'orthotropie du matériau est nul ou égal à $\pi/2$, l'axe longitudinal et l'axe transversal de l'éprouvette sont des axes de symétries pour :

* la géométrie de l'éprouvette.
* la structure interne orientée du matériau (les axes $\underset{\sim}{V1}$, $\underset{\sim}{V2}$ de l'orthotropie sont parallèles aux axes de l'éprouvette).
* la sollicitation mécanique (traction suivant l'axe longitudinal de l'éprouvette).

Il en résulte que les différents éléments de la réponse mécanique doivent respecter les mêmes symétries, c'est-à-dire que l'axe longitudinal et l'axe transversal de l'échantillon doivent être des axes de symétrie pour :

* la déformée de l'échantillon.
* le réseau des lignes d'isodéplacements u (suivant l'axe longitudinal de l'éprouvette) et v (suivant l'axe transversal de l'éprouvette) ; les valeurs affectées aux lignes u = cste doivent être antisymétriques par rapport à l'axe transversal de l'éprouvette ; les valeurs affectées aux lignes v = cste doivent être antisymétriques par rapport à l'axe longitudinal de l'éprouvette.
* les lignes d'isocontraintes σ_x et σ_y et pour les valeurs affectées à ces lignes.
* les lignes d'isocontraintes σ_{xy} , les valeurs affectées devant être symétriques par rapport à l'axe transversal et antisymétriques par rapport à l'axe longitudinal.

Les résultats obtenus par nos simulations numériques des essais de traction "dans les axes" pour $\theta = \pi/2$ (Figure 5) et θ = 0°(non présentés ici) sur le composite T300/5208, indiquent que les symétries décrites ci-dessus sont rigoureusement vérifiées ; ce résultat est un test pour la validité du programme numérique en éléments finis utilisé et pour la précision des calculs effectués.

Nous rappelons que pour les essais "dans les axes", les directions principales du tenseur des contraintes et du tenseur des déformations coïncident. Dans ce cas, un champ de contraintes homogène et un champ de déformations homogène sont compatibles avec les conditions aux limites imposées dans le montage classique en mors fixes. Il en résulte que les champs statiques et cinématiques obtenus d'une part avec le montage en mors fixes, d'autre part avec le montage en rotules ponctuelles, doivent être identiques. C'est bien ce que nous avons observé pour les simulations effectuées : les déformées des éprouvettes, les réseaux de lignes d'isodéplacements et les lignes d'isocontraintes sont rigoureusement identiques pour les deux types de montage, même dans les zones non homogènes.

Pour la simulation numérique de l'essai de traction à $\theta = \pi/2$, nous constatons que, aussi bien pour le champ cinématique que pour le champ des contraintes, l'éprouvette déformée présente une zone homogène couvrant toute la largeur et les 4/5 centraux de sa partie utile (Figure 4). Dans cette zone homogène :

* la déformée du maillage ne présente pas de distorsion ; les familles de lignes d'isodéplacements u = cste et v = cste sont des familles de droites parallèles et équidistantes ; les deux familles sont orthogonales et parallèles aux axes de l'échantillon. Il en résulte que les directions principales des déformations sont les axes de l'échantillon (cf.paragraphe 3.2 ci-dessus).

* les composantes de l'état de contraintes homogène ont pour valeurs :

σ_x = 10,7 kgf/mm² ; σ_y = σ_{xy} = 0.

Il s'agit donc bien d'un état de traction simple dans la direction $\underset{\sim}{X}$, de valeur 10,7 kgf/mm² pour un déplacement de 0,4 mm des deux extrémités de l'échantillon.

Les hétérogénéités n'apparaissent qu'aux extrémités de l'échantillon et sont assez faibles.

3.4 - Simulation des essais de traction "hors-axes" ; montage classique en mors fixes

Dans le cas des essais de traction "hors-axes", c'est-à-dire lorsque l'angle θ entre la direction de la traction et l'axe $\underset{\sim}{V1}$ de révolution de l'orthotropie du matériau est différent de 0 et de $\pi/2$, les axes de l'éprouvette ne sont plus des axes de symétrie pour la structure interne orientée du matériau ; il en résulte que les différents éléments de la réponse mécanique ne peuvent plus être symétriques par rapport aux axes de l'éprouvette, comme c'est le cas pour les essais "dans les axes". Cependant, le centre de l'éprouvette est un centre de symétrie, à la fois pour la géométrie de l'éprouvette, la structure interne orientée du matériau et la sollicitation mécanique. Les différents éléments de la réponse mécanique doivent donc également admettre le centre de l'éprouvette comme centre de symétrie.

Les résultats obtenus par nos simulations numériques des essais de traction "hors-axes" pour θ = 30° (Figure 6 pour le montage en mors fixes ; Figure 7, § 3.5, pour le montage en rotules ponctuelles) et pour θ = 60° (non présentés ici), montrent que le centre de l'éprouvette est rigoureusement un centre de symétrie pour les déformées des éprouvettes, les réseaux des lignes d'isodéplacements et les lignes d'isocontraintes. Ce résultat confirme la validité du programme développé et l'excellente précision des calculs effectués.

Nous rappelons que pour les essais "hors-axes", les directions principales du tenseur des contraintes et du tenseur des déformations ne peuvent coïncider que pour une seule orientation θ intermédiaire entre 0° et 90°. Pour le composite T300/5208, cette orientation est voisine de 61°. Pour les autres orientations, les directions principales des contraintes et des déformations ne peuvent pas coïncider ; dans ce cas, un champ de contraintes homogène et un champ de déformations homogène sont incompatibles avec les conditions aux limites imposées dans l'essai de traction classique avec le montage en mors fixes. Il en résulte une hétérogénéité du champ cinématique et du champ des contraintes, ainsi qu'une déformation en "S" de l'échantillon.

Pour la simulation numérique de l'essai à θ = 30° en mors fixes (Figure 6), la déformée du maillage indique une déformation en "S" très prononcée de l'échantillon. Les lignes d'isodéplacements u = cste et v = cste sont des lignes courbes, montrant la forte hétérogénéité du champ cinématique obtenu (cf. paragraphe 3.2 ci-dessus).

De même, les lignes d'isocontraintes montrent que le champ des contraintes est très fortement hétérogène pour les trois composantes σ_x, σ_y et σ_{xy}. La contrainte axiale σ_x a pour valeur 20,5 kgf/mm² au centre de l'échantillon ; dans la partie utile, les variations vont de 6,5 kgf/mm² à 37 kgf/mm² ; la limite élastique du matériau sera donc atteinte d'abord aux extrémités de la partie utile de l'échantillon (zones à σ_x = 37 kgf/mm²). Même au centre de l'échantillon, les contraintes σ_y et surtout σ_{xy} ne sont pas nulles ; nous observons les valeurs : σ_y = 0,06 kgf/mm² et σ_{xy} = 1,6 kgf/mm², soit 8% de la valeur de la contrainte σ_x au centre. Nous concluons que l'état de contrainte n'est pas un état de traction simple dans la direction axiale $\underset{\sim}{X}$ de l'échantillon, même au centre de l'éprouvette, où la contrainte de cisaillement présente une valeur non nulle significative. Or, ce type d'essai est généralement interprété comme un

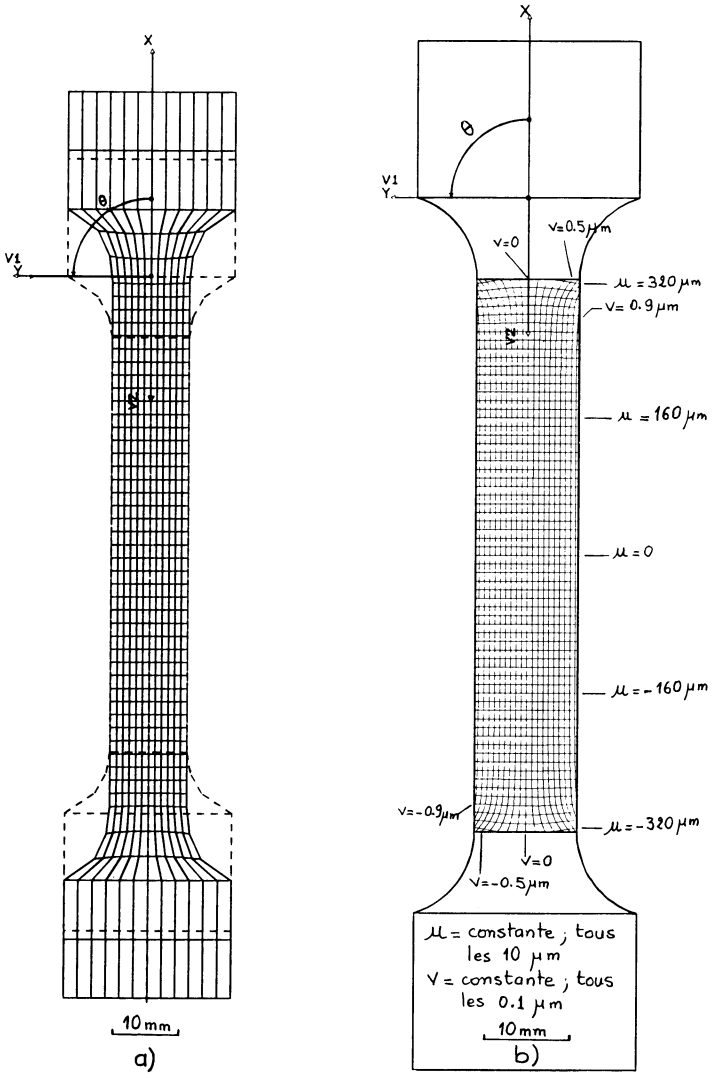


Fig. 5 - Simulation numérique d'un essai de traction simple "dans les axes" sur le matériau composite T300/5208, avec montage en mors fixes ou en rotules ponctuelles. $\underset{\sim}{X}$: direction de la traction ; $\underset{\sim}{V1}$: axe de révolution de l'orthotropie ; $(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{V1}) = 90°$.
a) Déformée du maillage.
b) Réseaux des lignes d'isodéplacements.

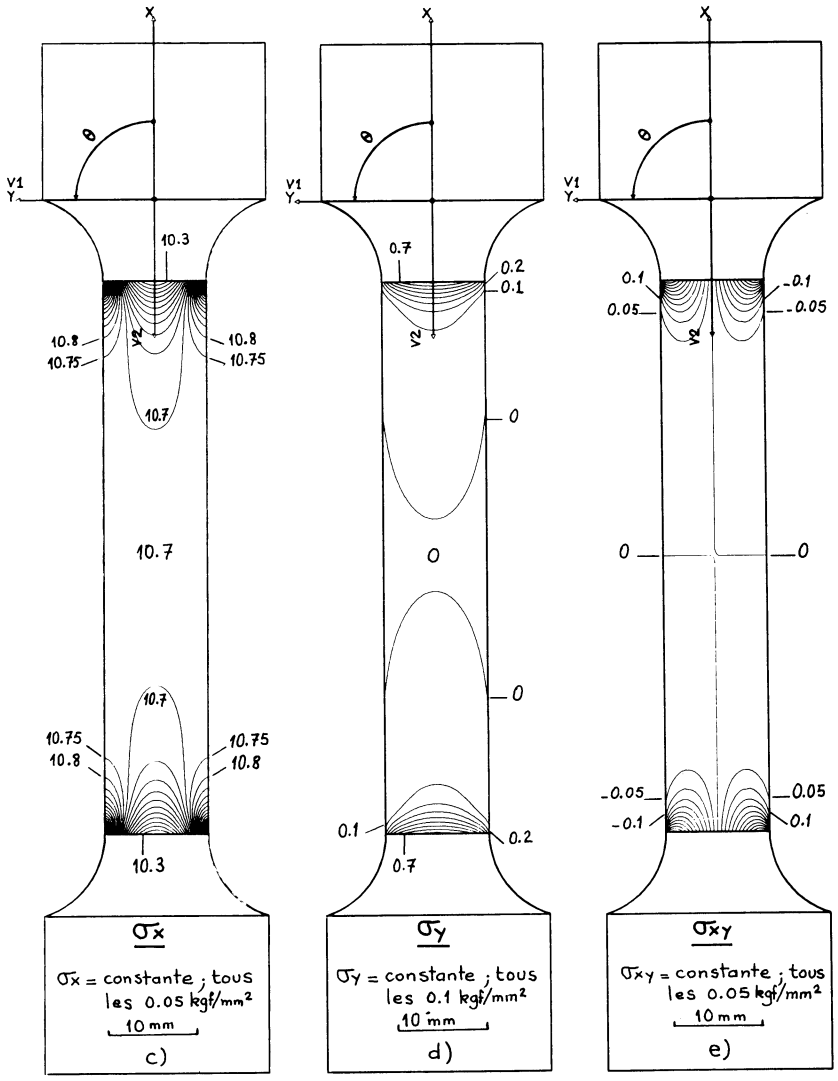


Fig. 5 - c) lignes d'isocontraintes σ_x .
d) lignes d'isocontraintes σ_y .
e) lignes d'isocontraintes σ_{xy} .

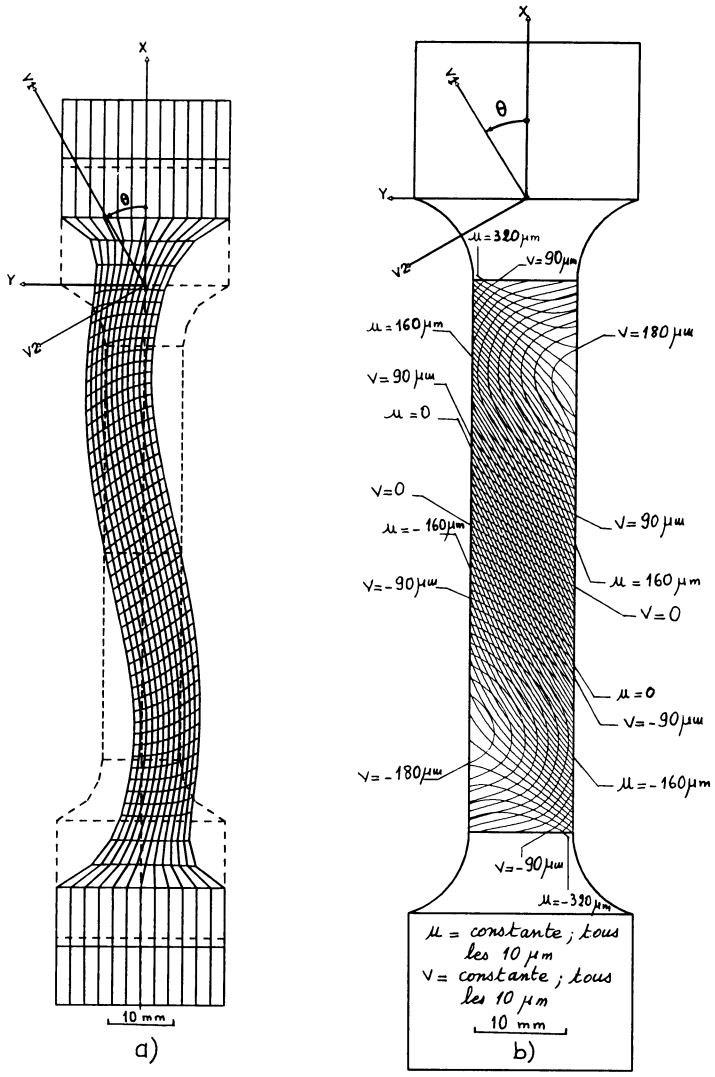


Fig. 6 - Simulation numérique d'un essai de traction simple "hors axes" sur le matériau composite T300/5208 avec montage en mors fixes. $\underset{\sim}{X}$: direction de la traction ; $\underset{\sim}{V1}$: axe de révolution de l'orthotrope ; $(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{V1}) = 30°$
a) Déformée du maillage.
b) Réseaux des lignes d'isodéplacements.

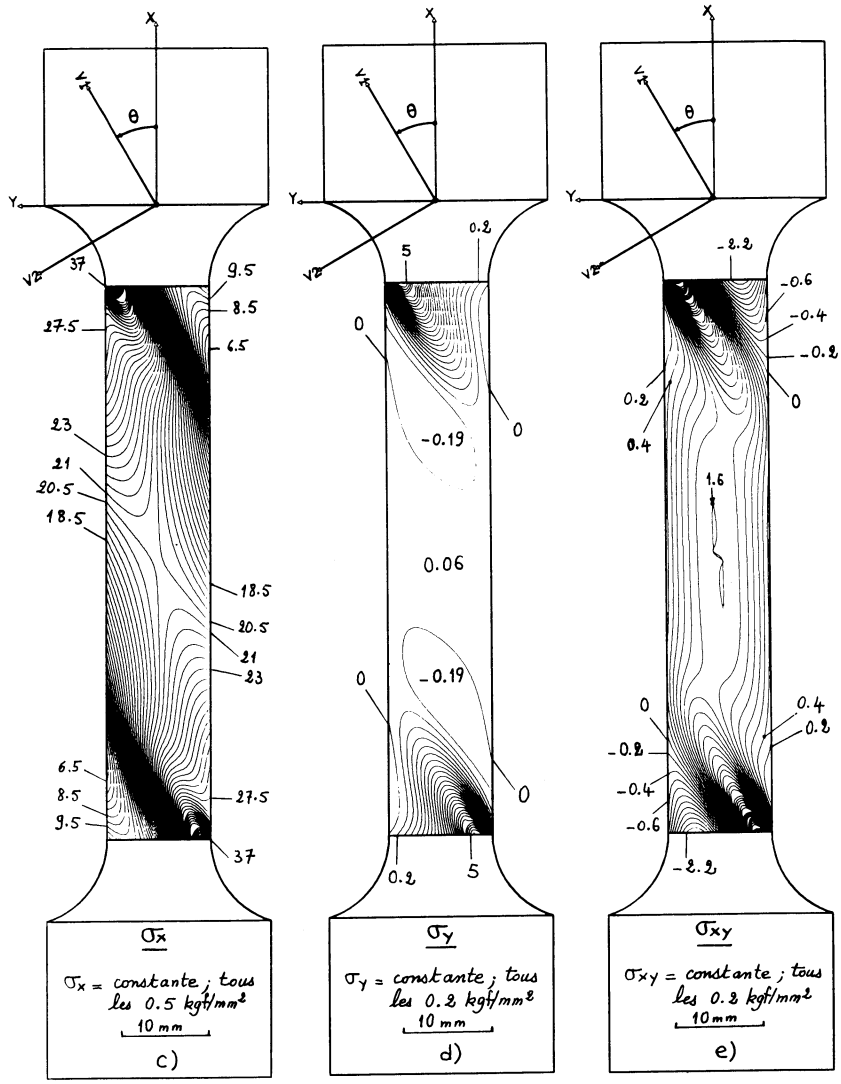


Fig. 6 - c) lignes d'isocontraintes σ_x .
d) lignes d'isocontraintes σ_y .
e) lignes d'isocontraintes σ_{xy} .

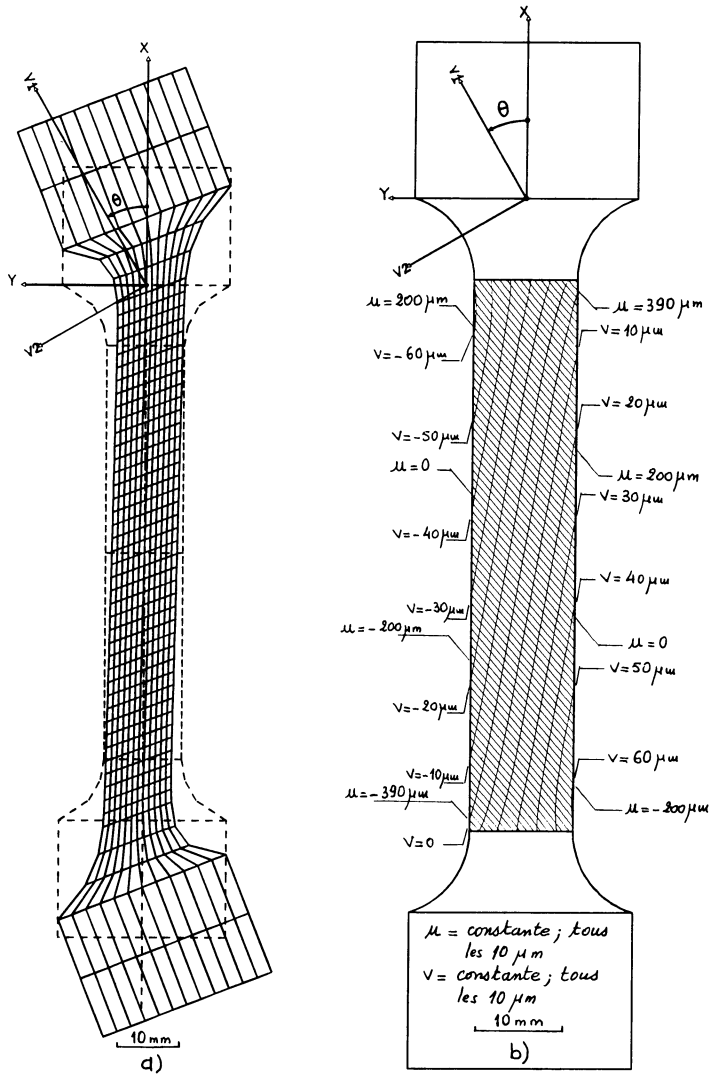


Fig. 7 - Simulation numérique d'un essai de traction simple "hors-axes" sur le matériau composite T300/5208 avec montage en rotules ponctuelles. $\underset{\sim}{X}$: direction de la traction ; $\underset{\sim}{V1}$: axe de révolution de l'orthotropie ; $(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{V1}) = 30°$.
a) Déformée du maillage.
b) Réseaux des lignes d'isodéplacements.

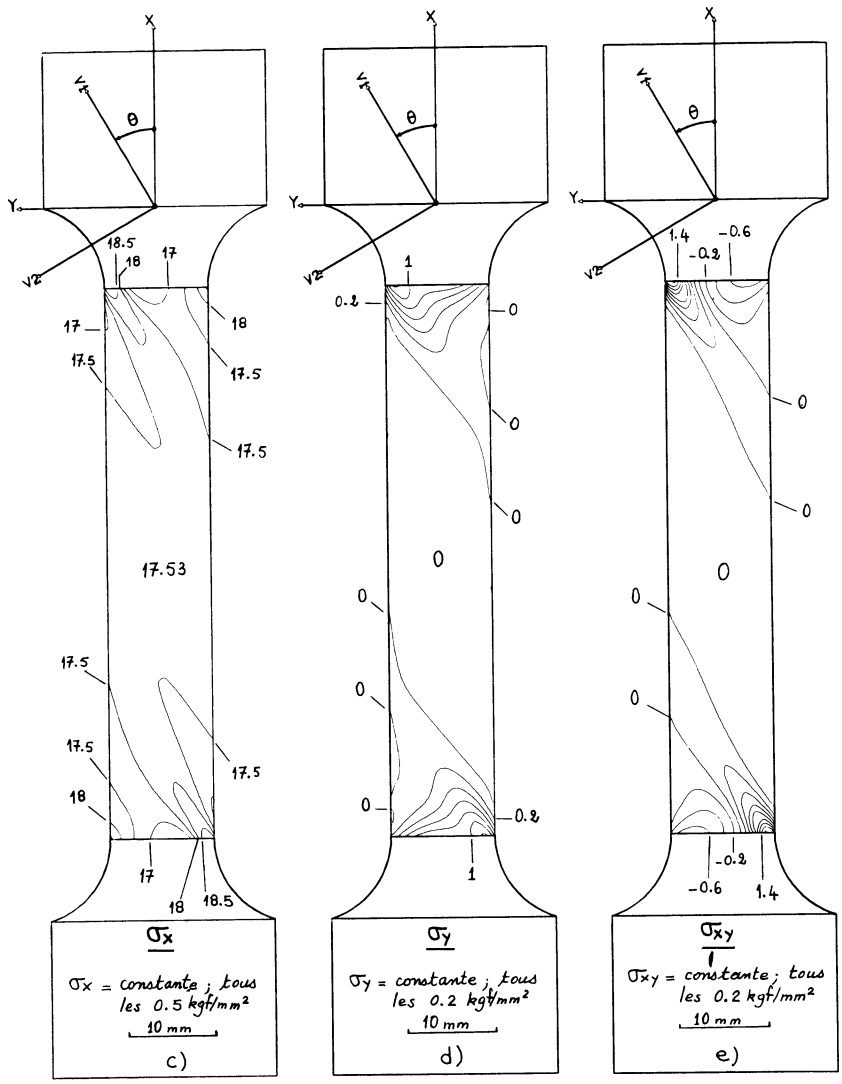


Fig. 7 - c) lignes d'isocontraintes σ_x .
d) lignes d'isocontraintes σ_y .
e) lignes d'isocontraintes σ_{xy} .

essai de traction simple homogène dans la direction axiale $\underset{\sim}{X}$. Il est clair que les données expérimentales obtenues dans cette hypothèse sont totalement erronées.

3.5 - Simulation des essais de traction "hors-axes" ; montage en rotules ponctuelles

Pour la simulation numérique de l'essai de traction à $\theta = 30°$ avec le montage en rotules ponctuelles (Figure 7), nous constatons, aussi bien sur la déformée du maillage que sur les réseaux des lignes d'isodéplacements, que le champ des déformations est homogène dans la quasi-totalité de la partie utile de l'échantillon. Cette partie utile, initialement rectangulaire, se déforme en un parallélogramme gauche ; ceci est en accord avec notre analyse des essais "hors-axes" homogènes (cf.paragraphe 2 ci-dessus et Figure 2). Dans la zone homogène, les réseaux des lignes d'isodéplacements sont bien constitués de deux familles de droites parallèles et équidistantes. Cependant, ces familles de droites ne sont ni orthogonales, ni parallèles aux axes de l'échantillon, ce qui signifie que les directions principales du champ de déformations homogène ne coïncident pas avec les axes de l'échantillon. Ceci est également visible sur la déformée du maillage, qui indique une distorsion non nulle.

De même, les réseaux des lignes d'isocontraintes indiquent que le champ des contraintes est également homogène dans la quasi-totalité de la partie utile de l'échantillon. Dans cette zone homogène, les valeurs des composantes du tenseur des contraintes sont les suivantes :

$$\sigma_{\underset{\sim}{x}} = 17{,}5 \text{ kgf/mm}^2 \quad ; \quad \sigma_{\underset{\sim}{y}} = \sigma_{\underset{\sim}{xy}} = 0$$

L'état de contrainte homogène est donc bien un état de traction simple dans la direction axiale $\underset{\sim}{X}$ de l'échantillon, la valeur de la contrainte de traction étant 17,5 kgf/mm² pour un déplacement de 0,4 mm aux deux extrémités de l'échantillon ; cette valeur est, d'une façon significative, inférieure à celle obtenue au centre de l'échantillon en montage en mors fixes, pour un même déplacement aux extrémités (17,5 kgf/mm² contre 20,5 kgf/mm², soit une différence de 17 %).

En conclusion, le nouveau dispositif avec montage en rotules ponctuelles permet effectivement d'obtenir, dans la quasi-totalité de la partie utile de l'éprouvette, une zone homogène à la fois pour le champ cinématique et pour le champ des contraintes. Le dispositif proposé constitue donc une excellente approximation du dispositif idéal. En accord avec notre analyse des essais "hors-axes" homogènes, les directions principales du champ des déformations ne coïncident pas avec celles du champ des contraintes, ces dernières étant parallèles aux axes de l'échantillon.

4 - ETUDE EXPERIMENTALE DES ESSAIS DE TRACTION SUR UN ACIER LAMINE

Nous avons réalisé une série d'essais en tractions simples "dans les axes" et "hors-axes" sur des échantillons de tôles d'acier doux laminé, dans le domaine des déformations plastiques. Pour chaque orientation des échantillons, nous avons utilisé d'une part le montage classique en mors fixes, d'autre part le nouveau montage en rotules ponctuelles [3,4].

Les champs cinématiques obtenus au cours des essais ont été mesurés à l'aide de la méthode de la stéréophotogrammétrie [5,6] et de procédures numériques associées. La méthode consiste à prendre, d'une position fixe, deux photographies de l'échantillon testé, dans un certain intervalle de temps. L'analyse des clichés dans un "stéréorestituteur" permet de déterminer en tout point de l'échantillon les composantes du vecteur déplacement correspondant à la déformation subie par l'échantillon pendant l'intervalle de temps. Avec la technique que nous avons utilisée, ces composantes ont été mesurées avec une précision de 1 µm à 2 µm à l'échelle des clichés. A partir de ces données expérimentales quantifiées, nous avons déterminé les fonctions déplacements associées, à l'aide d'une procé-

dure d'interpolation utilisant des "fonctions spline". Cette procédure permet le traçage des lignes d'isodéplacements et, par dérivation des fonctions déplacements, celui des lignes d'isodéformations. Une description détaillée de la méthode de la stéréophotogrammétrie et des techniques associées est donnée dans la référence [6] · les procédures numériques utilisées sont présentées dans la référence [4], qui contient également l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus.

La tôle d'acier doux utilisée dans nos essais est un matériau orthotrope, les axes d'orthotropie étant la direction de laminage $\underset{\sim}{V1}$, la direction transverse $\underset{\sim}{V2}$ et la direction normale $\underset{\sim}{V3}$. Dans le plan de la tôle, nous avons prélevé des échantillons suivant différentes orientations θ entre l'axe $\underset{\sim}{X}$ des échantillons et la direction $\underset{\sim}{V1}$ du laminage. Nous avons appliqué à ces échantillons un déplacement axial irréversible de 0,72 mm, évitant ainsi l'apparition de déformations localisées.

Pour les échantillons orientés à $\theta = 90°$, c'est-à-dire pour des essais "dans les axes", nous avons obtenu exactement les mêmes résultats avec le montage classique en mors fixes et le montage en rotules ponctuelles. Dans la totalité de la partie utile des échantillons, le champ de déplacement et le champ des déformations sont parfaitement homogènes, les directions principales des déformations étant les axes de l'échantillon. Ceci confirme expérimentalement que dans le cas des essais "dans les axes", un champ de contraintes homogène et un champ de déformations plastiques homogène sont compatibles avec les conditions aux limites imposées par le montage en mors fixes.

Pour l'échantillon orienté à $\theta = 60°$, les réseaux de lignes d'isodéplacements obtenus avec le montage en mors fixes (Figure 8a) indiquent une nette déformation en "S" de l'échantillon. Le champ cinématique obtenu est donc hétérogène. Ceci constitue une confirmation expérimentale de l'incompatibilité des conditions aux limites imposées par le montage en rotules ponctuelles avec le développement d'un champ de déformations plastiques homogène. Nous rappelons que le centre de l'échantillon étant un centre de symétrie à la fois pour la géométrie des éprouvettes, pour la structure interne orthotrope du matériau et pour la sollicitation mécanique, les différents éléments de la réponse mécanique doivent également être symétriques par rapport au centre de l'échantillon. Nous constatons que les lignes d'isodéplacements obtenues vérifient parfaitement cette symétrie ; il en est de même pour les lignes d'isodéformations, non présentées ici. Cette symétrie parfaite confirme que les mesures effectuées par la méthode de la stéréophotogrammétrie et exploitées à l'aide des procédures numériques associées sont d'une très grande précision.

Pour le même échantillon orienté à $\theta = 60°$, les résultats obtenus avec le montage en rotules ponctuelles sont présentés sur la Figure 8b. Dans la quasi-totalité de la partie utile de l'échantillon, les deux familles de lignes d'isodéplacements sont constituées de droites parallèles et équidistantes. Le champ cinématique obtenu est donc homogène (cf. 3.2 ci-dessus) ; ceci est confirmé par les réseaux des lignes d'isodéformations (non présentées ici). Ces familles de droites ne sont ni orthogonales, ni parallèles aux axes de l'échantillon. Les directions principales du champ de déformations homogène ne coïncident donc pas avec les axes de l'échantillon. Ceci confirme expérimentalement que dans le domaine plastique également, les directions principales du champ cinématique homogène et du champ des contraintes homogène ne coïncident pas dans le cas des essais "hors-axes". Finalement, ces résultats apportent une confirmation expérimentale de la validité du nouveau montage en rotules ponctuelles pour la réalisation d'essais "hors-axes" homogènes sur les matériaux anisotropes.

5 - CONCLUSION

Les simulations numériques et les études expérimentales présentées mettent bien en évidence les hétérogénéités des champs cinématiques et des champs de contraintes se développant dans les échantillons "hors-axes" au cours des essais

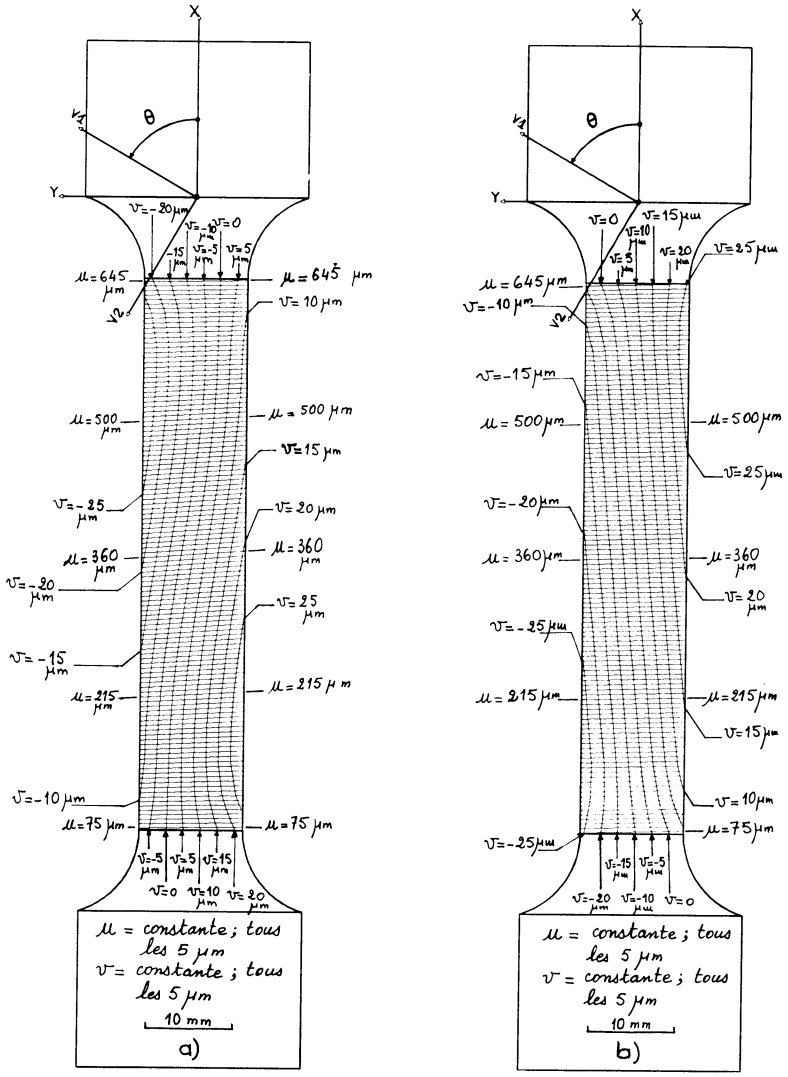


Fig. 8 - Essais de traction simple "hors-axes" sur des échantillons d'acier doux laminé orthotrope. Déplacement axial : 0,72 mm.
$\underset{\sim}{X}$: direction de la contrainte de traction ;
$\underset{\sim}{V1}$: direction du laminage ; ($\underset{\sim}{X}$, $\underset{\sim}{V1}$) = 60°.
u = cste : lignes d'isodéplacements axiaux.
v = cste : lignes d'isodéplacements transversaux.

a) champ hétérogène obtenu avec le montage classique en mors fixes ;

b) champ homogène obtenu avec le montage en rotules ponctuelles.

de traction réalisés avec le montage classique en mors fixes. Cette technique classique conduit à des mesures nettement erronées pour les propriétés mécaniques des matériaux anisotropes.

Le nouveau dispositif du montage en rotules ponctuelles permet d'obtenir effectivement des champs cinématiques et des champs de contraintes homogènes dans les essais "hors-axes", aussi bien dans le domaine du comportement élastique, que dans celui du comportement plastique. Ce dispositif, qui est une excellente approximation du dispositif idéal, apporte donc une solution au problème de la mesure correcte des caractéristiques mécaniques des matériaux anisotropes et permet une modélisation réaliste de leurs lois de comportement.

BIBLIOGRAPHIE

1. BOEHLER, J.P., RACLIN, J. et BENEFICE, P., Etude des champs cinématiques non homogènes, de l'écrouissage et de la fissuration des milieux anisotropes, Rapport final contrat ATP "Comportement Mécanique des Solides", 1981.
2. RACLIN, J., Contributions théoriques et expérimentales à l'étude la plasticité, de l'écrouissage et de la rupture des solides anisotropes, Thèse de Doctorat ès Sciences, Grenoble, 1984.
3. BOEHLER, J.P., EL AOUFI, L. et RACLIN, J., On experimental testing methods for anisotropic materials, Res Mechanica, 1985 (in print).
4. EL AOUFI, L., Contributions à l'étude expérimentale et numérique du comportement mécanique des matériaux anisotropes, Thèse de Doctorat de Spécialité, Grenoble, 1984.
5. BUTTERFIELD, R., HARKNESS, R.M. and ANDRAWES, K.Z., A stereophotogrammetric method for measuring displacement fields, Geotechnique, 20,3 (1970) 308-414.
6. BENEFICE, P. and BOEHLER, J.P., The application of stereophotogrammetry to the analysis of displacement fields in solid mechanics. In : Optical methods in mechanics of solids, LAGARDE, A. (ed.), Sijthoff and Noordhoff, Aalphen aan den Rijn, 1981, pp. 657-668.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 151-164

Influence de la matrice sur la tenue à long terme des composites carbone-résine

Role of the matrix on the long term behavior of carbon-fiber-reinforced-epoxy resin

B. PONSOT, D. VALENTIN, A.R. BUNSELL

Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris
Centre des Matériaux
B.P. 87, 91003 Evry Cedex, France

RESUME

Afin de mieux comprendre les mécanismes de dégradation dans les matériaux composites, nous avons étudié quelle pouvait être l'influence des propriétés viscoélastiques de la matrice sur leurs cinétiques d'endommagement en "fluage". Nous avons réalisé des matériaux unidirectionnels à partir de fibres identiques mais de matrices qui diffèrent par leurs caractéristiques viscoélastiques. Nous avons comparé le comportement des matrices seules, puis des composites sous charge constante. Afin de suivre la progression de l'endommagement, nous utilisons l'émission acoustique qui nous a permis de proposer un modèle quantifiant l'endommagement accumulé.

ABSTRACT

In order to improve our knowledge of mecanisms of degradation in composites materials, we have studied the influence of the viscoelastic properties of the resin upon the damage accumulation during creep tests. Unidirectional composites have been prepared with matrices of varying viscoelastic properties. We have compared the long term behavior of the pure resin and of the composite using Acoustic Emission to monitor the developpement damage. A model of assessing damage accumulation is proposed.

1 - INTRODUCTION

Actuellement l'emploi des matériaux composites n'est plus limité à des secteurs industriels à très haute technologie tels que l'aérospatiale, l'aéronautique... Cependant leur application, dans l'industrie automobile par exemple, pour des pièces mécaniques de sécurité reste subordonnée à une bonne connaissance des mécanismes de dégradation et à une estimation des durées de vie sous charge. Nous nous sommes intéressés dans cette étude à estimer le rôle de la matrice dans la vitesse d'endommagement d'un composite unidirectionnel carbone-résine lors d'une sollicitation de fluage. Le comportement global d'un matériau unidirectionnel est élastique. De même des études précédentes (1) ont montré que le comportement d'un faisceau de fibres sans matrice est élastique. Si l'on soumet un faisceau de fibres à une charge constante, il n'y a pas progression de l'endommagement alors qu'un composite unidirectionnel continue de s'endommager par des ruptures de fibres essentiellement. Le rôle principal de la matrice est de maintenir les fibres parallèles entre elles et de permettre un transfert d'efforts entre chaque fibre, de ce fait les propriétés rhéologiques de la matrice doivent influencer le comportement du composite lorsque le paramètre temps intervient. Nous avons donc cherché à estimer l'influence des propriétés viscoélastiques de la matrice sur les vitesses d'accumulation d'endommagement de composites unidirectionnels. Pour cela nous avons effectué des essais sur des matériaux élaborés avec les mêmes fibres mais avec des résines présentant un comportement en fluage très différent.

2 - MODELE DU FAISCEAU DE FIBRES.

On considère un composite unidirectionnel carbone-époxyde sollicité en fluage dans le sens des fibres. Nous supposerons les fibres parfaitement élastiques, leur résistance à rupture obéissant à une distribution de type WEIBULL. Par des systèmes d'extensométrie classiques, on ne peut déceler aucun endommagement le matériau présentant un comportement macroscopique élastique.

Un tel matériau peut être considéré comme un faisceau de fibres noyées dans une matrice viscoélastique. Des études effectuées sur faisceau de fibres et sur préimprégnés (1) ont montré que la charge maximale que peut supporter un faisceau sans rupture catastrophique en fonction de l'endommagement accumulé passe par un maximum. La courbe charge-endommagement est donnée par la formule suivante :

$$P = (N_o - N_f)\ f_o\ \left[\ln \left(\frac{N_o}{N_o - N_f} \right)^{1/\delta} \right] \qquad (1)$$

P est la charge appliquée
N_f le nombre de fibres rompues
N_o le nombre total de fibres
f_o constante
δ paramètre de WEIBULL

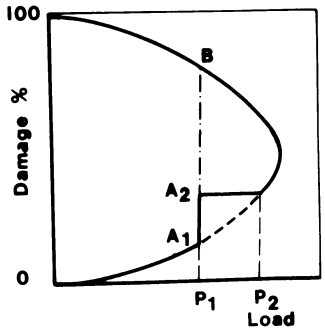


Fig. 1 : Charge maximale que peut supporter un faisceau de fibres en fonction de l'endommagement accumulé.

La Figure 1 montre que l'on peut obtenir à des charges inférieures à la charge à rupture un endommagement supérieur à celui obtenu à la résistance ultime du faisceau. Ainsi sous charge constante, si des fibres sont rompues, l'endommagement s'accumulera suivant la ligne A, B. La ruputre aura lieu au point B.

Rosen considère un composite unidirectionnel comme une chaîne ou chaque maillon est un faisceau de fibres dont la longueur est égale à la longueur de transfert des charges entre fibre et matrice appelée longueur inefficace (2). Rotem a montré que cette longueur évolue avec le temps donc en fonction des constantes viscoélastiques de la matrice (3). Chaque maillon peut être défini par un diagramme charge-endommagement, mais ces différentes courbes présentent une dispersion.

La rupture aura lieu dans le maillon le plus faible. La courbe Figure 1 a été obtenue dans le cas du faisceau de fibres, mais reste vraie dans le cas ou le composite obéit au modèle de chaîne de faisceau de fibres. La diférence réside dans le fait que sous charge constante, le composite continue de s'endommager suivant la ligne A_1A_2. Cette progression de l'endommagement est due aux transferts de charges en bout de fibres rompues par cisaillement de l'interface fibre-matrice, les ruptures ayant lieu sur les fibres les plus faibles. Si l'on augmente à nouveau la charge, l'évolution de l'endommagement suit à nouveau l'enveloppe du diagremme charge-endommagement.

Sous charge constante, la vitesse d'endommagement dépend des caractéristiques de la matrice et pour déterminer des durées de vie, il est nécessaire de pouvoir chiffrer cette évolution. Nous utilisons l'émission acoustique comme méthode de comptage des ruptures de fibres.

3 - MODELISATION

Nous avons pu observer que si l'on soumet un matériau unidirectionnel à une charge constante, le taux d'émission diminue avec le temps. Il a été montré que l'endommagement accumulé est indépendant du chemin suivi dans le diagramme charge-endommagement. Nous supposons que l'émission acoustique rend principalement compte des ruptures de fibres. Le modèle initial développé par Laroche et

Bunsell (5) dans le cas de matériau unidirectionnel à matrice rigide (type CIBA GEIGY 914) pose que le taux d'émission peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{A}{(t + \tau)} \qquad (2)$$

t représente le temps
τ une constante de temps
A fonction de la contrainte appliquée

$$\text{Si à } N = 0 \quad t = 0 \quad N = A \log \frac{t + \tau}{\tau} \qquad (3)$$

à partir de (2) et (3) on peut obtenir :

$$\log \frac{dt}{dN} = \frac{N}{A} + \log \frac{\tau}{A} \qquad (4)$$

donc dans le diagramme $\log \frac{dt}{dN} = f(N)$, f est une droite de pente $\frac{1}{A}$.

En fait une meilleure approximation est proposée par Valentin et Bunsell (4) qui posent :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{A}{(t + \tau)^n} \qquad (5)$$

avec n coefficient sans dimension.

n = 0,99 dans le cas d'un composite unidirectionnel à matrice rigide type 914.

n représente l'écart de linéarité de la courbe à la droite et est intéressant dans le cas de matériaux croisés qui présentent une stabilisation de l'émission acoustique différente, comme le montre la Figure 2.

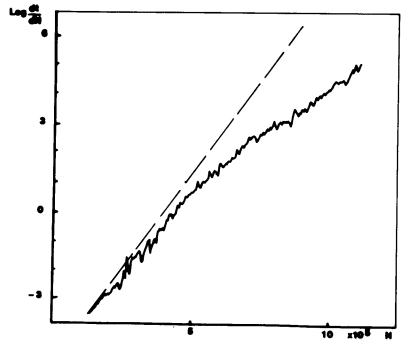


Fig. 2 : Stabilisation de l'émission acoustique pour un composite croisé pendant un palier de fluage.

Dans le cas de nos matériaux, nous avons pu mettre en évidence deux domaines pendant un palier de fluage. Les courbes obtenues présentent deux

pentes C1 et C2 et nous avons une stabilisation des émissions qui est montrée sur la figure suivante :

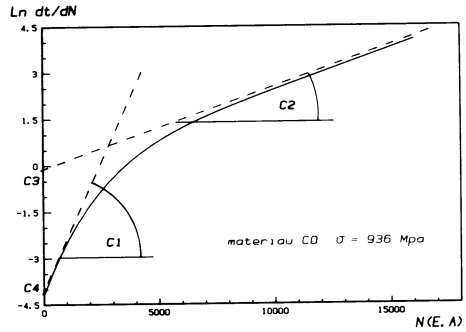


Fig. 3 : Stabilisation de l'émission acoustique pour un composite unidirectionnel à matrice souple type RO.

A partir d'un niveau d'endommagement, la courbe tend vers une droite de pente C2.

Ainsi, pour représenter cette évolution, nous avons choisi d'adjoindre un terme correctif au modèle sous la forme d'une fonction g(N) telle que :

$g(N) \longrightarrow 0$
qd $(N) \rightarrow N_{max}$

$$N = K1 \log \frac{t + K_2}{K_2} + g(N) \qquad (6)$$

On pose de plus : $\frac{dg}{dN}(N) \longrightarrow 0$

et $\frac{d^2g}{dN^2}(N) \rightarrow 0$
qd $N \rightarrow N_{max}$

on obtient finalement :

$$\log \frac{dt}{dN} = \log K_1 K_2 + \log (1 - \frac{dg}{dN}(N) + K_1 N - K_1 g(N)$$

Nous proposons comme expression : $g(N) = e^{-K3N + K4}$

$$\log \frac{dt}{dN} = \log K_1 K_2 + \log (1 + K_3 e^{-K3N + K4)} + K_1 e^{-K3N + K4})$$

Nous pouvons obtenir les valeurs des paramètres Ki à partir d'expressions qui les relient aux valeurs des constantes C_i relevées sur la courbe expérimentale (Figure 3).

4 - METHODES EXPERIMENTALES

4.1. - Mise en oeuvre du Composite

Le type de matrices que nous avons choisies est un système de résines époxydes à deux composants CIBA GEIGY type CY208 et CY205 (ou araldite F). La résine CY208 peut être mélangée en toute proportion à l'araldite F à laquelle elle confère le degré de flexibilité souhaité. De telles résines sont couramment

employées dans la fabrication d'objets moulés, aussi il n'existe ni préimprégnés ni de possibilité de fabrication industrielle en regard de la quantité de matériaux dont nous avions besoin. Nous avons donc réalisé une machine d'imprégnation et de bobinage. Le faisceau de fibres après imprégnation est essoré puis bobiné sur un mandrin récepteur plan. L'élaboration du matériau se fait par pressage à chaud par l'intermédiaire de deux contre plaques rapportées.

4.2. - Matériaux

Nous avons donc défini deux matériaux qui diffèrent par la matrice utilisée (rapport des deux composants CY208 - CY205) le renfort étant dans les deux cas des fibres de carbone TORAY T 300-B (Tableau 1).

	CY208	CY205	Fibres
Matériau C0	70 %	30 %	T 300-B
Matériau C1	30 %	70 %	T 300-B

Tableau 1 : Composition des matériaux étudiés.

Les éprouvettes ont été découpées dans les plaques élaborées suivant la méthode décrite ci-dessus. Elles font 17 mm de large, 0,7 mm d'épaisseur. Des talons en acier percés sont collés de part et d'autre pour transmettre la charge par l'intermédiaire de goupilles. La longueur utile de toutes les éprouvettes est de 100 mm. La fraction volumique mesurée par micrographie et analyseur d'image est de l'ordre de 53 %.

Les éprouvettes de résine pure sont découpées dans des plaques moulées avec les mélanges décrits plus haut. Elles sont de formes parallélépipédiques, font 4 mm d'épaisseur et 15 mm de large. La longueur de jauge est de 30 mm. Pour les essais mécaniques sur résine pure, nous avons dû développer un système d'extensométrie permettant de mesurer des allongements allant jusqu'à 60-70 %. Ce système est constitué par deux capteurs inductifs montés sur le couteau inférieur. La course totale est de 70 mm. Pour éliminer les flexions éventuelles, on fait la moyenne des signaux délivrés par les deux capteurs.

4.3. - Suivi par Emission Acoustique

Pour tous nos essais sur matériaux composites, le suivi de l'endommagement se fait à l'aide d'une chaîne d'émission acoustique DUNEGAN ENDEVCO série 3000. On a utilisé un capteur piézo électrique de type D140B résonnant à 200 KHz. Celui-ci est fixé au milieu de l'éprouvette, un bon couplage éprouvette-capteur, étant assuré par de la graisse silicone.

L'amplification du signal a été de 95 db (40 db pour le préampli, 55 db pour l'ampli). Le système de comptage comprenant un seuil fixé à 25 db = une émission sera comptée si son amplitude ajoutée au gain de l'ampli dépasse 120 dB par réf. à 1 µV au capteur. Un convertisseur digital/analogique permet la transformation du signal acoustique en un nombre de coups ou pulses cumulés, tandis qu'un générateur d'enveloppe permet de ne compter qu'un seul évènement pour une suite de pulses séparés par des intervalles inférieurs à la durée choisie. Pour tous les essais effectués, le temps mort choisi (intervalles de temps séparant deux évènements) fut de 100 µs. Nous disposons de plus d'une

base de temps logarithmique avec remise à zéro pour un nombre fixé d'évènements : ΔN. On porte donc en ordonnée le logarithme de l'intervalle de temps ΔT qu'il faut pour accumuler un nombre fixé ΔN d'évènements. Nous obtenons ainsi une courbe dans le diagramme $(\ln(\Delta T/\Delta N) = f(N)$.

5 - RESULTATS

5.1. - Essais sur résine pure

Le but des essais effectués sur résine pure est de mettre en évidence les différences de comportement entre les systèmes définis plus haut. On a regroupé Tableau 2 les résultats obtenus en traction et l'on peut comparer sur la Figure 4 les courbes de traction pour le matériau R0 et le matériau R1.

Matériau	σ_R (MPa)	ε_R (%)	σ_Y (MPa)	ε_Y (%)	E (MPa)
R 0	40	4	13	0,6	2200
R 1	50	1	25	0,6	4000

Tableau 2 : Tableau de valeurs obtenues en traction sur éprouvettes de résine pure.

Les essais de traction ont été effectués à la vitesse de déformation de 8 mm/mm. On a rencontré une dispersion assez importante sur la contrainte à rupture et les déformations à rupture des deux matériaux, ceci étant certainement dû à la présence de défauts, microporosité, etc...

Les valeurs des modules étant plus caractéristiques on a été amené à considérer σ_y valeur de la contrainte à partir de laquelle le comportement n'est plus linéaire comme référence pour les essais de fluage.

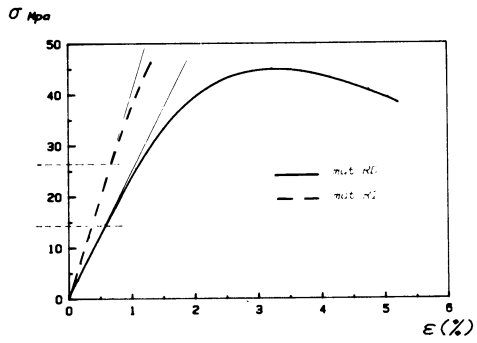


Fig. 4 : Courbes de traction des matériaux R0 et R1 (résine pure).

Nous nous sommes donc placés de part et d'autre de cette valeur caractéristique. Les essais de fluage ont été effectués sur une machine à fléau MAYES. Dans le cas du matériau RO les déformations à rupture en fluage étant très importantes (ε_R % pouvant atteindre jusqu'à 60 %) on a supposé en première approximation que le volume était constant pour évaluer la contrainte en fonction du temps.

Si V = constante on a déduit :

$$\sigma(t) = \sigma(o) \times (1 + \varepsilon(t))$$

Pour comparer le comportement des deux matériaux, on pouvait étudier l'évolution du module E(t) ou bien la compliance $D(t) = \frac{1}{E(t)}$ on a :

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} = \frac{\sigma(o) \times [1 + \varepsilon(t)]}{\varepsilon(t)}$$

$$D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma(o) \times [1 + \varepsilon(t)]}$$

On a reporté les résultats de plusieurs essais sur la Figure 5. On remarque bien deux domaines distincts mettant en évidence la différence du comportement dans le temps entre RO et R1. Ceci nous conduit à penser que le composite élaboré avec la résine type RO va accumuler un endommagement plus important pour un laps de temps donné que le composite élaboré avec la résine R1. En effet Lifshitz et Rotem ont montré (3), que l'expression de la contrainte le long d'une fibre rompue en fonction du temps était :

$$\sigma(x, t) = \sigma_o [1 - \exp - (J(t).A)^{-1/2}. x]$$

J(t) = compliance en cisaillement
x = distance à partir de la rupture
t = temps
σ_o = contrainte dans la fibre loin de la rupture

$$A = E_f r_f (r_m - r_f) /2$$

E_f = module d'Young de la fibre
r_m = rayon de la matrice autour de la fibre
r_f = rayon de la fibre.

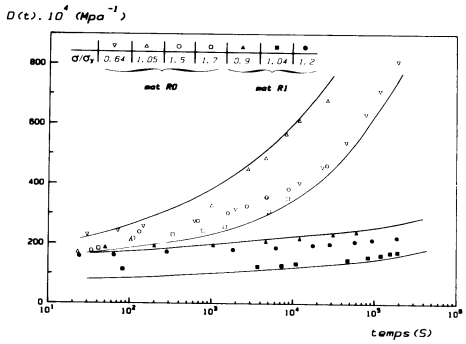


Fig. 5 : Compliance en tension des matériaux RO et R1.

Dans le cas de nos matériaux, on a étudié la compliance en tension, mais on peut cependant noter, que si $D_{RO}(t) > D_{R1}(t)$ alors $J_{RO}(t) > J_{R1}(t)$ donc à une même distance x_1 de la rupture et au même instant t_1 on a :

$$\sigma_{CO}(x_1, t_1) < \sigma_{C1}(x_1, t_1)$$

Ainsi, il faudra une plus grande longueur pour effectuer le transfert des charges dans le matériau CO et les fibres adjacentes seront donc surchargées sur une distance plus importante. On est donc amené à penser que la vitesse d'endommagement sera supérieure dans le cas du matériau CO.

5.2. - Essais sur matériaux composites CO et C1

- Traction -

Nous avons tout d'abord effectué des essais de traction sur plaques planes types CO et C1 servant à qualifier nos matériaux. Les essais sont réalisés à une vitesse de déformation de 0,05 cm/mn. Les résultats sont reportés dans le tableau ci-dessous :

Matériau	σ_R (MPa)	Ecart type (MPa)
CO	1260	146
C1	1143	68

Tableau 3 : Valeurs moyennes des contraintes à rupture.

Nous avons enregistré le comportement de l'émission acoustique pendant un essai de traction dont nous présentons un exemple Figure 6. L'effet KAISER est d'autant mieux vérifié que l'on est à un niveau de contrainte faible. De plus on notera que le matériau Co élaboré avec la résine la plus ductile vérifie moins bien l'effet KAISER que le matériau C1 et que ces deux matériaux emettent plus tôt lors d'une nouvelle montée en charge qu'un matériau du type T300B-914 (matrice rigide) plus couramment utilisée.

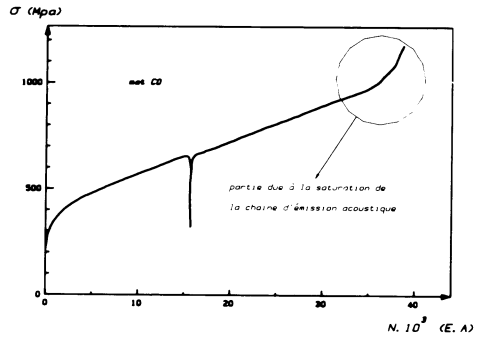
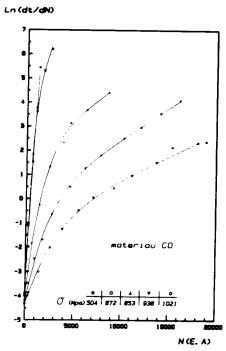


Fig. 6 : Essai de traction sur matériau CO.

- Fluage -

On remarquera que le modèle proposé rend bien compte du comportement en fluage des deux matériaux pour des rapports de contrainte σ/σ_R compris entre 0.5 et 1. Les Figures 7 et 8 présentent l'évolution de l'émission acoustique pour les matériaux CO et C1 pour différents paliers de fluage (toutes les courbes ont été ramenées à l'origine). Il est clair que si l'on se situe à un niveau d'endommagement donné, soit N_o fixé, le taux d'émission acoustique $\frac{\Delta N}{\Delta T}$ sera d'autant plus important que le niveau de charge sera élevé.



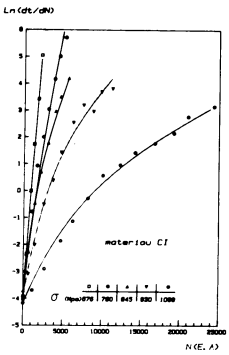


Fig. 7 et Fig. 8 : Evolution de l'Emission Acoustique suivant différents paliers de fluage pour les matériaux CO et C1.

Sur la Figure 9 on a représenté l'évolution des deux matériaux pour des niveaux de contraintes identiques. On peut observer que le matériau CO (trait plein), quelle que soit la contrainte, présente une vitesse d'endommagement supérieure au matériau C1.

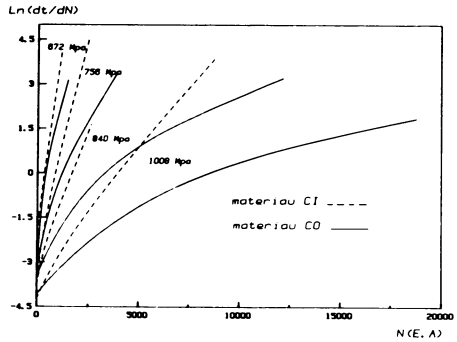


Fig. 9 : Stabilisation de l'émission acoustique pour les matériaux CO et C1 sollicité en fluage à des niveaux de contraintes identiques.

Il n'a pas été possible jusqu'à présent de corréler la variation des différents paramètres K_1 du modèle. Cependant on peut remarquer qu'il existe deux domaines définis principalement par les pentes C1 et C2. La première partie correspond à un état transitoire, de mise en place du matériau. Le deuxième domaine défini par la pente C2 représente une évolution stable de l'émission acoustique, la partie la plus importante de l'endommagement accumulé. Sur la Figure 10, qui représente la variation de Log K_1 en fonction de la contrainte, on peut noter une décroissance quasi linéaire de Log K_1 pour les deux matériaux. De plus, les valeurs de K_1 pour CO sont toujours supérieures aux valeurs de K_1 pour C1, ceci mettant en évidence une croissance plus rapide de l'endommagement pour CO.

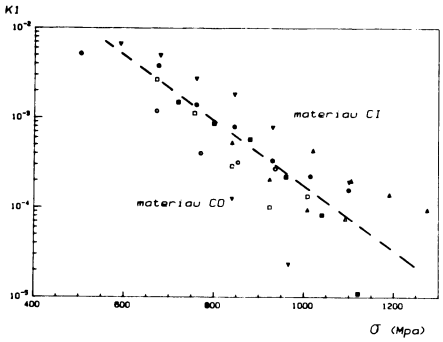


Fig. 10. : Variation de K_1 en fonction de la contrainte.

Nous avons effectué des séquences de chargement particulières en appliquant une décharge ou une surcharge au cours d'un palier de fluage. La Figure 11 montre que l'évolution de l'émission acoustique est seulement fonction de l'endommagement accumulé donc reste indépendante de la séquence de chargement.

Ainsi, une surcharge ne correspond qu'à une accélération du temps dans le diagramme charge-endommagement.

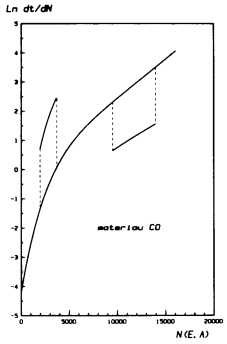


Fig. 11. : Séquences de chargement particulières.

On a pu obtenir le même résultat en faisant varier la température au cours d'un palier de fluage. Ceci signifie qu'il y a une équivalence température contrainte. Aussi le fait d'augmenter la température conduit à une vitesse d'endommagement supérieure et donc à une accélération du temps. Ces essais montrent que l'on peut obtenir une équivalence temps-contrainte-température au moins dans un domaine particulier de contraintes et de températures.

6. - CONCLUSION

Le modèle qui décrit la progression de l'endommagement dans un composite unidirectionnel est basé sur le comportement d'un faisceau de fibre. On considère le matériau comme une chaîne dont chaque maillon peut être représenté par un faisceau de fibre, la rupture ayant lieu sur le maillon le plus faible. On a pu observer l'influence de la matrice sur la vitesse de dégradation du matériau : une matrice rigide entraîne une faible longueur de transfert des charges et une progression de l'endommagement plus lente.

L'émission acoustique qui se révèle une méthode efficace pour suivre l'évolution du matériau, nous permet une quantification de l'endommagement, ce qui présente un intérêt certain dans le calcul des durées de vie.

BIBLIOGRAPHIE

(1) A.R. BUNSELL, D. LAROCHE and D. VALENTIN.
"Damage and Failure in Carbon-Fiber-Reinforced Epoxy Resin".
Long term behavior of composites, ASTM STP 813, T.K. O'Brieu, Ed.,
American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1983.
pp.38-54.

(2) B.W. ROSEN.
"Tensile failure of fibrous composite".
A I A A Journals 2 (1964), pp. 1968-1991.

(3) J.M. LIFSCHITZ, A. ROTEM.
"Time dependent longitudinal strength of unidirectional fibrous composites".
Fiber science and Technology 3 (1970), pp. 1-20.

(4) D. VALENTIN, A.R. BUNSELL.
"Suivi de l'endommagement des composites à fibres de carbone pour Emission Acoustique".
Compte-rendus des troisièmes journées nationales sur les composites, JNC3, Septembre 1982, pp. 131-140.

(5) D. LAROCHE, A.R. BUNSELL
"Stress and time dependent damage in C.F.R.P."
Advances in composites materials, Vol. 11, 1980, pp. 985-1000.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials*
CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 165-188

Etude de l'influence du biseautage des extrémités des substrats, sur le comportement mécanique d'un composite plan collé, sollicité à l'essai de cisaillement par traction

Analysis of the influence of scarfing of the ends of the adherends on the mechanical behaviour of a bonded plane composite, undergoing shear by the mean of a traction force

Y. GILIBERT

Maître de Conférences à l'I.U.T. de Reims,
Chef du Groupe Composites et Collage, E.N.S.T.A. Palaiseau
Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées
Laboratoire de Mécanique et Energétique
Groupe Composites et Collage
Centre de l'Yvette,
chemin de la Hunière, 91120 Palaiseau

RESUME

L'objet de cette communication est d'établir expérimentalement l'influence du biseautage sur la répartition des contraintes dans un assemblage collé à double recouvrement. Lorsque les substrats ne sont pas biseautés, des travaux théoriques antérieurs, basés sur la méthode des développements asymptotiques corrigés, ont permis de proposer une modélisation compatible avec les résultats expérimentaux.

Pour les joints biseautés, la méthode expérimentale, par extensométrie avec jauges électriques, permet de mesurer les contraintes pendant toute la durée de vie de l'éprouvette depuis la phase élastique, jusqu'à la rupture, en passant par l'initiation et la propagation des microfissures.

Le comportement mécanique des échantillons testés est très sensible au biseautage des extrêmités libres des couvre-joints. Il existe une valeur optimale de l'angle de l'extrêmité libre des tôles, qui confère au corps d'épreuve soumis à l'essai de cisaillement par traction une résistance mécanique maximum.

ABSTRACT

This paper is devoted to the experimental analysis of the influence of scarfing on the stresses repartition in an double lap bonded joint. When the adherends are not scarfed, same theoretical results, based on the Matched Asymptotic Expansions Method, have been obtained in previous works and provide a model in a good correlation with experiments.

For scarfed joints, we measure the stresses by the way of the extensometry on the electric strain jauges and it is possible to represent the whole length of life of the choosen model, from the elastic behaviour phasis to rupture, going through initiation and propagation of cracks.

Mechanical behaviour of tested samples is very sensitive with scarfing of free ends of adherends. There is an optimal value for the angle of free ends, gives, to the sample, undergoing shear obtained by traction, a very good mechanical strength.

1 - INTRODUCTION

Pratiqué depuis la plus haute antiquité, l'assemblage par collage s'est développé sur le plan technologique depuis le début du vingtième siècle. Cependant, les études et recherches à caractère fondamental sur ce mode de liaison, datent tout au plus d'une quarantaine d'années. Le domaine d'étude concerné, le collage, vient en bonne place parmi les techniques modernes d'assemblage en cours de développement [1, 47]. "En l'an 2000, la moitié (en valeur) des produits d'assemblage seront des colles. D'ici là, les études tant fondamentales qu'appliquées, menées souvent en collaboration entre fabricants, centres de recherches et utilisateurs, en feront des produits plus "industriels" qu'aujourd'hui, plus faciles à mettre en oeuvre, plus résistants, plus durables et moins sensibles aux défauts de préparation et aux variations d'épaisseur des joints" [2].

L'antériorité prise par les travaux à caractère technologique impose l'utilisation d'un montage expérimental fiable, bien connu sur le plan des applications : c'est pourquoi, nous avons approfondi l'analyse du comportement mécanique de l'assemblage à double recouvrement, sollicité à la traction [3].

Les recherches que nous avons réalisées sur les composites plans [3 à 32] ou axisymétriques [33, 34], collés, nous ont permis d'affiner notre méthode expérimentale. Celle-ci est basée sur la mesure des déformations superficielles du corps d'épreuve sollicité, à l'aide de jauges électriques d'extensométrie [3, chapitre 8]. Nous obtenons des résultats fiables précis et fidèles dont la reproductibilité est très satisfaisante. De plus nos recherches sont de nature théorique ou de nature numérique, tant dans l'utilisation de techniques existantes pour traiter les problèmes posés que dans la conception et le développement d'outils nouveaux [17, 22, 23, 24, 29]. L'investigation expérimentale est privilégiée pour la mise en évidence des faits fondamentaux dans ces domaines où l'approche théorique classique de la mécanique des milieux continus est souvent inadaptée ou stérile [10, 19, 20, 28].

Dans la première partie, nous décrivons l'élaboration des modèles expérimentaux ; ensuite, nous présentons les résultats d'une analyse théorique et expérimentale du comportement mécanique du double recouvrement non biseauté. Enfin, dans la troisième partie, nous étudions l'influence de l'angle du biseau des tôles sur la tenue mécanique de l'assemblage.

2 - DESCRIPTION DE L'ELABORATION DES MODELES EXPERIMENTAUX ET DE LA METHODE EXPERIMENTALE

2.1 - Double recouvrement non biseauté (DRNB)

Les opérations de mise au point de l'élaboration très complexe des éprouvettes à double recouvrement ont été décrites dans des travaux antérieurs [3, § II]. Le type d'échantillon testé (figure 1) est tel que :

- ses substrats T1, T2, A sont constitués de l'acier ferritique à 0,18 % de carbone (nuance XC 18). Le module d'élasticité longitudinal E^T et le coefficient de Poisson ν^T ont été déterminés en traction par une méthode extensométrique (capteur du type WA 06 120 WT 120, VISHAY-MICROMESURES), à l'aide de barreaux dont la longueur est égale à 25 cm (section carrée de 1 cm de côté). La vitesse de montée en charge est voisine de 100 da $N.mn^{-1}$ ($\dot{\varepsilon} \simeq 10^{-6}\ S^{-1}$).

La régularité de nos matériaux a été contrôlée en réalisant des essais de dureté Brinnell (HB = 190) et des micrographies au microscope optique (structure ferritique).

Après différents essais, nous avons retenu :

$$E^T = E^A = 207\ 700\ MPa \pm 10\ MPa$$

$$\nu^T = \nu^A = 0{,}288 \pm 0{,}003$$

- L'adhésif est une colle structurale à 2 composants du type EPONAL 317 (Société SONAL), polymérisée à température ambiante 20°C ± 1°C. La base est une résine époxyde chargée, elle est mélangée au moment de l'utilisation à un accélérateur du type amine. Les constantes élastiques du composé durci, ont été obtenues à partir de jauges électriques d'extensométrie et ont pour valeur ν =0,327 et E = 5800 MPa. Les courbes de traction montrent que l'adhésif a un comportement du type fragile (vitesse de traction : $\dot{\varepsilon} = 10^{-6}$ S^{-1}).

- Les subjectiles recevant le liant précédent présentent l'aspect sablé, grâce à des particules de corindon (diamètre moyen 169 µm) leur rugosité est définie par les critères de la norme NF E05 - 015 ; en particulier la rugosité totale R_t est voisine de 7 µm et est adaptée au diamètre moyen des charges minérales de l'adhésif (dm = 7 µm, [3, 18, 19]).

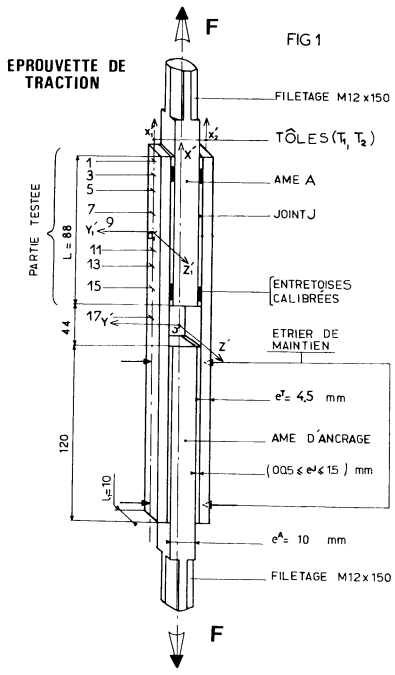


FIG 1

Notons que l'étude de l'influence de l'épaisseur du film de colle, à l'aide de substrats d'épaisseur e_T = 4,5 mm, à subjectiles sablés, a montré que la rupture du joint se produisait toujours par cisaillement (cas des aciers de nuances XC 18, XC 90, 0,05 < e_j < 1,5 mm, [3], § XIII et IX]).

La figure 1 décrit une éprouvette dont les dimensions sont optimales et lui confèrent la résistance maximale. Nous avons utilisé cette dernière éprouvette pour étudier l'influence du biseautage des extrémités des couvre-joints T_1 et T_2 (figure 2) sur son comportement mécanique instantané au cisaillement par traction.

2.2 - Double recouvrement biseauté (DRB)

La structure étudiée est décrite par la figure 2. Elle est obtenue à partir des mêmes constituants que le double recouvrement non biseauté de la figure 1. L'élaboration des éprouvettes a posé de nombreux problèmes techniques à cause des difficultés provenant de la manipulation des tôles, terminées à une extrémité par des couteaux dont l'angle atteint pour certains modèles quelques degrés. Nous avons en particulier étudié, réalisé et mis au point des dispositifs qui permettent de positionner et de maintenir les substrats avec une grande précision au cours des opérations de traitement des subjectiles et de polymérisation du joint adhésif.

2.3 - Méthode expérimentale

2.3.1 - Rappels préliminaires

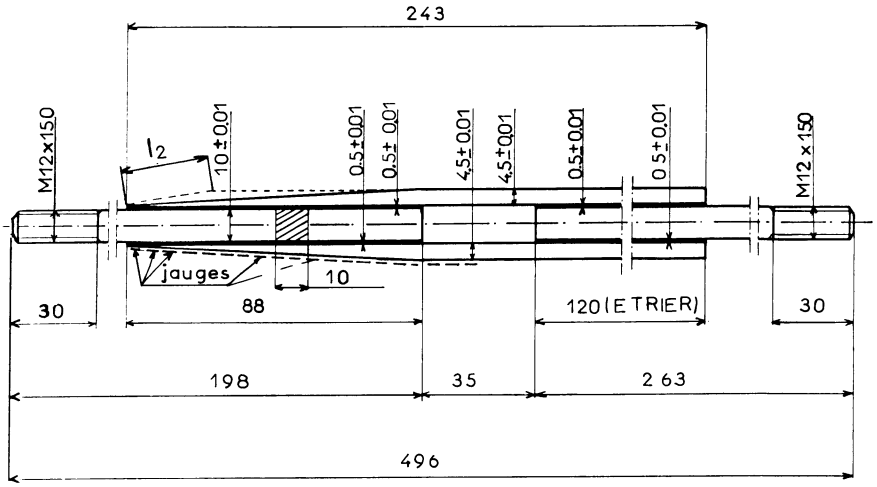
Le système de détection par capteur à jauges électriques que nous avons mis au point [3], permet de localiser :

- les régions où s'amorcent les micro-fissures du joint ;

- l'endroit où se produit le décollement des tôles (ou de l'âme) dans le cas d'une rupture d'adhérence.

DOUBLE RECOUVREMENT BISEAUTE

FIG.2



Les décrochements (figure 3) traduisent qu'aux points correspondants :

- les tôles ne s'allongent plus mais se contractent ;

- l'effort de traction n'est plus transmis de la même façon aux tôles par l'intermédiaire du joint de colle J.

Par conséquent, il se produit localement :

- soit une rupture d'adhérence aux interfaces colle/acier du côté de T_1 et T_2, ou du côté de l'âme A,

- soit un cisaillement des joints J.

C'est l'examen des pièces après rupture qui permet de déterminer le type de rupture [3, tableaux : IX.2, IX.3, XI.1, XI.2, XII.1, XIII.1, XIII.2, XIV.1 et XV.1].

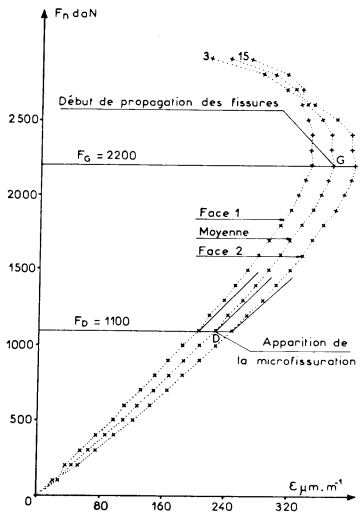
2.3.2 - Différents types de rupture observés [3, § VIII, pages 87, 88]

Suivant les conditions opératoires, les paramètres géométriques et mécaniques de l'éprouvette, différents types de rupture peuvent apparaître.

- cisaillement du joint

Lorsque la ruine de l'éprouvette s'est produite par cisaillement du joint, une partie de la colle adhère sur les subjectiles de l'âme de l'autre partie sur ceux des tôles. La décohésion générale s'effectue exclusivement par rupture des liaisons des macro-molécules de résine qui forment le joint adhérent. On a symbolisé ce type de liaison chimique par (J-J). (voir observation des subjectiles après rupture des corps d'épreuve [3].

FIG 3



DETERMINATION GRAPHIQUE DES EFFORTS A PARTIR DESQUELS S'INITIENT LES FISSURES ET SE PROPAGENT LES CRIQUES DANS LE CAS OU LES SUBJECTILES DES TOLES POSSEDENT UN ETAT DE SURFACE DU TYPE RECTIFICATION SABLEE

- Rupture d'adhérence

Elle se caractérise par le décollement du joint aux interfaces colle-âme ou colle-tôle. Toute la colle se détache de l'un des subjectiles de l'âme ou des tôles, ce sont donc les liaisons entre la résine et le métal, désignées respectivement (J-T) et (J-A), qui sont détruites sous l'effet des contraintes engendrées par l'effort de traction. Ainsi, dans les parties du joint où se produit ce type de rupture, les liaisons (J-T) ou (J-A) sont moins résistantes que celles du type (J-J) pour les sollicitations imposées [3, 20].

Une étude expérimentale de ce type de liaison est présentée dans les travaux de thèse de M.A. KOMIHA [6] pour laquelle l'auteur a réalisé l'ensemble des tests étudiés. Notons qu'une étude approfondie de ce type de liaison, permet de mettre en évidence une initiation précoce des microfissures à l'interface colle/alliage d'aluminium. L'expérimentation a permis de définir les bases de la modélisation analytique pour adapter la mécanique des milieux continus à ce type de comportement mécanique (thèse en cours à l'ENSTA/L.M.E./G.C.C.).

- Rupture mixte

Les deux types de décohésion précédent, peuvent coexister au sein d'une même éprouvette. La prépondérance de l'un d'eux varie suivant la nature de l'état de surface des subjectiles, suivant les paramètres géométrique et mécanique.

2.3.3 - Choix de la représentation graphique

Nous pouvons tracer au choix les divers types de courbes suivants :

- force de traction F en fonction des micro-déformations mesurées en différentes abscisses, soit $F = f(\varepsilon)$ (courbe du type 1, figure 3).

- micro-déformations mesurées ε en fonction des positions des jauges pour différents chargements donnés, soit $\varepsilon = f(X)$ (courbe du type 2, [3, tome II]).

- force de traction F en fonction des contraintes calculées soit $F = F(\sigma)$ (courbe du type 3, [3, tome II]).

- contraintes calculées T en fonction des positions des jauges, soit $\sigma = f(X)$ (courbe du type 4, [3, tome II]).

Lorsqu'on veut étudier plus précisément les phénomènes, il est intéressant de tracer ces courbes pour chaque face et chaque type des valeurs (longitudinale ou transversale). On trace aussi les courbes moyennes définies en prenant en considération les valeurs mesurées ou calculées de même type, pour des abscisses symétriques [3, 37] par rapport à l'axe longitudinal O' X' du repère principal (figure 1). Notons qu'elles sont représentatives du comportement de l'assemblage [3].

L'exploitation des valeurs mesurées ou calculées exige très souvent :

- de choisir les échelles les mieux adaptées à la représentation des phénomènes ;

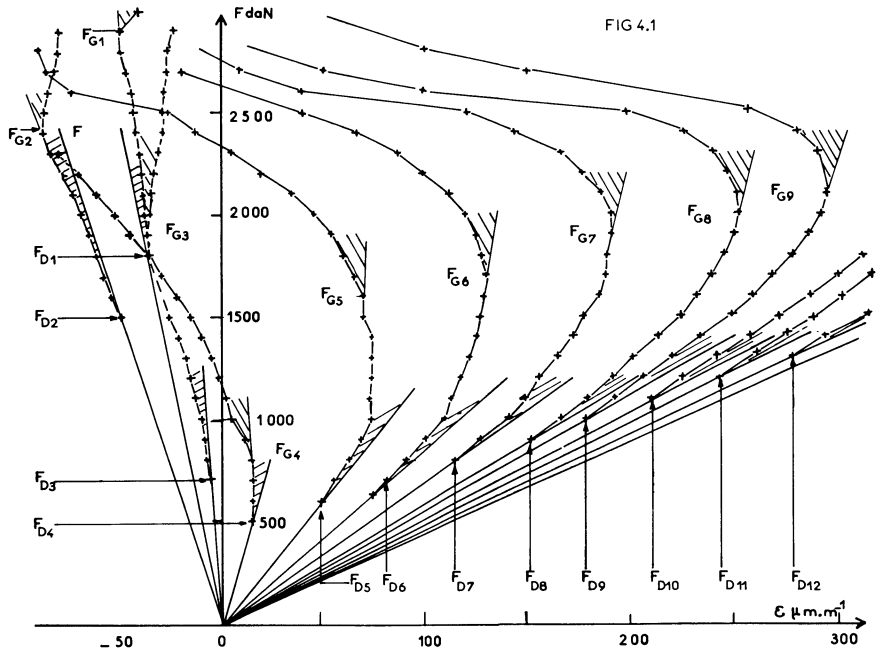
- de reproduire et de comparer plusieurs expériences ;

- de prélever et d'agrandir, dans une région bien définie, des portions de courbes qui traduisent clairement des propriétés caractéristiques. Nous avons développé des programmes qui permettent d'effectuer automatiquement tous ces travaux [3, 6, 29].

3 - ETUDE APPROFONDIE DU CISAILLEMENT PREFERENTIEL DU JOINT D'ADHESIF J [3, § VIII.7]

En présence de subjectiles sablés, la rupture de l'éprouvette a lieu par cisaillement préférentiel du joint. Afin de mieux analyser le phénomène dans ce cas, considérons les courbes moyennes 1 (F_{D1}, F_{G1}), 2 (F_{D2}, F_{G2}) ..., 30 (F_{D30}, F_{G30}), (figure 4.1 et figure 4.2, tableau 1) correspondant à des jauges I_1, I_2, ..., I_{30} et à leurs symétriques, dont les distances respectives x de leur centre au bord libre des couvre-joints sont notées dans le tableau 1.

FIG 4.1



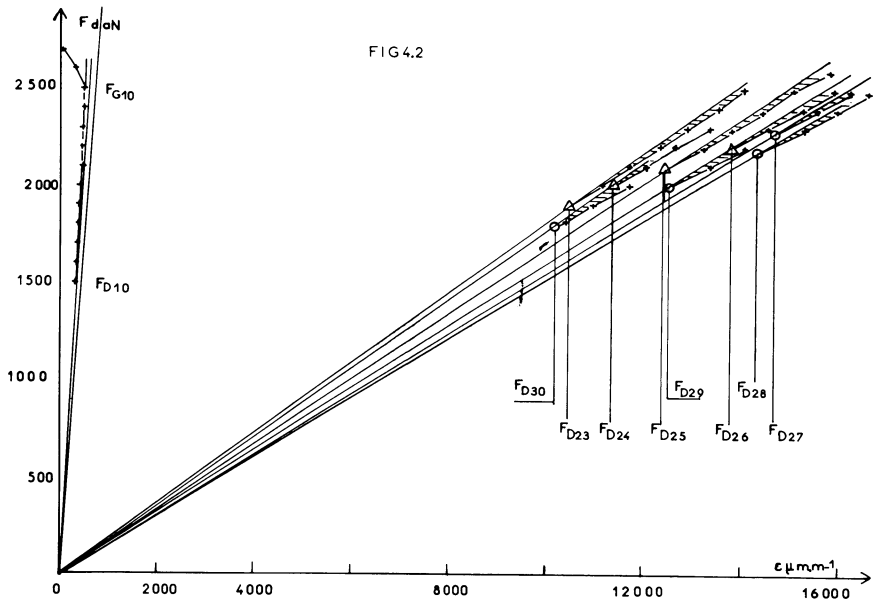


FIG 4.2

Quand l'effort de traction croît de 0 à 3000 daN (effort de rupture ultime), les jauges 1 à 30 indiquent que le comportement est élastique linéaire jusqu'aux seuils d'initiation des microfissures F_{Dn} (n = 1, 2, 3, ..., 29, 30).

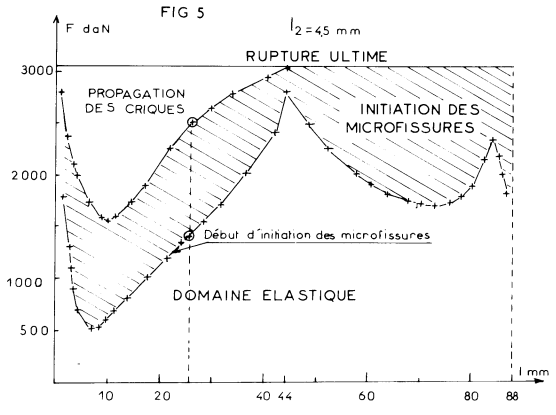
Tableau 1

N° jauge	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x mm	1,5	3,5	5,5	7	9,76	11,76	13,76	15,76	17,76	19,76
F_D daN	1800	1500	700	500	600	700	800	900	1000	1100
F_G daN	2900	2400	1800	800	1600	1700	1900	2000	2100	2200
N°jauge	11	12	23	24	25	26	27	28	29	30
x mm	21,76	23,76	80,20	81,20	82,20	83,20	84,20	85,20	86,20	87,20
F_D daN	1200	2300	1900	2000	2100	2200	2300	2200	2200	1800
F_G daN	1400	2400	F_R	F_R	F_R	F_R	F_R	F_R	F_R	F_R

Pour F_{D4} = 500 daN et x = 6,7 mm, nous observons l'apparition des premières microfissures qui s'initient dans le joint sous l'effet de la contrainte de cisaillement [3, 6, 11, 14, 16] au voisinage des extrêmités libres de T_1 et T_2. Lorsque l'effort de traction continue à croître les microfissures s'initient lentement vers l'extrêmité libre des tôles et plus rapidement vers le centre du recouvrement. Ce n'est que pour F = 1700 daN (x = 70,5 mm) qu'elles apparaissent près de l'autre extrêmité (x = 88 mm). Au-delà 1700 daN, elles se développent très lentement vers la droite et beaucoup plus vite vers la gauche. Enfin à partir de 1800 daN, il apparaît des microfissures à l'extrêmité d'abscisse x = 87,2 mm sous l'effet de la prépondérance des contraintes normales de décollement [15].

La figure 5 indique que lorsque F atteint 2800 daN, les microfissures sont initiées sur toute la longueur du joint. La jauge 1 est située à 1,5 mm du bord libre de la tôle T_1, notre étude se poursuit dans la région limitée par : 0 < x < 1,5 mm. Nous pourrons ainsi préciser le comportement mécanique complexe de l'échantillon dans ses parties anguleuses.

FIG 5



La zone hachurée (figure 5) représente le domaine dans lequel les microfissures s'initient progressivement pour se développer jusqu'à leur taille critique (courbe F_{Gn}). A partir de (F_{Gn}), elles se rejoignent pour former des criques qui se propagent de plus en plus rapidement au fur et à mesure que la valeur de l'effort de traction se rapproche de la valeur ultime (F_R = 3000 daN).

Il apparaît donc que les 2 extrêmités de la structure collée, sollicitée à la traction, ne se comportent pas de la même manière

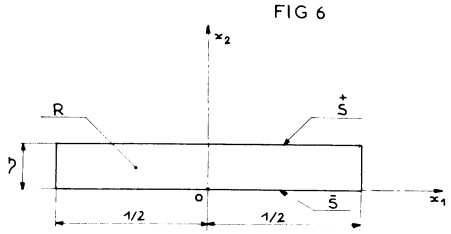
(3, § XIII, fig. XIII.9). En 1978 [3], l'auteur n'avait pas présenté le détail des travaux réalisés à l'aide des métaux testés, notamment ceux relatifs aux aciers à 0,18 % et à 0,90 % de carbone [3, § XIII.4.2, tableaux XIII.1 et XIII.2]. En effet; il fallait donner dans le cadre de cette recherche, une interprétation globale par rapport à l'ensemble du grand nombre d'échantillons testés ; nous avions choisi l'abscisse x = 25,5 mm qui correspond à x'=18,5 mm (figure 1), pour mettre en évidence, que les premières microfissures s'initiaient généralement par cisaillement, au voisinage de l'une des extrêmités (dans les cas testés).

Ce travail représente une recherche expérimentale délicate coûteuse et très longue. Il permet de se rapprocher du comportement réel de la structure testée. Parallèlement à ces expériences, nous avons développé des calculs analytiques mieux adaptés [6 à 16, 20, 22, 44] et des méthodes numériques (éléments finis) [22, 23, 24, 38, 39, 40, 41, 43]. Nous cherchons aussi à analyser le comportement mécanique du joint à l'aide d'une méthode acoustique [45]. Nos premiers résultats sont encourageants et une confrontation précise est en cours de réalisation [E.N.S.T.A./IRCHA, 45].

4 - METHODE ANALYTIQUE

4.1 - Analyse globale des résultats

FIG 6



La méthode des développements asymptotiques [8, 9, 11, 14, 15, 16] permet d'étudier l'équilibre plan d'un rectangle élastique élancé lorsque le paramètre d'élancement η est suffisamment petit (figure 6), il est établi que :

- à $O(\eta)$ près, la contrainte de cisaillement et la contrainte de décollement sont constantes selon l'épaisseur du rectangle.

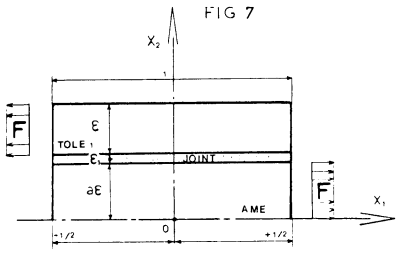
- à $O(\eta)$ près, les sauts de l'élongation longitudinale et de la courbure à la traversée du rectangle sont proportionnels aux contraintes de cisaillement et de décollement.

En appliquant cette théorie au double recouvrement (figure 7), nous avons pu mettre en évidence deux modes de fonctionnement mécanique de cet assemblage et donner une solution approchée assez loin des extrêmités du recouvrement, en tenant compte de l'élancement du montage.

L'importance des conditions à la limite est ainsi montrée : une couche limite apparaît au voisinage de chaque extrêmité.

L'étude du champ de contrainte "loin des extrêmités" est complétée par son étude au voisinage des extrêmités du recouvrement. La méthode des développements asymptotiques raccordés, dans sa variante des correcteurs, permet de mettre en évidence deux mé-

FIG 7



Cadre dimensionnel du modèle théorique

canismes de rupture concurrents au voisinage des extrêmités du corps d'épreuve. Est ainsi expliqué en particulier le phénomène classique de rupture "confinée" par cisaillement, au voisinage des extrêmités des composites obtenus par adhésion.

La figure 8 (e_j = 0,5 mm) précise les courbes représentatives des contraintes Σ_{11}, Σ_{22} et Σ_{12} en fonction de l'abscisse positive du recouvrement. De l'examen de cette figure, il ressort en particulier que la contrainte normale Σ_{11} de traction reste toujours petite vis-à-vis des deux contraintes Σ^j_{12} et Σ^j_{22} qui, elles sont de même ordre de grandeur. Par ailleurs, les contraintes Σ^j_{12} et Σ^j_{22} jouent un rôle symétrique : lorsque l'une d'entre elles est nulle, l'autre est extrêmum.

Cette remarque explique pour une large part les deux mécanismes possibles de l'entrée en régime non-linéaire pour le joint :

1) mécanisme par cisaillement du joint situé au voisinage de l'extrêmité du recouvrement ;

2) mécanisme par décollement du joint situé tout près de l'extrêmité du recouvrement.

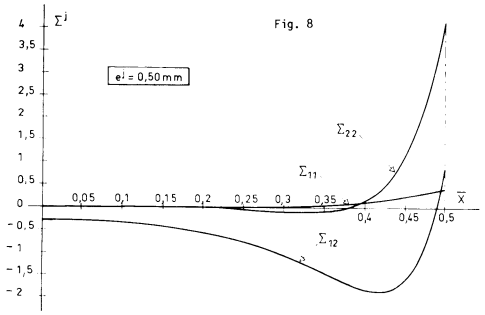


Fig. 8

En effet, si le critère de Von-Mises est adopté pour l'adhésif, la condition de validité du modèle de l'élasticité linéaire s'écrit, pour un tenseur des contraintes à composante Σ_{11} nulle :

$$\Sigma_{12}^2 + \frac{\Sigma_{22}^2}{3} \leq K$$

où K est une caractéristique mécanique du matériau constituant l'adhésif. Les deux mécanismes précédents sont donc disjoints et ce sont eux seuls qui provoquent l'entrée en régime non linéaire.

Dans cette théorie, le correcteur de contrainte est affine d'une fonction qui ne dépend pas des caractéristiques de l'assemblage, mais dont les coefficients sont liés à l'analyse de l'opérateur biharmonique. La méthode analytique élaborée considère le film de colle comme une couche où les contraintes évoluent seulement dans le sens de l'abscisse.

La modélisation proposée peut donc être résumée de la façon suivante : elle met en évidence trois zones le long du recouvrement.

Première zone : loin des extrêmités et d'une longueur égale à environ les deux tiers du recouvrement. Dans cette zone, les hypothèses de VOLKERSEN [35] sont valables, à savoir :

- Prépondérance de la contrainte normale de traction dans les substrats T et A ;

- Prépondérance de la contrainte de cisaillement dans le joint d'adhésif J, indépendante de la coordonnée d'épaisseur ;

- Proportionalité entre le glissement relatif des substrats de cette contrainte de cisaillement par l'intermédiaire du coefficient de glissement de l'adhésif.

Pour intégrer l'équation différentielle portant sur la contrainte de cisaillement qui résulte de l'application des trois hypothèses précédentes, il convient d'utiliser les conditions à la limite aux extrêmités du recouvrement, qui traduisent les hypothèses de Saint-Venant des poutres : sur chaque substrat la contrainte normale équilibre l'effort normal, qui prend des valeurs précises aux extrêmités du recouvrement. C'est dans ce domaine qu'il y a progrès sur les hypothèses de VOLKERSEN.

Deuxième zone : au voisinage des extrêmités chacune ayant une longueur d'environ 1/6 de la longueur du recouvrement. Dans cette zone, les contraintes normales de traction sont encore prépondérantes dans les substrats, mais elles sont fonction des coordonnées d'épaisseur. Dans le joint l'adhésif, les deux contraintes prépondérantes sont successivement :

- au voisinage d'une distance de l'extrêmité d'un dixième de la longueur de recouvrement, la contrainte de cisaillement qui est indépendante de la coordonnée d'épaisseur.

C'est dans cette zone qu'apparaissent les premiers mécanismes non linéaires dans le joint de l'adhésif, ainsi qu'il est expliqué dans le paragraphe II.6.2. [6].

Troisième zone : aux extrêmités de l'éprouvette chacune ayant une longueur d'environ l'épaisseur du joint. Notre étude montre en effet que le point où Σ^J_{12} est nul, est situé à une distance d'environ ε_1 de l'extrêmité [6].

Dans cette zone, la modélisation proposée n'a plus de sens et il est illégitime de la prolonger dans le domaine. Trois raisons peuvent être données à ce résultat :

- le caractère tronqué de la formule approché Σ^J_{12} rend mal compte de la nullité de la contrainte de cisaillement à l'extrêmité :

- le schéma de calcul proposé dans ce travail d'approche implique une épaisseur relative du joint $\varepsilon_1/\varepsilon$ petite par rapport à l'échelle de longueur choisie, soit ε. Ce n'est pas le cas dans cette troisième zone ;

- la présence d'un angle entre T et A implique une singularité dans la solution du problème d'élasticité obtenu lorsque ε_1 tend vers zéro. Cette solution présente un caractère non borné au sommet de l'angle, même pour des chargements F infiniment petits. Le comportement des matériaux au voisinage de ces sommets n'est certainement plus élastique linéaire, même pour de faibles chargements. Le modèle proposé est certainement loin de la réalité dans ces régions.

Pour donner toute sa valeur à la modélisation précédente, il y a lieu de pratiquer une analyse expérimentale de la distribution de contraintes dans l'éprouvette et de la confronter à l'expérience.

4.2. Résultats obtenus

La modélisation théorique prend en compte un grand nombre de paramètres qui définissent la géométrie et les propriétés des matériaux.

Nous résumons l'ensemble des résultats obtenus.

- Principales notations :

A	âme) constituant les substrats
T	tôle, couvre joint)
J	joint d'adhésif
L	longueur de recouvrement des subjectiles
l_1	largeur de l'éprouvette
e	épaisseur des éléments (*)
F	effort de traction
E	module d'Young (*)
ν	coefficient de Poisson (*)
G	coefficient de rigidité (*)
O' X' Y' Z'	repère direct orthonormé
$\varepsilon = e^T.L^{-1}$	épaisseur relative du couvre joint (**)
$\varepsilon_1 = e^J.L^{-1}$	épaisseur relative du joint J (**)
$e^A = 2\ a\ e^T$	demi-épaisseur de l'âme par rapport à l'échelle e^T (**)
$E^A = \alpha.E^T$	module d'Young relatif de l'âme A (**)
$\bar{x} = x.L^{-1}$	abscisse relative de recouvrement (**)
$E^J = E^T\ \varepsilon_1\ \varepsilon$	module d'Young relatif de l'adhésif J (**)
$\omega^2 = \frac{j}{2(1+\nu^J)}(1+\frac{1}{\alpha a})$	nombre positif
$\sigma_o = F(2\ e^T\ l_1)^{-1}$	contrainte de traction dans le couvre joint en dehors du recouvrement des substrats
$\tau_m = F(2\ L\ l_1)^{-1}$	contrainte moyenne de cisaillement par unité de surface de recouvrement
$\Sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}\ \tau_m^{-1}$	contrainte spécifique (*) (**) (α, β = 1 ou 2) déformation superficielle mesurée des tôles T
$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_m}{E}(1+\nu^T)$	déformation du cisaillement, tirée de la loi de Hooke relative au cisaillement pur dans le domaine élastique
$\bar{\varepsilon}_{L,J} = \varepsilon_{L,T}.\varepsilon_{xy}^{-1}$	déformation spécifique (**)

L placée en indice, signifie longitudinale

T placée en indice, signifie transversale

La méthode de calcul consiste dans une première étape à évaluer l'influence du film de colle sur le comportement du corps d'épreuve : à des infinitments petits précis près, cette influence est nulle lorsque le joint est balancé (a = 1) et lorsque $E^A = E^T$ ($\alpha = 1$). Dans ce cas le calcul complet est possible en utilisant la méthode des fonctions stationnaires pour résoudre l'équation biharmonique : apparaissent ainsi les potentiels de Papkovitch, qui servent de base pour les développements en série de fonctions biorthogonales [32].

La valeur approchée de Σ_{12}^J s'écrit

$$\Sigma_{12}^J(\bar{x}) = -\frac{\omega}{2}\left[\frac{\operatorname{ch}\,\omega\,\bar{x}}{\operatorname{sh}\,\omega/2} - 2\cot h\,\frac{\omega}{2}\left[s\left(-\frac{\bar{x}+1/2}{2\varepsilon}\right) + s\left(\frac{\bar{x}-1/2}{2\varepsilon}\right)\right]\right]$$

$$s(x) = e^{p_1 x}\,[0.636\cos(j_1 x) + 0.625\sin(j_1 x)].$$

On remarque que le premier terme de la contrainte de cisaillement Σ_{12}^J dans le joint est celle de Volkersen [35]. La figure 9 représente la répartition de Σ_{12}^J calculée par la théorie classique et la théorie asymptotique dans la zone d'abscisses positives du recouvrement.

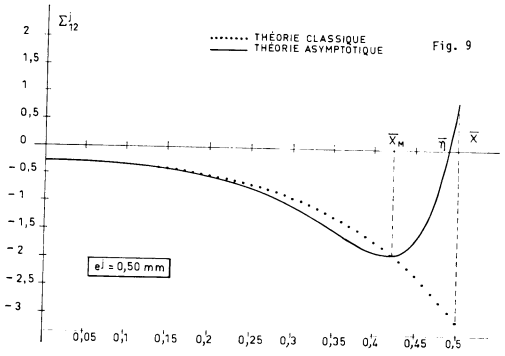


Fig. 9

. on donne la relation de Σ_{12}^J de la théorie classique :

$$\Sigma_{12}^J(\bar{x}) = \frac{-E^J}{2\,e^J\,\bar{w}\,\operatorname{sh}(\bar{w}l)}\left[\frac{2\,\operatorname{ch}[\bar{w}l(\bar{x}-1/2)]}{E^A e^A} + \frac{\operatorname{ch}\,\bar{w}l(\bar{x}+1/2)]}{E^T e^T}\right.$$

avec

$$\bar{w}^2 = \frac{E^J}{2\,e^J(1+\nu^J)}\left(\frac{2}{E^A e^A} + \frac{1}{E^T e^T}\right)$$

(*) Peut-être indicée des lettres A, T ou J.

(**) Nombre sans dimension.

Trois observations peuvent être faites sur la figure 9

1) Dans la zone médiane, le long de l'éprouvette (loin des extrêmités), les deux théories coincident très largement : l'effet d'extrêmité est négligeable dans cette zone.

2) Dans une zone proche de l'extrêmité, alors que la fonction Σ_{12}^{J} (théorie classique) décroît exponentiellement pour atteindre un extrémum à l'extrêmité du recouvrement, la fonction Σ_{12} (théorie asymptotique) passe par un minimum avant de tendre vers zéro. Cette remarque permet d'expliquer pourquoi certaines éprouvettes entrent dans le domaine non linéaire, au voisinage des extrêmités, par cisaillement du joint d'adhésif.

3) Dans la zone d'extrêmité, si la fonction Σ_{12}^{J} (théorie asymptotique) représente la réalité expérimentale mieux que la fonction Σ_{12}^{J} (théorie classique), il ne faut pas prêter à Σ_{12} (théorie asymptotique) plus de valeur qu'elle n'en a. En effet, deux remarques viennent limiter la validité du résultat :

a) la troncature volontaire au premier terme effectuée dans le calcul [15] rend illusoire la valeur approchée de Σ_{12} (théorie asymptotique) dans la zone $\bar{x} \in (\eta, 1/2)$;

b) la présence d'une singularité angulaire aux extrêmités du recouvrement donne au tenseur des contraintes le caractère de fonction non bornée.

.Calcul de la contrainte de décollement et de la contrainte normale dans le joint J

C'est un des points essentiels de la modélisation proposée. En effet, la couche limite due aux conditions à la limite d'ordre ε portant sur la contrainte de cisaillement, implique des contraintes normales et de décollement d'ordre ε, qui n'interviennent en fait que dans la couche limite.

Le calcul montre [6] que l'entrée dans le domaine non linéaire de l'éprouvette a lieu au voisinage des extrêmités, ou même à l'extrêmité, sous l'action complexe des trois contraintes Σ_{11}, Σ_{22} et Σ_{12}. L'intérêt du calcul des contraintes correcteur est donc évident.

En explicitant, à partir de la fonction d'Airy, il vient par dérivation[6] :

$$\Sigma_{22}^{J}(\bar{x}) = \omega \coth \frac{\omega}{2} \left[D\left(-\frac{\bar{x} + 1/2}{2\varepsilon}\right) + D\left(\frac{\bar{x} - 1/2}{2\varepsilon}\right) \right]$$

$$D(x) = e^{l_1 x}\left[0.672 \cos(j_1 x) + 0.278 \sin(j_1 x)\right]$$

de même :

$$\Sigma_{11}^{J}(\bar{x}) = -\omega \coth \frac{\omega}{2} \left[T\left(-\frac{\bar{x} + 1/2}{2\varepsilon}\right) + T\left(\frac{\bar{x} - 1/2}{2\varepsilon}\right) \right]$$

$$T(x) = \frac{e^{l_1 x}}{11.4}\ 0.889 \sin(j_1 x) - 0.709 \cos(j_1 x)$$

.Calcul de la contrainte normale de traction, et des déformations longitudinales et transversales dans les tôles

Les données expérimentales portent sur les déformations longitudinales superficielles des tôles T ; c'est pourquoi il convient de déterminer le champ de contraintes dans le domaine T et plus particulièrement la contrainte normale de traction :

$$\Sigma^{T}_{11}(\bar{x}) = (2\,\varepsilon^{-1})\,[1 - \frac{\operatorname{sh}\,\omega\,\bar{x}}{\operatorname{sh}\,\omega/2} + \omega\,\varepsilon\,\coth\frac{\omega}{2}[C(-\frac{\bar{x}+1/2}{2\varepsilon}) + C(\frac{\bar{x}-1/2}{2\varepsilon})]]$$

avec :

$$C(x) = \frac{e^{1x}}{5.7}\,[0.89\cos(j_1 x) - 17.4(j_1 x)]$$

Pour déterminer les déformations superficielles longitudinales et transversales des tôles, il convient d'utiliser dans le domaine élastique la loi de Hooke avec l'hypothèse de contrainte plane et a = α = 1. Les déformations superficielles spécifiques $\bar{\varepsilon}_{L,T}$ longitudinales ou transversales dans les tôles seront prises égales à :

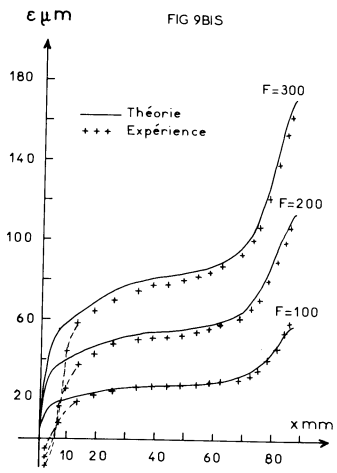
$$\bar{\varepsilon}_L(\bar{x}) = [2\varepsilon(1+\nu^T)^{-1}][1 - \frac{\operatorname{sh}\,\omega\,\bar{x}}{\operatorname{sh}\,\omega/2} + \omega\varepsilon\,\coth\frac{\omega}{2}[C(-\frac{\bar{x}+1/2}{2\varepsilon}) + C(\frac{\bar{x}-1/2}{2\varepsilon})]]$$

$$\bar{\varepsilon}_T(\bar{x}) = -\nu^T\,\bar{\varepsilon}_L(\bar{x}) \qquad \text{(relation 4.2)}$$

4.3 - Confrontation expérience-théorie

Nous comparons les déformations relatives calculées à partir de la relation 4.2, à celles déterminées expérimentalement par extensométrie à jauges électriques. Nous observons (figure 9 bis) une bonne adéquation de la théorie à l'expérience lorsque x varie de 10 à 88 mm. A l'extrêmité du bord libre des tôles T_1 et T_2 (0 < x < 10 mm) l'inadéquation des valeurs calculées aux valeurs mesurées est apparente. Par conséquent les potentiels de Paplovitch qui servent de base pour les développements en série des fonctions biorthogonales permettent d'obtenir une bonne précision du comportement mécanique au voisinage de l'extrêmité d'abscisse x = 88 mm.

FIG 9BIS

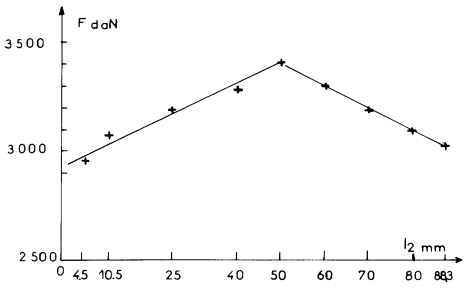


Nous avons déjà montré expérimentalement qu'il n'existait pas de symétrie du comportement physique du corps d'épreuve (figure 4.1 et figure 4.2, [3], § XIII), il est donc tout à fait normal que la relation symétrique 4.2 traduise mal cette propriété. En effet, dans une première étape A. RIGOLOT a adapté le calcul dans le cas où la tôle est sollicitée directement à la traction (x = 88 mm) et transmet ensuite la contrainte au joint adhésif ; dans cette zone l'âme A reçoit la sollicitation par l'intermédiaire du joint [3, § XIII]. Dans une deuxième étape le calcul a été adapté à l'autre extrêmité (0 < x < 10 mm), [44, 46] : dans cette région la contrainte est transmise au joint par l'âme qui ensuite la transmet aux bords libres des couvre-joints T_1 et T_2 [3, § XIII]. La méthode asymptotique mise en oeuvre est en cours de développement, elle utilise la technique d'étude des singularités en variables complexes mise au point par MILNE-THOMSON en 1960 [47]. La fonction de KOLOSSOV permet de mettre en évidence, au voisinage des régions angulaires concaves ou convexes la nature différente des phénomènes singuliers mis en évidence expérimentalement.

5 - ETUDE EXPERIMENTALE DU DOUBLE RECOUVREMENT BISEAUTE (DRB)

Les biseaux sont caractérisés par leur longueur l_2 (figure 2), l'angle α du couteau est donc défini par $\sin \alpha = e_T/l_2$ (e_T épaisseur des tôles T_1 et T_2). Nous avons fait varier l_2 entre les 2 valeurs limites l_2 = 4,5 (D.R.N.B., α = 90 °) et l_2 = 88,3 mm qui correspond au biseautage des tôles sur toute la longueur du recouvrement (l = 88 mm, $\text{tg}\alpha = \frac{e_T}{l}$). L'étude en cours de réalisation permettra de préciser le comportement mécanique d'un tel assemblage pour des angles α supérieurs à 90° et des âmes biseautées à leur extrêmité libre (extrêmité apposée au bord libre des tôles T_1 et T_2. Dans ce travail, nous étudions le comportement mécanique du double recouvrement biseauté lorsque l'angle α est aigu.

FIG 10



La figure 10 et le tableau 2 montrent que pour la géométrie décrite figure 2 (même longueur de recouvrement, (l = 88 mm), même adhésif (EPONAL 317), même substrat (XC 18), même état de surface des subjectiles (R_t = 7 µm), mêmes conditions expérimentales) l'assemblage possède la résistance maximale à la rupture (F_R = 3500 daN) pour la valeur optimale l_2 = 50 mm. Sa résistance est minimale pour l_2 = 4,5 mm (α = 90°, DRNB, F_R = 2950 daN).

Notons que l'étude expérimentale au voisinage des extrêmités n'a été affinée que pour les deux valeurs l_2 = 4,5 mm (α = 90°) et l_2 = 10,5 mm (cas du chaufrein couramment pratiqué pour atténuer le maximum de la contrainte de cisaillement près du bord libre du couvre joint).

Il apparaît (figure 11) que le chaufrein engendre une initiation très précoce des microfissures (F_D = 200 daN) mais confère à l'extrêmité du joint un état de contrainte tel que la fissure ne se propage que très lentement vers le bord libre des couteaux T_1 et T_2.

A l'autre extrêmité, cette initiation se produit beaucoup plus tard (F_D = 2000 daN, x = 66 mm) que pour le double recouvrement non biseauté (figure 5, α = 90°, F_D = 1700 daN, x = 70,5 mm).

Finalement, il en résulte un accroissement significatif de la tenue mécanique puisque la courbe de début de propagation des criques (F_G) indique que celles-ci apparaissent globalement plus tard sur la plus grande longueur du recouvrement.

D'une manière générale, l'effet de la diminution de α, accentue cette tendance jusqu'à la valeur optimale de l_2 (l_2 = 50 mm, figure 12).

Ainsi, le domaine de propagation rapide des criques disparaît progressivement quand l_2 croît de 4,5 mm (D.R.N.B.) jusqu'à 50 mm. Nous n'observons plus de courbes $F = F(\varepsilon)$ du type de celles représentées à la figure 4.2 (changement du signe de $\frac{dF}{d\varepsilon}$ pour F_{Gn}). Il en résulte que le comportement global du corps

d'épreuve devient élastique jusqu'au voisinage de la rupture (F_G) = (F_R)).

TABLEAU 2

N° D.R.B.	l_2 mm	N° Essais - FdaN				$\bar{F}_R$
		1	2	3	4	
1	4,5	2900*	2900*	3000*	3000*	2950
2	10,5	3100	3000	3100	-	3066
3	25	3200	3150	-	-	3175
4	40	3250*	3300	-	-	3275
5	50	3450	3350	3400*	3400*	3400
6	60	3300	-	-	-	3300
7	70	3230	3150*	-	-	3190
8	80	3100	-	-	-	3100
9	88,3	3000*	3100*	3050	-	3050

Les essais repérés par * représentent des corps d'épreuve instrumentés de jauges électriques d'extensométrie à trame pelliculaire.

Le seuil d'initiation des premières microfissures pour la structure optimisée (l_2 = 50 mm) se situe alors à l'opposé des bords libres des tôles (F_D = 1400 daN, x = 70 mm), elles apparaissent beaucoup plus tard près de l'extrémité des couteaux (F_D = 2300 daN, x = 6 mm). Lorsque l_2 = 50 mm et pour $0 < x < 6$ mm, nos premières observations semblent confirmer que l'extrémité du biseau s'adapte aux contraintes qui deviennent vraisemblablement très rapidement importantes dans ces zones d'extrémité.

Enfin lorsque l_2 augmente au-delà de la valeur optimale la résistance mécanique à la rupture du modèle décroît, les premières microfissures continuent d'apparaître au voisinage de l'extrémité libre de l'âme A, mais progressivement elles s'initient beaucoup plus tôt dans la zone centrale (figure 13), il en résulte une diminution de la tenue mécanique aux sollicitations de cisaillement par traction.

FIG 11

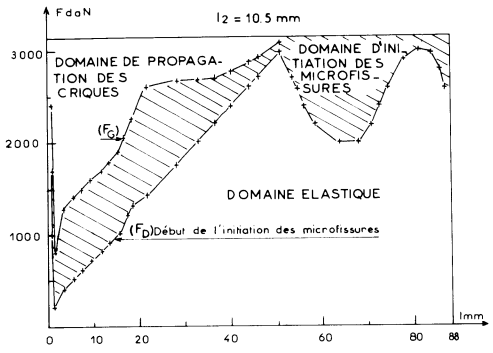
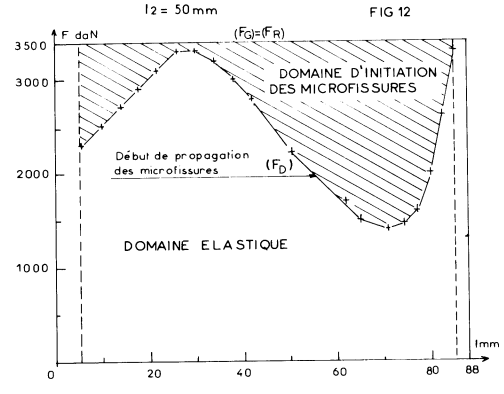


FIG 12

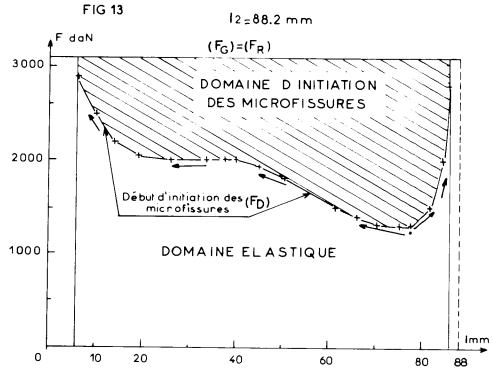


6 - CONCLUSION

Notre étude montre que le comportement mécanique d'une structure collée à double recouvrement symétrique est très complexe. La connaissance du seuil d'initiation des premières microfissures dans un échantillon composite ou collé est une donnée importante. La durée de vie de l'assemblage dépend de ses propriétés initiales et il est indispensable de bien déterminer le début de l'endommagement sous sollicitation simple statique pour ensuite étudier son évolution dans le domaine élastique ou dans son voisinage lorsque le chargement devient plus complexe (fatigue, chocs, etc ...) et les conditions d'environnement plus sévères (pression, température, humidité, etc ...). L'étude expérimentale relative au double recouvrement biseauté permet de montrer qu'il existe une valeur optimale de l_2 qui confère au corps d'épreuve la résistance maximale. Elle permet aussi de mettre en évidence le mécanisme de l'initiation et de la propagation des microfissures dans le joint adhésif fragile en fonction de l'angle α du biseau. Ainsi, le travail présenté peut servir de point de départ pour établir une modélisation des phénomènes observés.

D'une façon générale, ce type de recherche ne peut aboutir que si l'expérimentateur et le théoricien progressent en étroite collaboration. L'expérimentation et les calculs sont délicats, ils exigent des recherches longues et fastidieuses qui demandent une grande expérience partagée. Les résultats étant établis, ils sont facilement et rapidement applicables en utilisant le micro-ordinateur.

FIG 13


l2=88.2 mm
F daN
(FG)=(FR)
3000
2000
1000
DOMAINE D INITIATION
DES MICROFISSURES
Début d'initiation des microfissures (FD)
DOMAINE ELASTIQUE
l mm
0
10
20
40
60
80
88

BIBLIOGRAPHIE

[1] CAUSSE J.P. - Les matériaux - Rapport au Ministre de la Recherche et de l'Industrie - 30 Juin 1982.

[2] GILIBERT Y. - L'Usine Nouvelle - N° 28, 14 Juillet 1983, participation à un dossier concernant le "Collage Industriel, les promesses de la Recherche", réalisé par COUE D.

[3] a)GILIBERT Y. - Contribution à l'étude de l'adhésivité de matériaux collés par l'intermédiaire de résines époxydiques. Thèse de Doctorat d'Etat ès-sciences physiques, Université Reims 1978.

b)GILIBERT Y. - Contribution à l'étude de l'adhésivité de matériaux collés par l'intermédiaire de résines époxydiques - Rapport de Recherche ENSTA, N° 180, Janvier 1984.

c)GILIBERT Y., COLLOT C. - Influence de l'épaisseur du joint d'adhésif sur la résistance mécanique de l'acier collé par l'intermédiaire d'une résine époxyde - C.R. Acad. Sc. Paris, T284 (28 Février 1977) Série B-155.

[4] a)DELMAS J.P. - Contribution à l'étude des collages structuraux application au mortier plaqué - Doctorat de 3ème Cycle, Université Reims 1979.

b)GILIBERT Y. - voir [3], § II et § XIII, tableau XIII.2.

c)DELMAS J.P. et al. - Etude expérimentale de la rupture d'assemblages métalliques collés à double recouvrement cisaillés par traction - Cahiers du Groupe Français de Rhéologie - Tome V, Numéro 4, Juillet 1980.

[5] a)LUHOWIAK W. - Etude de la résistance au choc d'assemblages collés par l'intermédiaire d'une résine époxydique - Doctorat de 3ème Cycle, Université Reims 1979.

b)voir aussi [3] , § II et § XIII, tableau XIII.2

c)PAVAN A., LUHOWIAK W., RIMLINGER L. - Sur la détermination de la résistance à la fatigue d'organes mécaniques en fonction des principaux facteurs influents - Revue Française de Mécanique, N° 83, 1982.

[6] KOMIHA M.A. - Analyse théorique et expérimentale de l'influence de l'épaisseur du film de colle, dans un assemblage collé, à double recouvrement Doctorat de 3ème cycle, PARIS 6 - ENSTA.LME/GSC, 1983.

[7] RIGOLOT A. - Sur une théorie asymptotique des poutres droites - Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Mathématiques, Université PARIS 6, 1976.

[8] GILIBERT Y., RIGOLOT A., - Analyse asymptotique des assemblages-collés à double-recouvrement sollicités au cisaillement en traction - J.Mech. Appl. Vol. 3, n° 3, pp. 341-372, 1978.

[9] GILIBERT Y., RIGOLOT A., - Analyse asymptotique des assemblages-collés à double recouvrement sollicités au cisaillement en traction - C.R. Acad. des Sc. Paris, Mécanique des Solides, t.288 pp, Série B 387-390 (25 Juin 1979).

[10] GILIBERT Y., RIGOLOT A. - Théorie élastique des assemblages collés à double recouvrement - Quatrième C.F. de Mécanique, pp. 301-302, Nancy 1979.

[11] RIGOLOT A. - Application de la méthode des développements asymptotiques raccordés au calcul des effets d'extrêmités dans un composite plan collé - 2ème C.I. du GAMNI, 2 au 7 Décembre, pp. 245-259, 1980.

[12] GILIBERT Y., RIGOLOT A. - Equilibre-plan d'un composite obtenu par collage - Annales de l'I.T.B.T.P., N° 408, série : théories et méthodes de calcul 255, 1982.

[13] RIGOLOT A. - Equilibre élastique d'un composite plan-collé - Journ. de Mécan. Théorique et Appliquée. Vol. 1, N° 5, p. 799-839, 1982.

[14] GILIBERT Y., KOMIHA M.A., RIGOLOT A., VERCHERY G. - Analyse théorique et expérimentale, de l'influence de l'épaisseur du film de colle, dans un assemblage collé à double recouvrement - Communication présentée à l'occasion des Journées Universitaires de Génie Civil 26 et 27 Avril 1984, E.N.S.E.T. CACHAN. Publication de l'Association Universitaire de Génie Civil (C.R. A.U.G.C. 1984).

[15] GILIBERT Y., KOMIHA M.A., RIGOLOT A. - Analyse théorique de l'influence de l'épaisseur du film de colle dans un assemblage collé à double recouvrement - Annales de l'I.T.B.T.P., N° 425, série : théories et méthodes de calcul, pp. 50-67, 1984.

[16] GILIBERT Y., KOMIHA M.A., RIGOLOT A. - Théorie élastique de l'assemblage collé à double recouvrement : utilisation de la méthode de développements asymptotiques raccordés au voisinage des extrêmités. Rapport de Recherche E.N.S.T.A., N° 189, 65 pages, Juillet 1984.

[17] BERNASCONI J., GILIBERT Y. - Méthode de tracé automatique des courbes de déformations et de contraintes engendrées à la surface d'éprouvettes de traction réalisées en acier ou en béton plaqué - Note de recherche E.N.S.T.A., N° 053, Décembre 1983.

[18] GILIBERT Y., VERCHERY G. - Influence of surface roughness mechanical properties of joints - International symposium on adhesive joints : formation, caracteristics and testing, Sept. 13-16, 1982 (Kansas City)

[19] GILIBERT Y., VERCHERY G. - Influence of surface roughness on mechanical properties of joints - Title of book : ADHESIVE JOINTS : Formation, characteristics and Testing, pp. 69-84, 1984. PLENUM PUBLISHING CORPORATION.

[20] GILIBERT Y., VERCHERY G. - Mise au point d'adhésifs hautes performances pour applications en aéronautique, électronique et mécanique - Rapport fin de contrat D.G.R.S.T., REF. IRCHA D.6456 (Décision d'aide N° 81 P1 365 du 21 Juillet 1981). Partie E.N.S.T.A. : REF. ENSTA - YG/Sm, ARMINES, 1984. (PARTIE "IRCHA" par FOURNIER A.M., MOREL E., BOULONNAIS D., REF C 70-DB/JC).

[21] GILIBERT Y., LE MEHAUTE A., VERCHERY G. - Etude d'un capteur électrochimique de rugosité - Action concertée capteur - M.R.I. Décision N° 83 T 0610, 27 Septembre 1983 (C.G.E. Marcoussis/E.N.S.T.A. Palaiseau/ARMINES Paris).

[22] E.N.S.T.A./E.N.S.M.S.E./ARMINES - Recherche de l'amélioration des assemblages collés sollicités à la traction - M.R.I. Décision d'aide N° 82 S 0962 du 25 Novembre 1982 (travaux en cours), Laboratoire de Mécanique et Energétique, Groupe "Composites et Collage", 91120 PALAISEAU et Ecole des Mines de Saint-Etienne.

[23] S. AIVAZ-ZADEH MOKARI - Eléments finis d'interface. Application aux structures stratifiées - JNC4, comptes rendus des quatrièmes journées nationales sur les composites, 11-13 Sept., Paris, 1984 (Editions PLURALIS, 24 rue Descartes, 75005 PARIS).

[24] S. AIVAZ-ZADEH MOKARI - Elément fini d'interface. Applications aux assemblages collés et structures stratifiées - Thèse de Docteur-Ingénieur, U.T.C./E.N.S.T.A./E.N.S.M.S.E., 1984.

[25] PIERRET O. - Les traitements de surface mécaniques et chimiques pour le collage des tôles en alliages légers dans la construction aéronautique - Dossier d'option Matériaux, 2ème année, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, effectué sous la responsabilité de GILIBERT Y.

[26] PHANG C., LEROOY J.F., GOUBAULT P. - Poutres stratifiées et collées en flexion - Rapport de projet d'enseignement par la recherche, sous la responsabilité de Mrs GILIBERT Y. et VERCHERY G., Laboratoire de Mécanique et Energétique, Groupe G.S.C., ENSTA Palaiseau, 1982.

[27] EL SHAIKH M.S.M.R. - Modélisation, calcul et identification du comportement mécanique de structures composites et sandwiches - Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Physiques, Université PARIS VI/ENSTA/LME/GCC, 1984.

[28] KHADHRAOUI-LATTRECHE Malika - Etude de l'endommagement des composites Graphite/Epoxy soumis à des chargements quasi-statiques répétés en cisaillement - Thèse de docteur-ingénieur. I.N.S.T.N./E.N.S.T.A./L.M.E./G.C.C., 1984.

[29] CHEVESTRIER E.*, GILIBERT Y.
*T.A.E.P., Techniques Avancées Etudes et Projets JUNIOR ENTREPRISE, E.N.S.T.A., 32 Boulevard Victor, 75015 PARIS.
Adaptation d'une méthode de tracé automatique des courbes de déformations et de contraintes engendrées à la surface de composites plans collés sur micro-ordinateur (Tektronix et H.P.). - E.N.S.T.A., L.M.E., Groupe Composites et Collage, Juillet-Août 1984, Rapport interne J.A.E.P./E.N.S.T.A./L.M.E./G.C.C.

[30] SAUBESTRE V., PIERRE D. - Etude mécanique d'un ski de fond. Analyse des déformations et des contraintes. Option C2 "Tenue des Structures", Ecole Polytechnique, 91128 PALAISEAU CEDEX. - Rapport de stage d'option, effectué sous la Direction de G. VERCHERY et Y. GILIBERT (partie expérimentale) à l'E.N.S.T.A. de Mars à Juillet 1982.

[31] ATEIA I. - Etude de poutres stratifiées et collées. - Rapport de D.E.A., E.N.S.T.A./L.M.E./G.S.C., 91120 PALAISEAU, Université PARIS 6, 1983.

[32] RIGOLOT A. - Régularisation de l'effet Saint Venant dans une structure plane, composite, collée, soumise à des sollicitations de traction. Euromech Colloquium 1984 : "The inclusion of local effects in the analysis of structures" - 11/14 Septembre, CACHAN, 1984.

[33] GILIBERT Y., RICOLOT A. - Assemblage par adhésion de deux tiges cylindriques sollicitées en traction - Mechanics Research Communications, Vol. 8(5), pp. 269-274, 1981 (Pergamon Press Ltd).

[34] GILIBERT Y., RIGOLOT A. - Assemblage par adhésion de tubes creux sollicités en traction (à paraître en 1984, Théorie et Expérimentation).

[35] VOLKERSEN D. - Recherche sur la théorie des assemblages collés - Construction métallique N° 4, pp. 3-13, 1965.

[36] GILIBERT Y. et AL - Etude de la résistance mécanique de plaques d'acier collées en fonction de la rugosité des subjectiles et de l'épaisseur d'adhésif - R.I.L.E.M. Matériaux et Constructions - Vol. 9 - N° 54 - pp. 419-423 - 1976.

[37] GILIBERT Y., MILLER H., GAUTRON G. - Adaptation d'une perceuse-fraiseuse à commande numérique pour la détermination précise de l'emplacement d'extensomètres électriques fixés sur les tôles d'éprouvettes en béton plaqué - Annales Université A.R.E.R.S., Reims 1976, T. 14 pages 17 à 27.

[38] DURANDET E. - Rigidité élémentaire pour les problèmes axisymétriques anisotropes. Mémoire de D.E.A., E.N.S.T.A./L.M.E./G.S.C., Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1983.

[39] MARLATS J.L. - Une méthode pour l'approximation des dérivées aux noeuds d'un maillage quadrilatéral plan - Thèse C.N.A.M., Spécialité mécanique industrielle, C.N.A.M./E.N.S.T.A./L.M.E./G.S.C., Paris, 1983.

[40] RAMAHEFARISON E. - Programme de calcul de structures par éléments finis sur micro-ordinateurs ; application aux composites - Thèse de Docteur Ingénieur, I.N.S.T.N./E.N.S.T.A./L.M.E./G.S.C., Paris 1983.

[41] MAZAHERI A. - Contribution à l'étude des techniques d'un générateur de maillage interactif bidimensionnel sur micro-ordinateur - Thèse de docteur-ingénieur - I.N.S.T.N./E.N.S.T.A./L.M.E./G.S.C., Paris, 1983.

[42] CHARLES J.P., JEANNIN Ph. - Rapport, enseignement par la recherche (élèves de 3ème année, E.N.S.T.A./L.M.E./G.C.C.), 1984-1985).

[43] MONET L. - Analyse du rapport CAUSSE - Dossier d'option Matériaux, 2ème Année, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, effectué sous la responsabilité de GILIBERT Y.

[44] GILIBERT Y., RIGOLOT A. - Conception optimale des composites plans collés : analyse expérimentale et modélisation de la "dissymétrie" des contraintes aux extrêmités d'un assemblage balancé. A.M.A.C. "Le calcul des structures en matériaux composites", Saint-Etienne, 15 Novembre 1984.

[45] I.R.C.H.A., Service Matériaux Plastiques, Centre de Recherche, 91710 VERT-LE-PETIT.

[46] GILIBERT Y., RIGOLOT A. - Calcul et mesure des contraintes dans les assemblages composites collés - Communication présentée à la Journée Régionale : "Science et Défense", Picardie et Champagne-Ardennes sur le Thème : "Recherche Scientifique orientée et transferts de technologie vers les entreprises dans le domaine de la Mécanique", Compiègne U.T.C., 20 Novembre 1984.

[47] MILNE-THOMSON L.M. - Plane élastic systems - Springer, Berlin, 1960.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 189-198

Etude expérimentale et théorique de l'orientation de fibres dans des écoulements de polymères chargés

Experimental and theoretical study of fiber orientation in reinforced plastics flows

M. VINCENT, J.F. AGASSANT

Centre de Mise en Forme des Matériaux
Equipe de Recherche associée au CNRS n° 837
Ecole des Mines de Paris
Sophia Antipolis, 06565 Valbonne, France

RESUME

Le mouvement des fibres courtes dans un fluide modèle et dans un polymère fondu est étudié dans des écoulements de cisaillement simple et dans des écoulements où coexistent cisaillement et élongation.
Les résultats expérimentaux sont confrontés avec succès à des calculs d'orientation effectués dans ces différents types d'écoulement.
La démarche expérimentale et théorique est enfin appliquée au cas de l'injection de thermoplastique renforcé.

ABSTRACT

The motion of short fibers in corn syrup and in molten polymers is studied for simple shear flows and for both shearing and elongationnal flows.
The experimental results are successfully compared with the computation of the fiber motion in these different kinds of flows.
This experimental and theoretical approach is then applied to the injection of reinforced thermoplastics.

1 - INTRODUCTION

Les propriétés d'emploi des matières plastisques chargées de fibres (propriétés mécaniques, retrait, etc...) peuvent être très anisotropes. Cette anisotropie est à relier à l'hétérogénéité d'orientation des fibres de verre créée lors de l'écoulement du système polymère-fibre.

Notre objectif a été de comprendre et de prevoir les mécanismes d'orientation de fibres de verre courtes. Nous nous sommes tout d'abord intéressés à des écoulements simples (cisaillement) de fluides modèles (sirop de maïs avec une seule fibre) et de polymères chargés de fibres de verre (Polyamide 6.6 chargé à 30 % de

fibres de verre). Nous avons ensuite abordé le cas d'écoulements plus complexes (écoulement à la fois de cisaillement et d'élongation) et notamment le cas très important industriellement de l'injection du système polymère-fibre dans un moule.

2 - EXPERIMENTATION

2.1. Cisaillement simple

2.1.1. Visualisation avec sirop de maïs

Le sirop de maïs est un fluide transparent newtonien à la température ambiante, de viscosité égale à 150 Pℓ. La rotation du cylindre central crée un écoulement de cisaillement simple dans le liquide contenu dans l'entrefer (figure 1). Le mouvement de fibres de cuivre (longueur 1 à 2 mm ; diamètre : 0,1 à 0,2 mm) est observé à travers le fond de l'appareillage qui est transparent.

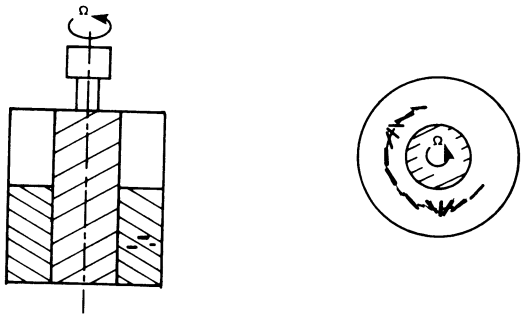


Figure 1. Ecoulement de Couette

Les fibres se déplacent le long d'un cercle, en étant le plus souvent tangentes à ce cercle. Elles décrivent périodiquement une rotation sur elles-mêmes de 180°, mais la durée de cette rotation est beaucoup plus courte que l'intervalle de temps qui sépare deux rotations successives.

Nous constatons que la période de rotation est bien définie et fonction du taux de cisaillement existant dans le fluide, et de l'allongement de la fibre (rapport longueur sur diamètre). (figure 2)

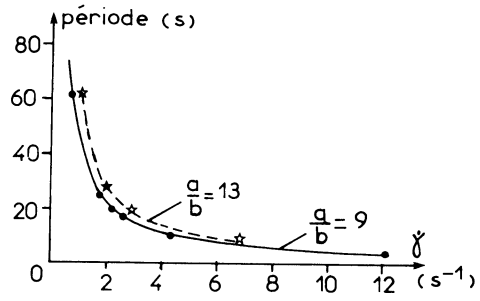


Figure 2. Evolution de la période de rotation de la fibre avec le taux de cisaillement

2.1.2. Polyamide renforcé

Nous avons utilisé un polyamide chargé à 30 % en poids en fibres de verre (Polyamide Technyl A216 V30 de la Société Rhône-Poulenc) cisaillé dans la zone de Couette d'un Rhéoplast (Villemaire et Agassant /1/). Après refroidissement de l'appareil et prélèvement du polymère solidifié dans la zone de Couette, nous pouvons observer l'orientation des fibres (longueur moyenne : 300 µm, diamètre : 10 µm) par microscopie optique par réflexion (figure 3).

Les fibres appartiennent le plus souvent au plan (θ,z) (figure 3b) sans orientation particulière dans ce plan. Leurs projections dans le plan (r,θ) sont préférentiellement mais pas parfaitement orientées dans la direction de l'écoulement (direction θ). Ces observations sont en accord avec les précédentes : à un instant donné, celui du figeage du polymère, les fibres sont le plus souvent tangentes au cercle qu'elles décrivent.

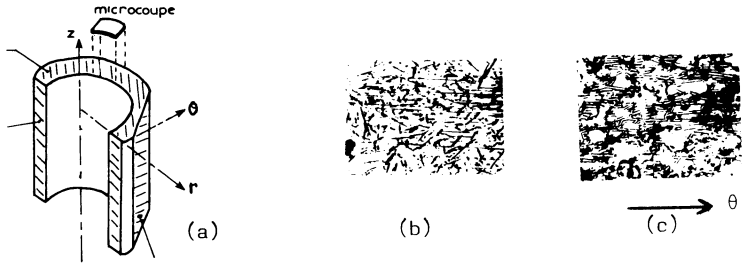


Figure 3. Zone de Couette (3a). Orientation dans le plan (θ,z) (3b) et dans le plan (r,θ) (3c)

2.2. Ecoulements où coéxistent cisaillement et élongation

En fait, dans la majeure partie des écoulements de polymère fondu, coéxistent cisaillement et élongation.

2.2.1. Visualisation avec sirop de maïs

Nous avons observé le mouvement de fibres de cuivre dans du sirop de maïs s'écoulant dans un dispositif transparent comprenant succesivement des plaques parallèles, divergentes, parallèles, convergentes et enfin parallèles (figure 4).

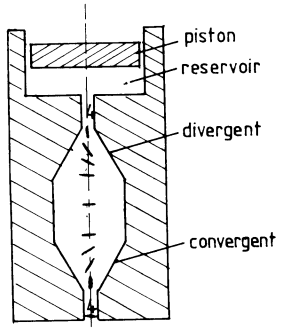


Figure 4. Dispositif transparent divergent-convergent

Les fibres sont orientées sensiblement parallèlement à l'axe de l'écoulement à l'entrée de la zone divergente, leur centre de gravité étant généralement assez proche de cet axe. Elles tournent ensuite progressivement pour s'orienter le plus souvent, mais pas toujours, perpendiculairement à l'écoulement à la fin de la zone

divergente. Elles retrouvent une orientation parallèle aux lignes d'écoulement à la fin de la zone convergente.

Si l'on considère les fibres dont le centre de gravité se déplace sur l'axe de l'écoulement, on peut considérer qu'elles sont soumises essentiellement à un écoulement purement élongationnel (en fait, ceci n'est vrai que lorsqu'elles sont alignées avec l'axe ; lorsqu'elles tournent, le taux de cisaillement dans le fluide n'est plus nul, mais vues les dimensions de la fibre, il est beaucoup plus petit que le taux d'élongation, ce qui justifie l'approximation), et on peut donc conclure qu'un taux d'élongation négatif (cas du divergent) conduit à une orientation à 90° de la direction de l'écoulement, alors qu'un taux d'élongation positif (convergent) conduit à une orientation parallèle à cette direction.

2.2.2. Observation d'un divergent moulé en polymère

Le polymère fondu dans une unité de plastification par vis est forcé dans le moule à travers un canal divergent de section circulaire appelé carotte. L'observation microscopique des fibres de verre dans le polyamide après refroidissement met en évidence deux types d'orientation (figure 5). Près de l'axe, la plupart des fibres sont perpendiculaires à cet axe ; en dehors, elles sont orientées dans la direction de l'écoulement.

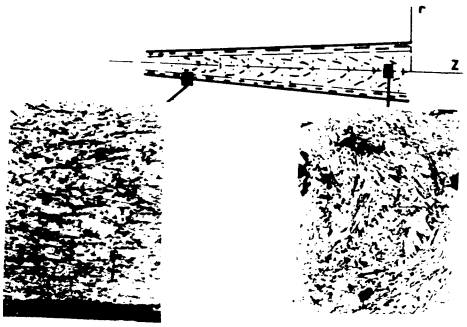


Figure 5. Observation de la carotte moulée en polyamide

Il apparait donc que dans un écoulement où coexistent cisaillement et élongation, la fibre présente un comportement de type élongationnel dans les zones où l'élongation est prépondérante et un comportement de type cisaillement ailleurs.

3 - CALCULS

Nous avons fait les hypothèses suivantes :
- les interactions entre particules sont négligées
- le fluide est newtonien
- le profil de vitesse est seulement localement perturbé par la présence des particules
- les particules sont supposées de forme sphéroïdales.

On peut alors utiliser les équations d'orientation obtenues par Jeffery /2/ :

$$(b^2 + c^2)\, W_1 = b^2(\nu + f) + c^2(\nu - f)$$
$$(c^2 + a^2)\, W_2 = c^2(\mu + g) + a^2(\mu - g)$$
$$(a^2 + b^2)\, W_3 = a^2(\lambda + h) + b^2(\lambda - h)$$

avec : a,b,c : demi-axes de l'ellipsoïde
W_1, W_2, W_3 : composantes du vecteur rotation de l'ellipsoïde
$\lambda, \mu, \nu, d, e, k, f, g, h$: composantes des tenseurs rotation $[\Omega]$ et vitesse de déformation $[\dot{\varepsilon}]$ dans le repère lié à la particule :

$$\dot{\varepsilon} = \begin{bmatrix} d & h & g \\ h & e & f \\ g & f & k \end{bmatrix} \qquad \Omega = \begin{bmatrix} o & -\lambda & \mu \\ \lambda & o & -\nu \\ -\mu & \nu & o \end{bmatrix}$$

3.1. Ecoulement de cisaillement simple

Les calculs montrent que le mouvement de rotation de la fibre sur elle-même est périodique, de période :

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\gamma}} \frac{a^2+b^2}{ab} \qquad /2/$$

où $\dot{\gamma}$ est le taux de cisaillement du fluide qui environne la fibre, a et b sont les grand axe et petit axe de la particule (assimilés aux longueur et diamètre de la fibre). La figure 6 montre que la fibre est le plus souvent parallèle aux lignes d'écoulement, ce qui est conforme aux observations.

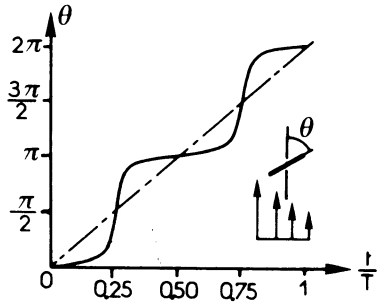


Figure 6. Evolution de l'orientation avec le temps en cisaillement simple

Nous constatons sur la figure 7 que l'accord entre la période calculée et la période mesurée dans le dispositif de Couette avec sirop de maïs est correct. Il est d'autant meilleur que l'allongement est petit.

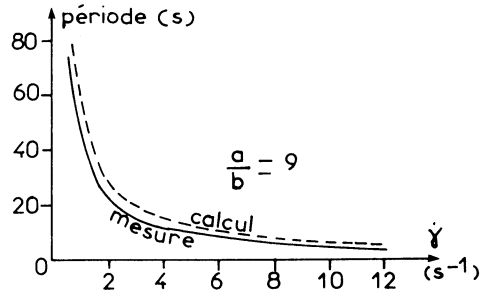


Figure 7. Comparaison calcul-expérience en écoulement de Couette

3.2. Ecoulement purement élongationnel

Les calculs montrent (Taskerman-Krozer et Ziabicki /3/) que la fibre tend vers une position d'équilibre stable parallèle aux lignes d'écoulement lorsque le taux d'élongation $\dot{\alpha}$ est positif, et perpendiculaire lorsqu'il est négatif. L'évolution de l'angle θ entre la fibre et la direction de l'écoulement avec le temps est donné par :

$$tg\theta = C \exp\left(-\frac{3}{2}\ \dot{\alpha}\ \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\ t\right)$$

(C : constante d'intégration dépendant de l'orientation initiale de la fibre).

3.3. Ecoulement mixte de cisaillement et d'élongation

Dans un canal divergent ou convergent bidimensionnel ou axisymétrique du type de ceux utilisés dans les expérimentations, les calculs montrent qu'il existe deux zones où le comportement de la fibre est différent. L'angle βo qui sépare ces deux zones, dépend de l'angle α du convergent (divergent) et du rapport de forme de la fibre :

$$\cos 2\beta o = r^2 \cos 2\alpha + ((1-r^2)\ (1-r^2\cos^2 2\alpha))^{1/2}$$

$$\text{avec } r = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

Il est en général très proche de α (par exemple $\beta o = 28°$ pour $\alpha = 30°$ et $\frac{a}{b} = 30$) (figure 8).

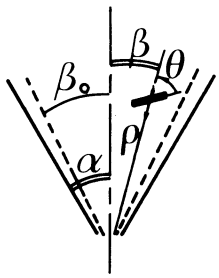


Figure 8. Les deux zones dans un convergent

Dans la zone périphérique, les fibres tournent sur elles-mêmes sans atteindre une position d'équilibre stable : ceci est une caractéristique des écoulements de cisaillement simple.

Dans la zone centrale, les fibres tendent au bout d'un temps qui peut être important, vers une position d'équilibre stable caractéristique des écoulements élongationnels.

Les dimensions respectives de ces deux zones peuvent sembler paradoxales : en effet, c'est seulement dans une zone étroite au voisinage de l'axe de l'écoulement que le taux de cisaillement est petit devant le taux d'élongation. En réalité, l'équation reliant l'angle θ à la position du centre de gravité de la fibre ρ dans le cas d'un divergent ou d'un convergent plan montre que le taux d'élongation $\dot{\alpha}$ est pondéré par un facteur r proche de 1 alors que le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est pondéré par un terme proche de zéro ($1 - r^2$) :

$$tg\ (\theta + \frac{\tau}{2}) = \frac{(X + Y)\ C\rho^{2Y/\dot{\alpha}} + X - Y}{\dot{\gamma}\ (1 + C\rho^{2Y/\dot{\alpha}})}$$

$$\text{avec } r = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$X = r\ (\dot{\alpha}^2 + \dot{\gamma}^2)^{1/2}$$

$$Y = (r^2\dot{\alpha}^2 + (1-r^2)\ \dot{\gamma}^2)^{1/2}$$

$$\cos\tau = \frac{\dot{\alpha} r}{X}$$

C = constante dépendant de l'orientation initiale

(les résultats sont analogues dans le cas axisymétrique).

La position d'équilibre est différente selon qu'il s'agit d'un écoulement convergent ou divergent :
- dans un convergent, l'orientation finale de la fibre est très proche de la direction de l'écoulement quelle que soit son orientation initiale. Cette orientation est généralement atteinte en un temps très bref.

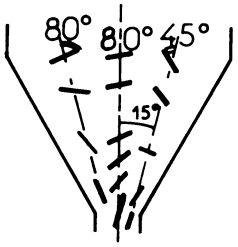


Figure 9. Evolution de l'orientation calculée dans le convergent utilisé avec le fluide modèle.

Notons que, strictement sur l'axe où l'écoulement est purement élongationnel, nous retrouvons le résultat correspondant obtenu précédemment.
- dans un divergent, les fibres s'orientent perpendiculairement aux lignes d'écoulement seulement lorsqu'elles se déplacent très près de l'axe (strictement sur l'axe, nous retrouvons le résultat obtenu dans le cas de l'élongation pure). Plus la fibre se déplace loin de l'axe, plus elle tend à s'orienter parallèlement aux lignes d'écoulement.

Par ailleurs les temps (ou distances) caractéristiques d'orientation sont très importants : une fibre pratiquement parallèle à l'axe de l'écoulement au début du divergent n'aura pas le temps (ou la distance) nécessaire pour atteindre une position perpendiculaire à cet axe (figure 10).

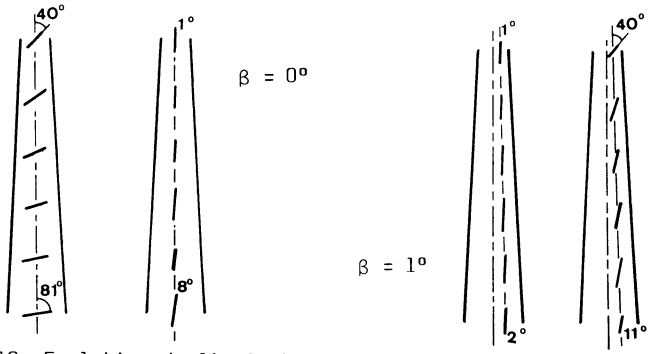


Figure 10. Evolution de l'orientation calculée dans la carotte divergente

Ces calculs sont cohérents avec l'observation effectuée dans la carotte divergente d'un moule : au centre de l'écoulement la plupart des fibres (mais pas toutes) sont orientées perpendiculairement à la direction de l'écoulement; à la périphérie les fibres sont orientées parallèlement à l'écoulement.

4 - APPLICATION AU CAS DE L'INJECTION

Les calculs peuvent être utilisés avec profits pour la prévision de l'orientation

des fibres dans des pièces moulées. Un exemple d'application en est l'injection d'un disque par son centre. Les observations montrent une orientation très différente des fibres entre la surface de la pièce, où les fibres s'orientent préférentiellement parallèlement au lignes d'écoulement (radiales), et le centre, où les fibres s'orientent dans le plan du disque et perpendiculairement aux lignes d'écoulement. Pour quantifier l'orientation des fibres par rapport aux lignes d'écoulement, nous avons introduit une fonction définie par :

$$f = \frac{2\langle\cos^2\theta\rangle - 1}{2} \qquad \text{avec} \quad \langle\cos^2\theta\rangle = \frac{\Sigma n_i \cos^2\theta_i}{\Sigma n_i}$$

où n_i est le nombre de fibres faisant l'angle θ_i avec les lignes d'écoulement. Cette fonction prend des valeurs comprises entre 0,5 (orientation parfaite parallèle aux lignes d'écoulements) et -0,5 (orientation perpendiculaire). L'évolution de la fonction est montrée sur la figure 11.

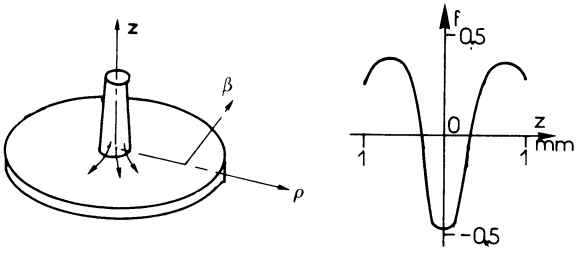


Figure 11. Fonction d'orientation dans l'épaisseur du moule

Une modélisation numérique du remplissage instationnaire non isotherme du moule par un fluide pseudoplastique permet d'obtenir en tout point et à tout instant les taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ et d'élongation $\dot{\alpha}$ (figure 12).

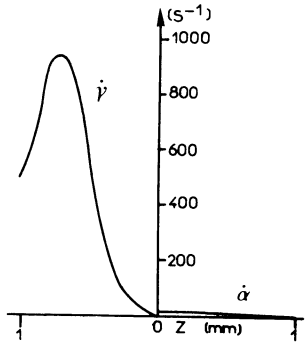
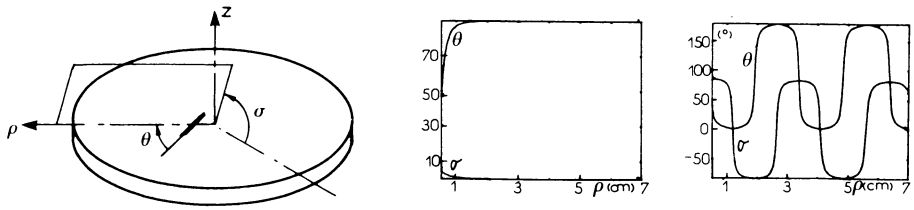


Figure 12. Evolution des taux d'élongation et de cisaillement dans l'épaisseur du moule

Il est alors possible de calculer, en fonction de la distance ρ entre le centre du disque et la fibre, l'évolution des angles d'Euler θ et σ définissant l'orientation de la fibre (figure 13a).



(a) (b) (c)

Figure 13. Définition des angles θ et σ (13a). Evolution à coeur (13b) et en périphérie (13c)

Sur la figure 13b, dans la zone de coeur, on constate que les fibres atteignent rapidement une position d'équilibre perpendiculaire à l'écoulement ($\theta = 90°$) et parallèle au plan du disque ($\sigma = 0°$). Il apparait sur la figure 13c que dans les zones proches de la peau, les fibres ont un comportement du type cisaillement avec une orientation préférentielle dans la direction de l'écoulement.

La figure 14 représente une fonction d'orientation calculée où les zones hachurées montrent l'influence des orientations initiales. On constate que cette fonction d'orientation est proche de celle que l'on a obtenue expérimentalement.

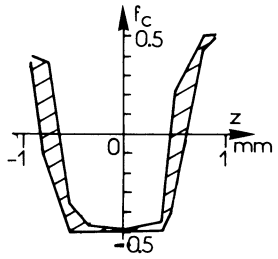


Figure 14. Fonction d'orientation calculée

5 - CONCLUSION

Nous avons utilisé une approche théorique et expérimentale qui a permis de mettre en évidence les rôles très différents des écoulements de cisaillement et d'élongation sur l'orientation des fibres. Des travaux sont en cours pour mieux rendre compte de la réalité. En particulier, l'influence de la viscoélasticité du fluide porteur est à l'étude.

REMERCIEMENTS

Nous remercions la Société Rhône-Poulenc pour son aide technique et financière.

BIBLIOGRAPHIE

/1/ J.P. VILLEMAIRE, J.F. AGASSANT. Polym. Proc. Eng., 1, 221-230 (1983)
/2/ G.B. JEFFERY. Proc. Roy. Soc., 102, 161-179 (1922)
/3/ R. TASKERMAN-KROZER et A. ZIABICKI. J.Polym. Sci.,1, 491-506 (1963)

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 199-204

Birefringence de solutions de particules rigides à la transition régime laminaire – tourbillons de Taylor

Birefringence of solutions of rigid particles at the transition laminar – Taylor vortex flow

J.-P. DECRUPPE, Assistant
R. HOCQUART, Maître-Assistant
R. CRESSELY, Maître-Assistant
T. WYDRO, Assistant

Faculté des Sciences, Metz

RESUME

L'angle d'extinction χ et la biréfringence d'écoulement Δn d'une solution d'argile sont étudiés dans une cellule de Couette classique à la température ambiante. Des cylindres intérieurs de différents diamètres sont utilisés pour déterminer le comportement de χ et de Δn à la transition régime laminaire - tourbillons de Taylor. La biréfringence est mesurée par la méthode de Senarmont.

ABSTRACT

Extinction angle χ and flow birefringence Δn of a solution of clay minerals are studied in a conventional Couette cell at room temperature. Inner rotating cylinders of different diameters are used to determine the behaviour of χ and Δn at the transition from laminar to Taylor vortex flow for different concentrations. The birefringence is measured by the classical Senarmont method.

1 - INTRODUCTION

Depuis les premiers travaux de Sadron et Alcock (1), la biréfringence d'écoulement de nombreux liquides purs, de solutions de particules variées telles que les polymères ou colloïdes et même de certains gaz a été étudiée dans le dispositif classique imaginé par Couette . G.I. Taylor (2) a montré que le régime laminaire ne pouvait être stable pour une vitesse angulaire de rotation du cylindre intérieur supérieure à une certaine valeur critique : au mouvement laminaire permanent se superpose le régime des tourbillons de Taylor. Les solutions acqueuses de particules rigides telles que les argiles (bentonite, montmorillonite, attapulgite) ont déjà été soumises à de nombreuses investigations et l'étude du comportement de l'angle d'extinction χ et de la biréfringence Δn en fonction du gradient existant dans l'entrefer d'une cellule de Couette a déjà été abordée par Wayland (3). Une cassure apparaît clairement dans les courbes lorsque le gradient atteint la valeur critique, mais aucune théorie satisfaisante n'existait alors. Du fait de la grande variété de produits commerciaux nous rapportons ici nos résultats obtenus pour une bentonite commerciale en solution acqueuse.

2 - DISPOSITIF EXPERIMENTAL

La disposition des différents composants optiques est classique : un pinceau fin de lumière quasi monochromatique (laser He-Ne) est polarisée linéairement par un film dichroïque avant traversé du milieu. La lumière transmise traverse ensuite un analyseur. Une lame quart d'onde est intercalée entre le milieu et l'analyseur pour la mesure de la biréfringence Δn. Le polariseur P est monté sur une table de rotation actionnée par un moteur pas à pas commandé par la rotation de la table supportant l'analyseur A. La résolution du système est de 0.01°. Un modulateur de lumière, décrit par Leray (4) et qui consiste en une lame birefringente tournante de retard faible ($\simeq 10°$) est utilisée pour la mesure des faibles différences de phase.

La paroi extérieure de la cellule est un cylindre de verre dont la surface intérieure est rectifiée à 0,01 mm. Des mesures précises de la vitesse angulaire critique Ωc ainsi qu'une observation qualitative de la forme des tourbillons de Taylor ont ainsi pu être réalisées. Les cylindres intérieurs sont en acier inoxydable de dimension telle que l'espace annulaire compris entre les deux cylindres mesure 1, 1.5 ou 2 mm. Les faces supérieures sont en aluminium anodisé.

Les solutions d'argiles utilisées sont stabilisées par $Na_4P_2O_7$ et abandonnées à la sédimentation pendant plusieurs mois. Elles sont ensuite filtrées sur filtres Micropore de 10µ ; le pH de la solution est de 9.8, valeur indiquant un haut degré de dispersion des particules dans l'eau (5). Une étude qualitative au microscope électronique a montré que les particules ont une forme plutôt aplatie.

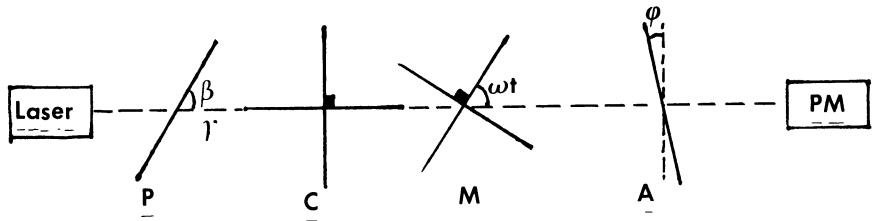
3 - MESURE DE L'ANGLE D'EXTINCTION χ ET DE LA BIREFRINGENCE Δn

Le formalisme matriciel de Mueller ( ) est utilisé pour calculer l'intensité transmise par le système optique. La matrice représentant le modulateur de lumière est identique à celle décrivant un milieu biréfringent dont l'azimuth α de l'une des lignes neutres varie avec le temps ($\alpha = \omega t$).
Le courant du photomultiplicateur contient un terme constant S_0 et deux termes dépendant du temps $S_4(4\omega t)$ et $S_2(2\omega t)$. L'amplitude de ce dernier fournit des renseignements sur l'orientation et la grandeur de la biréfringence du milieu.

3.1 Détermination de χ

L'angle d'extinction χ est défini comme l'angle entre l'une des lignes neutres et la direction de l'écoulement. Comme cette dernière n'est pas connue, l'on trace les courbes χ en fonction du gradient G pour les deux sens de rotation du cylindre intérieur. Elles sont symétriques par rapport à la direction de l'écoulement: l'ordonnée de l'axe de symétrie indique la translation à effectuer pour obtenir la vrai valeur de χ.

La cellule de Couette est placée entre polariseur P et analyseur A croisés. L'ensemble subit une rotation jusqu'à obtention d'un nul sur le galvanomètre d'un amplificateur à détection synchrone piloté par une référence de fréquence f identique à celle du signal à étudier ($f = 2\,\omega$)
La disposition des différents éléments est la suivante :



L'axe horizontal est choisi comme référence des azimuths. Le produit matriciel à effectuer est : $|A||M||C||P||I|$
où I représente le vecteur colomne associé à la lumière incidente non polarisée.
$I = \{1,0,0,0\}$, $|A|, |M|, |C|, |P|$ sont les matrices associées respectivement au polariseur, au milieu en écoulement, au modulateur et à l'analyseur. L'intensité transmise est donnée par le premier élément du vecteur colomne ainsi obtenu. Il vaut :

$$S_2(2\omega t) = \rho_1\rho_2 \sin\gamma \sin\delta \sin 2\beta \sin 2(\omega t - \beta)$$

où γ et δ sont respectivement les retards introduits par la lame tournante et par la solution. Un nul est obtenu lorsque $\beta = 0$: l'une des lignes neutres de la solution est alors parallèle à la direction de polarisation que l'on repère sur un compteur afficheur digital. La biréfringence parasite des fenêtres de la cellule peut être compensée très précisément en ajoutant une lame de verre de faible biréfringence orientée de manière à obtenir un nul lorsque le liquide est au repos.

Des mesures préliminaires de biréfringence de solutions de bentonite ont montré l'existence de dichroïsme linéaire : de ce fait l'amplitude $S_2(2\omega t)$ contient le terme $\rho_1\rho_2$ où $p\rho_1 = e^{-2\pi dk_o/\lambda}$ et $\rho_2 = e^{-2\pi dke/\lambda}$ où k_0 et k_e sont les coefficients d'absorption principaux et d l'épaisseur du milieu traversé par la lumière. L'on peut remarquer que la présence de dichroïsme n'a pas d'influence sur la détermination de χ.

La figure 1 montre l'évolution de χ en fonction du gradient pour trois dimensions de l'espace annulaire : 1mm, 1,5 mm, 2 mm. Tant que la condition d'écoulement laminaire est réalisée ($\Omega < \Omega c$) les courbes obtenues sont superposées. Pour $\Omega \geq \Omega c$, l'angle χ croit dans un premier temps puis ensuite décroit rapidement vers la direction des lignes de courant. Les valeurs théoriques du gradient critique Gc = $203s^{-1}$, e = 1,5mm Gc = $73.5s^{-1}$ et pour e = 2mm Gc=$36.5s^{-1}$. Les valeurs expérimentales sont en bon accord avec les valeurs théoriques.

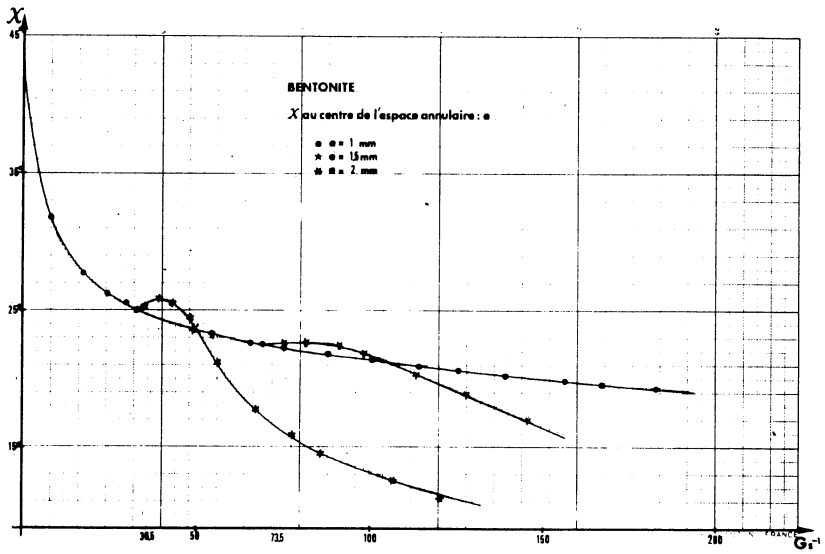
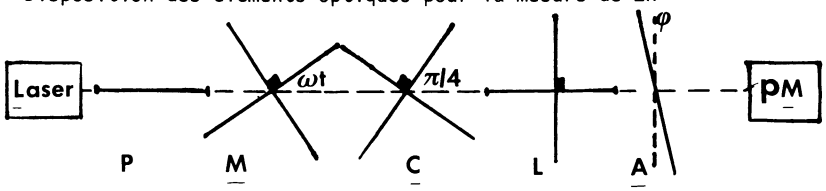


Figure 1. Evolution de χ en fonction du gradient G pour différentes valeurs de l'espace annulaire e.

3.2 Mesure de la biréfringence

Le polariseur P et l'analyseur A sont maintenant orientés à 45° des axes de la solution. La direction de la lumière incidente est choisie comme référence des azimuths. Une lame quart d'onde à l'azimuth zéro transforme la vibration elliptique issue du milieu en écoulement en une vibration rectiligne.
Le produit matriciel à effectuer est le suivant : $|A||L||C||M||P|$
où $|L|$ représente la matrice associée à la lame quart d'onde.

Disposition des éléments optiques pour la mesure de Δn



Une rotation convenable de l'analyseur doit rendre sa direction de transmission perpendiculaire à la vibration rectiligne et l'on doit ainsi rétablir l'extinction dans le cas d'un milieu biréfringent. En présence de biréfringence et de dichroïsme, l'extinction totale n'est pas réalisée. Afin de ne mesurer que la biréfringence le modulateur est placé avant la solution et dans cette configuration, le terme $S_2\ (2\omega t) = \rho_1\rho_2 \sin\gamma \sin(\delta - 2\phi) \sin 2\omega t$.
où ϕ représente l'angle entre l'analyseur et une direction perpendiculaire au polariseur. Lorsque le modulateur est placé après le milieu, S_2 contient deux termes en quadrature de phase qui doivent être annulés séparément.

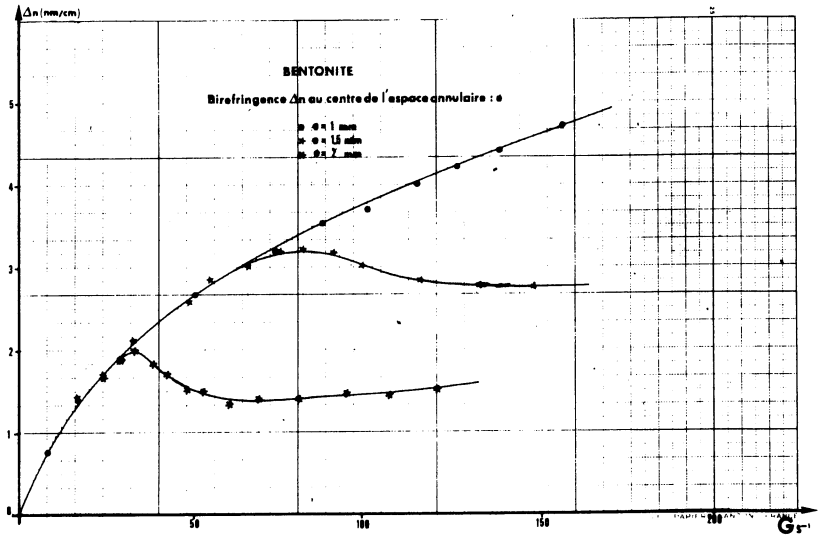


Figure 2. Evolution de Δn en fonction du gradient G pour différentes valeurs de l'espace annulaire e.

De l'expression de $S_2\ (2\omega t)$ l'on remarque qu'un nul est obtenu lorsque $2\phi = \delta$ d'où $\Delta n = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{\delta}{d}$

On a reporté sur la figure 2 l'évolution de Δn en fonction du gradient pour trois valeurs de l'espace annulaire e. Comme dans le cas de χ et tant que l'écoulement reste laminaire, les courbes obtenues pour les trois valeurs de e sont superposées. Pour des valeurs du gradient supérieures ou égales à Gc, la biréfringence décroit d'abord rapidement, et cet effet est particuliérement marqué lorsque e=2mm, puis l'évolution de Δn est plus lente et pour des gradients suffisamment élevés la biréfringence croit lentement.

4 - CONCLUSION

L'aspect général des courbes $\chi(G)$ et $\Delta n(G)$ est en bon accord avec les résultats obtenus par H. Wayland (3) sur des particules d'argile en solution acqueuse au voisinage de la transition régime laminaire - tourbillons de Taylor mais la présence de dichroïsme linéaire dans la solution en écoulement n'a pas été mentionné dans ses travaux.

En écoulement laminaire, une décroissance vers zéro de la courbe $\chi(G)$ indique une meilleure orientation des particules dans la direction des lignes de courant et de ce fait Δn croit. Or dans la région des tourbillons de Taylor et au centre de l'espace annulaire, $\chi(G)$ et Δn (G) décroissent. Une étude théorique de l'orientation des particules dans le champ hydrodynamique est en cours pour expliquer le comportement apparemment contradictoire des courbes $\chi(G)$ et $\Delta n(G)$.

5 - BIBLIOGRAPHIE

1. ALCOCK, E.J. and SADRON, C. (1935) Physics,6,92.
2. TAYLOR, G.I (1923) Trans. Roy. Soc. London, A223, 289.
3. WAYLAND, H. (1955) J. of Applied Physics, 26, n° 10, 1197.
4. LERAY, J. SCHEIBLING, G. and GRAMAIN, Ph. (1963) J. de Physique, 1936.
5. TIBU, M. (1970) Compt. rend. acad. sci. Paris 271, 375.
6. AZZAM. R.M.A. and BASHARA N.M. Ellipsometry and polarized light North-Holland publishing company (1977).

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 205-216

Rhéologie des solutions d'hydroxypropylcellulose
Rheology of hydroxypropylcellulose solutions

P. NAVARD, J.-M. HAUDIN

Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris
Centre de Mise en Forme des Matériaux
U A CNRS N° 852
Sophia Antipolis, 06565 Valbonne Cedex, France

RESUME

La rhéologie des solutions d'hydroxypropylcellulose (HPC) dans l'acide acétique a été étudiée à l'aide d'un rhéomètre capillaire et d'un rhéogoniomètre cône-plan, la concentration d'HPC étant comprise entre 10 et 89% en poids. Les phases isotrope et cholestérique coexistent pour 30% < C < 35%. Un maximum dans la courbe viscosité - concentration est observé pour C = 30%, la hauteur du pic étant une fonction décroissante de la vitesse de cisaillement. Les solutions anisotropes sont cholestériques et fortement viscoélastiques.

ABSTRACT

The rheology of hydroxypropylcellulose (HPC) acetic acid solutions was studied with a capillary and a cone and plate rheometer. The HPC concentration C ranged from 10% to 89% by weight. Isotropic and cholesteric phases coexist for 30% < C < 35%. The viscosity is maximum for C = 30%, the height of the viscosity peak being a decreasing function of the shear rate. Solutions are cholesteric and viscoelastic.

1 - INTRODUCTION

La possibilité d'obtenir des phases ordonnées non cristallines avec des polymères en masse ou en solution a ouvert un nouveau champ d'étude pour les physiciens et les chimistes des polymères. Ces nouvelles phases sont très proches de celles communément observées dans les cristaux liquides, à savoir nématiques, cholestériques et smectiques. Les différences sont liées non au type d'arrangement spatial obtenu, mais aux raisons physiques conduisant à l'obtention d'une structure ordonnée et à certaines propriétés, notamment rhéologiques. Il est évident, par exemple, que le comportement élastique d'une solution nématique de polymère sera bien différent de celui d'un cristal liquide classique, composé de petites molécules. L'étude de ces polymères mésomorphes (ayant un degré d'ordre intermédiaire entre celui du liquide et celui du cristal) est effectuée par des laboratoires de plus en plus nombreux. Ceci a deux raisons : l'intérêt scienti-

fique du sujet est évident, car c'est un domaine nouveau dans la science des polymères, et on trouve des phases mésomorphes dans un nombre croissant de polymères classiques. L'intérêt économique est une seconde raison puisque certaines fibres synthétiques à haute performance sont obtenues à partir de polymères nématiques.

L'étude rhéologique de ces polymères mésomorphes se heurte à de nombreux problèmes, malgré son grand intérêt scientifique et technique. En effet, il n'existe pas de théorie reconnue et vérifiée de l'écoulement d'un polymère mésomorphe. De toute façon, il faut autant d'approches théoriques qu'il y a de type de structure (nématique, cholestérique, etc...). De plus, les bases expérimentales pouvant guider la mise au point des lois de comportement sont incomplètes et controversées. Outre des résultats publiés montrant des phénomènes rhéologiques étonnants (par exemple des mesures de forces normales négatives), la reconnaissance récente de l'existence d'une structure dans l'écoulement, conditionnant pour une grande part les propriétés rhéologiques, est source de nombreuses questions. Les techniques rhéologiques sont alors insuffisantes et d'autres mesures sont nécessaires pour comprendre le comportement de ces matériaux lors d'un écoulement. Plusieurs articles de synthèse sur la rhéologie des polymères mésomorphes ont été publiés /1-5/, le plus récent ayant été écrit par Wissbrun /5/. Ces études ne concernent que les polymères rigides, tels les polypeptides ou les polyamides aromatiques. D'après Onogi et Asada/4/ la courbe d'écoulement viscosité-vitesse de cisaillement peut se diviser en trois régions. La région I, à très faible vitesse de cisaillement, présente un écoulement de type pseudo-plastique avec seuil d'écoulement. La région II, à vitesse de cisaillement plus élevée, a un comportement newtonien. C'est la région la plus étudiée. La courbe viscosité-concentration y comporte un pic caractéristique dont le maximum est au voisinage de la transition solution isotrope → solution anisotrope. La région III, à forte vitesse de cisaillement, présente un écoulement de type pseudo-plastique, avec un comportement viscoélastique prononcé. Cette description schématique est empirique bien qu'un essai de justification physique ait été donné par ses auteurs. C'est néanmoins un repère simple lors d'une étude rhéologique. Malheureusement, les phénomènes de structure d'écoulement notés plus haut n'y sont pas pris en compte /6/.

Récemment, des phases mésomorphes de la cellulose et de certains de ses dérivés ont été découvertes. Les mésophases dont la structure a été étudiée sont cholestériques. C'est notamment le cas des solutions mésomorphes d'hydroxypropylcellulose /7-8/. Peu d'études rhéologiques concernent les mésophases de cellulose et de ses dérivés. Panar et Willcox /9/ et Dayan /10/ ont montré qu'il existe un pic de viscosité lorsque, en augmentant la concentration, on passe de la solution isotrope à la solution cholestérique. Ceci est un résultat maintenant classique pour tous les polymères mésomorphes. Onogi et Asada /4/ ont mesuré la viscosité apparente de solutions de HPC dans l'eau pour une plage de vitesse de cisaillement assez grande. Ils ont mis en évidence le passage de la région I à la région II, qui, selon eux marque la transition entre un matériau composé d'une mosaïque de domaines cholestériques d'orientations différentes et un matériau composé de quelques domaines cholestériques dispersés dans une phase (cholestérique ou nématique) uniformément orientée. Une étude rhéo-optique /11/ sur des solutions HPC-eau a montré que la biréfringence augmentait brutalement à la transition isotrope-cholestérique et que le temps de relaxation de la biréfringence, après arrêt de l'écoulement dans la phase cholestérique, était de plusieurs ordres de grandeur supérieur à celui dans la phase isotrope. Le même résultat a été obtenu pour des solutions cholestériques de triacétate de cellulose dans l'acide trifluoroacétique /12/. L'influence du cisaillement sur l'orientation de l'axe de l'hélice cholestérique dans des solutions HPC-eau a été étudié par Onogi et Asada /13/. En accord avec des mesures spectrophotométriques, ils ont montré que le cisaillement, du moins à des vitesses de cisaillement inférieures à 2 s^{-1}, n'avait pas d'influence sur le pas de l'hélice, mais seulement sur son orientation par rapport à l'écoulement. La cellulose peut aussi former des mésophases lyotropes. Son comportement rhéologique a été étudié /14/ principalement en fonction de la température ; un pic dans la courbe viscosité-température a été mis en évidence.

L'étude présentée ici utilisera des techniques classiques de rhéomètrie appliquées aux solutions d'hydroxypropylcellulose dans l'acide acétique et l'eau. Ce choix a été guidé par la possibilité d'obtenir des solutions très concentrées, ainsi que par la facilité de mise en solution. La comparaison avec les comportements d'autres polymères mésomorphes permettra de souligner les principales propriétés rhéologiques de ces matériaux.

2 - BASES THEORIQUES

Nous ne discuterons pas ici le problème de la formation d'une phase mésomorphe, qu'elle soit ou non composée de polymères. Le livre de P.G. de Gennes /15/ est une excellente référence pour les cristaux liquides classiques et les cristaux liquides polymères ont été récemment décrits /16/. L'approche théorique de leurs rhéologies est un problème d'une grande complexité. Le cas le plus simple qui a d'abord été considéré est le cisaillement simple d'un nématique composé de molécules de petite taille. Contrairement aux liquides où le mouvement peut être décrit par une relation entre un champ de vitesse et une répartition des pressions et des densités, il est nécessaire dans le cas d'un nématique de connaître l'orientation du directeur qui définit la direction vers laquelle pointent les molécules. Le couplage entre l'orientation que prendra ce directeur et l'écoulement est complexe. Trois cas limites ont tout d'abord été étudiés correspondant à des orientations du directeur parallèles aux trois axes principaux d'un champ de cisaillement (figure 1)

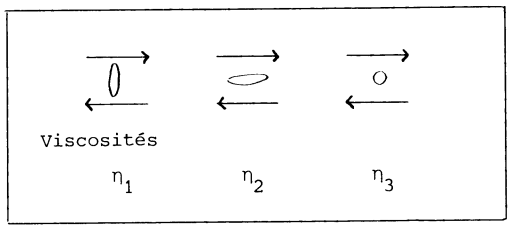


Figure 1 - Les coefficients de viscosité d'un cristal liquide nématique.

Ceci permet de définir trois coefficients de viscosité, appelés coefficients de viscosité de Miesowicz /17/. Parmi les nombreuses théories proposées pour décrire de façon générale l'écoulement d'un nématique, celle proposée par Ericksen, Leslie et Parodi /18-19-20/ est la moins compliquée, et ses prédictions ont été vérifiées de nombreuses fois /15/. Chaque terme du tenseur de contrainte est une fonction à six paramètres des termes du tenseur de vitesse de déformation. Ces six paramètres, dont cinq sont indépendants, sont les termes d'un tenseur de viscosité. La viscosité est linéaire par rapport à la vitesse de cisaillement et il est possible de retrouver les trois viscosités de Miesowicz. La détermination expérimentale de ces cinq viscosités est complexe et n'a été faite que dans quelques cas. Le problème majeur est que, sauf cas particuliers, la déformation génère des défauts. Ceux-ci ont été beaucoup étudiés /21/ et la mécanique de leur déplacement est dans certains cas connue. Mais l'arrangement de ces défauts crée une texture macroscopique dont la nature est souvent inconnue, surtout aux fortes vitesses de déformation. La rhéologie va alors dépendre des modes de déformation de cette texture. L'utilisation de rhéomètres classiques sans moyen ni de mesurer ni de contrôler l'orientation du nématique est alors de peu d'intérêt. Dans la plupart des cas, la viscosité mesurée est proche de η_2 (figure 1) si la température est beaucoup plus basse que la température de transition nématique-liquide. Des instabilités d'écoulement et l'orientation des molécules à la paroi du rhéomètre compliquent encore le problème expérimental.

L'écoulement des phases smectiques et cholestériques est encore plus complexe puisqu'il comporte un mouvement de passage d'une molécule d'une couche à une autre. Ce mouvement, appelé perméation, est la cause de certaines valeurs très élevées de "viscosité" de cholestériques dans des capillaires. Comme pour les nématiques, les mécanismes de propagation des défauts vont jouer un rôle important, notamment aux très faibles vitesses de cisaillement. L'existence et la valeur d'un seuil de contrainte (corps de Bingham) a ainsi été directement relié dans une phase smectique, à la quantité de défauts présents dans le produit /22/.

La nature particulière des polymères en masse ou en solution concentrée va se superposer à la description faite précédemment. L'influence des enchevêtrements sur le comportement rhéologique des polymères est bien connue, et sa prise en compte théorique a fait l'objet de nombreuses études. Dans le cas d'un polymère nématique, la situation est complexe. Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, le manque de faits expérimentaux de nature comparable à ce qui se fait sur les cristaux liquides classiques est un handicap. En outre, le caractère viscoélastique et la non linéarité de la viscoélasticité, dus essentiellement aux enchevêtrements, définissent plusieurs domaines de vitesse de déformation où les mécanismes mis en jeu sont différents. Dans ce qui suit, le mode de déformation en cisaillement sera principalement considéré. Aux très faibles vitesses de cisaillement, l'écoulement dépend de la texture macroscopique (arrangement des domaines nématiques) et il n'existe pas de théorie décrivant ce type d'écoulement. Ceci est la région I de la théorie d'Onogi et Asada /4/. A plus forte vitesse de cisaillement, on observe expérimentalement certains phénomènes rhéo-optiques qui montrent l'existence de mouvements moléculaires collectifs encore incompris actuellement /6/. Deux approches théoriques ont été effectuées ; elles considèrent la phase nématique sans défauts ni instabilités. L'une essaye de comprendre le pic de viscosité en fonction de la concentration en polymère. On observe en effet que lorsque la concentration augmente, la viscosité augmente dans la phase isotrope, chute lorsque la concentration est proche de celle où apparaissent les premières traces de phase anisotrope (C*), et augmente à nouveau lorsque la concentration augmente en phase anisotrope. Dans certains cas, des mesures précises montrent qu'un changement de pente sur la courbe de viscosité marque la concentration C*, un peu avant le maximum du pic. Utilisant des concepts connus (viscosité intrinsèque par exemple) et de nombreuses approximations (forme des inclusions anisotropes dans la phase isotrope), Aharoni /23/ et Matheson /24/ ont décrit cette courbe. Toutefois, ils ne prennent en compte ni la nature nématique de la phase ni la complexité de son écoulement, n'ayant pas à leur disposition une loi de comportement. Leur approche permet uniquement, à vitesse de cisaillement tendant vers zéro, de montrer que le maximum du pic de viscosité ne peut pas physiquement correspondre à C* si la théorie de formation d'une phase lyotrope nématique de Flory /25/ est utilisée. Une approche beaucoup plus intéressante est due à Doi /26/ et est basée sur une extension à des concentrations élevées de la théorie de Doi-Edwards. Le polymère est modélisé par une ligne brisée devant se déplacer dans un tube. Ceci décrit l'impossibilité qu'a une chaine d'en croiser une autre. A partir de l'expression de la constante de diffusion en rotation, et en ajoutant une interaction du type Maier et Saupe /27/ entre les segments de chaine, Doi peut décrire complètement la rhéologie de la solution, à la fois dans les domaines isotrope et nématique et prédire la transition de phase. Cette théorie montre un comportement correct de la viscosité de cisaillement dans ces phases. Le paramètre d'ordre S ($S=\frac{1}{2}\left[3\langle\cos^2\theta\rangle-1\right]$ où θ est l'angle que fait une molécule ou dans le cas ici considéré un bâtonnet rigide avec la direction moyenne d'orientation) est 0 dans la phase isotrope et croît de façon discontinue à la concentration critique C* d'apparition de la phase anisotrope :

$$S = 0 \qquad C < C^* \qquad (1)$$

$$S = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{8C^*}{9C}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad C > \frac{8}{9}\,C^* \qquad (2)$$

La viscosité en cisaillement est :

$$\frac{\eta}{\eta^*} = \left(\frac{C}{C^*}\right)^3 \frac{(1-S)^4\,(1+S)^2\,(1+2S)\,(1+3\,S/2)}{(1+S/2)^2} \qquad (3)$$

où η^* est la viscosité de la solution isotrope pour $C = C^*$. Cette équation prédit donc un pic de viscosité lorsque la concentration augmente. La théorie de Doi prévoit une première différence de contrainte normale proportionnelle à la vitesse de cisaillement dans le domaine anisotrope. Elle prévoit aussi que $C^* \sim M_w^{-1}$, ce qui est en accord avec la théorie de Flory /25/ et que pour toutes les concentrations, la viscosité réduite η/η^* est une fonction de C/C^*. Ceci a été vérifié expérimentalement /5/. Une extension de la théorie de Doi a été faite par Marrucci. Dans un premier article /28/, il retrouve les six coefficients de viscosité de la théorie de Ericksen, Leslie et Parodi, et donc les trois viscosités de Miesowicz, avec l'ordre de grandeur correct correspondant aux données expérimentales. Dans un second article /29/, il étend la théorie de Doi au cas des polymères ayant une dispersion de masses moléculaires. La viscosité est alors beaucoup augmentée par rapport à celle d'un polymère monodispersé. Cet ensemble théorique est actuellement le plus complet et le plus cohérent pour décrire la rhéologie d'un polymère en phase nématique. Bien que notre cas soit éloigné des hypothèses théoriques (polymère parfaitement rigide, phase nématique), nous comparerons nos résultats à la théorie de Doi.

3 - PARTIE EXPERIMENTALE

Deux échantillons d'hydroxypropylcellulose (HPC) ont été utilisés, l'un de masse moléculaire M_w = 60 000 (Aldrich) et l'autre de M_w = 100 000 (Hercules). Les solutions ont été préparées à la température ambiante en mélangeant l'eau ou l'acide acétique à l'HPC. Les solutions très concentrées ont été homogénéisées à l'aide d'un mélangeur mécanique. Le débullage est effectué par agitation pour les solutions moyennement concentrées ou par centrifugation pour les solutions concentrées. Un rhéomètre capillaire Instron (capillaires utilisés : Ø = 1.3 mm, l = 12.5 mm et 25 mm, Ø = 0.6 mm, l = 12 mm et 24 mm et Ø = 0.37 mm, l = 1.4 mm et 2.8 mm) et un rhéomètre cone-plan Instron ont été utilisés. La correction de Rabinowitsch a été appliquée aux données du rhéomètre capillaire. Les concentrations sont en pour-cent en poids et les résultats concernent le polymère de masse M_w = 60 000, sauf indication contraire. Seule les solutions très concentrées HPC-eau (C>50%) ont été étudiées.

4 - RESULTATS ET DISCUSSION

4.1 - Domaine isotrope

Les solutions diluées n'ont pas été étudiées, la plus faible concentration C étant 10%. Comme pour la plupart des solutions de polymère, la loi de comportement de la viscosité η est newtonienne en dessous d'une certaine vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$, et pseudo-plastique ($\sigma_{xy} = A\dot{\gamma}^m$, avec σ_{xy} la contrainte de cisaillement et A et m des constantes) au dessus ; m = 0.7 pour toutes les concentrations étudiées (10% <C< 30%). La viscosité au plateau newtonien est une fonction de la concentration à la puissance 5.2. Ceci est plutôt en accord avec le comportement d'un polymère flexible /30/. Les solutions ont également un comportement visco-élastique. La première différence de contrainte normale ($\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$) est une fonction de la vitesse de cisaillement à la puissance 1.4.

4.2 - Transition isotrope-mésomorphe

Les solutions de concentration supérieure à 30% sont turbides et biréfringentes : le polymère s'ordonne. Examinées par microscopie optique, entre analyseur et polariseur croisés, elles présentent une texture typique de la phase cholestérique, appelée focale conique. On peut aussi dans certains cas mesurer directement le pas à partir d'une texture en "empreinte digitale". Nous avons obtenu un pas de l'hélice cholestérique égal à 3.3 µm pour une solution de 43.4%,

en accord avec de récentes mesures /31/. La figure 2 montre que cet ordre est associé à une viscosité plus faible que dans le domaine isotrope, et que l'on obtient le classique pic de viscosité.

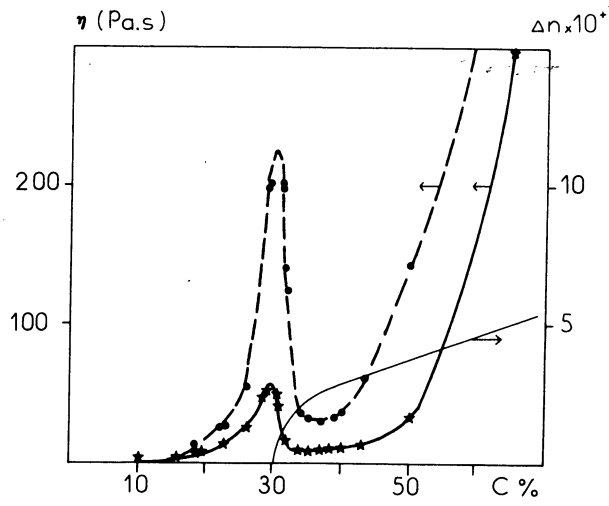


Figure 2 : Viscosité apparente (échelle de gauche) et biréfringence (échelle de droite) en fonction de la concentration d'HPC dans l'acide acétique.
• $\dot{\gamma}$ = 0.63 s^{-1} * $\dot{\gamma}$ = 100 s^{-1}

Nous avons aussi représenté sur la figure 2 la biréfringence des solutions, mesurée par réfractométrie. La biréfringence est proportionnelle, en première approximation, au degré d'ordre S de la mésophase. On observe que l'ordre croît très vite entre les concentrations 30% et 35%, pour ensuite être à peu près constant. L'intervalle 30% <C< 35% est donc probablement l'intervalle de coexistence des phases isotropes et cholestérique (domaine biphasique). Les courbes d'écoulement dans cet intervalle sont différentes de celles des domaines isotrope et anisotrope. σ_{xy} n'est plus fonction de $\dot{\gamma}^m$, m variant continûment en fonction de $\dot{\gamma}$. Ceci est dû très probablement à un problème de déformation des inclusions cholestériques dans la phase isotrope (ou vice-versa), le milieu n'étant plus homogène. On peut remarquer que contrairement à ce qu'Aharoni /23/ et Matheson /24/ ont montré le maximum du pic de viscosité correspond dans notre cas à la concentration d'apparition de la phase cholestérique (l'erreur est au maximum de 1%). Ceci est dû au très faible intervalle de concentration du domaine biphasique, et il faudrait préparer un grand nombre de solutions dans cette région pour espérer voir le phénomène de découplage C* - η*. L'influence de la vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$ sur la hauteur du pic est nette sur la figure 2 : à plus fort $\dot{\gamma}$, le pic tend à diminuer. Ceci a toujours été observé sur les solutions mésomorphes de polymère /5/ et l'explication la plus couramment admise est qu'il existe une compétition entre l'ordre dû au cisaillement et l'ordre dû à l'équilibre thermodynamique, et que leur différence diminue quand la vitesse de cisaillement augmente. Une autre façon de mettre en évidence la transition est de tracer l'indice de pseudo-plasticité m en fonction de la concentration (figure 3)

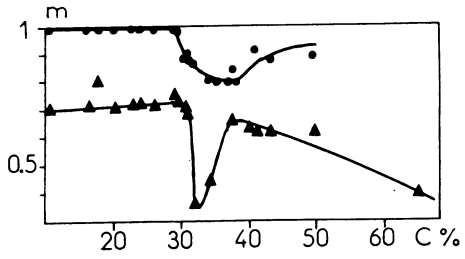


Figure 3 : Indice de pseudo-plasticité m en fonction de la concentration
• σ_{xy} < 120 Pa ▲ σ_{xy} > 120 Pa

σ_{xy} = 120 Pa est la contrainte de cisaillement pour laquelle les solutions isotropes passent d'un comportement newtonien à un comportement pseudo-plastique. Nous voyons sur la figure 3 que le domaine biphasique est bien situé entre 30% et environ 35%. Ces courbes ont une forme qui a été précédemment trouvée pour des solutions de cellulose /14/ et de HPC dans l'eau /10/.

Nous avons aussi mis en évidence un pic de première différence de contraintes normales en fonction de la concentration. Nous avons tracé sur la figure 4 la viscosité normale définie par $\eta_n = (\sigma_{xx}-\sigma_{yy})/\dot{\gamma}$. Ceci est, selon Doi, un paramètre important en phase anisotrope. En phase isotrope, le paramètre serait plutôt $\eta_n/\dot{\gamma}$ (ou $(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})/\dot{\gamma}^2$). Nous observons donc que le pic $(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})$ croît, le pic de η_n est quasi-constant et le pic de $\eta_n/\dot{\gamma}$ décroît quand la vitesse de cisaillement augmente. Kiss et Porter /32/ ont trouvé avec des solutions cholestériques de polymère qu'il n'y avait pas de variation du pic de $(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})$ en fonction de $\dot{\gamma}$, contrairement à notre cas.

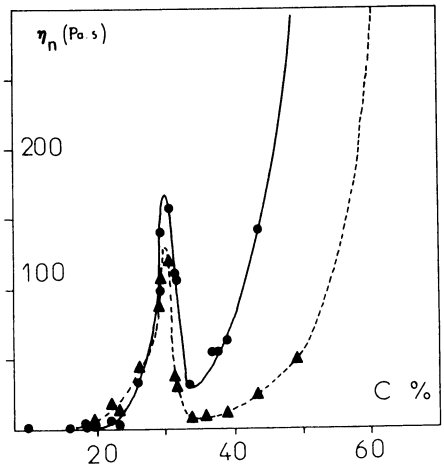


Figure 4 : Viscosité normale η_n en fonction de la concentration.
• $\dot{\gamma}$ = 1 s^{-1} ▲ $\dot{\gamma}$ = 100 s^{-1}

La théorie de Doi /26/ prévoit que le rapport η_n/η^* à faible vitesse de cisaillement est

$$\eta_n/\eta^* = \frac{3}{2}\left(\frac{C}{C^*}\right)^3 \frac{(1-S)^{7/2}(1+S)^2(1+2S)^{0.5}}{(1+S/2)^2} S$$

Or pour C*, on a S = 0.5 et $\eta_n = \eta^*_n$, d'où $\eta^*_n/\eta^* = 0.135$. Nous trouvons expérimentalement $(\eta^*_n/\eta^*)_{HPC} = 0.74$. L'écart est très important et ceci peut être dû à l'utilisation de vitesses de cisaillement trop grandes. Ceci n'est pas dû à l'influence de la valeur de S. Même lorsqu'on utilise une valeur de 0.3, plus réaliste dans notre cas que 0.5 /33/, η^*_n/η^* augmente jusqu'à une valeur de 0.2. Une autre cause de ce désaccord est que certaines hypothèses de la théorie de Doi sont loin d'être vérifiées pour les solutions d'HPC (monomolécularité, rigidité de la chaîne, par exemple).

4.3 - Domaine anisotrope

Comme nous l'avons exposé dans la partie "Basesthéoriques", l'écoulement d'une solution nématique, et à fortiori cholestérique, de polymère est très difficile à décrire. L'approche expérimentale que nous avons utilisée ici consiste à mesurer les mêmes grandeurs physiques que dans le cas des solutions isotropes, et de les comparer aux résultats théoriques quand ceux-ci existent.

La comparaison entre les viscosités déduites du rhéomètre cône-plan et du rhéomètre capillaire montre que celles-ci sont identiques à vitesse de cisaillement égale. La figure 5 donne en effet la viscosité pour différentes concentrations en fonction de la vitesse de cisaillement, les mesures pour $\dot{\gamma} < 10\ s^{-1}$ étant effectuées au rhéomètre cône-plan alors que celles pour $\dot{\gamma} > 10\ s^{-1}$ ont été effectuées au rhéomètre capillaire. Cet accord montre que le diamètre du capillaire et l'ouverture du cône-plan sont bien plus grands que la distance caractérisant l'effet d'orientation des parois des rhéomètres, ou alors que pour ces polymères, l'effet d'orientation des parois n'existe pas /5, 18, 19, 34/. Nos mesures sont en accord avec celles effectuées avec un rhéomètre à cylindres coaxiaux par Dayan et al./10/ dans la zone $10\ s^{-1} < \dot{\gamma} < 100\ s^{-1}$ pour une solution HPC-eau concentrée à 63%. Il y a une différence avec les mesures d'Asada et al. /4/ pour la même solution, qui peut être due à l'utilisation d'un polymère de provenance différente (HPC est connu pour avoir une très grande variété de branchements possibles).

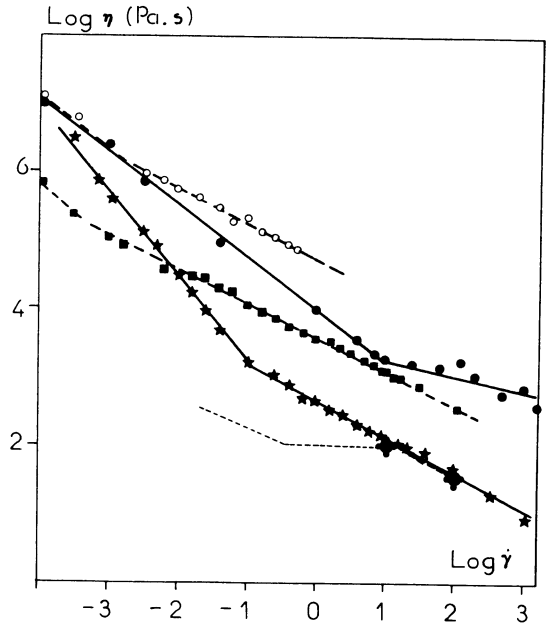
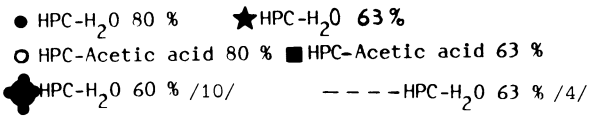


Figure 5 : Viscosité η en fonction de la vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$ pour différentes solutions.



L'effet d'orientation des parois du rhéomètre capillaire a été examiné plus en détail en mesurant la viscosité en fonction du taux de cisaillement pour différents diamètres du capillaire. Aucun effet d'orientation n'est décelable (figure 6)

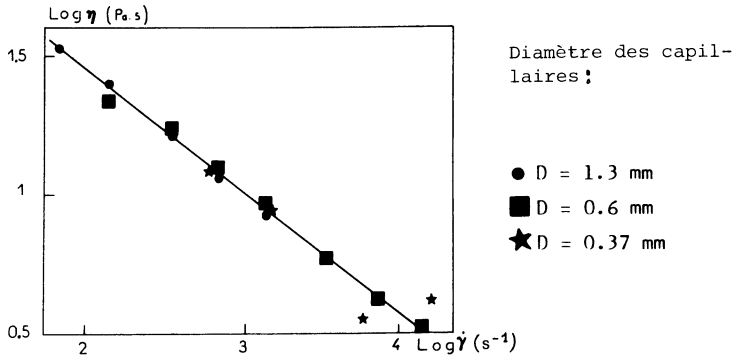


Figure 6 : Viscosité η en fonction de la vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$ pour une solution HPC (M_w = 100 000) - H_2O - 54%

La première différence de contrainte normale ($\sigma_{xx}-\sigma_{yy}$) dépend de la vitesse de cisaillement à la puissance 0.6. La théorie de Doi /26/ prédit une dépendance linéaire ($\sigma_{xx}-\sigma_{yy} \sim \dot{\gamma}$) dans le domaine nématique et une dépendance quadratique dans le domaine isotrope (les solutions de HPC étudiées ici ont $\sigma_{xx}-\sigma_{yy} \sim \dot{\gamma}^{1.4}$). Les valeurs expérimentales et théoriques sont donc qualitativement en accord. Les raisons probables de la différence quantitative ont été exposées plus haut. Une autre raison est la nature cholestérique des solutions de dérivés cellulosiques. Il semble que la viscosité des solutions cholestériques de polymère ne soit pas d'un ordre de grandeur différent de celle des solutions nématiques, ni qu'on observe une transition nette à une certaine vitesse de cisaillement entre le domaine cholestérique et le domaine nématique. Ceci peut être dû à la présence de ces textures macroscopiques qui semblent d'une nature semblable pour les cholestériques et les nématiques.

5 - CONCLUSION

L'écoulement d'un polymère mésomorphe est un sujet d'étude très difficile. Utilisant les méthodes classiquement appliquées aux polymères isotropes, nous avons étudié les principales propriétés de l'écoulement en cisaillement des solutions d'hydroxypropylcellulose. L'intérêt était ici essentiellement académique. Pour être complet et surtout pour être utile à la principale application de ces polymères, le filage, il serait tout-à-fait intéressant d'aborder l'étude

de la rhéologie élongationnelle.

6 - BIBLIOGRAPHIE

1 R.S. PORTER et J.F. JOHNSON, in "Rheology", R. EIRICH Ed., J. Wiley, N.Y. (1967)

2 D.G. BAIRD, in "Liquid Crystalline Order in Polymers", Academic Press, N.Y. (1967)

3 D.G. BAIRD, in "Rheology", G. Astarita, G. Marrucci et L. Nicolais Eds, Plenum, N.Y. (1980)

4 S. ONOGI et T. ASADA in "Rheology", G. Astarita, G. Marrucci et L. Nicolais Eds, Plenum, N.Y. (1980)

5 K.F. WISSBRUN, J. Rheology, 25(6), 619 (1981)

6 A.E. ZACHARIADES, P. NAVARD et J.A. LOGAN, Mol. Cryst. Liq. Cryst., 110, 93 (1984)

7 R.S. WERBOWYJ et D.G. GRAY, Mol. Cryst. Liq. Cryst., 34, 97 (1976)

8 R.S. WERBOWYJ et D.G. GRAY, Macromolecules, 13, 69 (1980)

9 M. PANAR et O.B. WILLCOX, Brevet Français 77 03 473 (1977)

10 S. DAYAN, J.M. GILLI et P. SIXOU, J. Appl. Polym. Sci., 28, 1527 (1983)

11 Y. ONOGI, J.L. WHITE et J.F. FELLERS, J. Non-Newt. Fluid Mech., 7, 121 (1980)

12 G.H. MEETEN et P. NAVARD, Polymer, 23, 1727 (1982)

13 T. ASADA, K. TODA et S. ONOGI, Mol. Cryst. Liq. Cryst. Lett., 68, 231 (1981)

14 P. NAVARD et J.M. HAUDIN, Br. Polym. J., 12, 174 (1980)

15 P.G. de GENNES, "The Physics of Liquid Crystals", Clarendon Press, Oxford (1974)

16 Advances in Polymer Science - Vol. 59 (1984)

17 M. MIESOWICZ, Bull. Intern. Acad. Polon. Ser. A, 228 (1936)

18 J.L. ERICKSEN, Arch. Ration. Mech. Analysis, 4, 231 (1960)

19 F.M. LESLIE, Quart. J. Mech. Appl. Math., 19, 357 (1966)

20 O.J. PARODI, J. Phys. (Fr.), 31, 581 (1970)

21 M. KLEMAN, "Points, Lines and Walls", J. Wiley (1983)

22 R.G. HORN et M. KLEMAN, Ann. Phys., 3, 229 (1978)

23 S.M. AHARONI, Polymer 21, 1413 (1980)

24 R.R. MATHESON, Macromolecules, 13, 643 (1980)

25 P.J. FLORY, in "Advances in Polymer Science", vol. 59, 1 (1984)

26 M. DOI, J. Polym. Sci., Polym. Phys. Ed., 19, 229 (1981)

27 W. MAIER et A. SAUPE, Z. Naturf., A13, 564 (1958), ibid A14, 882 (1959), ibid A15, 287 (1960)

28 G. MARRUCCI, Mol. Cryst. Liq. Cryst., 72 (Letters), 153 (1982)

29 G. MARRUCCI et N. GRIZZUTI, J. Polym. Sci., Polym. Lett. Ed., 21, 83 (1983)

30 G.C. BERRY et T.G. FOX, Adv. Polymer Sci., 5, 261 (1968)

31 F. FRIED, J.M. GILLI et P. SIXOU, Mol. Cryst. Liq. Cryst., 98, 209 (1983)

32 G. KISS et R.S. PORTER, J. Polym. Sci., Polym. Phys. Ed., 18, 361 (1980)

33 P. NAVARD, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Lyon (1983)

34 R.J. ATKIN, Arch. Ration. Mech. Anal., 38, 224 (1970)

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 217-234

Influence de l'anisotropie sur le comportement rotationnel de la kaolinite

The effect of anisotropy on the behaviour of a kaolin in rotational kinematic path

Y. GOLCHECH

Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat
et Ecole Centrale de Paris

RESUME

Différents travaux montrent qu'il existe une orientation privilégiée des particules dans les argiles naturelles en raison de leur mode de dépôt.

Ces argiles présentent une résistance au cisaillement en compression simple qui varie selon les différentes orientations de la contrainte principale majeure par rapport au matériau. Nous observons le même type de comportement avec l'argile consolidée anisotropement au laboratoire.

Ce rapport présente ainsi l'étude de l'influence de l'orientation des axes principaux de contraintes par rapport aux axes d'orthotropie sur le comportement d'un cylindre creux de kaolinite normalement consolidée (N.C.). L'échantillon est préparé au laboratoire par consolidation oedométrique.

ABSTRACT

Different investigations indicate that one-dimensional consolidation produces a preferential arrangement of the clay particules. This fact is observed in the case of the naturally deposited clays.

Therefore, they have anisotropic strength behaviour depending on the orientation of the principal stresses.

The purpose of this paper is to study the influence of this orientation of the principal axes on the strength of a hollow cylinder sample prepared in laboratory under an anisotropic consolidation.

1 - INTRODUCTION

L'excavation dans un terrain naturel, le battage d'un pieux, les sollicitations sinusoïdales imposées par la houle sur une fondation d'ouvrage offshore et, plus généralement, tout remaniement d'un massif de sol entraînent une rotation des axes principaux des contraintes. L'étude de ces phénomènes doit prendre en compte l'effet de cette rotation.

La figure (1), d'après les travaux de Duncan et Al (1), montre la direction de la contrainte principale majeure le long de la surface de rupture avant son apparition. L'on observe une variation continue entre 0 et 90° de l'angle α entre la direction de la contrainte principale majeure et l'axe de consolidation (vertical).

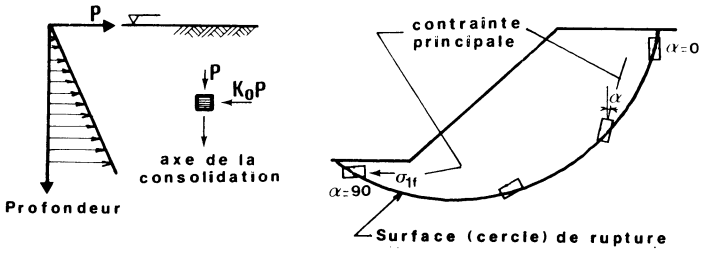


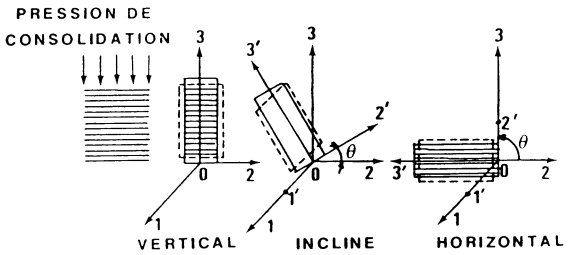
Fig.1

Il est donc nécessaire de quantifier l'influence de α sur les paramètres mécaniques pour chaque élément de cette surface.

Un essai triaxial conventionnel n'est pas apte a priori à simuler ce phénomène. Seule est possible une rotation de 90° des axes (permutation des axes principaux) lors du passage d'un déviateur positif à un déviateur négatif.

Cependant, un moyen classique d'étude de l'anisotropie de structure des matériaux, induite par la consolidation Ko, consiste à utiliser des échantillons découpés, à partir d'un bloc d'argile consolidée, selon différentes inclinaisons θ (angle entre l'axe de consolidation et l'axe de symétrie de l'échantillon).

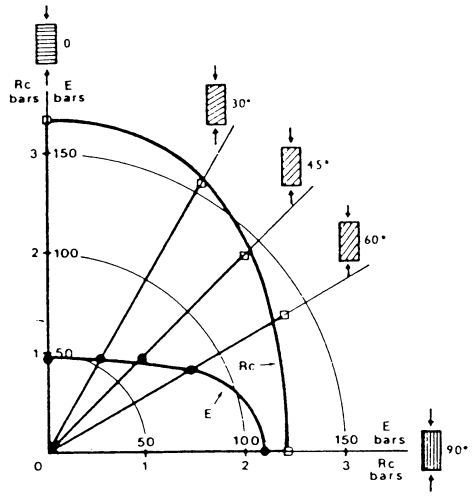
Ces éprouvettes sont ensuite testées dans l'appareil triaxial. La procédure d'essai est présentée dans la figure (2), tirée de Saada (2).



ECHANTILLON ANISOTROPE INCLINE SUR LA PRESSE TRIAXIALE

Fig.2

BOEHLER (3) et LEFEVRE (4) ont étudié, par cete démarche, l'influence de θ pour des essais de compression simple sur argile. Un comportement anisotrope du matériau a été constaté, figure (3).



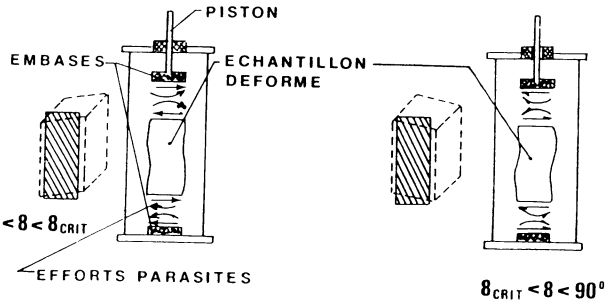
ANISOTROPIE DES MODULES ELASTIQUES

ET DES RESISTANCES EN COMPRESSION SIMPLE

Fig.3

Les travaux de GIBSON (5), DUNCAN et AL (1), GRAHAM et AL (6), CAIRNTROSS et AL (7) et BALLESTER et AL (8) donnent des indications intéressantes sur ce problème. Malheureusement, on observe des divergences et parfois des contradictions quant aux conclusions des diverses études présentées dans la littérature.

La naissance d'efforts parasites aux extrémités de l'échantillon du fait de l'inclinaison des particules d'une part, et de la rigidité ainsi que du frottement sur les embases d'autre part, ne permet pas d'obtenir des mesures exactes des contraintes avec l'essai triaxial, comme le montre SAADA (2), figure (4).



EFFORTS PARASITES CREES AU COURS DE LA COMPRESSION SIMPLE DUE A L'INCLINAISON D'ECHANTILLON

Fig.4

On peut, par ailleurs, simuler ce phénomène en employant un appareil permettant d'imposer toute orientation choisie des axes principaux de contrainte. Cela est possible avec le prototype de torsion sur cylindre creux.

L'étude de l'anisotropie par cette démarche présente des avantages incontestables par rapport à celle utilisant l'essai triaxial classique.

Nous présentons, dans cet article, une étude expérimentale de l'influence de la rotation des axes principaux α sur le comportement de la kaolinite consolidée de manière anisotrope. Afin d'y parvenir, nous nous servons d'un nouvel apapreil de torsion réalisé pour cet objectif, GOLCHEH (9). Notre précédente publication contient la description de ce prototype (10).

Néanmoins, avant d'aborder l'analyse des résultats obtenus, nous précisons les caractéristiques de l'essai.

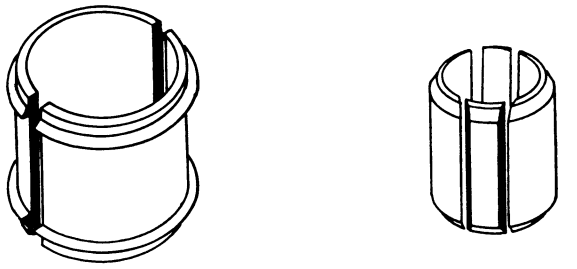
2 - PREPARATION DE L'ECHANTILLON

Les échantillons testés ont une forme cylindrique creuse avec les dimensions suivantes :

- rayon extérieur, Re = 80 mm
- rayon intérieur, Ri = 60 mm
- hauteur , H = 80 mm

L'argile utilisée est de type kaolinite.

Nous avons adoté deux méthodes de fabrication de l'échantililon : par "moulage" et par "taillage". Dans les deux cas, la consolidation est de type oedométrique. Pour le premier mode de fabrication, la pâte de kaolinite est consolidée directement dans des moules donnant à l'échantillon sa forme finale. Le moule intérieur comporte 4 parties amovibles et le moule extérieur deux, afin de faciliter le démoulage, figure 5.



Moule exterieure Moule interieure

Fig.5

Un chargement progressif est appliqué à l'éprouvette , durant environ un mois, jusqu'à la pression de consolidation de 500 kPa. L'échantillon après le démoulage est prêt à être testé.

La deuxième méthode consiste à consolider la pâte d'argile dans un consolidomètre de grand diamètre (40 cm). La charge verticale est imposée à l'aide d'un vérin hydraulique connecté à une pompe hydraulique et un multiplexeur de pression. Une pression de consolidation de 500 kPa est obtenue au bout de deux mois. Le chargement se fait progressivement.

Nous découpons, ensuite, grâce à un outil spécifique à cette procédure, l'échantillon cylindrique creux à partir d'un bloc d'argile consolidée.

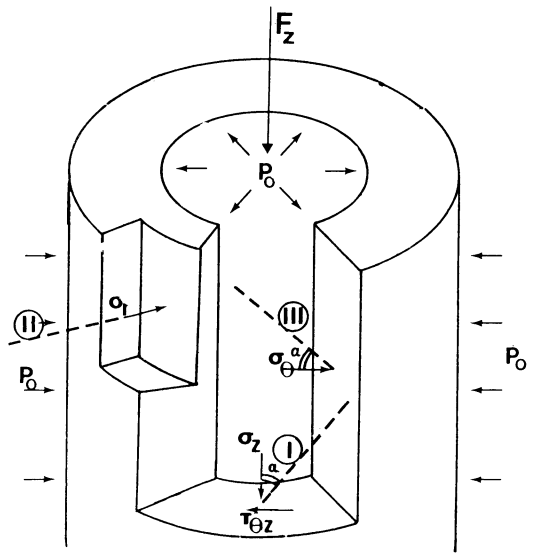
3 - ETAT DE CONTRAINTE

La figure (6) présente les contraintes σ_{zz}, $\sigma_{\theta\theta}$, σ_r et $\tau_{\theta z}$ agissant à l'intérieur de l'échantillon cylindrique creux. Une force axiale F_z, une pression de confinement P_0 et un couple de torsion M_t sont à l'origine de ces contraintes. En raison des valeurs identiques des pressions à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre creux, les contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont égales.

Nos systèmes de sollicitation sont de type "déformation contrôlée". Cependant, le pilotage des essais par ordinateur nous permet de maîtriser les contraintes générées de manière à suivre divers chemins de contrainte. Les forces et les déplacements sont mesurés automatiquement et le nombre important de mesures prises contribue à une meilleure précision des courbes expérimentales.

Les vitesses de la déformation axiale ε_{zz} et de la distorsion $\varepsilon_{\theta z}$ sont de l'ordre de 10^{-5} et 10^{-4} par minute, respectivement.

Le schéma précédent indique également la direction que prennent les contraintes principales majeure (1) et mineure (3) par rapport à l'axe Z et/ou l'axe tangentiel Signalons que la direction de la contrainte principale intermédiaire ainsi que la valeur $\sigma_2 = \sigma_r$ sont maintenues constantes au cours d'un essai et ne sont donc pas influencées par la torsion.



Etat de contrainte dans un cylindre creux

Fig.6

La rotation des axes principaux de contraintes d'un élément à deux dimensions, lorsqu'il subit une contrainte tangentielle, est illustrée par la figure 7. Le cercle de Mohr (CI) représente l'état initial de l'élément.

Après l'application de la contrainte tangentielle $\tau_{\theta z}$, ce cercle s'élargit à celui (CII) correspondant à l'état final des contraintes. Nous avons, ainsi, les nouvelles valeurs des contraintes principales et les nouvelles directions des axes principaux 1, 3 et on obtient l'angle de rotation par l'expression :

$$\tan 2\alpha = 2\,\tau_{\theta z} / (\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta}) \qquad (1)$$

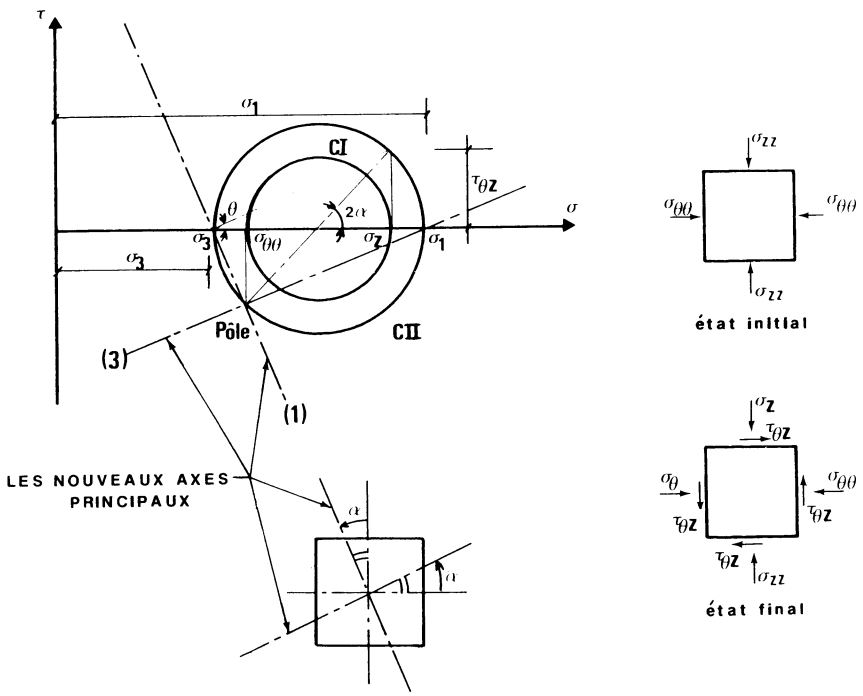


Fig.7

4 - CHEMIN DE CONTRAINTE

Nous consolidons l'échantillon dans la cellule triaxiale sous une pression isotrope égale à la contrainte de préconsolidation, pendant 24 heures.

L'essai de torsion (proprement dit) comprend une succession de chemins illustrés dans la figure 8 :

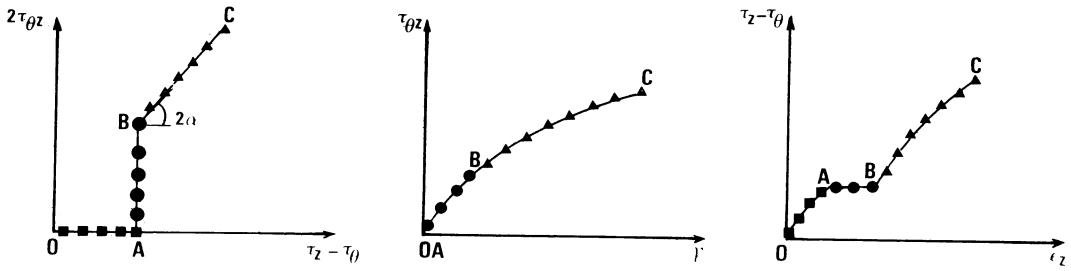


Fig.8

OA représente une compression triaxiale.

AB représente un chemin de contrainte, à l'excédent axial de contrainte ($\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta}$) constant. La torsion est commencée, la contrainte tangentielle et, par conséquent, l'angle de rotation progressent d'une façon continue.

BC représente un chemin de contrainte dit à "α constant"

Afin de maintenir constante la position des axes principaux, la relation ci-après est respectée :

$$\Delta\sigma_{zz} = 2\,\Delta\,\tau_{\theta z} / \tan 2\alpha \qquad (2)$$

où α est l'angle de rotation au Point B, $\Delta\tau_{\theta z}$ l'accroissement de la contrainte tangentielle et $\Delta\sigma_{zz}$ l'augmentation que doit subir la contrainte axiale pour respecter la relation (2).

Cet ensemble de chemins est piloté par un ordinateur.

5 - PROGRAMME D'ESSAIS

Nous avons regroupé les caractéristiques des essais effectués dans le tableau suivant :

N° d'essai	Notation	Mode de Préparation	Chemin de Sollicitation	α à la Rupture
1	CNMT 3	T (1)	OA	0
2	" 8	M (2)	OABC	11,25°
3	" 7	T	"	15
4	" 9	M	"	22,5°
5	" 6	T	"	30
6	" 5	T	OAB	35

(1) Préparation par "taillage"
(2) Préparation par "moulage"

Les résultats sont présentés, figures 9 à 13.

6 - ANALYSE DES RESULTATS

L'évolution de α en cours d'essai, en fonction de la contrainte tangentielle, $\tau_{\theta z}$, figure 9, mérite quelques remarques. Les parties de courbes correspondant au chemin AB coincident pour tout essai ayant la même contrainte axiale. Bien qu'une très bonne précision de la valeur moyenne de cet angle (± 0.5°) durant le chemin BC soit atteinte, sa répartition réelle , comme la contrainte tangentielle, n'est pas uniforme.

Le cas le plus défavorable, qui correspond à l'hypothèse d'un comportement élastique, implique la proportionnalité de $\tau_{\theta z}$ ainsi que de $tg2\alpha$ avec r, distance par rapport à l'axe. Ce cas n'apparaît que dans le domaine élastique ; les contraintes sont alors faibles et, par conséquent, la variation de α, demeure relativement faible. Lors de l'écoulement plastique, $\tau_{\theta z}$ ainsi que α sont constants en tout point.

La figure 10 présente les courbes d'excédent axial de contrainte, $(\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta})$, en fonction de la déformation axiale. L'allure de ces courbes est identique pour la classe de sollicitation considérée. On observe, par contre, que le pic de contrainte et la déformation axiale correspondante diminuent avec l'accroissement de α.

Contrairement au cas de la contrainte axiale, la variation de la contrainte tangentielle maximale est dans le même sens que celle de α, figure 9.

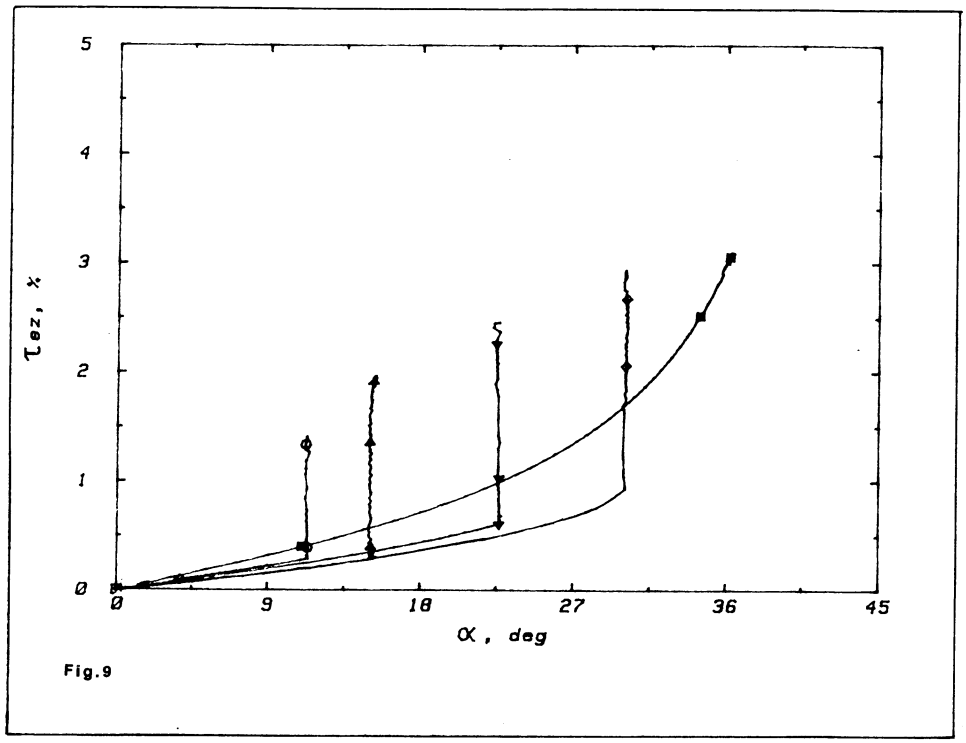


Fig.9

□	CNMT3	Alpha=0
○	CNMTB	Alpha=11.25
△	CNMT7	Alpha=15
▽	CNMT9	Alpha=22.5
◇	CNMT6	Alpha=30
■	CNMT5	Alpha 35

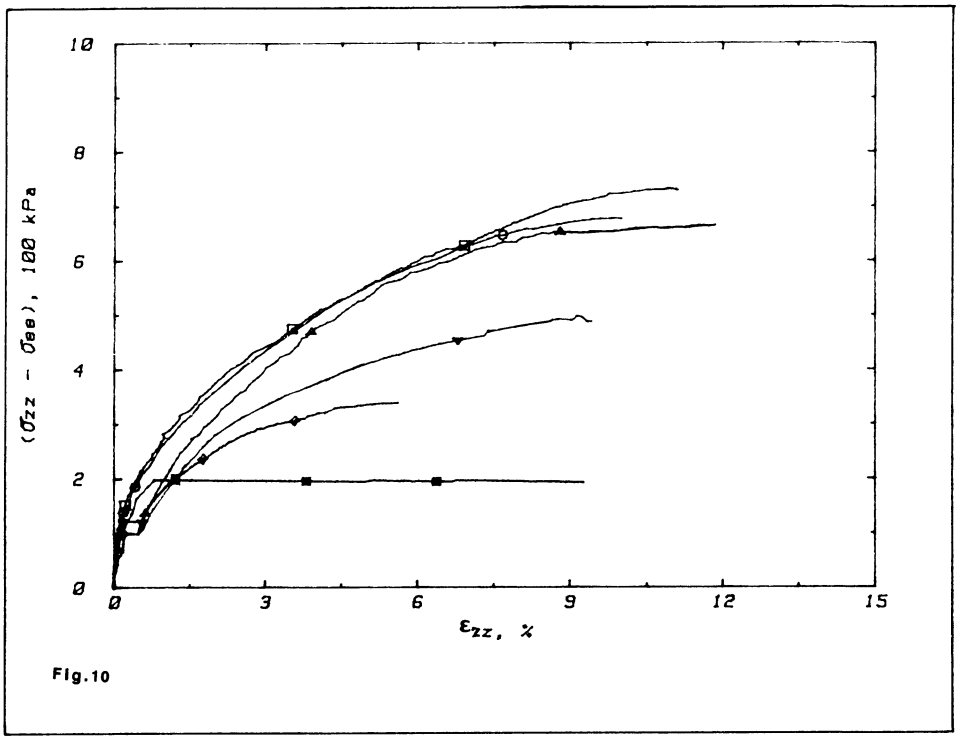

10
8
6
4
2
0
0
3
6
9
12
15
(σzz - σee), 100 kPa
εzz, %

Fig.10

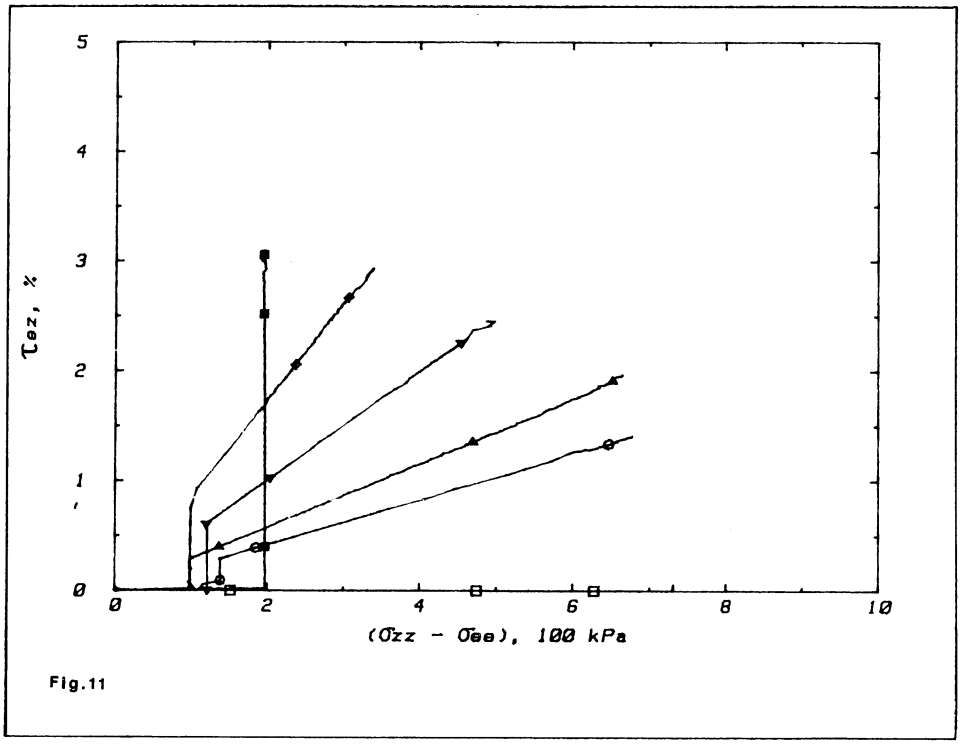

5
4
3
2
1
0
0
2
4
6
8
10
τez, %
(σzz - σee), 100 kPa

Fig.11

Selon la figure 11, les résultats présentés dans le plan $(\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta}) - \tau_{\theta z}$ indiquent que le couple entrainant l'échantillon à la rupture ou plus précisément la contrainte tangentielle à la rupture dépend de la contrainte axiale en cours d'essai. Cette observation diffère de celle obtenue dans les expériences de torsion de Habib (11), qui donnaient une indépendance du couple par rapport à la contrainte axiale imposée. La section pleine de l'échantillon cylindrique testé fait éventuellement partie des difficultés d'interprétation des essais de Habib.

Poursuivons l'étude de la figure 11 en considérant particulièrement le chemin de contrainte suivi pour chaque essai, l'angle α ainsi que l'état de contrainte à la rupture. Ce dernier décrit une courbe sensiblement ellipsoïdale dans le quart de plan mentionné qui présente une symétrie par rapport à l'axe de contrainte normale.

La représentation des contraintes, à la rupture, dans le plan de Mohr-Coulomb ne permet pas de tracer une ligne tangente aux cercles ainsi obtenus et, par conséquent, de déterminer c et Φ, cohésion et angle de frottement interne.

Cette constatation peut être due à trois phénomènes distincts. Le critère de Mohr-Coulomb :

- ne tient aucun compte de la valeur de la contrainte principale intermédiaire ;
- ne s'applique qu'aux matériaux isotropes;
- ne prend donc pas en compte les rotations d'axes principaux.

Dans un essai de torsion, la contrainte principale intermédiaire (σ_2) varie par rapport aux contraintes majeure (σ_1) et mineure (σ_3). Ce changement relatif est habituellement représenté par le paramètre :

$$b = (\sigma_2 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3),$$

qui varie entre 0 (compression triaxiale) et 1 (extension triaxiale). La dépendance de la résistance au cisaillement des sols en fonction de b a été par ailleurs mise en évidence, 12 et 13 .

Selon le critère de Mohr-Coulomb, pour un déviateur positif, la surface de rupture fait l'angle Ψ avec l'axe de symétrie de l'échantillon. $\Psi = (45° - \Phi/2)$ ne dépend que des contraintes moyenne et majeure (σ_1 et σ_3), car ce critère implique :

$$\sin \Phi = (\sigma_1 - \sigma_3) / (\sigma_1 + \sigma_3) \qquad (3)$$

Pour un échantillon dont les particules n'ont aucune orientation préférentielle, la structure ne peut avoir d'influence sur la direction du

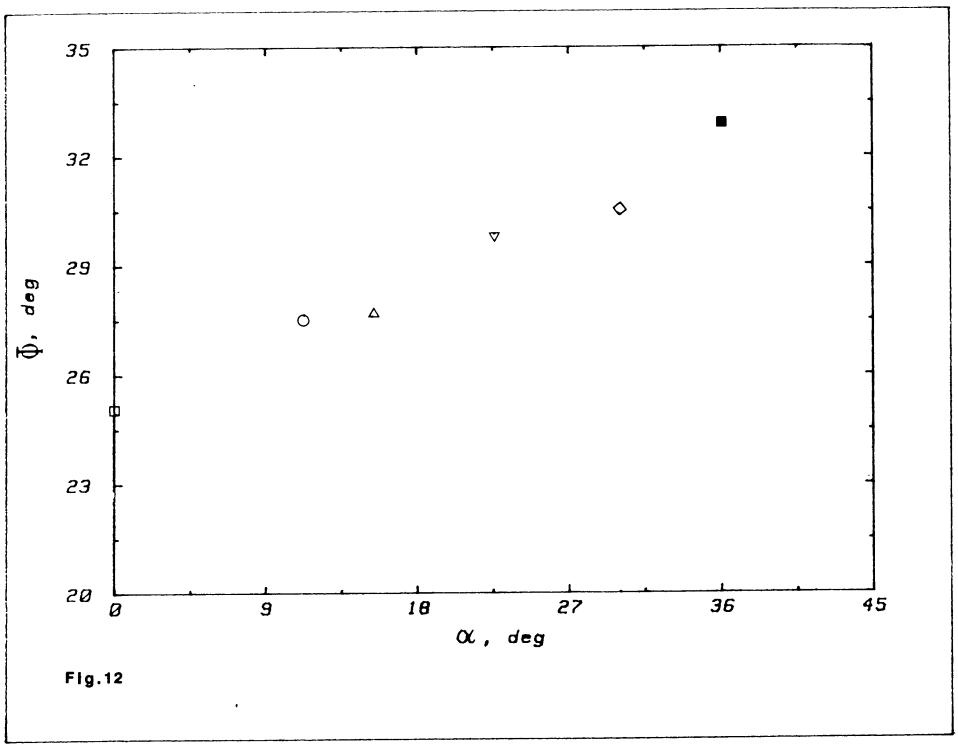

35
32
29
26
23
20
Φ, deg
0
9
18
27
36
45
α, deg

Fig.12

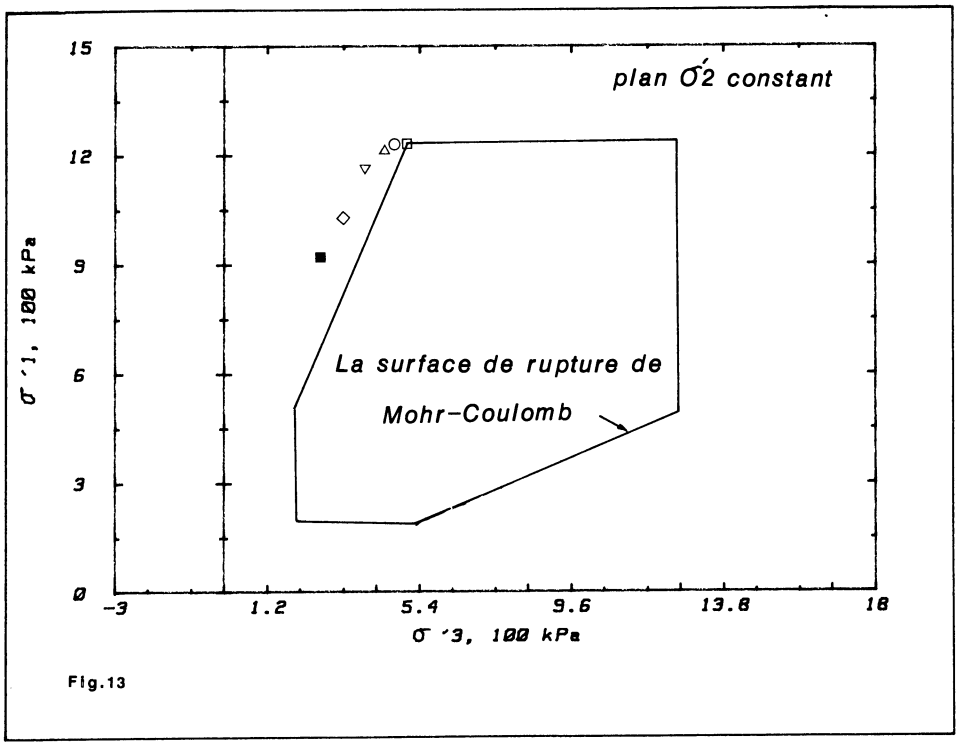

15
12
9
6
3
0
σ '1, 100 kPa
plan σ'2 constant
La surface de rupture de
Mohr-Coulomb
-3
1.2
5.4
9.6
13.8
18
σ '3, 100 kPa

Fig.13

plan de rupture. Par contre, il est, a priori, très probable que l'angle $\theta \neq o$ corresponde à une rupture dans une direction qui n'est pas celle indiquée par la relation Mohr-Coulomb.

Cette hypothèse, confirmée par Boehler (3) et Duncan (1), à partir des essais de compression, pourrait remettre en cause l'aptitude du critère de Mohr-Coulomb à décrire des ruptures de terrains naturels induites par les ouvrages.

Nos essais sur des cylindres creux d'argile légèrement anisotrope (la pression de confinement dans la cellule est égale à la contrainte de préconsolidation) aboutissent à des conclusions similaires :

- Nous avons obtenu une variation de Φ en fonction de α, cet angle étant déterminé pour chaque essai à partir de la relation (3), figure(12). La représentation de l'état de rupture, dans l'espace des contraintes principales, dans le plan σ_2 constant, illustre ce fait, figure (13).

- L'éprouvette atteint la rupture, ou plus exactement une discontinuité cinématique se développe, suivant une surface quasi-horizontale de type conique, figure 14, en compression triaxiale (Ψ = 90°). Pour les essais de torsion, la surface de rupture a une forme hélicoïdale dont l'inclinaison par rapport à la verticale augmente lorsque α croît. Du fait de l'homogénéité de l'éprouvette, on observe de nombreux plans parallèles de discontinuité. Malheureusement, à l'état actuel, nous ne pouvons pas indiquer une relation quantitative entre Ψ et α.

Signalons qu'au cours du chemin à α constante, b et α sont liés par la relation suivante : $b = \sin^2\alpha$, (9.).

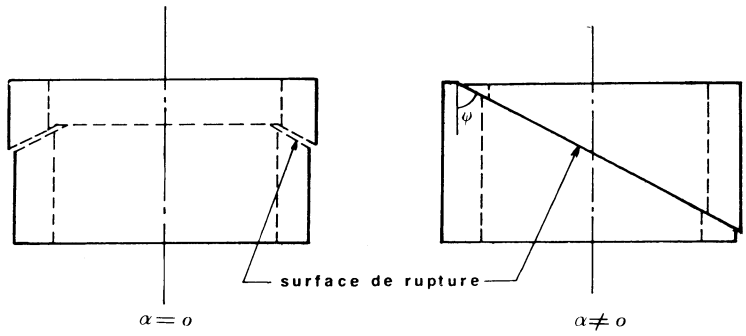


Fig 14

7 - CONCLUSION

Au terme de cette étude, on observe les principaux points :

- Les échantillons fabriqués selon une consolidation unidimensionnelle ainsi que la quasi-totalité des dépôts naturels argileux ont un arrangement préférentiel de leurs particules, ces dernières s'orientent sur des plans perpendiculaires à l'axe de consolidation.

- L'étude de l'anisotropie de comportement des argiles, induite par le caractère anisotrope de leur structure, demeure un problème ouvert. La méthode classique pour cette recherche, l'essai de compression sur des échantillons inclinés par rapport à l'axe de consolidation, se heurte à des problèmes techniques et l'aptitude d'une telle procédure est contestée.

- D'autres méthodes d'investigation de l'effet de l'anisotropie de structure consistent à confondre l'axe de symétrie de l'échantillon avec l'axe de consolidation et à incliner la direction de la contrainte principale majeure par rapport à la verticale. Cette inclinaison d'axes, comme le montrent nos expériences, entraine un changement de comportement du matériau testé.

- Le critère de Mohr-Coulomb n'est pas en mesure de justifier les résultats obtenus par ce type d'essai. En effet, nous n'avons pas pu tracer une ligne tangente aux cercles représentant l'état de contrainte à la rupture des divers essais effectués, alors que les caractéristiques des échantillons testés sont identiques. L'absence de la contrainte principale intermédiaire dans l'expression de ce critère et la restriction de la validité de celui-ci à des échantillons isotropes en sont fondamentalement responsables.

- Nous avons constaté expérimentalement que l'angle du frottement augmente avec l'inclinaison, comprise entre 0 et 35°, des axes principaux de contraintes par rapport à l'axe de consolidation.

REFERENCES

1 DUNCAN J.M. & SEED H.B. (1966)
"Anisotropy and stress reorientation in clay", Proc. ASCE. Jour. of Soil Mech. Found. Div. SMS, 22-50.

2 SAADA A.S. (1970)
"Testing of anisotropic clay soils", Proc. ASCE. Jour. of Soil Mech. Found. Div., vol. 93, SMS, 1846-1852.

3 BOHLER J.P. (1968)
"Contribution à l'étude de l'équilibre limite des sols anisotropes", Thèse de doctorat de spécialité, Grenoble.

4 LEFEVRE F. (1980)
"Corrélations quantitatives entre l'anisotropie de structure et l'anisotropie mécanique d'un kaolin. Evolution au cours d'une déformation irréversible", Thèse DDI, Grenoble.

5 GIBSON R.E. (1974)
"The analytical method in soil mechanics", Géotechnique 24, n° 2, 115-139.

6 GRAHAM J. & HOULSBY G.T. (1983)
"Anisotropic elasticity of a natural clay", Géotechnique 33, n° 2, 165-180.

7 CAIRNCROSS A. & JAMES R. (1977)
"Anisotropy in overconsolidation clays", Géotechnique 27, n° 1, 31-36

8 BALLESTER F. & SAGASETA C. (1979)
"Anisotropic elastoplastic undrained analysis of soft clays", Géotechnique 29, n° 3, 323-340

9 GOLCHEH Y. (1986)
"Contribution à l'étude des comportements de la kaolinite sous les sollicitations rotationnelles, réalisation d'un nouveau prototype de torsion", Thèse de doctorat en préparation, ECP-ENTPE.

10 ROBINET J.C. & GOLCHEH Y. & DEFFAYET M. & FAU D. (1983)
"Appareil de cisaillement des sols par torsion d'un cylindre creux", Groupe Français de Rhéologie, ENPC, Paris.

11 HABIB P. (1953)
"La résistance au cisaillement des sols", Annales de l'ITBTP, 6e année, n° 61.

12 BROOMS B.B. & CASBARIAN A.O. (1965)
"Effect of rotation of the principal stress axes and of the intermediate principal stress on the shear strength", 6th International Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Montreal, vol. 1, 179-183.

13 SHIBATA T. & KARUBE D. (1965)
"Influence of the variation of the intermediate principal stress on the Mechanical properties of Normally Consolidated clays", 6th Int. Conf. on Mech. Found. Eng., Montreal, Canada, vol. 1, 359-363.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 235-244

Propagation de fissure en mode II dans le schiste ardoisier

Mode II crack propagation in a slaty schist

G. VALENTIN, H. LAQUECHE

Laboratoire de Génie Civil (U A 867 du CNRS)
Université de Bordeaux I, 33405 Talence

RESUME

La propagation de fissure en mode de glissement a été étudiée numériquement et expérimentalement sur du schiste ardoisier.

L'étude numérique par éléments finis a permis de préciser les caractéristiques de l'éprouvette dite "compacte de cisaillement" et, notamment l'existence de mode I.

L'étude expérimentale a conduit à la détermination de G_{IIC} et de K_{IIC}.

ABSTRACT

Crack propagation in shear mode is studied by numerical method and experiments on slate schist.

The numerical investigation by finite element method is made on the "compact shear" specimen and shows the existence of opening mode.

The experiments give values of the critical stress intensity factor K_{IIC} and the strain energy release rate G_{IIC}.

1 - PROPAGATION DE FISSURE EN CISAILLEMENT

Les propagations de fissure en mode d'ouverture (mode I) sont bien étudiées sur la plupart des matériaux métalliques, composites ou sur les roches.

Par contre, les études de rupture en mode II (cisaillement plan) sont beaucoup moins courantes. C'est sans doute dans le domaine des matériaux composites qu'il y a le plus d'essais effectués.

Le moindre intérêt accordé au mode II, considéré comme moins dangereux pour les métaux que le mode I, n'est pas la seule explication. Il est en effet, beaucoup plus difficile en pratique, d'obtenir un mode II pur.

Pour les roches, cependant, ce mode présente un intérêt incontestable lorsqu'on étudie les mouvements des failles notamment en sismogenèse.

L'étude présentée a pour but de déterminer une éprouvette permettant la propagation d'une fissure en mode II sur un matériau rocheux orthotrope présentant une bonne homogénéité : le schiste ardoisier de Trélazé.

Ce n'est qu'assez récemment que la bibliographie fait état d'éprouvettes permettant d'obtenir du mode II. On peut citer en particulier :

. l'éprouvette d'ARCAN et al (1978) dont l'inconvénient est de demander un usinage délicat et un collage (Figure 1a).

. l'éprouvette de RICHARD (1981) (10) dont l'usinage précis des trous pose quelques problèmes avec le schiste (Figure 1b).

. l'éprouvette de flexion avec entaille utilisée par BARRETT (1977) a été testée sans succès dans cette étude (Figure 1c).

. l'éprouvette de la Figure 1d a été proposée par JONES et al (1975)(8) pour des matériaux isotropes. Elle est facile à fabriquer (découpe à la scie diamant) et acceptable dans ses dimensions (Figure 1d).

Son application aux matériaux orthotropes étant mal connue, elle a d'abord été étudiée en détail par éléments finis bidimensionnels pour 2 combinaisons des complaisances élastiques.

2 - ETUDE NUMERIQUE DE L'EPROUVETTE COMPACTE DE CISAILLEMENT

La méthode des éléments finis est universellement utilisée en mécanique de la rupture. Le code employé dans ce travail a été mis au point au Laboratoire il y a quelques années (RAZAFINDRAKOTO)(9). Les éléments sont des quadrilatères Q8 ou Q12 pour lesquels les contraintes varient linéairement ou quadratiquement dans l'élément. Pour éviter d'introduire un trop grand nombre d'éléments pour traduire la singularité de contrainte en fond de fissure et éviter aussi des difficultés de convergence, des éléments singuliers sont utilisés.

L'élément isoparamétrique présentant quatre noeuds sommets et quatre noeuds milieux des côtés est modifié, en rapprochant les noeuds situés au milieu des côtés les plus proches du fond de fissure (HENSHELL et al (5)).

En les positionnant au quart de la longueur du côté, on montre que les polynomes d'interpolation des déplacements sont proportionnels à la racine carrée de la distance depuis le fond de fissure. Ainsi, les déformations et par suite, les contraintes présentent la même singularité en $r^{-1/2}$ que la théorie.

La méthode d'obtention de K_I et K_{II} consiste alors à identifier les déplacements calculés numériquement en divers points proches du fond de fissure et les déplacements théoriques donnés en coordonnées polaires au voisinage du fond de fissure dans le plan 1,2 par les expressions suivantes : (11) :

$$u_1 = K_I\left(\frac{2r}{\pi}\right)^{1/2} \cdot \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left[\mu_1 p_2 z_2 - \mu_2 p_1 z_1\right]\right\} + K_{II}\left(\frac{2r}{\pi}\right)^{1/2} \cdot \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left[p_2 z_2 - p_1 z_1\right]\right\}$$

$$u_2 = K_I \cdot \left(\frac{2r}{\pi}\right)^{1/2} \cdot \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left[\mu_1 q_2 z_2 - \mu_2 q_1 z_1\right]\right\} + K_{II}\left(\frac{2r}{\pi}\right)^{1/2} \cdot \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left[q_2 z_2 - q_1 z_1\right]\right\}$$

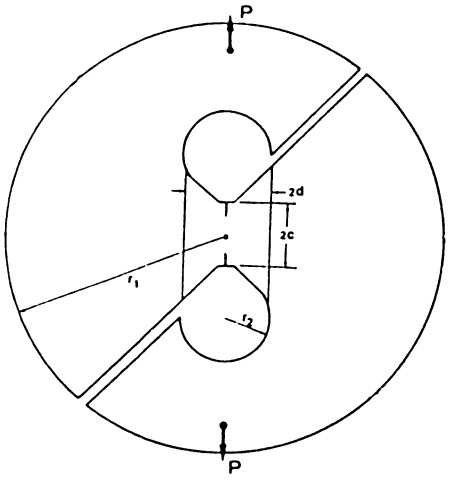


Figure 1a - Eprouvette d'ARCAN et al

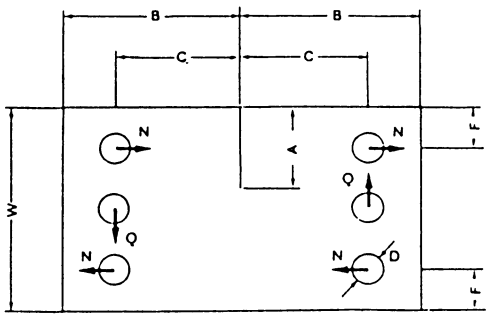


Figure 1b - Eprouvette de RICHARD

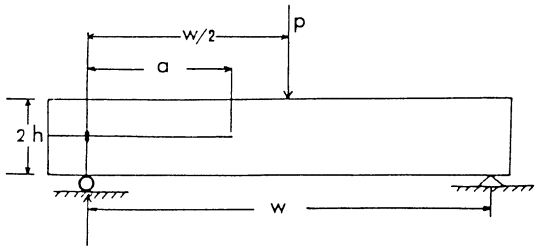


Figure 1c - Eprouvette de BARRETT et al

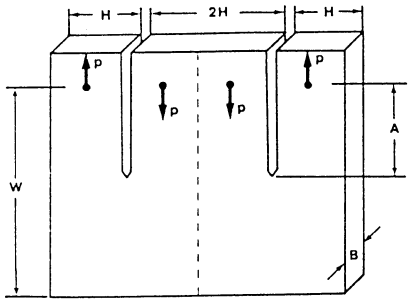


Figure 1d - Eprouvette de JONES et al

avec μ_1, μ_2 solution de l'équation caractéristique : $\alpha_{11}\,\mu^4 + (2\alpha_{12} + \alpha_{66})\,\mu^2 + \alpha_{22} = 0$

p_i, q_i, z_i tels que $p_i = \alpha_{11}\,\mu_i + \alpha_{12}$

$$q_i = \alpha_{12}\,\mu_i + \frac{\alpha_{12}}{\mu_i}$$

$$z_i = (\cos\theta + \mu_i \sin\theta)^{1/2}$$

avec en contraintes planes :

$\alpha_{ij} = S_{ij}$: coefficients de la matrice de souplesse ;

et en déformation plane :

$$\alpha_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3}\,S_{j3}}{S_{33}}$$

Il apparaît dans ces expressions que les deux modes sont découplés si on choisit les déplacements en $\theta = \mp\pi$ et une fissure suivant un axe matériel.
Pour une longueur de fissure donnée, les facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} sont calculés en différents points. Un lissage linéaire et une extrapolation jusqu'en fond de fissure, donnent K_I et K_{II}.

A titre de validation de la discrétisation de la figure 2, la comparaison

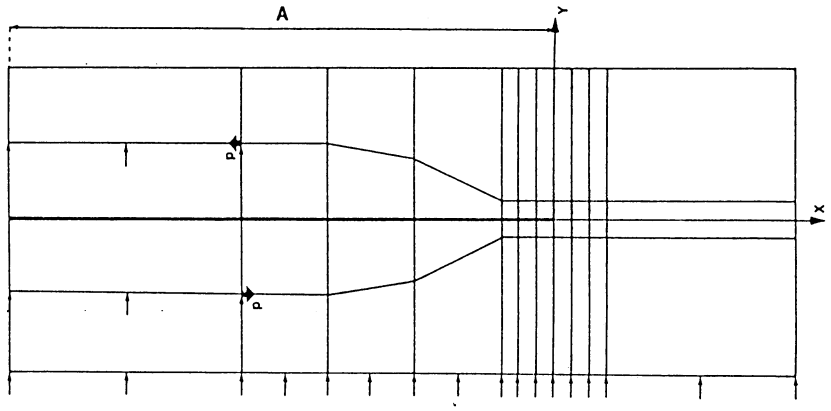


Figure 2 - Discrétisation d'une demi éprouvette CS

des différentes valeurs de K_{II} a été faite pour un matériau isotrope avec les résultats de JONES (Figure 3).
Celui-ci a déterminé K_{II} par collocation aux limites et a vérifié ses résultats en photoelasticité.
L'accord est bon et les résultats correspondent également à ceux trouvés par HOYNIAK (7) en éléments finis pour des dimensions d'échantillon voisines. Le mode I a été également recherché. La valeur de $K_I/\sqrt{a}$ en fonction de la longueur de fissure, est portée sur la figure 4.

K_I croît avec la longueur de fissure et reste assez faible avec les conditions aux limites choisies. Cependant, le rapport K_I/K_{II} atteint 36 % pour les grandes longueurs de fissure ce qui est très élevé.

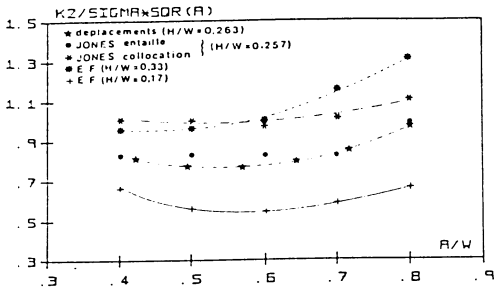


Figure 3 - Comparaison de K_{II} en fonction de la longueur de fissure

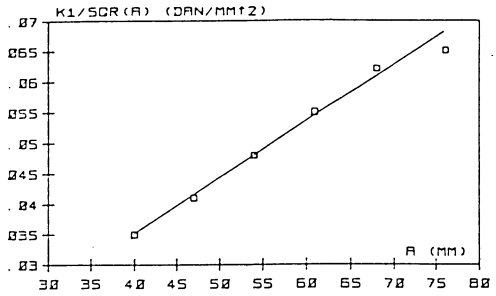


Figure 4 - Variation de $K_I\sqrt{a}$ en fonction de a (milieu isotrope)

La même éprouvette a été étudiée avec une combinaison de modules d'un matériau isotrope transverse :

E_1 = 17000 MPa ; E_2 = 1080 MPa ; G_{12} = 1400 MPa ; ν_{12} = 0,22 ;

ν_{23} = 0,62.

La Figure 5 permet de comparer les valeurs de $K_{II}/\sigma\sqrt{a}$ obtenues pour un milieu isotrope et un milieu orthotrope. L'écart assez faible, peut permettre de négliger l'influence des modules élastiques exacts.

Une expression polynomiale acceptable à 5 % près pour H/W voisin de 0,2 et pour $\frac{a}{w}$ compris entre 0,3 et 0,8 peut être donnée :

$$K_{II} = \sigma\sqrt{a}\ \left[1{,}65 - 3{,}29\ \frac{a}{w} + 3{,}04\ \left(\frac{a}{w}\right)^2\right]$$

avec σ = P/(BH)

L'étude de K_I a également été faite sur ce matériau : (Figure 6) :

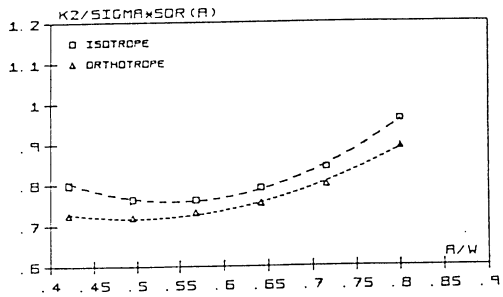


Figure 5 - Comparaison de K_{II} en fonction de la longueur de fissure

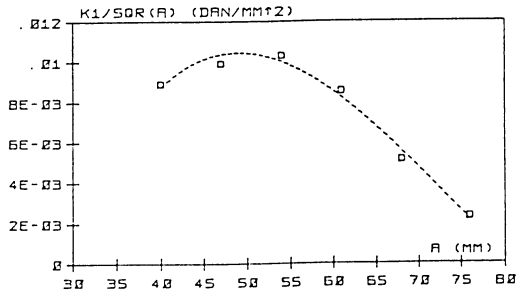


Figure 6 - Variation de $K_I\sqrt{a}$ en fonction de a (milieu orthotrope)

En fonction de la longueur de fissure, la courbe est assez différente de celle de la figure 4 puisque K_I décroît avec la longueur de fissure au-dessus de la valeur moyenne a/w = 0,6. Mais il est important de noter que K_I ne dépasse pas 7 % de la valeur de K_{II}.

Ainsi, avec les conditions aux limites choisies, cette éprouvette s'avère de mauvaise qualité avec les matériaux isotropes, mais est très convenable pour un matériau fortement orienté.

3 - ESSAIS DE RUPTURE

Les échantillons ont été fabriqués à partir de blocs de 30 x 40 x 8 cm conservés sous l'eau pour éviter les fissurations dues au séchage.

L'entaille, amorce de rupture, a été effectuée à la scie circulaire diamantée. Une entaille en "chevron" à 45° de 1,5 mm de largeur a été ainsi réalisée.

Les éprouvettes sont restées mouillées pendant l'essai effectué à la vitesse de déplacement de traverse de l'ordre de 1 mm/mn. Les courbes force-déplacement de glissement (Figure 7) sont sensiblement linéaires jusqu'à la rupture. Elles sont acquises en continu et stockées sur micro-ordinateur pour traitement ultérieur.

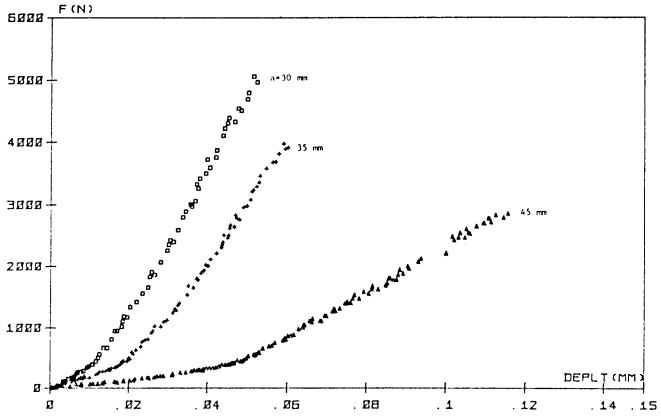


Figure 7 - Courbes expérimentales Force-Déplacement.

La valeur critique d'amorçage de la rupture est prise de façon analogue à la norme des aciers (intersection de la courbe avec une droite de pente égale à 95 % de la pente moyenne de la courbe de charge).

Le calcul de la complaisance C(a) fonction de la longueur de fissure permet de déduire après lissage, le taux de restitution d'énergie :

$$G_{IIC} = \frac{Pc^2}{2B} \cdot \frac{\partial C(a)}{\partial a}$$

Les valeurs de G_{IIC} sont portées sur la figure 8 en fonction de la longueur de fissure. La dispersion reste acceptable compte tenu du matériau.

Le facteur d'intensité de contrainte critique K_{IIC} a été calculé à partir du polynome du paragraphe précédent et de la charge critique.

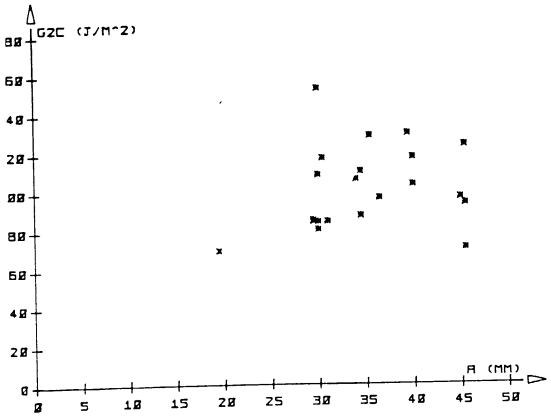


Figure 8 - G_{IIC} fonction de la longueur de fissure.

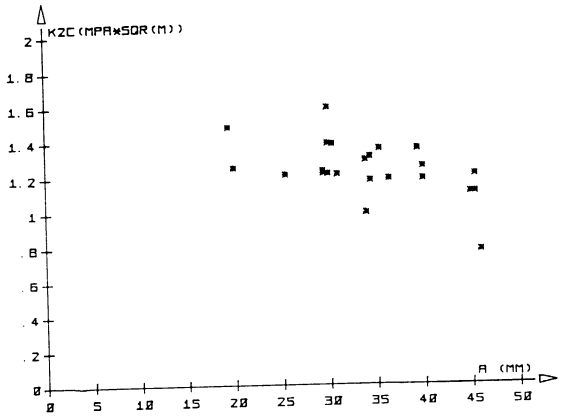


Figure 9 - K_{IIC} fonction de la longueur de fissure.

La figure 9 donne les valeurs de K_{IIC} pour plusieurs longueurs de fissure. Ces valeurs quoique dispersées sont sensiblement indépendantes de la longueur de fissure.

En règle générale, les fissures bifurquent légèrement après l'amorçage. L'angle de bifurcation sensiblement croissant avec la longueur de fissure, est de l'ordre de quelques degrés.

L'identification exacte du mode de rupture a été faite au microscope électronique à balayage. Les photos des figures 10 et 11 correspondent respectivement au mode II et au mode I. Les faciès sont aisément différenciés.

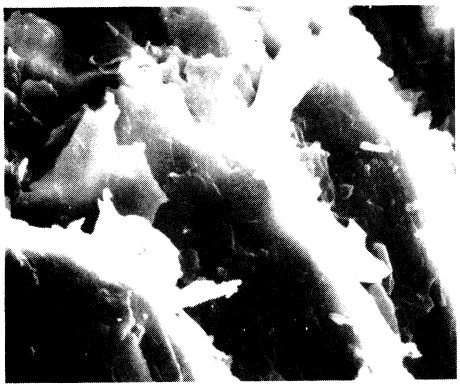


Figure 10 - Faciès de rupture en mode II.



Figure 11 - Faciès de rupture en mode I.

4 - DISCUSSION DES RESULTATS

Il est intéressant de comparer ces valeurs de tenacité aux valeurs obtenues sur le même matériau en mode I.

Les différentes valeurs sont portées dans le tableau ci-dessous avec leur dispersion.

$G_{IIC} = 100 \mp 10$ J/m^2	$K^*_{IIC} = 2,7 \mp 0,5$ Mpa $\sqrt{m}$	$K_{IIC} = 1,3 \mp 0,1$ MPa $\sqrt{m}$
$G_{IC} = 16 \mp 3$ J/m^2	$K^*_{IC} = 0,95 \mp 0,1$ MPa $\sqrt{m}$	$K_{IC} = 0,9 \mp 0,1$ MPa $\sqrt{m}$

En élasticité linéaire, les relations ci-dessous, (11) permettent de passer de G à K :

$$K^*_{IIC} = \sqrt{G_{IIC}} \left[\frac{E_1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \frac{E_1}{2 G_{12}} - \nu_{12}\right)\right]^{-1/4}$$

$$K^*_{IIC} = \sqrt{G_{IIC}} \left[\frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \frac{E_1}{2 G_{12}} - \nu_{12}\right)\right]^{-1/4}$$

Les modules élastiques ont été déterminés par une méthode ultrasonore (2,25 MHz) utilisant un banc automatique piloté par microordinateur. La méthode de traitement est basée sur les transformées de Fourrier (HOSTEN (6)-

La matrice de souplesse a été trouvée telle que :

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{111000} & \frac{-0,19}{111000} & \frac{-0,24}{111000} & & & \\ \frac{-0,11}{62400} & \frac{1}{62400} & \frac{-0,11}{62400} & & 0 & \\ \frac{-0,24}{111000} & \frac{-0,19}{111000} & \frac{1}{111000} & & & \\ & & & \frac{1}{48100} & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & \frac{1}{17200} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{17200} \end{bmatrix}$$

K^*_{IIC} et K^*_{IC} ont alors pu être calculés respectivement à partir de G_{IIC} et de G_{IC} (tableau précédent).

K^*_{IC} et K_{IC} sont sensiblement identiques. Par contre, K^*_{IIC} est beaucoup plus grand que K_{IIC}.

De nombreux auteurs (HENRY, CARPINTERI,(3)) ont également trouvé un écart important pour des roches ou du béton en mode I.

Cet écart est attribué à un endommagement qui réduit le module d'élasticité. Dans le cas du schiste, l'endommagement serait négligeable en mode I. Par contre, il serait très élevé en mode II. On peut cependant penser qu'il y a en plus, des frottements des surfaces de fissure non négligeables.

Enfin, les modules déterminés par propagation d'ondes ultrasonores, ne doivent être considérés que comme des ordes de grandeur.

Il est possible de rechercher des corrélations entre des valeurs critiques de mode I et II par l'intermédiaire de critères de rupture en mode mixte.

L'introduction des critères d'ERDOGAN-SIH (11) et de la densité d'énergie de SIH n'ont permis aucune corrélation supplémentaire.

5 - CONCLUSION

L'étude numérique par la méthode des éléments finis a permis de qualifier l'éprouvette CS pour une propagation de fissure en mode II dans un milieu orthotrope :

- elle est peu sensible aux modules élastiques exacts du matériau.
- elle ne présente que peu de mode I parasite.

L'étude expérimentale a conduit à des estimations de K_{IIC} et de G_{IIC}. C'est l'observation des faciès de rupture en microscopie électronique qui a permis de distinguer le mode II du mode I.

BIBLIOGRAPHIE

(1) - ARCAN, M ; HASHIN, Z ; VOLOSHIN, A. An edge cracked Mode II fracture specimen. Exp. Mech. p.257-261 - 1983 -

(2) - BARRETT, J.D. ; FOSCHI, R.O ; Mode II stress intensity factor for cracked wood beams. Eng. Fract. Mech. 9. p.371-378, 1977.

(3) - CARPENTERI, A. Experimental determination of fracture toughness parameters K_{IC} and J_{IC} for aggregative materials. 5e int. cong. on fracture. 1981.

(4) - HENRY, J.P. ; PAQUET, J. ; TANCREZ, J.P. Experimental study of crack propagation in calcite rocks. Int. J. Mech. Min. Sci. Vol.14 ; p.85-91 ; 1977.

(5) - HENSHEL, R.D. ; SHAW, K.G. Crack tip finite elements are unnecessary. Int. J. for numer Meth. in Engng. p.495-507 - 1975.

(6) - HOSTEN, B. ; CASTAGNEDE, B. Optimisation du calcul des constantes élastiques à partir des mesures de vitesse d'une onde ultrasonore. C.R. Acad. Sciences Paris -296. p.297-300 - 1983.

(7) - HOYNIAK, D ; CONWAY, J.C. Finite element analysis of the compact shear specimen. Engng. Fract. Mech. p.301-306. 1979.

(8) - JONES, O.L. ; CHISHOLM, D.B. An investigation of the edge sliding mode in fracture mechanics. Eng. Fract. Mech. 7. p.261-270. 1975.

(9) - RAZAFINDRAKOTO, J.C. Thèse D.D.I. - Bordeaux 1981.

(10) RICHARD, H.A. A new compact shear specimen - Int. Jal. of Fracture. p.105-107. 1981.

(11) SIH G.C. ; LIEBOWITZ, H. Mathematical theory of brittle fracture. Fract. Vol.II. Academic Press. p.67-190. 1968.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 245-260

Etude de l'anisotropie liée à la microfissuration des roches sédimentaires

Analysis of the anisotropy related to induced microcracks in sedimentary rocks

M. THIERCELIN

Etudes et fabrication Dowell Schlumberger
Z.I. Molina la Chazotte
42003 Saint-Etienne Cedex

RESUME

Les roches carottées à forte profondeur présentent lors des essais de laboratoire une anisotropie de structure liée à une fissuration orientée. Cette fissuration peut être attribuée dans la majorité des cas à la relaxation de la roche lors du carottage. Cette fissuration n'est donc pas présente dans la roche in-situ. Par contre elle est apparue un bon indicateur de la direction des contraintes principales existantes dans la formation.

Nous présentons dans cet article le principe des essais, ainsi que les dernières améliorations permettant une analyse tridimensionnelle précise des orientations des fissures en fonction de la pression hydrostatique, lors de la charge et de la décharge. Cette étude a permis de mettre en évidence l'influence du comportement de la matrice sur la fissuration, et surtout a révélé la présence de frottements lors d'essais hydrostatiques.

ABSTRACT

Rocks drilled in deep wells exhibit during laboratory experiments an anisotropy related to an orientation of microcracking. These microcracks have mainly be induced during the relaxation of the rock when drilled and should not exist in the in-situ formation. But these microcracks appear usefull to predict the orientation of the in-situ principal stresses.

This paper presents the testing procedure with the last improvement allowing an accurate tridimensionnal analysis of the crack orientations as a function of the pressure, during loading and unloading. This study reveals the influence of the matrix behaviour on the microcracks as well as the existence of slippages during hydrostatic tests.

INTRODUCTION:

L'effet d'une pression hydrostatique croissante sur la déformation d'une roche se traduit fréquemment par une diminution de la compressibilité jusqu'à un certain seuil où l'élasticité linéaire est obtenue (fig. 1.).
Cet effet a été étudié par plusieurs auteurs [1], [2] et est attribué à la fermeture progressive de microfissures préexistantes, la fermeture complète de toutes ces microfissures étant obtenue lorsque la linéarité de la courbe pression volume apparait. La compressibilité de la matrice est alors obtenue. L'influence de la microfissuration sur la compressibilité est modélisable dans le cas de fissures elliptiques, si l'on suppose qu'il n'y a pas d'interaction entre les fissures. La relation suivante est alors obtenue en sommant l'influence de toutes les microfissures [2]:

$$C' = C\,[1+2/3\ PI\ (1-\nu^2)/(1-2\nu)\quad c_i^2\ d_i/V]$$

où C' est la compressibilité de la roche, C la compressibilité de la matrice, ν le coefficient de Poisson de la matrice, c_i est la demi-longueur du grand axe de la ième fissure, et d_i la demi-longueur de l'axe intermédiaire de cette fissure, et V le volume de la roche. Il est à noter que l'axe principal de l'ellipse ne varie pas en fonction de la pression hydrostatique, ce qui ne serait pas le cas pour une fissure de forme quelconque [3]. En conséquence, la variation de la compressibilité en fonction de la pression ne peut être due qu'à la fermeture complète d'une microfissure.
A partir de l'hypothèse de fissure elliptique, Morlier [4] a développé une méthode d'analyse de la distribution de la porosité de fissure en fonction de la pression.

Plus récemment, il est apparu que cette microfissuration préexistante pouvait rendre la roche anisotrope à faible pression de confinement [5], anisotropie liée à une orientation privilegiée de cette microfissuraton.
Pour analyser cette orientation de microfissuration Siegfried et al [5] ont proposé d'utiliser l'hypothèse de fermeture linéaire de fissure. Cette hypothèse reprend en fait les résultats obtenus pour une fissure elliptique, c'est-à-dire que tant qu'une fissure n'est pas complètement fermée sa contribution sur la compressibilité de la roche est indépendante de la pression, mais elle ne suppose pas de forme a priori pour la fissure.

Strickland et al [6] ont appliqué cette méthode sur les roches sédimentaires carottées à forte profondeur, où il est apparu que celles-ci pouvaient présenter une forte anisotropie d'orientation de microfissures, même dans des formations non tectonisées. L'intérêt de la détermination de l'orientation des microfissures dans les roches sédimentaires vient de ce que cette orientation est attribuée à la relaxation de l'échantillon lors du carottage. L'orientation des microfissures serait donc un indicateur des orientations des contraintes principales in-situ. Des études ultérieures ont confirmé cette hypothèse, au moins dans de nombreux cas [7].

Les études conduites jusqu'à présent sur les roches sédimentaires n'ont considéré que la variation entre la

compressibilité à très faible pression (aucune fissure fermée) et la compressibilité intrinsèque de la roche. Les essais que nous avons effectués, où nous avons étudié l'influence de la pression sur les caractéristiques des fissures, ont amené plusieurs questions sur les risques d'erreur dans la détermination de l'orientation des microfissures, en particulier l'influence de l'anisotropie intrinsèque de la roche, de la rupture de la roche à faible pression hydrostatique et la validation de l'hypothèse de la fermeture linéaire. L'étude que nous présentons dans cet article donne des exemples de limite de validation.

1) METHODE EXPERIMENTALE

Afin de déterminer les tenseurs de déformation en fonction de la pression lors d'un essai de compressibilité, au moins six mesures indépendantes de déformation doivent être effectuées. Celles-ci sont déterminées à l'aide de jauges de déformation collées sur un échantillon de roche de forme cubique. Pour effectuer l'essai, l'échantillon est placé dans une cellule de confinement. La pression, transmise à l'échantillon par une huile hydraulique, est fournie par un convertisseur de pression servocontrolé. L'échantillon est isolé de l'huile par une jaquette en silicone. Les déformations sont mesurées non seulement lors de la montée en pression hydrostatique mais aussi lors de la descente. Durant l'essai, une acquisition de données s'effectue toutes les 0.5 secondes.

Afin de ne mesurer que la partie élastique de la déformation et de ne pas prendre en compte la partie visqueuse, les vitesses de montée en pression et de descente utilisées sont rapides (40 MPa/mn). La pression hydrostatique maximum est de 45 MPa.

2) INTERPRETATION DES RESULTATS

2 a) Compressibilité de la roche.

La compressibilité de la roche C_{ij} à une pression donnée est calculée à partir des dérivées des courbes pression-déformations, les axes de référence étant les axes principaux de déformation incrémentale. Dans un premier temps la compressibilité est calculée par rapport au système d'axe de l'échantillon:

$$C_{ij} = d\varepsilon_{ij} / dp$$

Les directions principales et les valeurs principales, valeurs propres et vecteur propre de la matrice, sont alors déterminées, ce qui donne:

$$C_i = d\varepsilon_i / p$$

2 b) Détermination des déformations liées à la fermeture des microfissures.

Les déformations liées à la fermeture des microfissures sont calculées entre deux pressions données, c'est-à-dire pour un incrément de pression fini.

Pour permettre de calculer ces déformations les hypothèses suivantes sont admises:

1- Le milieu non microfissuré est supposé suivre un comportement

linéaire élastique;
2- Une fissure unique suit une loi de fermeture linéaire, ce qui a été démontré pour une fissure elliptique (voir introduction);
3- Il n'y a pas d'interaction entre les microfissures.

Admettant ces hypothèses, les déformations Ec_{ij} liées à la fermeture des fissures complètement fermées à une pression p sont égales à la différence entre les déformations totales Et_{ij} et la somme des déformations de la matrice Em_{ij} et de celles (Ef_{ij}) des microfissures qui se fermeront à une pression supérieure à p.

$$Ec_{ij}(p) = Et_{ij}(p)-[Em_{ij}(p)+Ef_{ij}(p)]$$

Les deux derniers termes sont supposés linéaires et sont égaux aux déformations déterminées par la compressibilité à la pression p:

$$Em_{ij}(p)+Ef_{ij}(p) = C_{ij}(p)*p$$

Pour connaitre les déformations liées à la fermeture complète des microfissures entre deux pressions il suffit donc de calculer (voir figure 1):

$$Ec_{ij}(p2)-Ec_{ij}(p1) = Et_{ij}(p2)-C_{ij}(p2)*p2-[Et_{ij}(p1)-C_{ij}(p1)*p1]$$

Ces déformations déterminées, les valeurs et les directions principales de la matrice associée sont calculées. La direction préférentielle des fissures est la direction de la déformation principale mineure.

Il est possible de calculer ces déformations pour un incrément de pression infiniment petit. La formule suivante est obtenue:

$$Ec_{ij}(dp,p) = p *dC_{ij}(p)/dp * dp$$

Mais il nous est apparu difficile de déterminer la dérivée seconde des déformations à partir des courbes expérimentales pression-déformations. Cette dérivée est en effet très sensible aux fluctuations provenant des bruits de fond ou des hétérogénéités locales.

2 c) Analyse statistique:

Un des principaux problèmes expérimentaux est lié à la méthode de mesure des déformations qui est centimétrique et prend ainsi en compte les hétérogénéités locales. En particulier il apparait fréquemment sur les roches poreuses des ruptures de joint de grain à forte pression de confinement entrainant le poinçonnement des jauges de déformations. Des mesures de déformation non représentatives de la déformation globale sont alors obtenues.
Pour remédier à ces problèmes, le nombre de jauges installées sur l'échantillon est supérieur au minimum requis de six jauges. Il nous est apparu que le nombre optimum était de neuf jauges, avec trois jauges sur des directions orthogonales, le long des arêtes, et deux jauges sur chacune des faces, le long des diagonales.

Une analyse statistique est obtenue en déterminant le tenseur de déformation à partir de tous les groupes de six jauges indépendantes possibles. Ainsi pour neuf jauges, 51 résultats sont obtenus.

3) ECHANTILLONS ETUDIES

L'étude à été conduite sur trois échantillons orientés provenant de la formation de Brent. Ces échantillons ont été obtenus à partir d'un puits pétrolier de la Mer du Nord, à environ 3000 mètres de profondeur. Ces échantillons ont été sélectionnés en raison de leur appartenance à des horizons de propriété mécanique différente, bien que de constitution pétrographique voisine, la formation de Brent étant composée essentiellement de roches gréseuses.

4) RESULTATS

Les résultats de l'expérience sont montrés soit par les courbes non traitées de pression-déformations et leur dérivées, obtenues directement à partir des jauges, soit dans des tableaux de valeurs où sont indiquées les valeurs et les directions principales. Dans ce dernier cas les valeurs expérimentales ont été lissées. Les valeurs principales sont, soit les compressibilités (tableaux 1,3,5), soit les déformations liées à la fermeture des microfissures entre deux pressions données (tableaux 2,4,6). Les directions sont données par leur azimuth (A) et leur plongement (p), la référence étant le Nord, le sens positif vers l'Est.

4 a) Echantillon no 1.

Les courbes pression-déformations (figure 2) et les valeurs principales de compressibilité (tableau 1) indiquent une roche très déformable. A 5 MPa la compressibilité est élevée ($15*10^{-5}$ MPa^{-1}) avec une anisotropie bien évidente, le rapport des valeurs principales extrêmes étant de 1.43. L'augmentation de la pression entraine une rapide diminution de la compressibilité (figure 3), indiquant une phase de fermeture nette, ainsi qu'une légère diminution de l'anisotropie, le rapport des valeurs principales extrêmes devenant égal à 1.32 à 20 MPa. Il apparait malheureusement des ruptures locales liées à la faible résistance des joints de grain à partir de 20 MPa, empêchant la détermination des directions de déformation principale à des pressions supérieures, et l'étude de la descente en pression. Toutefois, les courbes de pression-déformations obtenues à partir des jauges où des ruptures ne sont pas apparues, n'indiquent pratiquement plus d'anisotropie et donnent une compressibilité de l'ordre de $2.5*10^{-5}$ MPa^{-1}. Ces courbes de pression-déformations sont aussi bien réversibles (figure 2).
Les directions des déformations principales sont relativement constantes lors de l'essai, et ceci jusqu'à 20 MPa. Entre 20 et 25 MPa l'effet du début de rupture de certaines jauges s'observe, entrainant une rotation des directions.

Les déformations dues à la fermeture des microfissures sont très importantes (tableau 2). La déformation volumique entre 5 et 15 MPa est égale à 1.8 %, ce qui est considérable.
Les orientations des microfissures n'ont pu être effectuées qu'à des pressions inférieures à l'apparition des ruptures locales et seulement durant la montée hydrostatique. Les orientations obtenues ne sont bien constantes qu'entre 10 et 20 MPa. Dans cette gamme de pression, elles sont similaires aux directions de compressibilité, en gardant à l'esprit que, pour des directions à

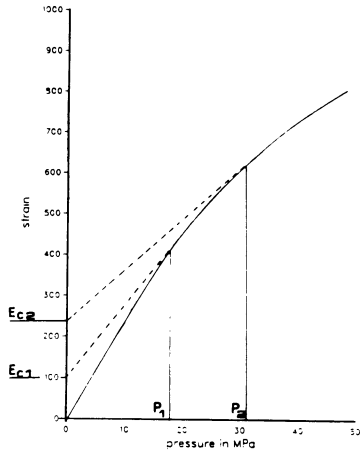


FIG. 1

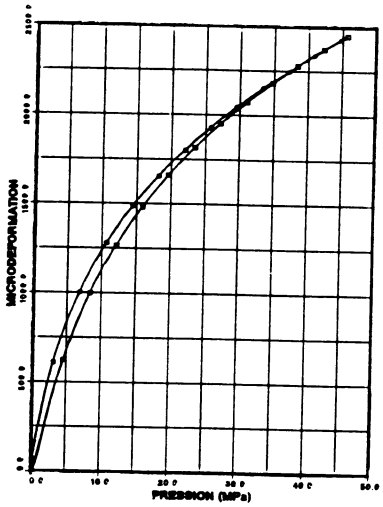


Fig. 2
Echantillon 1.

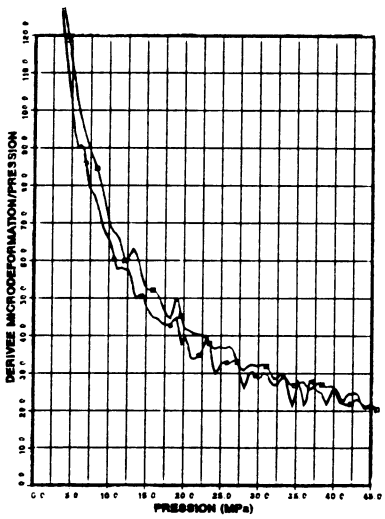


Fig. 3.
Echantillon 1.

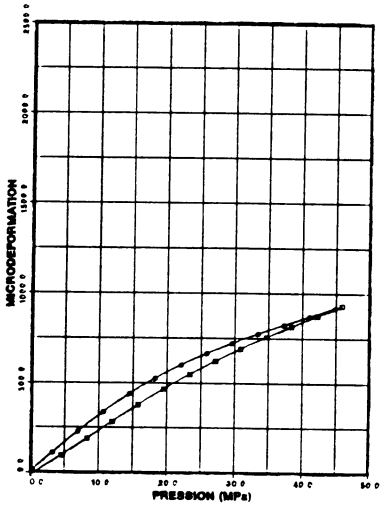


Fig. 4.
Echantillon 2.

pendage horizontal, l'azimuth est indiqué à 180° près.

Il est aussi à noter que l'écart-type des valeurs est très faible.

4 b) Echantillon no 2.

Cette roche est beaucoup moins compressible que la roche précédente, surtout à faible pression où la compressibilité est cinq fois plus faible(figure 4 et tableau 3). La phase de fermeture est aussi beaucoup moins nette. Les pentes des courbes pression-déformations montrent deux stades de comportement, surtout lors de la montée hydrostatique (figure 5). A faible pression (jusqu'à 10 MPa) les pentes sont constantes ou augmentent légèrement indiquant une faible augmentation de la compressibilité. Au dessus de 10 MPa, la phase de fermeture des microfissures est obtenue, avec la diminution de la compressibilité. La phase de réouverture des fissures lors de la décharge est d'ailleurs nettement mieux observable que lors de la montée. Une hystérésis importante est observée sur les courbes pression-déformations, due certainement à l'importance des frottements.
Ceci est aussi indiqué par la chute de la compressibilité au début de la décharge.

A faible pression (5.0 MPa), l'anisotropie de la roche est bien marquée avec un rapport des valeurs principales extrêmes de 1.64. Ce rapport va d'abord augmenter avec la pression puis diminuer. Il devient égal à 1.54 à 45 MPa. Il apparait donc que la matrice possède une certaine anisotropie.

Les directions des compressibilités principales sont constantes lors de l'essai, la direction des déformations principales majeures étant verticale.

Les déformations liées à la fermeture des microfissures sont nettement moins élevées pour cette roche que pour la roche précédente, indiquant un taux de fissuration plus faible (tableau 4). Les déformations liées à la réouverture des fissures lors de la descente hydrostatique sont aussi plus importantes que les déformations liées à la fermeture des microfissures lors de la montée hydrostatique. Les déformations les plus importantes sont obtenues entre 15 et 25 MPa.

A forte pression hydrostatique (35-45 MPa) des valeurs négatives apparaissent, indiquant la fermeture complète des fissures dans au moins une direction. Les directions des microfissures sont les mêmes que les directions d'anisotropie de la compressibilité. Elles sont bien constantes lors de l'essai, avec une légère différence entre la montée et la descente.

4 c) Echantillon no 3.

Les courbes pression-déformations (figure 6) et le tableau de compressibilité (tableau 5) indiquent une roche très anisotrope, et ceci quelquesoit la pression, sans commune mesure avec les roches précédentes. Le rapport des valeurs principales extrêmes est de 7.12 à 5 MPa. Il diminue avec la pression et devient égal à 3.9 à 45 MPa. La matrice apparait donc fortement anisotrope. Les orientations sont constantes lors de la montée et de la descente.

Les pentes des courbes pression-déformations (figure 7) indiquent deux phases sur certaines directions, de facon similaire à la roche précédente. Jusqu'à environ 10 MPa les

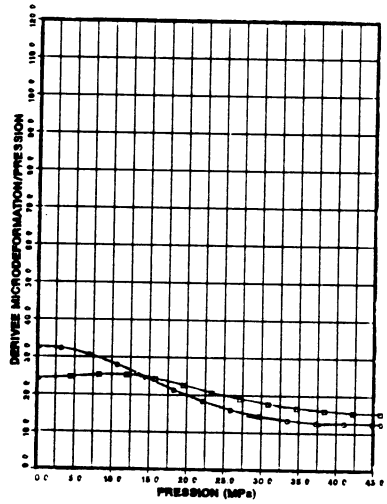


Fig. 5
Echantillon 2.

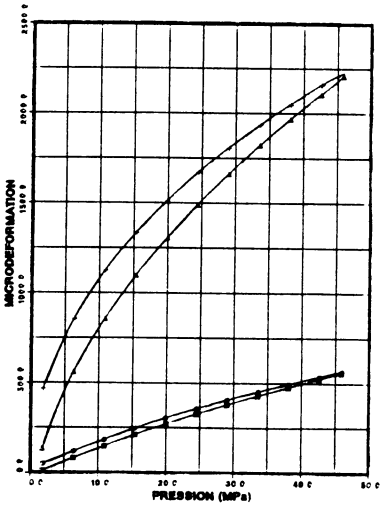


Fig. 6.
Echantillon 3.

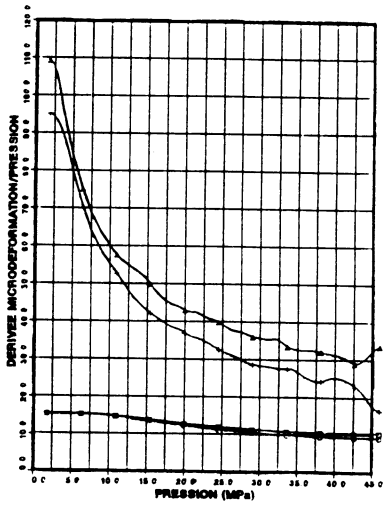


Fig 7.
Echantillon 3.

pentes ont une légère tendance à augmenter, puis elles diminuent en fonction de la pression.

Les courbes pression-déformations montrent aussi une hystérésis marquée, avec diminution de la compressibilité nette au début de la descente.

Les déformations liées à la fermeture des microfissures reflètent aussi cette forte anisotropie de matrice (tableau 6). Ces déformations sont beaucoup plus importantes dans le sens vertical, qui apparait être la direction de compressibilité maximale de la matrice. De plus, à faible pression et à forte pression des valeurs de déformation négative apparaissent. Si, à forte pression, ces valeurs négatives peuvent s'expliquer par la fermeture complète des microfissures dans une direction, à faible pression, elles indiquent certainement la non validation des hypothèses requises.

Les directions des microfissures sont assez constantes lors de l'essai, mais avec un écart-type important.

5) DISCUSSION

Il apparait d'abord que les trois roches étudiées montrent toutes une diminution de la compressibilité en fonction de la pression, indiquant l'existence d'une microfissuration importante. Cette diminution de la compressibilité en fonction de la pression est aussi fonction de la roche. Elle est d'autant plus importante que la roche est compressible, montrant que le taux de fissuration est fonction de la compressibilité de la roche.

Cette fissuration possède une orientation préférentielle rendant la roche à matrice isotrope anisotrope à faible pression, ou dans le cas de roche à matrice anisotrope, accentuant cette anisotropie. Dans la formation que nous avons étudiée, l'orientation de cette microfissuration est similaire d'une roche à une autre. La direction de la déformation principale mineure liée à la microfissuration est la même pour toutes les roches, environ N 30 E, horizontale. Les directions des déformations principales majeures et intermédiaires sont semblables avec une inversion des directions entre l'échantillon 1 et les échantillons 2 et 3. Pour le premier échantillon, la direction de la déformation principale majeure est de N 120 E, horizontale, l'intermédiaire est proche de la verticale, et inversement pour les deux autres roches.

L'orientation indiquée par cette fissuration est en accord avec l'état de contraintes in-situ à l'échelle régionale, déterminé par d'autres méthodes. [8] et [9] ont obtenu une direction de la contrainte principale majeure dans le plan horizontal d'environ N 130 E, et donc une direction de contrainte principale mineure de N 40 E. Ceci indique que la fissuration obtenue dans les échantillons étudiés, a certainement été induite par la relaxation de la roche lors du carrotage, les fissures étant orientées dans l'axe de la contrainte principale mineure, et non à 90°, ce qui serait le cas si elles avaient été induites par l'état de contrainte lui-même.

La rotation des directions de déformations principales pour les deux dernières roches peut s'expliquer facilement par leur anisotropie de matrice. Ces roches étant plus déformables dans le sens vertical que dans les sens horizontaux, les fissures ont été ouvertes préférentiellement dans le plan vertical. L'anisotropie de la roche affecte donc les directions des microfissures, mais

nous voyons que du fait de la nature même des roches sédimentaires qui sont proches de l'isotropie transversale horizontale (du fait du litage horizontal), la contrainte principale mineure, le plus souvent horizontale dans les roches sédimentaires peu tectonisées, est toujours bien prédite.

L'avantage de l'étude des directions des microfissures par incrément de pression est révélé par ces essais. Ces directions ne sont bien indépendantes de la pression que dans une certaine plage. Elles peuvent être fausses aux faibles pressions, ce que nous discuterons au paragraphe suivant, mais aussi aux fortes pressions, soit à cause de la fermeture complète des fissures dans une certaine direction et la non-validation de l'hypothèse de fermeture linéaire des fissures, soit à cause de ruptures au niveau du grain.

Un point important est le comportement complexe jusqu'à 5-10MPa presenté par les roches étudiées, comportement d'autant plus évident que la roche est peu compressible. En effet, jusqu'à ces pressions une augmentation de la compressibilité en fonction de la pression est observée. Ce phénomène a pu être interprété par les auteurs antérieurs comme une compressibilité constante en fonction de la pression, due à l'absence de fermeture complète de fissure durant cette phase. Cette interprétation ne résiste pas à une analyse fine des courbes, et surtout les déformations liées à la microfissuration sont soit de direction non constante (l'échantillon 1), soit abérrantes avec des valeurs négatives (échantillons 2 et 3). Ce phénomène est d'ailleurs bien relié avec l'hystérésis de déformation, aussi nous l'attribuons au déclenchement des frottements aux lèvres des fissures ou au joint de grains. Ces frottements sont en fait la conséquence de l'hétérogénéité de comportement des roches car, du fait du mode de chargement, ils ne devraient pas exister si la roche avait été homogène.

Ils peuvent expliquer l'augmentation de la compressibilité en fonction de la roche à faible pression, voire des comportements non-linéaires une fois toutes les fissures fermées, ainsi que l'hystérésis de déformation. Ils faussent donc légèrement la détermination des orientations des microfissures, en particulier en ne validant pas l'hypothèse de fermeture linéaire. Ils apparaissent le mécanisme dominant aux faibles et aux fortes pressions de confinement.

D'autres mécanismes peuvent mettre en défaut l'hypothèse de fermeture linéaire, tels que des fissures de forme complexe, mais ceux-ci sont difficiles à évaluer, du moins dans ces expériences.

6) CONCLUSION

L'étude suivante a permis de montrer les points suivants:

- les roches carottées à de grandes profondeurs peuvent présenter à faible pression de confinement une anisotropie de compressibilité non matricielle. Cette anisotropie de compressibilité n'est pas intrinsèque à la roche mais est due à une fissuration orientée induite par la relaxation de roche suite au carrotage, du moins dans les cas présentés.
- le taux de cette microfissuration est fonction de la compressibilité intrinsèque de la roche.
- l'orientation des microfissures peut être une indication des orientations des contraintes principales in-situ.
- l'anisotropie intrinsèque d'une roche affecte l'orientation

des microfissures. La prédiction des orientations des contraintes doit donc prendre en considération l'anisotropie de la roche. Dans notre cas, les roches anisotropes étant à isotropie transversale horizontale, la contrainte principale mineure, très souvent proche de l'horizontale dans les formations sédimentaires peu tectonisées, a pu être bien déterminée.

- l'importance des frottements dans certains cas ne doit pas être oubliée bien que l'essai soit hydrostatique. Ces frottements affectent à la fois les mesures d'orientation et les mesures de compressibilité, surtout aux faibles pressions de confinement. Dans notre cas, les roches les plus compressibles sont apparues les moins affectées.
- aux fortes pressions de confinement l'apparition de rupture au sein de certaines roches fausse les résultats.
- l'interêt de l'étude par incrément de pression est révélé par les sources d'erreur importantes aux faibles et aux fortes pressions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. F. Brace; Some new measurements of linear compressibility of rocks; J. of Geophys. Res. Vol 66, 1961 pp 2199-2224.

[2] J. B. Walsh; The effect of cracks on the compressibility of rock; J. Geophys. Res., Vol 70, 1965, pp 381-389.

[3] G. M. Mavko and A. Nur; The effect of nonelliptical cracks on the compressibility of rocks; J. Geophys. Res., Vol 83, 1978, pp 4459-4468.

[4] P. Morlier; Description de la fissuration d'une roche à partir d'essais mécaniques; colloque de géotechnique, Toulouse, France, 1969.

[5] R. Siegfried and G. Simmons; Characterization of oriented cracks with differential strain analysis. J. of Geophys. Res. Vol 83, No B3, March 10, 1978 pp 1269-1278.

[6] F. G. Strickland and Nae-Kan Ren; Predicting the in-situ stress for deep wells using differential strain curve analysis. SPE/DOE 8954.

[7] Ren N.-K. and J.C. Roegers; DSCA - A new method for determining the preexisting in-situ stress state from core measurements, 1983, Proc. 5th Congress of the ISRM, Melbourne, Australia.

[8] A. E. Scheidegger; The geotectonic stress field and crustal movements, Tectonophysics, 71(1981) 217-226.

[9] H-S Liu; A dynamical basis for crustal deformation and seismotectonic block movements in central Europe, Physics of the Earth and Planetary Interiors, 32 (1983) 146-159.

ANNEXE : Tableaux 1 à 6

	5	10	15	20	25
	PRESSION EN MPa				
	MONTEE				
1	15.1 ± 0.1	8.2 ± 0.1	5.9 ± 0.1	4.5 ± 0.0	3.7 ± 0.0
A	111 ± 0	305 ± 2	305 ± 2	309 ± 1	308 ± 6
p	19 ± 0	1 ± 2	6 ± 3	24 ± 2	51 ± 8
2	11.7 ± 0.1	7.2 ± 0.1	5.2 ± 0.0	4.2 ± 0.0	3.4 ± 0.0
A	-20 ± 3	208 ± 11	186 ± 11	164 ± 2	160 ± 3
p	62 ± 1	79 ± 2	78 ± 3	61 ± 2	35 ± 9
3	10.6 ± 0.1	6.0 ± 0.0	4.3 ± 0.0	3.4 ± 0.0	2.5 ± 0.0
A	208 ± 1	36 ± 1	36 ± 2	46 ± 1	59 ± 3
p	19 ± 1	11 ± 1	10 ± 1	15 ± 0	15 ± 1

TABLEAU 1
ECHANTILLON 1, compressibilité
en 10^{-5} MPa^{-1}

	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25
	PRESSION EN MPa			
	MONTEE			
1	499 ± 13	283 ± 3	254 ± 9	263 ± 10
A	98 ± 2	128 ± 1	114 ± 2	101 ± 2
p	26 ± 2	10 ± 2	10 ± 3	12 ± 1
2	321 ± 6	246 ± 2	181 ± 5	146 ± 7
A	-8 ± 6	249 ± 4	261 ± 20	12 ± 1
p	29 ± 9	71 ± 2	77 ± 4	-5 ± 12
3	272 ± 10	207 ± 1	143 ± 5	128 ± 6
A	223 ± 11	35 ± 1	22 ± 2	-21 ± 47
p	48 ± 7	16 ± 1	7 ± 4	74 ± 5

TABLEAU 2
ECHANTILLON 1, microdéformations liées aux fissures

	5	15	25	35	45
			PRESSION EN MPa		
			MONTEE		
1	2.8 ± 0.1	2.8 ± 0.1	2.4 ± 0.1	2.1 ± 0.1	2.0 ± 0.1
A					
p	82 ± 4	63 ± 55	VERTICAL	VERTICAL	VERTICAL
2	2.2 ± 0.1	2.1 ± 0.1	1.9 ± 0.1	1.7 ± 0.1	1.7 ± 0.1
A	126 ± 9	125 ± 7	303 ± 6	302 ± 6	302 ± 6
p	4 ± 6	3 ± 6	1 ± 6	4 ± 7	5 ± 7
3	1.7 ± 0.1	1.6 ± 0.1	1.5 ± 0.1	1.4 ± 0.1	1.3 ± 0.1
A	217 ± 8	215 ± 7	213 ± 6	212 ± 6	32 ± 6
p	5 ± 3	4 ± 3	2 ± 3	1 ± 3	0 ± 3
			DESCENTE		
1	3.5 ± 0.1	2.9 ± 0.1	2.0 ± 0.1	1.5 ± 0.1	1.4 ± 0.1
A					
p	VERTICAL	VERTICAL	VERTICAL	VERTICAL	VERTICAL
2	2.7 ± 0.1	2.3 ± 0.1	1.7 ± 0.1	1.3 ± 0.1	1.2 ± 0.1
A	119 ± 7	122 ± 7	127 ± 11	141 ± 30	136 ± 28
p	4 ± 6	2 ± 7	-1 ± 8	6 ± 11	21 ± 25
3	1.9 ± 0.1	1.7 ± 0.1	1.3 ± 0.1	1.1 ± 0.1	1.0 ± 0.1
A	209 ± 6	212 ± 7	217 ± 11	232 ± 30	235 ± 31
p	2 ± 3	2.6 ± 3	6 ± 4	11 ± 8	13 ± 11

TABLEAU 3
ECHANTILLON 2, compressibilité
en 10^{-5} MPa^{-1}

	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45
		PRESSION EN MPa		
		MONTEE		
1	38 ± 7	74 ± 3	100 ± 7	19 ± 1
A	8 ± 32	-8 ± 37	-13 ± 31	3 ± 27
p	21 ± 18	76 ± 6	75 ± 23	83 ± 3
2	19 ± 5	49 ± 4	53 ± 7	1.5 ± 1
A	257 ± 42	125 ± 1	123 ± 15	142 ± 4
p	15 ± 6	8 ± 8	8 ± 7	5 ± 3
3	7 ± 6	31 ± 4	26 ± 7	-14 ± 2
A	116 ± 31	216 ± 1	213 ± 14	232 ± 4
p	14 ± 32	7 ± 5	5 ± 5	3 ± 2
		DESCENTE		
1	89 ± 9	167 ± 8	165 ± 9	46 ± 3
A	VERTICAL	VERTICAL	VERTICAL	VERTICAL
p				
2	68 ± 8	120 ± 9	115 ± 10	25 ± 3
A	112 ± 31	117 ± 7	114 ± 7	290 ± 9
p	3 ± 23	12 ± 10	0 ± 16	1 ± 8
3	37 ± 8	63 ± 9	51 ± 12	3 ± 0
A	26 ± 28	207 ± 6	24 ± 7	6 ± 44
p	2 ± 12	0 ± 4	2 ± 4	82 ± 4

TABLEAU 4
ECHANTILLON 2, microdéformations liées aux fissures

	5	15	25	35	45
		PRESSION EN MPa			
		MONTEE			
1	11.4 ± 1	6.6 ± 0.4	5.0 ± 0.3	4.3 ± 0.3	3.9 ± 0.2
A	289 ± 15	-44 ± 31	301 ± 14	302 ± 15	301 ± 17
p	76 ± 9	74 ± 10	78 ± 5	78 ± 5	79 ± 5
2	3.1 ± 1.2	2.6 ± 0.6	2.0 ± 0.4	1.7 ± 0.3	1.6 ± 0.3
A	94 ± 25	109 ± 39	99 ± 36	98 ± 38	97 ± 39
p	13 ± 5	9 ± 5	10 ± 5	11 ± 5	10 ± 5
3	1.6 ± 1.1	1.4 ± 0.4	1.2 ± 0.3	1.0 ± 0.3	1.0 ± 0.3
A	185 ± 24	200 ± 39	189 ± 35	189 ± 37	189 ± 39
p	3 ± 5	2 ± 5	3 ± 5	3 ± 5	3 ± 5
		DESCENTE			
1	10.6 ± 0.5	5.9 ± 0.3	4.3 ± 0.2	3.4 ± 0.2	2.8 ± 0.2
A	293 ± 6	296 ± 16	290 ± 9	196 ± 16	14 ± 57
p	71 ± 3	78 ± 5	74 ± 4	78 ± 5	67 ± 41
2	3.4 ± 0.7	2.4 ± 0.5	1.8 ± 0.3	1.5 ± 0.2	1.4 ± 0.3
A	108 ± 13	102 ± 31	101 ± 22	99 ± 39	203 ± 49
p	18 ± 3	11 ± 4	15 ± 4	11 ± 5	1 ± 10
3	11 ± 0.5	1.3 ± 0.4	1.1 ± 0.2	0.9 ± 0.2	0.7 ± 0.3
A	199 ± 12	193 ± 30	191 ± 21	189 ± 38	186 ± 52
p	1 ± 4	1.9 ± 5	2 ± 4	2 ± 6	3 ± 7

TABLEAU 5
ECHANTILLON 3, compressibilité
en 10^{-5} MPa^{-1}

	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45
		PRESSION EN MPa		
		MONTEE		
1	430 ± 52	304 ± 21	232 ± 7	135 ± 7
A	280 ± 16	-24 ± 39	299 ± 8	302 ± 6
p	73 ± 6	80 ± 42	78 ± 3	64 ± 5
2	78 ± 61	111 ± 35	74 ± 11	43 ± 15
A	90 ± 27	113 ± 40	105 ± 27	124 ± 14
p	15 ± 6	6 ± 5	10 ± 3	25 ± 6
3	246 ± 55	31 ± 24	45 ± 8	-4 ± 10
A	181 ± 26	203 ± 40	196 ± 26	215 ± 12
p	3 ± 7	2 ± 4	2 ± 4	0 ± 6
		DESCENTE		
1	426 ± 12	301 ± 26	290 ± 3	290 ± 39
A	294 ± 4	5 ± 60	284 ± 1	282 ± 8
p	67 ± 3	VERTICAL	64 ± 1	52 ± 6
2	107 ± 28	118 ± 39	94 ± 5	58 ± 17
A	109 ± 11	160 ± 48	108 ± 2	120 ± 13
p	23 ± 2	4 ± 7	26 ± 1	36 ± 9
3	-5 ± 19	27 ± 34	19 ± 4	-49 ± 29
A	200 ± 9	249 ± 48	17 ± 2	25 ± 12
p	2 ± 4	4 ± 8	1 ± 1	8 ± 6

TABLEAU 6
ECHANTILLON 3, microdéformations liées aux fissures

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 261-272

Etude du comportement de la maçonnerie sous sollicitations biaxiales irrotationnelles

The behaviour of masonry under biaxial irrotational stresses

R. SHAAN

Université de Lille 1,
et Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat

J.-M. TORRENTI

Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat
F 69120 Vaux-en-Velin

RESUME

*Le laboratoire de Mécanique de l'E.N.T.P.E. a entrepris depuis 2 ans des études sur le comportement de la maçonnerie. A cet effet a été construite une presse biaxiale permettant de soumettre des panneaux de maçonnerie de 110*80*10cm à un champ de contrainte plan quelconque.*

Nous présentons dans cette communication les premiers résultats obtenus en cinématique irrotationnelle. Le comportement uniaxial et biaxial y sont décrits, les modes de rupture de la maçonnerie sous ces sollicitations sont étudiés. Un critère de rupture expérimental est obtenu.

ABSTRACT

The mechanical laboratory of E.N.T.P.E. is studying the masonry behaviour. For that purpose, a biaxial shearing apparatus was built in order to test masonry panels under plane stress.

In this paper we present first results under irrotational loading. Uniaxial and biaxial behavior are described. Failure modes of masonry are studied and finally an experimental failure criterion is proposed.

I-Introduction

C'est à la suite du tremblement de terre d'El Asnam et devant les insuffisances des règlements de construction Algériens, et donc français, que le Plan Construction a décidé de financer une recherche sur la maçonnerie. L'ENTPE, dans ce cadre, étudie le comportement de la maçonnerie [1] avec une machine de cisaillement biaxial [2].

Cette machine permet d'appliquer un champ de contraintes planes quelconques mais pour l'instant, nous étudions seulement la maçonnerie sous sollicitations biaxiales irrotationnelles.

Nous présentons donc, après une étude sur les caractéristiques mécaniques des constituants, les principaux résultats obtenus en chargement uniaxial, parallèle et orthogonal aux joints, et aussi en chargement biaxial.

Finalement, après une étude des différents modes de rupture, un critère de rupture expérimental est proposé.

II-Comportement des matériaux constituants la maçonnerie

II-1.Les briques

Nous utilisons des briques creuses de terre cuite,qui ont la forme d'un parallélipipède rectangle.

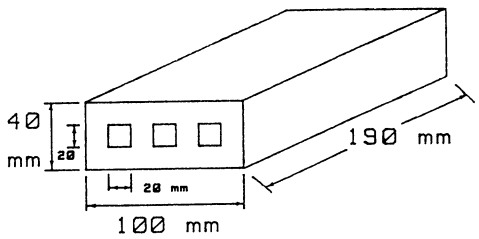


Fig:1

II-1.1.Caractéristiques physiques

Les valeurs moyennes sur 15 tests [4] sont vérifiées par la norme française NF P13-301 de 1972.

II-1.2.Caractéristiques mécaniques

Pour déterminer les caractéristiques mécaniques des briques, nous avons réalisé des essais de compression simple selon les directions parallèle et perpendiculaire au plan des joints de la maçonnerie.
D'aprés les mesures relevées, nous avons calculé le coefficient de Poisson ν de la brique ainsi que le module élastique E pour chaque mode de chargement. Des tests de

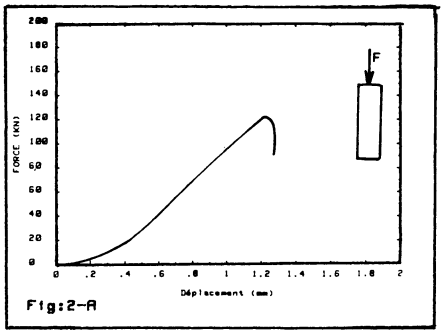


Fig:2-A

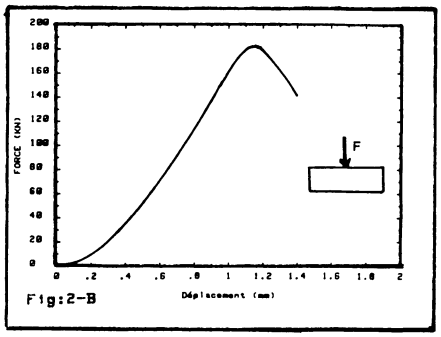


Fig:2-B

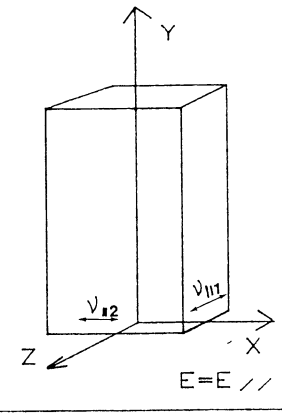
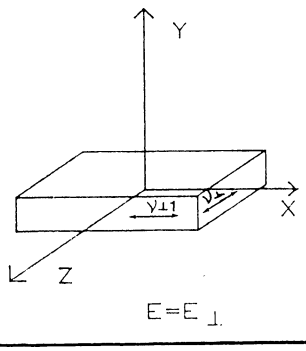
Caractéristiques Mécaniques	Valeurs Moyennes	
Module Elastique (MPa)	8250	
Contrainte à la Rupture (MPa)	39	
Déformation à la Rupture	0,00632	
Coefficient de Poisson ν_{111}	0,085	
Coefficient de Poisson ν_{112}	0,089	
Module Elastique (MPa)	410	
Contrainte à la Rupture (MPa)	8,42	
Déformation à la Rupture	0.0288	
Coefficient de Poisson $\nu_{\perp 1}$	0,008	
Coefficient de Poisson $\nu_{\perp 2}$	0,0175	

Tableau [1]

charge-décharge pour vérifier le comportement élastique réversible de la brique ont été effectués. Sur la figure 2, courbe type force-déplacement, on remarque la fragilité des briques ainsi que la linéarité de la majeure partie de la courbe. La courbure au départ est due à la mise en place et à la déformation du matériau de surfaçage.

II-2.Le Mortier

Le mortier utilisé a pour proportion 1:3,5 (ciment-sable) avec 60% d'eau par rapport au ciment, les proportions étant prises en poids. Ces proportions sont déterminées d'après plusieurs essais en variant chaque élément et en gardant les autres, afin d'obtenir un mortier suffisamment ouvrable pour sa mise en oeuvre.

Nous utilisons le ciment conseillé pour la construction de la maçonnerie en briques. Le sable est séché et tamisé pour que la dimension d'agrégat soit comprise entre 0,1mm et 5mm. Le sable obtenu est conforme à la norme NF- P18-301 [4].

II-2.1.Caractéristiques mécaniques du mortier

Pour déterminer les proprietés mécaniques du mortier nous avons réalisé des essais de compression simple sur les éprouvettes cylindriques de mortier de dimensions 160*320mm.
Ce mortier a une résistance moyenne à la rupture de 15MPa, et un module élastique de 3525 MPa.(Cette valeur étant déterminée sur 15 éprouvettes). La courbe type force-déplacement est présentée sur la figure 3.

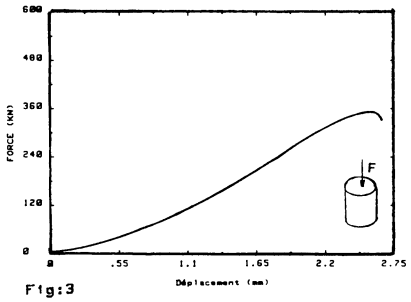


Fig:3

II-Fabrication des échantillons

La fabrication des panneaux en brique a été normalisée, et elle se fait en trois étapes :

III-1.La confection

Les échantillons de dimension 1100*800*100mm ont été construits verticalement à l'aide d'un coffrage démontable en acier. Les échantillons ainsi obtenus ont une tolérance moyenne de 1 mm.

III-2.Le séchage

Nous arrosons les panneaux pendant 28 jours pour éviter l'apparition des fissures due au séchage et aussi pour diminuer le changement de volume dû au retrait [5].

III-3.L'installation

Afin de distinguer visuellement les fissures au cours de l'essai nous appliquons une légère couche de peinture blanche sur toute la surface du panneau.

Après l'installation du panneau dans la machine d'essai [2], nous fixons les systèmes de mesure de déplacement constitués par des potentiomètres [4].

IV-Essais

Nous classifions nos essais selon l'angle θ, défini comme l'angle entre le plan des joints et la direction du chargement .

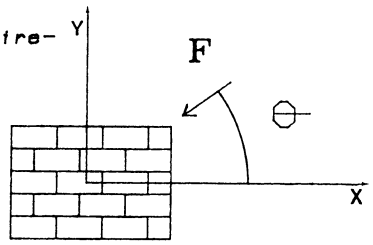


Fig:4

IV-1. Sollicitation uniaxiale

Lorsque $\theta = 0$

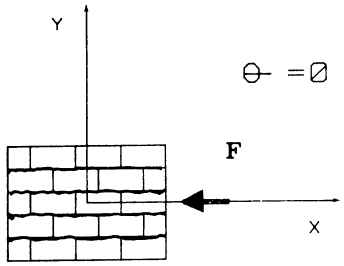


Fig:5

Sur une moyenne des quatre essais nous avons obtenu pour :

* La contrainte à la rupture: 14,4 MPa
* La déformation à la rupture = 0,6*10-3

En examinant les courbes types de contrainte - déformation, nous remarquons deux points suivants :

- La fragilité de la maçonnerie à la rupture.

- La fissuration débute horizontalement dans une rangée quelconque par un décollage entre les briques et le joint de mortier. Une légère augmentation de contrainte provoque ensuite la propagation de cette fissuration jusqu'à la rupture qui est parallèle au plan des joints [fig(5)].

- Nous distinguons sur la fig(6) trois parties. La première partie A-B est la phase stable du comportement qui est élastique reversible puis plastique écrouissable. Sur cette phase on remarque que l'incrément de déformation est peu important par rapport à l'incrément de contrainte.

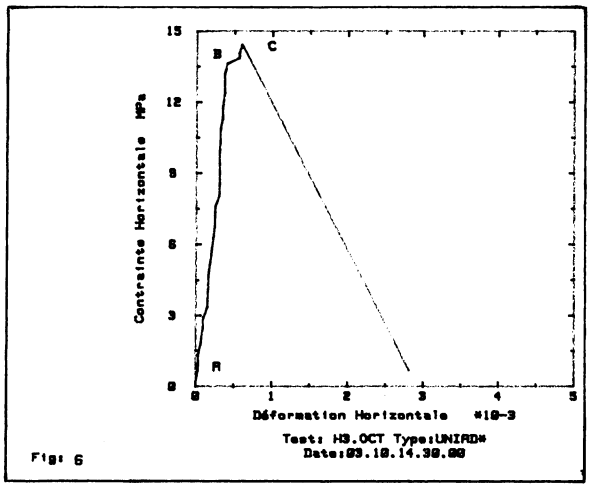


Fig: 6

-La deuxième partie représente une phase du comportement instable dû à la fissuration causée par le décollige entre les brique et les joints du mortier c'est-à-dire qu'à partir du point B, nous ne sommes plus en presence d'un milieu continu.

-La troisième partie qui suit la rupture (point C) survient brusquement, témoignant de la fragilité de la maçonnerie.

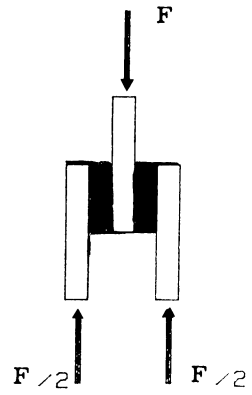


Fig:7

Le mode de rupture observé nous a amené à réaliser les essais permettant d'estimer la cohésion pure entre les briques et les joints de mortier figure (7). ces essais nous ont donné une cohésion dr 0.22 MPa. Par ailleurs, la cohésion que nous avons calculé à partir des panneaux est de 0.18 Mpa. Ces deux valeurs sont à rapprocher de celles de la bibliographie : 0.20 Mpa [6].

Pour justifier l'irréversibilité de la maçonnerie, nous avons effectué un essai cyclique dans les conditions suivantes : $\theta = 90°$; contrainte verticale fixée à 1MPa et contrainte horizontale variable figure (8) .

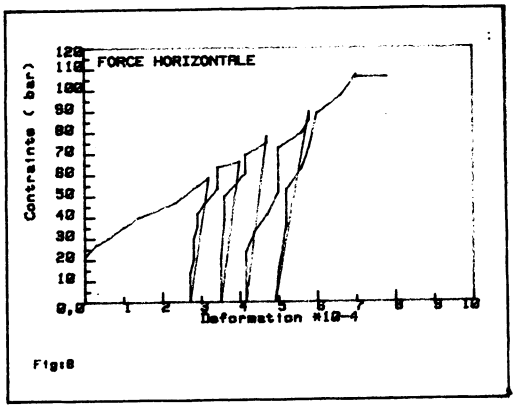
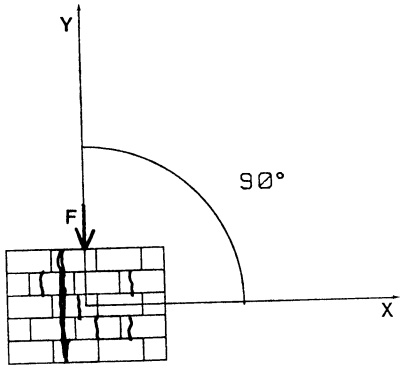


Fig:8

IV-2. Sollicitation uniaxiale lorsque $\theta = 90°$.

La moyenne des essais à $\theta = 90°$ a montré que la contrainte à la rupture est d'environ 4 MPa pour une déformation à la rupture de 4*10-3.

Fig:9

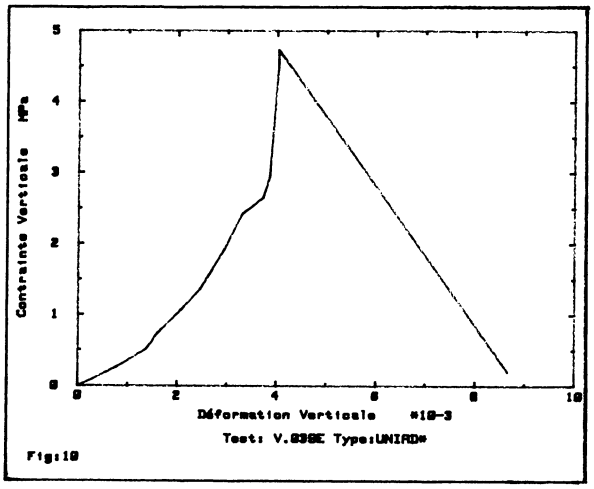


La courbe contrainte-déformation montre encore la fragilité de la maçonnerie [figure(9)], et nos observations pendant l'essai sont les suivantes:

- La rupture commence par des fissurations verticales dans les briques, parallèles à la direction de chargement et se termine par une fissuration continue à travers les briques et les joints horizontaux, les fissures, espacées, allant du haut de l'échantillon jusqu'au bas.

- Le mode de rupture est tout à fait différent par rapport à celui obtenu pour $\theta = 0°$. Dans le cas $\theta = 90°$, nous consta-

tons que la rupture est dûe à une traction transversale dans les briques.

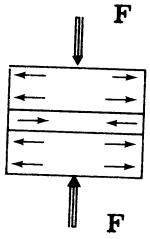


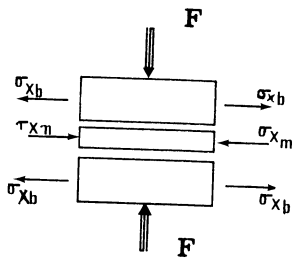
- La résistance à la rupture est alors inférieure à celle de la brique et à celle du mortier en compression simple.

- Le fait que la brique ait une rupture du type traction s'explique par l'interaction entre la brique et le mortier. En effet, les constituants de la maçonnerie n'ont pas les mêmes caractéristiques mécaniques (voir tableau 1).

Hendry [3] a alors montré que la cohésion entre les deux matériaux pouvait être rempmacée approximativement par des efforts de traction et de compression. Si l'on cosidère un modèle simple de deux brique reliées par un joint de mortier, nous avons :

Fig:11





On a alors :

$$\sigma_{xb} = \sigma_{zb} = \frac{\sigma_y \left(\beta\nu_m - \nu_b\right)}{1 + \alpha\beta - \nu_b - \alpha\beta\nu_m}$$

d'où:

ν :Coefficient de poisson
β:Eb/ Em
α:Hauteur de b/m
b:Brique
m:Mortier
σ_y:Contrainte verticale

Si l'on se place dans le plan de Mohr, on a alors, au lieu d'avoir de la compression simple, de la traction - compression :

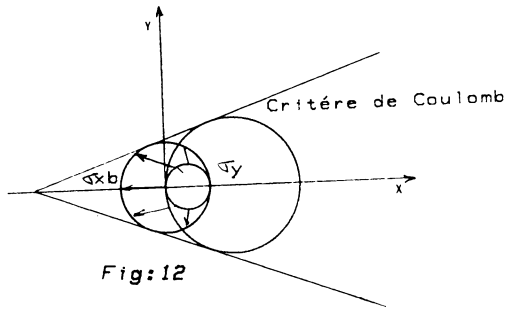


Fig:12

Ceci explique que la rupture ait lieu en traction dans les briques pour une valeurs de σy inférieure à la valeur de rupture d'une brique en compression simple. Néanmoins, cette explication est uniquement qualitative car le mur de maçonnerie n'a pas un comportement aussi simple que le modèle de Hendry.

Pour vérifier la validité de l'hypothèse de Hendry, nous avons testé des éprouvettes ayant les formes suivantes en compression simple :



(A) (B)

Fig:13

Les éprouvettes A ont eu un mode de rupture de type biaxal. Nous pensons que ceci est dû au fait que le frettage était très important et induisait une biaxialité. Pour les éprouvettes B, par contre, la fissuration s'est développée, comme dans les murs, sur la brique du centre qui était alors en traction. La valeur obtenue pour la rupture correspond à celles observées pour les murs.

IV-3. Sollicitation biaxiale

Le point sur lequel nous nous sommes particulièrement penchés est la détermination d'un critère de rupture expérimental dans le plan (σ1, σ2). En effet, les modes de rupture étant très différents, ils influent énormement sur le comportement du matériau maçonnerie.

Pour les essais réalisés jusqu'à présent, nous avons obtenu le critère suivant:

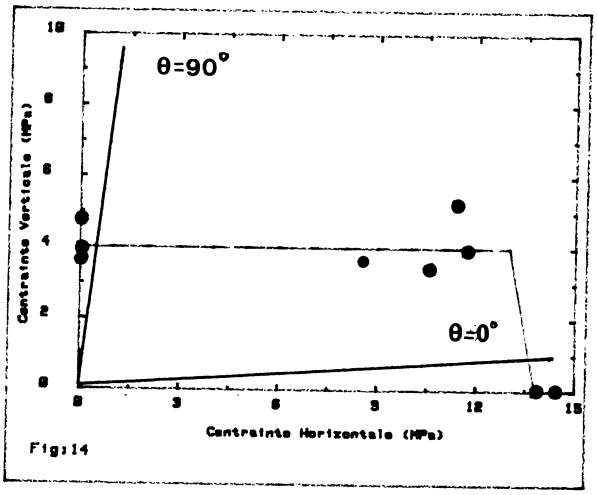


Fig:14

Outre les modes de rupture déjà décrits précédemment, nous avons pu constater qu'il existait un troisième mode de rupture. En effet, lorsque le rapport σ1/ σ2 ou σ2/ σ1 n'est pas trop petit devant un, c'est à dire lorsqu'on s'éloigne de l'uniaxialité, la rupture a lieu par l'éclatement du panneau dans un plan parallèle à la surface libre [figure 14].

Ce type de rupture, dû à la traction dans la direction libre, est caractéristique de nombreux matériaux, tels que le béton, chargés en compression biaxiale.

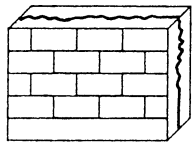


Fig:15

- La rupture est très brutale et elle n'est pas précédée par une fissuration qui annonce la rupture comme les cas précédent.

- L'éclatement a lieu dans certains endroits du panneau qui, d'après nos observations, correspondent aux points faibles résultant de la confection même des éprouvettes.

V- Conclusions

L'étude expérimentale du comportement des panneaux en bri-

ques nous a permis d'établir les constatations suivantes :

1- Le fait que les briques soient creuses crée une orthotropie du matériau.

2- Le système de fabrication des briques semble influencer leur comportement, les contraintes à la rupture étant différentes suivant les directions.

3- En ce qui concerne le comportement de la maçonnerie, celui-ci est quasi-linéaire, avec une rupture brutale. La non linéarité du mortier intervient donc peu.

4- On obtient trois modes de rupture selon le chargement appliqué ($\sigma 1, \sigma 2, \sigma 1$ et $\sigma 2$).

5- Lorsque $\sigma 1 = 0$, la rupture est dûe au cisaillement au niveau du plan des joints.

6- Lorsque $\sigma 2 = 0$, la rupture correspond à une traction dans la brique dans une seule direction.

7- Lorsqu'il n'y a pas prépondérance de l'une des contraintes devant l'autre, la rupture survient dans un plan parallèle à la surface libre.

Le problème est maintenant d'interpréter théoriquement par des critères simples, du type Mohr-Coulomb, les divers modes de rupture. Il faudra ensuite comparer la théorie à l'expérience. L'autre étant l'étude de la maçonnerie sous sollicitations incluant la rotation des axes principaux. Ceci constituera l'un des prochains objectifs de notre étude.

VI- Bibliographie

1- J.C. Robinet, S. Ndeko, J.M. Torrenti. 1983. "Rapport bibliographique sur le comportement de la maçonnerie et son interaction avec les ossatures". ENTPE. Rapport pour le Plan Construction.

2- J.C. Robinet, J.M. Torrenti, H. Sbaiti. 1983. "Machine de cisaillement biaxial des panneaux de maçonnerie". 18ème Colloque du Groupe Français de Rhéologie.

3- A.W. Hendry. 1981. "Structural brickwork". MacMillan Press London.

4- R. Shaan. "Etude du comportement de la maçonnerie en briques creuses". Thèse D.I. à paraitre. Université de Lille 1

5- A.M. Neville. 1981. "Properties of concrete". Pitman Press London.

6- G. Sacchi Landriani. 1983. "Les caractéristiques mécaniques des matériaux". Journées d'études sur la restauration des ouvrages et des structures. Paris. pp 215-248.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 273-290

Plasticité des matériaux polycristallins en chargements complexes

Plasticity of metallic polycrystals under complex loading path

C. BERADAI, M. BERVEILLER

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux
GRECO-CNRS « Grandes déformations et endommagement »
Université de Metz, Ile du Saulcy
57045 Metz Cedex, France

RESUME

Après avoir rappelé la forme des lois de comportement en élastoplasticité des monocristaux, on présente une équation intégrale pour les milieux hétérogènes élastoplastiques en petites déformations, inspirée des méthodes statistiques générales pour les milieux hétérogènes linéaires. Les approximations courantes pour résoudre cette équation intégrale conduisent aux modèles classiques de Taylor et Lin. Pour des milieux faiblement hétérogènes, on propose une autre approche basée sur l'approximation de Born de l'équation intégrale. On établit dans la cinquième partie la connexion entre le schéma self-consistent à accommodation plastique et la formulation générale. Une version simplifiée du schéma self-consistent est développée dans la dernière partie et appliquée au problème de plasticité de polycristaux en chargements complexes : chargement cyclique en traction simple, chargement radial en contraintes biaxiales, chargement non radial complexe.

ABSTRACT

After recalling the flow laws of single crystals in elastoplasticity, an integral equation for elastic plastic heterogeneous media for small strains is proposed, taken from general statistical methods for linear heterogeneous media. The curent approximations for resolving this integral equation lead to classical Taylor and Lin models. For weakly heterogeneous media, another approach is proposed based on Born approximation of the integral equation. The connection between the self-consistent scheme with plastic accommodation and the general formulation is established in the fifth part. A simplified version of the self-consistent scheme is developed in the last part and applied to the polycrystal plasticity problem in complex loading : cyclic loading in uniaxial tension, radial loading in biaxial stretching, non radial complex loading.

1 - INTRODUCTION

L'évaluation des propriétés macroscopiques de milieux hétérogènes à partir du comportement des constituants constitue une nécessité à la fois pour l'élaboration de matériaux nouveaux et leur utilisation rationnelle. Lorsqu'on se limite aux propriétés linéaires, de nombreux modèles plus ou moins performants ont été proposés [1][2], et ce n'est que récemment [3], par l'utilisation de méthodes statistiques directes que l'on a pu formuler le problème linéaire de manière générale et ainsi restituer les approches antérieures.

Dans le cas de matériaux à comportement non linéaire tel que la plasticité, le problème est doublement complexe. D'une part, la nature même de la loi de comportement des constituants élémentaires est compliquée mais, en plus, il est nécessaire de décrire ce comportement à une échelle plus fine liée aux mécanismes physiques de la déformation plastique. D'autre part, l'intensité des déformations plastiques est souvent d'une telle ampleur, que la structure du matériau (orientations cristallographiques, orientation et forme des grains...) se trouve profondement modifiée par la déformation plastique.

Dans ces conditions, il est évident que la modélisation du comportement élastoplastique des matériaux hétérogènes nécessite un effort plus conséquent pour la description du comportement de tels matériaux.

A côté des modèles classiques de Taylor [4] et Lin [5], qui ont été repris sous différents aspects, se sont développées des méthodes self-consistentes[6][7][8][9][10] qui, par leur relative facilité de mise en oeuvre et leur versatilité, ont permis de traiter quelques problèmes d'élastoplasticité des matériaux hétérogènes en permettant une meilleure prise en compte d'un certain nombre de paramètres structuraux.

Afin de situer ces méthodes les unes par rapport aux autres et d'envisager des développements ultérieurs, nous utilisons le formalisme général des méthodes statistiques directes pour traiter, en petites déformations, le problème du comportement élastoplastique des polycristaux métalliques après avoir rappelé les bases des lois de comportement du monocristal. Nous présentons ensuite quelques résultats nouveaux obtenus dans le cadre du schéma self-consistent à accommodation plastique concernant la réponse de polycristaux en chargement complexe.

2 - LOI DE COMPORTEMENT DU MONOCRISTAL

Il existe de nombreux mécanismes physiques de déformation plastique qui peuvent intervenir simultanément ou séparément en fonction des conditions du chargement thermomécanique :

- diffusion de défauts ponctuels
- mouvement de dislocations
- transformation de phase

Dans la plupart des processus de mise en forme, on peut considérer que le mécanisme prédominant est le glissement plastique cristallographique obéissant à la loi de Schmid et n'affectant pas l'élasticité du matériau.

On peut alors considérer que la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}_{ij}$ est composée d'une partie élastique $\dot{\varepsilon}^e_{ij}$ et d'une partie plastique $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ telles que

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^e_{ij} + \dot{\varepsilon}^p_{ij} \qquad (1)$$

Il en est de même pour la vitesse de rotation $\dot{\omega}_{ij}$ qui s'écrit

$$\dot{\omega}_{ij} = \dot{\omega}^e_{ij} + \dot{\omega}^p_{ij} \qquad (2)$$

où $\dot{\omega}^e$ est la vitesse de rotation élastique (ou vitesse de rotation du réseau cristallin) et $\dot{\omega}^p$ la vitesse de rotation plastique associée aux glissements plastiques.

Dans un métal CFC, il existe 12 systèmes de glissement possibles du type $\{111\}\ \langle 110\rangle$. Dans la configuration actuelle du monocristal, un nombre limité de ces systèmes est actif et contribue à l'écoulement plastique.

Si on désigne par n_i^g et m_i^g les vecteurs unitaires suivant la normale au plan de glissement et dans la direction de glissement pour le système g, on a

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} + \dot{\omega}^p_{ij} = \sum_g \dot{\gamma}^g\, m_i^g\, n_j^g \tag{3}$$

la sommation concerne uniquement les systèmes actifs, $\dot{\gamma}^g$ étant la vitesse de glissement sur le système g.

De l'équation (3), on peut déduire séparément la partie symétrique

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \sum_g \frac{1}{2}\,\dot{\gamma}^g\,(m_i^g\, n_j^g + m_j^g\, n_i^g) = \sum_g R^g_{ij}\,\dot{\gamma}^g \tag{4}$$

et la partie antisymétrique de la partie plastique du gradient de la vitesse

$$\dot{\omega}^p_{ij} = \sum_g \frac{1}{2}\,\dot{\gamma}^g\,(m_i^g\, n_j^g - m_j^g\, n_i^g) = \sum_g S^g_{ij}\,\dot{\gamma}^g \tag{5}$$

La déformation plastique par glissement cristallographique entraîne une rotation plastique qui elle-même induit une rotation élastique à l'origine de la formation des textures de déformation et d'un écrouissage géométrique [10]. Dans ce travail, nous négligeons cet écrouissage géométrique en utilisant pour la suite un formalisme en petites déformations.

La vitesse de la cission réduite $\dot{\tau}^g$ sur le système g pour une vitesse des contraintes $\dot{\sigma}_{ij}$ s'écrit alors

$$\dot{\tau}^g = R^g_{ij}\,\dot{\sigma}_{ij} \tag{6}$$

Nous supposons que l'écrouissage intracristallin est linéaire et caractérisé par une matrice d'écrouissage H dont les termes H^{gh} représentent l'écrouissage sur un système de glissement g créé par un glissement sur un système h.

On a donc : $\dot{\tau}^g_c = H^{gh}\,\dot{\gamma}^h$ (7)

$\dot{\tau}^g_c$ représente la vitesse de la cission critique sur le système g.

Les équations de comportement pour la partie plastique de la déformation totale s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
&\dot{\gamma}^h = 0 \quad \text{si} \quad 0 < R^h_{ij}\,\sigma_{ij} < \tau^h_c \\
&\dot{\gamma}^h = 0 \quad \text{si} \quad \sigma_{ij}\,R^h_{ij} = \tau^h_c \quad \text{et} \quad R^h_{ij}\,\dot{\sigma}_{ij} < H^{hg}\,\dot{\gamma}^g \\
&\dot{\gamma}^h > 0 \quad \text{si} \quad R^h_{ij}\,\sigma_{ij} = \tau^h_c \quad \text{et} \quad R^h_{ij}\,\dot{\sigma}_{ij} = H^{hg}\,\dot{\gamma}^g
\end{aligned} \tag{8}$$

τ^h_c étant la cission critique actuelle sur le système h.

Nous désignons par K l'inverse de la matrice H ($K = H^{-1}$) et nous supposons que K existe.

On a alors d'après (4), (6) et (7)

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \sum_{g,h} R^g_{ij}\,K^{gh}\,R^h_{k\ell}\,\dot{\sigma}_{k\ell} \tag{9}$$

La vitesse de déformation totale s'écrit d'après (9) et (1)

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (s_{ijk\ell} + \sum_{g,h} R^g_{ij} K^{gh} R^h_{k\ell}) \dot{\sigma}_{k\ell} \qquad (10)$$

soit $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}$ ou $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$\mathbf{s}$ désignant la compliance élastique du monocristal ($\mathbf{s} = \mathbf{c}^{-1}$)

et $\mathbf{L}^{-1}$ représentant le comportement tangent du monocristal.

D'apparence simple, $\mathbf{L}^{-1}$ est en fait complexe à cause de la partie plastique intervenant par l'intermédiaire des équations (8).

On a :

$$\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{s} \qquad \text{si} \quad 0 < R^h_{ij} \sigma_{ij} < \tau^h_c \qquad (h = 1,12)$$

$$\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{s} \qquad \text{si} \quad \begin{cases} R^h_{ij} \sigma_{ij} = \tau^h_c \\ R^h_{ij} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \end{cases} \qquad (h = 1,12) \qquad (11)$$

$$L^{-1}_{ijk\ell} = s_{ijk\ell} + \Sigma R^g_{ij} K^{gh} R^h_{k\ell} \quad \text{si} \quad \begin{cases} R^h_{ij} \sigma_{ij} = \tau^h_c \\ R^h_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = H^{hg} \dot{\gamma}^g \end{cases} \quad \text{pour les systèmes actifs}$$

Nous supposons que $\mathbf{L}^{-1}$ est inversible et satisfait aux conditions de stabilité habituelles $\mathbf{L}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0$.

3 - EQUATION INTEGRALE POUR LES MILIEUX HETEROGENES ELASTOPLASTIQUES

Par rapport aux milieux hétérogènes élastiques, le problème du comportement élastoplastique des matériaux hétérogènes est encore plus complexe.

* En premier lieu, la loi de comportement élastoplastique du monocristal, décrite de manière approchée dans la première partie, dépend à la fois du trajet de déformation et de l'état de contrainte actuel.
* En second lieu, la structure même du matériau et son hétérogénéité évolue avec la déformation. On peut citer différentes classes de phénomènes qu'il est (ou serait) nécessaire de prendre en compte :
  + On observe, à l'échelle du grain une hétérogénéité de la déformation intragranulaire à l'échelle des cellules de dislocations (~ 1µm) dont la forme, la taille et l'orientation dépendent du trajet de déformation. A une échelle plus grande, à cause du glissement multiple hétérogène, le grain se fragmente en domaines possédant des combinaisons différentes de systèmes de glissement actifs.
    Ces phénomènes ne sont pas pris en compte directement, ni dans la loi de comportement du monocristal ni dans la description de l'hétérogénéité actuelle du polycristal.
  + A l'échelle intergranulaire, la formation d'une texture cristallographique (liée à l'orientation des réseaux cristallins) et d'une texture morphologique (liée à l'orientation des axes principaux des grains) sous l'effet de la déformation modifie notablement l'hétérogénéité initiale du matériau et lui confère souvent des propriétés anisotropes. A cette même échelle, on observe la présence de contraintes internes associées aux incompatibilités plastiques intergranulaires.

C'est surtout cette deuxième classe de phénomènes que nous cherchons à modéliser pour des polycristaux macroscopiquement homogènes.

Nous supposons que le matériau a été transformé de l'état initial à l'état actuel par une déformation totale $\mathbf{E}^T$, homogène à l'échelle du polycristal.

A cette déformation est associée une contrainte macroscopique Σ , également uniforme, telles que

$$\Sigma = \frac{1}{V} \int_V \sigma(r)\, dV \qquad (12)$$

et $$\mathbf{E}^T = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon^T(r)\, dV$$

$\sigma(r)$ est le champ de contraintes (en équilibre) dans le polycristal et $\varepsilon^T(r)$ la déformation totale locale (compatible).

Nous supposons qu'à ce stade nous connaissons les systèmes de glissement potentiellement actifs, les contraintes internes, la forme et l'orientation des grains et l'état d'écrouissage des monocristaux.

A un accroissement $d\Sigma$ ou $d\mathbf{E}^T$ sont associées des variations $d\sigma$ et $d\varepsilon^T$ telles que localement on ait

$$d\sigma_{ij,j} = 0 \qquad \text{(équations d'équilibre)} \qquad (13)$$

$$d\varepsilon^T_{ij} = \frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i}) \qquad \text{(conditions de compatibilité)} \qquad (14)$$

et $$d\sigma_{ij} = L_{ijk\ell}\, d\varepsilon^T_{k\ell} \qquad \text{(comportement local)} \qquad (15)$$

La localisation de la déformation consiste alors à déterminer $d\varepsilon^T$ en fonction de $d\mathbf{E}^T$.

Pour cela, nous introduisons un milieu fictif, homogène de modules tangents $\mathbf{L}^o$ tel que

$$\mathbf{L}(r) = \mathbf{L}^o + \delta\mathbf{L}(r) \qquad (16)$$

Les équations d'équilibre s'écrivent alors

$$L^o_{ijk\ell}\, d\varepsilon^T_{k\ell,j} + (\delta L_{ijk\ell}\, d\varepsilon^T_{k\ell})_{,j} = 0$$

soit encore

$$L^o_{ijk\ell}\, du_{k,\ell j} + (\delta L_{ijk\ell}\, d\varepsilon_{k\ell})_{,j} = 0 \qquad (17)$$

La solution de ces équations peut être obtenue par l'intermédiaire du tenseur de Green G^o du milieu homogène fictif sous la forme des équations intégrales suivantes [11] [12]:

Pour la partie symétrique du gradient de du_i

$$d\varepsilon^T_{ij}(r) = d\varepsilon^o_{ij} + \int_V \Gamma_{ijk\ell}(r-r')\delta L_{k\ell mn}(r')\, d\varepsilon^T_{mn}(r')\, dV' \qquad (18)$$

et pour la partie antisymétrique, on a

$$d\omega^T_{ij}(r) = d\omega^o_{ij} + \int_V A_{ijk\ell}(r-r')\,\delta L_{k\ell mn}(r')\, d\varepsilon^T_{mn}(r')\, dV' \qquad (19)$$

où nous avons noté

$$\Gamma_{ijk\ell} = \frac{1}{2}(G^o_{ik,j\ell'} + G^o_{jk,i\ell'}) \qquad (20)$$

$$A_{ijk\ell} = \frac{1}{2}(G^o_{ik,j\ell'} - G^o_{jk,i\ell'}) \qquad (21)$$

$d\omega^o_{ij}$ est la rotation totale imposée au milieu homogène $\mathbf{L}^o$ et $d\varepsilon^o$ est la déformation totale imposée au même milieu par le système de chargement envisagé.

Nous pouvons effectuer une formulation duale pour l'accroissement des contraintes $d\sigma_{ij}(r)$ qui s'écrit

$$d\sigma_{ij}(r) = d\sigma^o_{ij} + \int \Gamma'_{ijk\ell}(r-r')\,\delta L^{-1}_{k\ell mn}(r')\, d\sigma_{mn}(r')\, dV' \qquad (22)$$

où $\Gamma' = -\mathbf{L}^o - \mathbf{L}^o \Gamma \mathbf{L}^o$

et une définition analogue pour $d\sigma^o_{ij}$.

La résolution de ces équations intégrales permet, en principe, de trouver à la fois les modules tangents macroscopiques $\mathbf{L}^{eff}$ tels que $d\Sigma = \mathbf{L}^{eff} d\mathbf{E}^T$ et les lois d'évolution de la microstructure.
En effet, formellement, la solution de (18) s'écrit

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^T(r) = \mathbf{B}(r)\, d\boldsymbol{\varepsilon}^o \tag{23}$$

et puisque $< d\boldsymbol{\varepsilon}^T(r) > = d\mathbf{E}^T$, ($< \cdot > = \frac{1}{V} \int_V \cdot\, dv$), on a aussi

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^T(r) = \mathbf{B}(r) < \mathbf{B}(r) >^{-1} d\mathbf{E}^T \tag{24}$$

La partie élastique de $d\boldsymbol{\varepsilon}^T(r)$ permet le calcul de l'accroissement des contraintes locales et $d\boldsymbol{\varepsilon}^T(r)$ permet d'accéder aux changements de forme des grains.

De plus, on a $d\boldsymbol{\sigma}(r) = \mathbf{L}(r)\, d\boldsymbol{\varepsilon}^T(r)$

soit, en moyenne

$$d\Sigma = < d\boldsymbol{\sigma}(r) > = < \mathbf{L}(r)\ \mathbf{B}(r) < \mathbf{B}(r) >^{-1} > \ d\mathbf{E}^T \tag{25}$$

Les modules tangents $\mathbf{L}^{eff}$ sont alors définis par

$$\mathbf{L}^{eff} = < \mathbf{L}(r)\ \mathbf{B}(r) < \mathbf{B}(r) >^{-1} > \tag{26}$$

La solution de (24) conduit de même aux équations d'évolution des axes principaux d'inertie des grains ($d\boldsymbol{\omega}^T$) et la partie élastique de $d\boldsymbol{\omega}^T$ (celle qui affecte le réseau cristallin) permet de calculer l'évolution de l'orientation cristallographique des grains.

Ainsi, de manière formelle (et approchée, car nous utilisons l'approximation des petites déformations) l'ensemble des équations (24) (25) (26) permet de calculer les propriétés effectives d'un milieu hétérogène élastoplastique pour un trajet de déformation quelconque. La difficulté centrale réside dans le calcul du tenseur $\mathbf{B}(r)$ pour lequel plusieurs approximations ont été faites selon les modèles proposés.

4 - LES DIFFERENTS MODELES POLYCRISTALLINS

4.1 - Le modèle de Taylor-Lin [4] [5]

Il consiste à supposer que le milieu est homogène.
(18) et (19) deviennent alors

$$\begin{cases} d\varepsilon^T_{ij}(r) = d\varepsilon^o_{ij} = dE^T_{ij} \\ d\omega^T_{ij}(r) = d\omega^o_{ij} \end{cases} \tag{27}$$

Ceci revient à supposer que $\mathbf{B}(r) = \mathbf{I}$, ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{eff} &= < \mathbf{L}(r) > \\ d\boldsymbol{\omega}^e &= - d\boldsymbol{\omega}^p + d\boldsymbol{\omega}^o \\ d\boldsymbol{\varepsilon}^T &= d\mathbf{E}^T \end{aligned} \tag{28}$$

4.2 - Le modèle statique [13]

Ce modèle dérive de l'équation intégrale duale (22) où l'on suppose que l'intégrale sur V est nulle.
On a alors

$$d\boldsymbol{\sigma}(r) = d\Sigma \tag{29}$$

Ce qui conduit à la relation classique pour $\mathbf{L}^{eff}$

$$\mathbf{L}^{eff\ -1} = \langle \mathbf{L}^{-1} \rangle \tag{30}$$

Pour les équations d'évolution de la structure du matériau, on a

$$d\varepsilon^T = \mathbf{L}^{-1}(r)\ d\Sigma$$
$$\text{et} \qquad d\omega^e = -\ d\omega^p \tag{31}$$

Ces deux modèles constituent une première approximation pour les propriétés du polycristal, d'autant plus justifiée que les hétérogénéités du comportement élastoplastique sont faibles à l'instant initial mais également dans l'état actuel du matériau.

4.3 - L'approximation de Born [11]

Elle consiste à remplacer par $d\varepsilon^o$ le terme $d\varepsilon^T(r)$ dans l'intégrale sur V de l'équation intégrale (18).
On a alors

$$d\varepsilon^T(r) = d\varepsilon^o + \int_V \Gamma\ (r-r')\ \delta\mathbf{L}(r')\ d\varepsilon^o\ dV' \tag{32}$$

ce qui donne pour le tenseur $\mathbf{B}(r)$

$$\mathbf{B}(r) = \mathbf{I} + \int_V \Gamma\ (r-r')\ \delta\mathbf{L}(r')\ dV'$$
$$\text{et} \qquad \langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{I} + \frac{1}{V}\int_V \int_V \Gamma(r-r')\ \delta\mathbf{L}(r')\ dVdV' \tag{33}$$

Cette approximation conduit à

$$d\varepsilon^T(r) = \left\{\mathbf{I} + \int_V \Gamma(r-r')\delta\mathbf{L}(r')\ dV'\right\}\left\{\mathbf{I} + \frac{1}{V}\int_V \int_V \Gamma(r-r')\delta\mathbf{L}(r')\ dVdV'\right\}^{-1} d\mathbf{E}^T$$

et à $$\mathbf{L}^{eff} = \langle \mathbf{L}(r) + \mathbf{L}(r) \int_V \Gamma(r-r')\delta\mathbf{L}(r')\ dV' \rangle \langle \mathbf{B} \rangle^{-1} \tag{34}$$

Pour la partie antisymétrique $d\omega^T$, une approximation du même ordre consiste à écrire (19) sous la forme

$$d\omega^T(r) = d\omega^o + \int_V \mathbf{A}(r-r')\ \delta\mathbf{L}(r')\ d\varepsilon^o\ dV' \tag{35}$$

soit d'après (24)

$$d\omega^T(r) = d\omega^o + \int_V \mathbf{A}(r-r')\delta\mathbf{L}(r') \langle \mathbf{B} \rangle^{-1}\ d\mathbf{E}^T\ dV' \tag{36}$$

Cette approximation peut être répétée à des ordres supérieurs mais la convergence du développement obtenu n'est satisfaisante que lorsque $\mathbf{L}$ est faible c'est-à-dire pour des milieux faiblement hétérogènes.

La méthode de résolution ainsi introduite devient rapidement complexe par rapport aux approximations d'ordre zéro, implicite dans les modèles de Taylor-Lin ou le modèle statique, du fait de la nécessité d'une résolution spaciale complexe des champs $d\varepsilon^T(r)$ ou $d\omega^T(r)$.

Hormis les hétérogénéités intragranulaires initiales ou actuelles, le polycristal est essentiellement un aggrégat de monocristaux et les hétérogénéités sont, avant tout, de nature intergranulaires.

Il semble donc légitime de développer une modélisation du polycristal et une approximation des équations intégrales (18) et (19) qui respectent la nature granulaire du milieu hétérogène.

Par ailleurs, nous n'avons pas utilisé, jusqu'ici, le fait que $\mathbf{L}^o$ soit un milieu homogène dont les modules $\mathbf{L}^o$ peuvent être choisis arbitrairement (en res-

pectant cependant les conditions habituelles de symétrie et de stabilité).

Ces remarques sont utilisées dans le chapitre suivant réservé aux schémas autocohérents qui feront l'objet d'applications dans le dernier chapitre.

5 - LE MODELE AUTOCOHERENT

On peut remplacer l'équation intégrale (18) par une autre équation ne faisant pas intervenir la déformation $d\varepsilon^o$ en posant

$$T_{ijk\ell}(r)\, d\varepsilon^o_{k\ell} = \delta L_{ijk\ell}(r)\, d\varepsilon_{k\ell}{}^T(r) \tag{37}$$

on a alors

$$d\varepsilon^T_{ij}(r) = d\varepsilon^o_{ij} + \int_V \Gamma_{ijk\ell}(r-r')\, T_{k\ell mn}(r)\, d\varepsilon^o_{mn}\, dV' \tag{38}$$

et en multipliant les deux membres par $\delta \mathbf{L}$ on a

$$T_{ijk\ell}(r) d\varepsilon^o_{k\ell} = \delta L_{ijk\ell}(r) d\varepsilon^o_{k\ell} + \delta L_{ijk\ell}(r) \int_V \Gamma_{k\ell mn}(r-r')\, T_{mnpq}(r') d\varepsilon^o_{pq} dV' \tag{39}$$

qui peut aussi s'écrire

$$T_{ijk\ell}(r) = \delta L_{ijk\ell}(r) + \delta L_{ijk\ell}(r) \int_V \Gamma_{k\ell mn}(r-r') T_{mnpq}(r')\, dV' \tag{40}$$

(40) est une équation intégrale pour T.

D'après (15) et (16) on a

$$d\sigma(r) = (\mathbf{L}^o + \delta \mathbf{L}(r))\, d\varepsilon^T(r)$$

$$d\sigma(r) = \mathbf{L}^o d\varepsilon^T(r) + \mathbf{T}(r) d\varepsilon^o \tag{41}$$

ce qui donne pour les propriétés effectives $\mathbf{L}^{eff}$

$$d\Sigma = \langle d\sigma \rangle = \mathbf{L}^o\, d\mathbf{E}^T + \langle \mathbf{T} \rangle\, d\varepsilon^o \tag{42}$$

soit $$\mathbf{L}^{eff} = \mathbf{L}^o + \langle \mathbf{T} \rangle\, (\mathbf{I} + \mathbf{D})^{-1} \tag{43}$$

avec $$\mathbf{D} = \frac{1}{V} \int_V \int_{V'} \Gamma\, (r-r')\, \mathbf{T}(r')\, dV\, dV'$$

Si le milieu homogène fictif est choisi de telle façon que $\mathbf{L}^o = \mathbf{L}^{eff}$, alors on voit d'après (43) qu'on doit avoir $\langle \mathbf{T} \rangle = 0$ ce qui est, de fait, une équation implicite encore complexe à résoudre dans le cas général.

Si maintenant on prend en compte la nature granulaire du milieu hétérogène et si on suppose vérifiée l'hypothèse d'ergodicité, il est alors possible de résoudre des problèmes élémentaires de grains dans une matrice et d'effectuer des moyennes d'ensemble.

Le problème élémentaire consiste alors à résoudre le problème d'une inclusion dans une matrice homogène dont les modules tangents sont $\mathbf{L}^{eff}$. Ce problème est classique et a été résolu par Eshelby [14] pour des situations particulières. Nous le reprenons ici avec les équations précédentes.

Dans ce cas, le milieu hétérogène est caractérisé par

$$\delta \mathbf{L}(r) = (\mathbf{L}^I - \mathbf{L}^{eff})\, \Theta^I(r) = \Delta \mathbf{L}^I \Theta^I(r) \tag{44}$$

où $$\Theta^I(r) = \begin{cases} 0 \text{ si } r \notin V_I \\ 1 \text{ si } r \in V_I \end{cases}$$

et V_I désigne le volume du grain I.

On a alors pour l'équation (40)

$$\mathbf{T}(r) = \Delta L^I \Theta^I(r) + \Delta L^I \Theta^I(r) \int_V \Gamma(r-r')\, \mathbf{T}(r')\, dV' \qquad (45)$$

et on voit que $\mathbf{T}(r)$ est nul en dehors de V_I.

De plus, on sait que $\mathbf{T}(r)$ est uniforme dans V_I si V_I est une inclusion ellipsoïdale ce qui conduit à la solution suivante

$$\mathbf{t}^I = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \mathbf{T}(r)dV = \Delta \mathbf{L}^I + \Delta \mathbf{L}^I \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_I} \Gamma\,(r-r')\, \mathbf{t}^I\, dV'\, dV \qquad (46)$$

Si on pose $\Gamma^{II} = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_I} \Gamma\,(r-r')\, dV\, dV'$, la solution de (44) s'écrit

$$\mathbf{t}^I = (\mathbf{I} - \Delta \mathbf{L}^I \Gamma^{II})^{-1} \Delta \mathbf{L}^I \qquad (47)$$

La condition $< \mathbf{T} > = 0$ s'écrit donc :

$$\Sigma f_I\, (\mathbf{I} - \Delta\, \mathbf{L}^I\, \Gamma^{II})^{-1}\, \Delta \mathbf{L}^I = 0 \qquad (48)$$

où f_I désigne la fraction volumique de grains de volume v_i et de modules tangents $\mathbf{L}^I$.

Cette équation implicite pour $\mathbf{L}^{eff}$ dépend de $\mathbf{L}^{eff}$ à la fois par $\Delta \mathbf{L}^I$ mais également par Γ^{II} car le tenseur de Green du milieu homogène dépend de $\mathbf{L}^{eff}$.

Pour une inclusion sphérique et un milieu $\mathbf{L}^{eff}$ isotrope la solution pour Γ^{II} est analytique mais il n'en est pas ainsi dans le cas d'une anisotropie géométrique (forme des grains) et (ou) mécanique ce qui est le cas dans les problèmes d'élastoplasticité de polycristaux.

Sans hypothèse supplémentaire, il est alors difficile d'utiliser directement l'équation implicite (44) pour calculer les propriétés effectives et l'évolution des caractéristiques structurales du polycristal. Une approximation supplémentaire permettant de rendre explicite l'équation (44) consiste à supposer que $\mathbf{L}^{eff}$ est isotrope et à évaluer ses composantes à priori. On sait que pour les métaux usuels le module de cisaillement tangent est de l'ordre de $\frac{\mu}{100}$ où μ désigne le module de cisaillement élastique. Si de plus on néglige les effets d'anisotropie géométrique en supposant que les grains sont sphériques, alors (41) s'écrit sous la forme habituelle

$$d\sigma^I = d\Sigma^I + \frac{\mu}{100}(d\mathbf{E}^p - d\epsilon^{pI}) \qquad (49)$$

Cette équation, associée à celle décrivant le comportement du monocristal peut alors être effectivement utilisée pour déduire le comportement du polycristal. Avant de présenter quelques applications dans le chapitre suivant, il est intéressant de réécrire (49) pour une matrice isotrope et une inclusion ellipsoïdale dans le but d'évaluer les effets de forme associés à la texture morphologique induite par la déformation.

Dans ce cas, (49) prend la forme

$$d\sigma^I_{ij} = d\Sigma_{ij} + \frac{\mu}{100}\,(I_{ijk\ell} - S_{ijk\ell})\,(dE^p_{k\ell} - d\epsilon^p_{k\ell}) \qquad (50)$$

où S désigne le tenseur d'Eshelby.

Si de plus, on suppose que le milieu est parfaitement plastique, on a $d\sigma^I = d\Sigma = 0$ et (50) devient

$$(I_{ijk\ell} - S_{ijk\ell})\,(dE^p_{k\ell} - d\epsilon^p_{k\ell}) = 0 \qquad (51)$$

ce qui représente en fait les conditions utilisées dans les modèles de Taylor relaxés introduits récemment par MECKING H. [15] et CANOVA G.R. [16] pour tenir compte de la forme des grains. L'utilisation de tels modèles a permis un affinement des résultats obtenus par le modèle de Taylor classique, plus proches des observations expérimentales [16].

Ceci confirme la nécessité de prendre en compte de manière plus réaliste les effets associés à l'évolution de la microstructure "visible" (forme, orientation des grains ...) mais aussi ceux que les méthodes d'analyse physique classiques sont moins aptes à évaluer (en particulier les contraintes internes).

Dans le chapitre suivant, nous présentons justement quelques résultats de calculs dans la situation où les effets de textures cristallographique et morphologique induites sont faibles c'est-à-dire pour des faibles déformations plastiques ($E^p \sim 10$ %).

Les propriétés observées sont alors essentiellement associées à l'écrouissage intracristallin et à l'écrouissage par les contraintes internes qui, aux grandes déformations, seront accompagnées par les effets d'anisotropie géométrique et mécanique et les rotations du réseau cristallin.

6 - APPLICATIONS ET CONCLUSIONS

Si on veut tenir compte du glissement plastique cristallographique, il faut associer à la loi d'interaction (50), la loi d'écoulement plastique du monocristal (11). Nous supposons l'élasticité isotrope et homogène et le polycristal constitué de N grains dont la fraction volumique est décrite par les N quantités f^I ($f^I = \frac{V^I}{V}$)

On a alors pour le grain I

$$d\epsilon^{pI} = \sum_g R^{gI}\, d\gamma^{gI} \tag{52}$$

et pour les systèmes actifs du grain I

$$\mathbf{R}^{gI} \cdot d\sigma^I = H^{gh}_{(I)}\, d\gamma^{gI} \tag{53}$$

En utilisant la décomposition $d\mathbf{E}^p = \sum_I f^I\, d\epsilon^{pI} = \sum_{I,g} f^I \mathbf{R}^{gI}$ dans l'équation (49) on a

$$H^{gh}_{(I)}\, d\gamma^{gI} + \frac{\mu}{100}\, \mathbf{R}^{hI} \cdot \mathbf{R}^{gI}\, d\gamma^{gI} - \frac{\mu}{100} \sum_{J=1}^{N} f^J\, \mathbf{R}^{hI} \cdot \sum_k \mathbf{R}^{kI} d\gamma^{kI} = \mathbf{R}^{hI} \cdot d\Sigma \tag{54}$$

Ces équations constituent un système linéaire dont les inconnues $d\gamma$ sont à calculer en fonction de $d\Sigma$. La solution dépend évidemment de l'état de contrainte actuel (local et macroscopique) et de l'état d'écrouissage des systèmes de glissement par l'intermédiaire des conditions d'activité des systèmes de glissements.

La connaissance des $d\gamma$ permet alors le calcul

* des déformations locales et macroscopiques ($d\epsilon^p = \Sigma \mathbf{R} d\gamma$, $d\mathbf{E} = \Sigma f d\epsilon^p$)
* des rotations de réseau ($d\omega^e = - d\omega^p$)
* de l'évolution des contraintes internes ($d\sigma = d\Sigma + \frac{\mu}{100}(d\mathbf{E}^p - d\epsilon^p)$)
* de l'évolution des cissions critiques ($d\tau_c = H d\gamma$)

Pour les applications, nous envisageons un polycristal constitué de grains CFC dont les systèmes de glissement sont $\{111\}\langle 110\rangle$.

Nous supposons que la cission critique initiale (τ_o) est la même sur tous les systèmes de glissement et que la matrice d'écrouissage H ne comporte que deux termes distincts H_1 et H_2.

* H_1 représente les interactions faibles entre les systèmes de glissement et correspond à la pente ($\frac{d\tau}{d\gamma}$) du stade II de la courbe d'écrouissage du monocristal ($H_1 \sim \frac{\mu}{250}$)

* H_2 caractérise les interactions fortes ($H_2 > H_1$) entre les systèmes de glissements.

L'anisotropie de l'écrouissage intracristallin est alors caractérisée par le seul paramètre $A = \frac{H_2}{H_1}$

Pour la majeure partie des applications qui suivent, nous supposons que le polycristal est isotrope et constitué de 33 grains dont l'orientation a été choisie pour assurer (au moins partiellement) cette isotropie.

6.1 - Ecrouissage en traction simple

La première figure (Fig. 1) concerne l'écrouissage en traction simple en chargement monotone et radial pour différentes valeurs du module tangent choisi à priori. Par comparaison avec les courbes expérimentales obtenues sur du cuivre polycristallin possédant différentes tailles de grain (de 10 µm à 100 µm), on observe une bonne concordance avec les prévisions théoriques lorsque le module tangent choisi est conforme à celui de l'expérience [17].

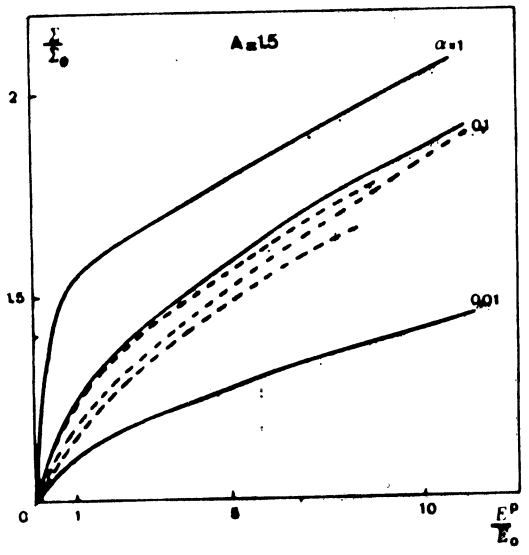


Figure 1

Courbes de traction calculées (——) pour plusieurs valeurs du module tangent ($\alpha\mu$)
Courbes expérimentales (---) obtenues sur des polycristaux de cuivre Σ_0 et E_0 représentant la contrainte et la déformation élastique à la limite élastique.

La seconde figure (Fig. 2) montre l'influence de l'anisotropie de l'écrouissage intracristallin (paramètre A) sur l'écoulement du polycristal. Après un stade à allure parabolique, où l'effet de A est faible (à cause de la prédominance de l'écrouissage par les contraintes internes par rapport à l'écrouissage intracristallin) la courbe prend une allure linéaire dont la pente est fortement influencée par l'anisotropie de ⊢⊣.

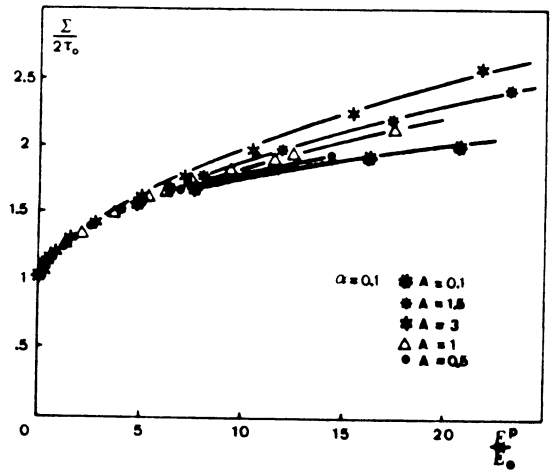


Figure 2

Courbes de traction réduites ($\Sigma/2\tau^{\circ}$, E^P/E°) pour différentes valeurs du facteur d'anisotropie A.

Dans le cas d'une sollicitation cyclique en traction simple où l'amplitude de la déformation plastique est imposée, la figure (3) montre tout d'abord l'existence d'un effet Bauschinger (1er cycle) dû aux contraintes internes. Cet effet Bauschinger, caractérisé par le rapport $\frac{|\sigma_t| - |\sigma_c|}{|\sigma_t|}$ évolue avec l'amplitude de la déformation plastique comme il est indiqué sur la figure 4.

σ_c et σ_t sont respectivement les frontières d'écoulement en compression et en traction.

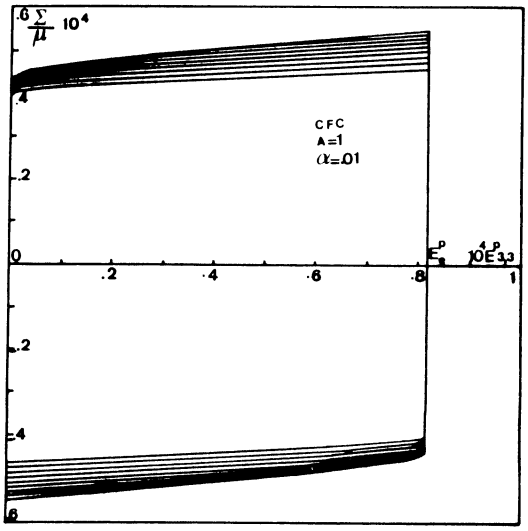


Figure 3

Courbes de traction cyclique à déformation plastique imposée

$\tau_o = 2.10^{-4}$ (daN/mm²)

$E^P = 0.82.10^{-4}$

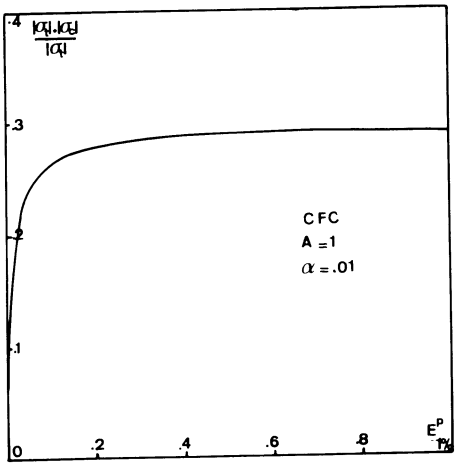


Figure 4

Evolution du rapport $\frac{|\sigma_t|-|\sigma_c|}{|\sigma_t|}$ caractérisant l'effet Bauschinger en fonction de la déformation plastique.

Pour les cycles suivants, la contrainte d'écoulement augmente et se stabilise à partir d'une dizaine de cycles comme on peut le remarquer sur la courbe de consolidation cyclique (Fig. 5) où on a porté la contrainte $\frac{|\sigma_t| + |\sigma_c|}{2\mu}$ en fonction de la déformation plastique cumulée E^p_{cum} ($E^p_{cum} = 2\,N\,E^p$, N est le nombre de cycles).

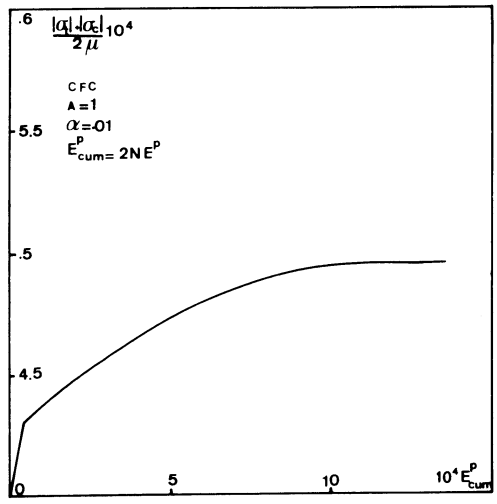


Figure 5

Courbe d'écrouissage cyclique.

Dans le cas d'un polycristal initialement anisotrope à cause de la présence d'une texture cristallographique, on doit s'attendre à un comportement anisotrope pour le polycristal. La figure 6 représente les résultats des calculs effectués dans le cas d'une tôle polycristalline dont la texture a été analysée par Lucke et all [18]. Ces courbes représentent la contrainte d'écoulement réduite en fonction de la déformation plastique pour plusieurs valeurs de l'angle Θ entre la direction de traction et la direction de laminage.
On observe à la fois une anisotropie initiale du seuil d'écoulement plastique et une anisotropie de l'écrouissage.

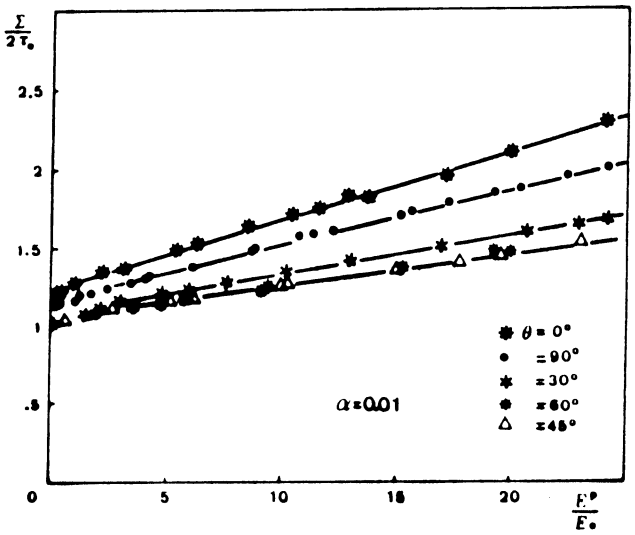


Figure 6

Courbes de traction calculées pour un polycristal de cuivre anisotrope (laminé).
Θ représente l'angle entre la direction de laminage et l'axe de traction.

6.2 - Comportement en chargement biaxé

En règle générale, une prédéformation sur un matériau polycristallin initialement isotrope introduit un écrouissage intracristallin et des contraintes internes telles que le comportement ultérieur est anisotrope. Il faudrait alors utiliser un espace à 5 dimensions pour représenter les surfaces de plasticité et leur évolution. Dans ce qui suit, nous nous limitons, à la fois pour le chargement initial et pour les sollicitations ultérieures, au plan principal Σ_1 et Σ_2.

La figure 7 montre pour différents chargements biaxés, la frontière initiale (proche du prisme de Tresca) ainsi que les frontières successives lorsque la résolution en déformation du seuil d'écoulement plastique est modifiée. On observe que la surface perd son caractère angulaire et prend une allure "elliptique" voisine de l'ellipse de Von Mises, lorsque le seuil en déformation plastique augmente.

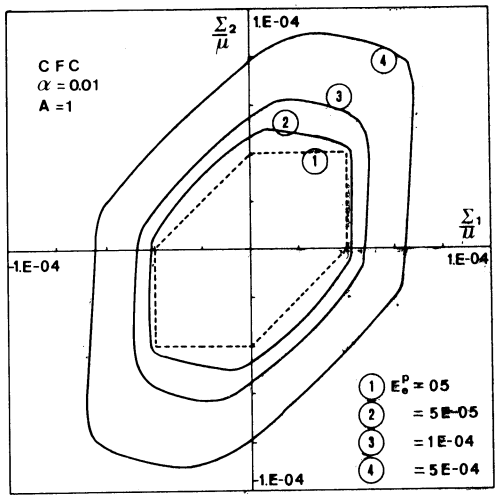


Figure 7

Surface de plasticité en chargement radial pour différents chargements biaxés en fonction de la résolution en déformation.

Les figures (8) (9) (10) et (11) de la planche I correspondent à l'évolution de la surface de plasticité (pour une résolution en déformation nulle) faisant suite à un préchargement biaxial (ou monoaxial dans le cas de la figure 8) d'amplitude croissante.

On observe alors à la fois un écrouissage cinématique (déplacement de la surface), un écrouissage isotrope (gonflement de la surface) et une déformation de la surface de plasticité.

Tous ces résultats sont conformes, au moins qualitativement, avec les observations expérimentales [19][20].

En conclusion, on peut dire que, malgré la formulation en petites déformations utilisées, les modèles polycristallins basés sur le schéma self-consistent simplifié permettent la modélisation et la prise en compte d'un nombre important de propriétés structurales et mécaniques que présentent les polycristaux métalliques.

L'introduction simultanée du formalisme des grandes déformations et la prise en compte des interactions discrètes entre grains permettra d'étendre de manière significative les domaines de validité des modèles proposés.

PLANCHE I

Evolution de la surface de plasticité
suite à un préchargement biaxial ou monoaxial
d'amplitude croissante

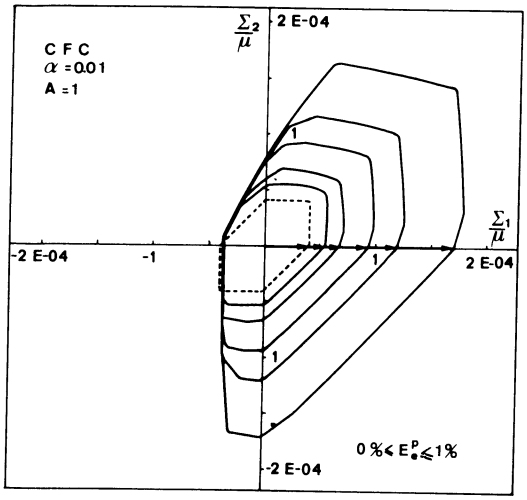


Figure 8

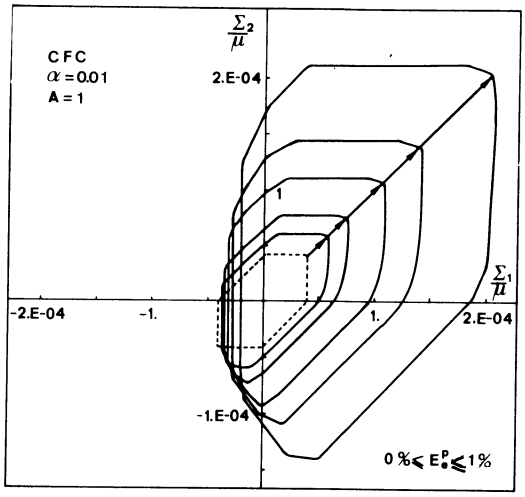


Figure 9

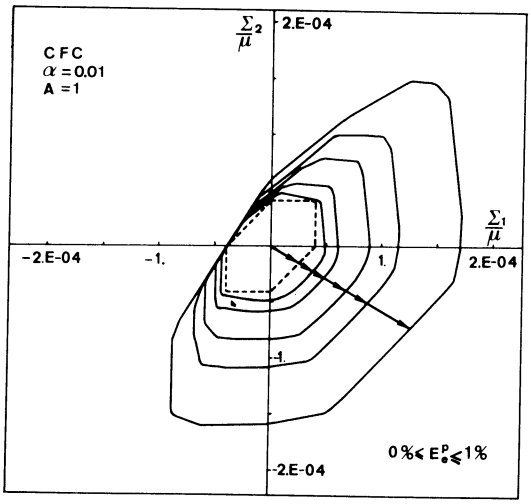


Figure 10

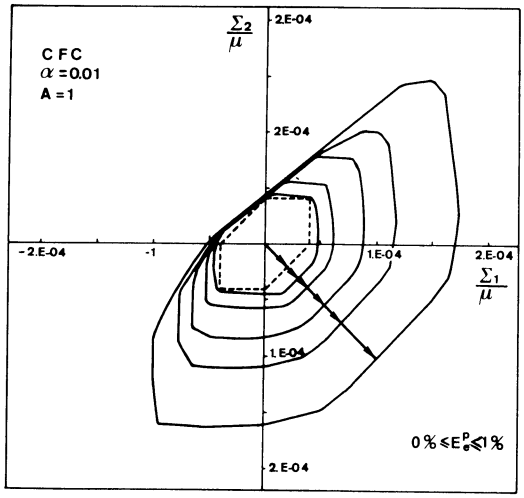


Figure 11

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1 HERSHEY Av., 1954 - J. Appl. Mech. 21, 236.

2 KRONER E., 1958 - Z. Phys. 151, 504.

3 KRONER E., 1981 - 15ème Colloque du GFR, P 15.

4 TAYLOR G.I., 1938 - J. Inst. Metals 62, 307.

5 LIN T.H., 1957 - J. Mech. Phys. Solids 5, 143

6 KRONER E., 1961 - Acta Metal 9, 155.

7 BUDIANSKY B. - WU T., 1962 - Proc. 4th Cong. Appl. Mech. 1175.

8 HUTCHINSON J.W., 1964 - J. Mech. Phys. Solids 12, 11.

9 HILL R., 1965 - J. Mech. Phys. Solids 13, 89.

10 BERVEILLER M., 1978 - Thèse Université Paris XIII

11 BERVEILLER M. - ZAOUI A. à paraître J. Eng. Mater, Tech.

12 DEDERICHS P.H. - ZELLER R., 1973 - Phys. Stat. Sol. (b) 55, 831.

13 ZAOUI A., 1970 - Thèse (Paris)

14 ESHELBY J.D., 1957 - Proc. Roy Soc. A 241, 376.

15 H. MECKING - H. HONNEFF, 1978 - in Texture of materials, Spinger Berlin, p 265.

16 G.R. CANOVA - U.F. KOCKS - J.J. JONAS, 1984 - Acta Metall vol 32 N 2.

17 HIHI A. 1982 - Thèse Université Paris XIII

18 LUCKE K., 1978 - Icotom 5 vol II Springer Velag Berlin p 437.

19 BUI H.D., 1966 - C.R. Acad. Sc Paris t 262 p 401-404.

20 ROUSSET M., 1984 - Thèse - Paris VI.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials*
CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 291-306

Effective elastic properties of materials with inclusions
Propriétés élastiques effectives des matériaux à inclusions

H.M. LEDBETTER

Fracture and Deformation Division
Center for Materials Science
National Bureau of Standards
Boulder, Colorado 80303

S.K. DATTA

Department of Mechanical Engineering and CIRES
University of Colorado
Boulder, Colorado 80309

RESUME

Nous étudions la propagation des ondes planes dans les matériaux contenant des inclusions. La théorie s'applique à une inclusion quelconque placée dans une matrice homogène, élastique et isotrope. Les particules peuvent être distribuées de façon homogène ou non. Leur forme est ellipsoïdale ; elles sont orientées au hasard ou alignées. Comme exemple particulier, nous considérons un composite constitué par un alliage d'aluminium renforcé par des particules de carbure de silicium. Nous donnons également des résultats pour une roche poreuse, où nous considérons à la fois des vides sphéroïdaux tant allongés qu'aplatis. Pour SiC/Al, nous considérons tout d'abord une distribution homogène de particules de SiC en forme de sphéroïdes allongés (rapport 3) orientées aléatoirement. Nous calculons les célérités des ondes longitudinales et de cisaillement dans le cas limite des grandes longueurs d'onde. Ceci donne des constantes élastiques, que nous comparons à la matrice complète à neuf composantes de l'horthotropie élastique déterminée par une méthode ultra-sonore. L'écart entre théorie et expérience nous conduit à élaborer un modèle à distribution non-homogène. L'hétérogénéité de distribution est introduite, d'après la microstructure observée, sous forme d'alignements de sphéroïdes aplatis d'alliages d'aluminium libres de SiC. Ceci introduit une anisotropie élastique proche de l'isotropie transverse. Pour les neuf constantes élastiques, les mesures et le modèle non homogène sont en accord à quelques pour cent près.

ABSTRACT

Theoretically and experimentally, we studied plane-wave propagation in materials containing inclusions. The theory applies to any elastic inclusion in a homogeneous elastic isotropic matrix. Particles can be distributed homogeneously or nonhomgeneously. We assumed ellipsoid-shaped particles, oriented either randomly or aligned. As a particular example, we consider an SiC-particle-reinforced aluminum-alloy composite. We give results also for a porous rock, where we consider both prolate-spheroid and oblate-spheriod voids. For SiC/Al we first consider the homogeneous-particle-distribution case where SiC particles represented as prolate spheroids (aspect ratio=3) are oriented randomly. We calculate speeds of both longitudinal and shear plane waves in the long-wavelength limit. This gives elastic constants, which we compare with measurements of the complete nine-component orthotropic-symmetry elastic constants (determined by an ultrasonic pulse-echo-overlap method). Measurement-theory disagreement led us to develop a nonhomogeneous-particle-distribution model. Based on the microstructure, we considered the nonhomogeneity to consist of aligned Al-alloy oblate-spheroid regions free of SiC particles. This alignment introduced an elastic anisotropy: approximately transversely isotropic. For all nine elastic constants, measurement and (nonhomogeneous) model agree within a few percent.

1 - INTRODUCTION

Much current practical interest exists concerning the diffraction of elastic waves by a random distribution of elastic inclusions in a homogeneous matrix. For example, it proves very effective to determine the static elastic properties of particulate and fibrous composites by measuring effective ultrasonic wave speeds [1-4]. Several theoretical studies [5-9] show that for long wavelengths one can calculate the effective wave speeds of plane-longitudinal and plane-shear waves moving through such a composite material. One makes two simplifying assumptions: (1) the wavelength is long compared with the dimensions of individual inclusions, and (2) the Lax [10] quasi-crystalline approximation.

In the present study, we consider the propagation of plane waves through a composite containing a "sea" of a random homogeneous distribution of prolate-ellipsoidal inclusions and "islands" of another phase represented as aligned oblate-ellipsoidal inclusions. This was done to model the properties of the composite shown in Fig. 1. The aligned oblate-spheroid inclusions induce a wave-speed anisotropy. Aligned inclusions were considered by Chow [11] using an extended Eshelby model and by Willis [9] using a polarization approach. A multiple-scattering approach similar to that used in Refs. [5-8] was used in the present study. The present study is unique in considering a nonhomogenous particle-reinforced composite as a random distribution of aligned ellipsoids in a matrix containing a random distribution of nonaligned particles.

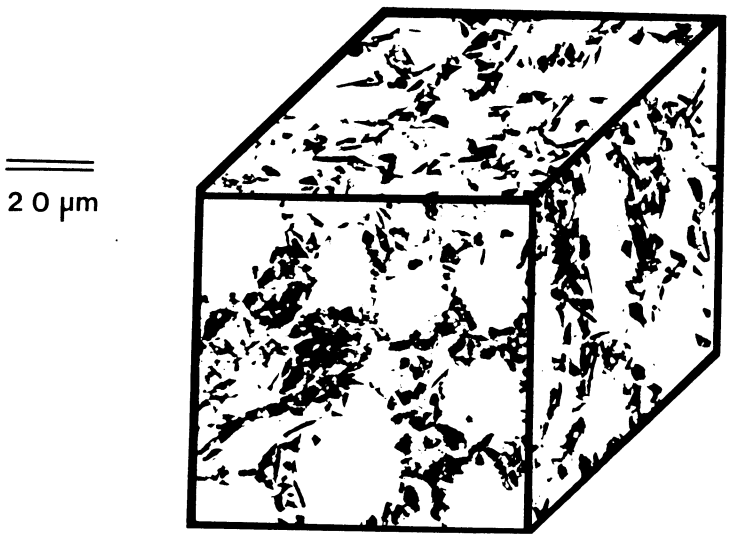


Fig. 1. Microstructure of a 30-volume-percent-SiC particle-reinforced 6061-aluminum-alloy composite. Note that SiC particles are distributed nonhomogenously. For calculations, we represent the aluminum-alloy islands as oblate spheroids distributed randomly but aligned in the x_1-x_2 plane.

2 - MULTIPLE SCATTERING BY A DISTRIBUTION OF ELLIPSOIDAL INCLUSIONS

In this section the scattered field at any point in the matrix is obtained in the presence of a distribution of N ellipsoidal inclusions. We consider both aligned and nonaligned cases. The results obtained are valid when the wavelength is long compared to the inclusion dimensions.

In expressing the scattered field in the presence of a number of ellipsoidal inclusions we must recall the results for a single ellipsoidal inclusion [12]. Let the center of the i-th ellipsoid be located at (X_i, Y_i,

Z_i) referred to a Cartesian frame of reference axes; let the principal axes of this ellipsoid be obtained from the Cartesian axes (XYZ) by rotation defined by the Eulerian angles α_i, β_i, γ_i. Let $\underset{\sim}{u}^E(\underset{\sim}{R}|\underset{\sim}{\rho}_i)$ denote the total field incident on the i-th inclusion. In terms of vector spherical wave functions that are regular at $\underset{\sim}{\rho}_i$, this "exciting" field may be written quite generally as

$$\underset{\sim}{u}^E(\underset{\sim}{R}|\underset{\sim}{\rho}_i) = \sum_{n=0}^{2} \sum_{m=-n}^{n} [a_{imn} \underset{\sim}{L}^{(1)}_{imn}(r_i, \theta_i, \phi_i) + \tau b_{imn} \underset{\sim}{N}^{(1)}_{imn}(r_i, \theta_i, \phi_i) + \tau c_{imn} \underset{\sim}{M}^{(1)}_{imn}(r_i, \theta_i, \phi_i)] \tag{1}$$

where r_i, θ_i, ϕ_i are the spherical polar coordinates of the point P with

$$r_i = [(X - \xi_i)^2 + (Y - \eta_i)^2 + (Z - \zeta_i)^2]^{1/2}$$

$$Z - \zeta_i = r_i \cos\theta_i, \quad X - \xi_i = r_i \sin\theta_i \cos\phi_i, \quad Y - \eta_i = r_i \sin\theta_i \sin\phi_i \tag{2}$$

position vector $\underset{\sim}{R}$ referred to the center of the ellipsoid. Thus, in writing Eq. (1) we assume that the time dependence is through the factor $e^{-\omega t}$, which has been dropped. The vector wave functions appearing in Eq. (1) were given in [12]. τ is the ratio of the longitudinal-wave and shear-wave speeds in the matrix. The field given by Eq. (1) will be scattered by the ellipsoid and this scattered field, denoted by

$$\underset{\sim}{u}^s(\underset{\sim}{R}|\underset{\sim}{\rho}_i) = \sum_{\nu=0}^{2} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} [A_{i\mu\nu} \underset{\sim}{L}^{(3)}_{i\mu\nu}(r_i, \theta_i, \phi_i) + \tau B_{i\mu\nu} \underset{\sim}{N}^{(3)}_{i\mu\nu}(r_i, \theta_i, \phi_i)] \tag{3}$$

where $\underset{\sim}{L}^{(3)}_{i\mu\nu}$ and $\underset{\sim}{N}^{(3)}_{i\mu\nu}$ are the appropriate spherical vector wave-functions that satisfy the radiation conditions as $r_i \to \infty$. Here $\varepsilon = \omega c/c_1$, where c_1 denotes the longitudinal wave speed in the matrix and the principal semiaxes of the ellipsoid are a, b, c (a > b > c).

The relationships between the scattered-field coefficients $A_{i\mu\nu}$, $B_{i\mu\nu}$ and the incident field coefficients a_{imn}, b_{imn}, and c_{imn} were derived in [12] when the semiaxes of the ellipsoid were parallel to the Cartesian axes XYZ. For aligned ellipsoids this choice can be made without loss of generality. However, for a nonaligned configuration it is necessary to obtain these relationships for arbitrary orientation. To derive these general relations hips from the results [12] it is necessary to refer both the incident field (1) and the scattered field (2) to the ellipsoid axes. This is done by using the rotational addition theorems for spherical harmonics [13, 14]. It can be shown that

$$\underset{\sim}{u}^E(\underset{\sim}{R}|\underset{\sim}{R}_i) = \sum_{n=0}^{2} \sum_{m'=-n}^{n} [a_{im'n} \underset{\sim}{L}^{(1)}_{im'n}(r_i, \theta_i', \phi_i') + \tau b_{im'n} \underset{\sim}{N}^{(1)}_{im'n}(r_i, \theta_i', \phi_i') + \tau c_{im'n} \underset{\sim}{M}^{(1)}_{im'n}(r_i, \theta_i', \phi_i')] \tag{4}$$

In writing Eq. (4) the relations expressing the spherical vector wavefunctions referred to XYZ and the ellipsoidal axes have been used. These have the form

$$\underset{\sim}{L}^{(1)}_{imn}(r,\theta,\phi) = \sum_{m'=-n}^{n} \beta(m, m', n)\, \underset{\sim}{L}^{(1)}_{im'n}(r,\theta',\phi') \tag{5}$$

Similar expressions hold for $\underset{\sim}{M}^{(1)}_{imn}$ and $\underset{\sim}{N}^{(1)}_{imn}$. Here

$$\beta(m, m', n) = (-1)^{m+m'} \left[\frac{(n+m)!(n-m')!}{(n-m)!(n+m')!}\right]^{1/2} D^{(n)}_{m'm}(\alpha\beta\gamma) \tag{6}$$

Using Eq. (5) in Eq. (1) it follows that

$$a_{im'n} = \sum_{m=-n}^{n} a_{imn}\, \beta(m,m',n), \text{ etc.} \tag{7}$$

The scattered field referred to the new axes is then

$$\underset{\sim}{u}^{s}(\underset{\sim}{R}|\underset{\sim}{R}_i) = \sum_{\nu=0}^{2} \sum_{\mu'=-\nu}^{\nu} [A_{i\mu'\nu}\, \underset{\sim}{L}^{(3)}_{i\mu'\nu}(r,\theta',\phi) + \tau B_{i\mu'\nu}\, \underset{\sim}{N}^{(3)}_{i\mu'\nu}(r,\theta',\phi)] \tag{8}$$

Now

$$\underset{\sim}{L}^{(3)}_{i\mu'\nu}(r,\theta',\phi') = \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \bar{\beta}(\mu',\mu,\nu)\, \underset{\sim}{L}^{(3)}_{i\mu\nu,}(r,\theta,\phi)$$

where

$$\bar{\beta}(m',\mu,n) = (-1)^{m'+\mu} \left[\frac{(n+m')!(n-\mu)!}{(n-m')!(n+\mu)!}\right]^{1/2} D^{(n)*}_{m'\mu}(\alpha\beta\gamma) \tag{9}$$

and the asterisk denotes complex conjugate. Thus,

$$A_{i\mu\nu} = \sum_{\mu'=-\nu}^{\nu} \bar{\beta}(\mu',\mu,\nu) A_{i\mu'\nu}$$

$$B_{i\mu\nu} = \sum_{\mu'} \bar{\beta}(\mu',\mu,\nu) B_{i\mu'\nu} \tag{10}$$

But

$$A_{i\mu'\nu} = \frac{iv_0\epsilon^3}{4\pi c^3} \sum_{\nu_1} \sum_{\mu_1} T^{\mu_1\nu_1}_{\mu'\nu} (a_{i\mu_1\nu_1} + \delta(\nu) b_{i\mu_1\nu_1}) \tag{11}$$

where

$$\delta(\nu) = 3\tau^2, \quad \nu = 0,2$$

$$= 2\tau, \quad \nu = 1$$

Explicit expressions for $T_{\mu'\nu}^{\mu_1\nu_1}$ are given in [15].

Using Eqs. (7) and (11) in Eq. (10) it is found that

$$A_{i\mu\nu} = \frac{iv_0\epsilon^3}{4\pi c^3} \sum_{\nu_1} \sum_{\mu_1'=-\nu_1}^{\nu_1} \hat{T}_{\mu\nu}^{\mu_1'\nu_1} (a_{i\mu_1'\nu_1} + \delta(\nu)\, b_{i\mu_1'\nu_1})$$

$$B_{i\mu\nu} = \frac{iv_0\epsilon^3}{4\pi c^3} \Delta(\nu) \sum_{\nu_1} \sum_{\mu_1'} \hat{T}_{\mu\nu}^{\mu_1'\nu_1} (a_{i\mu_1'\nu_1} + \delta(\nu)\, b_{i\mu_1'\nu_1}) \tag{12}$$

where

$$\hat{T}_{\mu\nu}^{\mu_1'\nu_1} = \sum_{\mu'=-\nu}^{\nu} \sum_{\mu_1=-\nu_1}^{\nu_1} \bar{\beta}(\mu',\mu,\nu)\, T_{\mu'\nu}^{\mu_1\nu_1}\, \beta(\mu_1',\mu_1,\nu_1)$$

$$\Delta(\nu) = \begin{cases} \tau^2, & \nu = 1 \\ \tau^{3/2}, & \nu = 0, 2 \end{cases}$$

This completes the derivation of the scattered field due to a single arbitrarily oriented ellipsoid.

We now seek the scattered field due to a number of arbitrarily oriented ellipsoids. It is necessary to expand the scattered field due to the j-th ellipsoid in vector wavefunctions regular near the i-th one. Using translational addition theorems [16], the exciting field on the i-th ellipsoid is

$$\underset{\sim}{u}^E(\underset{\sim}{R}|\underset{\sim}{\rho}_i) = \underset{\sim}{u}^{(i)} + \sum_{n=0}^{2} \sum_{m=-n}^{n} [a_{imn}^2\, \underset{\sim}{L}_{imn}^{(1)} + \tau b_{imn}^2\, \underset{\sim}{N}_{imn}^{(1)} + \tau c_{imn}^2\, \underset{\sim}{M}_{imn}^{(1)}] \tag{13}$$

where

$$a_{imn}^2 = \sum_{j\neq i} \sum_{\nu} \sum_{\mu'=-\nu}^{\nu} A_{j\mu'\nu}\, A_{mn}^{\mu'\nu}$$

$$b_{imn}^2 = \sum_{j\neq i} \sum_{\nu} \sum_{\mu'=-\nu}^{\nu} B_{j\mu'\nu} B_{mn}^{\mu'\nu}$$

Here $\underset{\sim}{u}^{(i)}$ is the incident field and $A_{mn}^{\mu'\nu}$ and $B_{mn}^{\mu'\nu}$ are defined in [6].

The incident wave will be taken as a plane wave propagating along the Z-axis. Once the incident wave is prescribed, the scattered-field coefficients are obtained correct to $O(\epsilon^3)$ due to a number of arbitrarily oriented ellipsoids are obtained. In this study the calculations are simplified if we assume that the distribution of the SiC particles is random and homogeneous. We assume further that the particles have the same shape and size.

Because the powder-metallurgy manufacture of these composites produces a material that contains matrix (aluminum) islands devoid of any particles, we must modify the wave speeds calculated above. We do this in a second step by assuming a distribution of oriented aluminum ellipsoids of identical shape and

3 - EFFECTIVE WAVE SPEEDS IN A COMPOSITE OF RANDOM DISTRIBUTION OF DISORIENTED ELLIPSOIDS

To calculate the effective wave speeds of plane waves, we take an ensemble average of Eq. (12). For this purpose, the probability density of finding the scatterers at $\underset{\sim}{R}_1$, $\underset{\sim}{R}_2$,... is denoted by $p(\underset{\sim}{R}_1, \ldots, \underset{\sim}{R}_N)$, which can be written

$$\begin{aligned} p(\underset{\sim}{R}_1,\ldots, \underset{\sim}{R}_N) &= p(\underset{\sim}{R}_1)\, p(\underset{\sim}{R}_2,\ldots, \underset{\sim}{R}_N|\underset{\sim}{R}_1) \\ &= p(\underset{\sim}{R}_1)\, p(\underset{\sim}{R}_2|\underset{\sim}{R}_1)\, p(\underset{\sim}{R}_3,\ldots, \underset{\sim}{R}_N|\underset{\sim}{R}_1, \underset{\sim}{R}_2) \end{aligned} \tag{14}$$

Assuming the distribution to be uniform it follows that

$$\begin{aligned} p(\underset{\sim}{R}_1) &= 1/V \ , \quad \underset{\sim}{R}_1 \epsilon V \\ &= 0 \ , \quad R \notin V \end{aligned} \tag{15}$$

where V is the volume of the composite. Furthermore, following the analyses of Refs. [6] and [8] the conditional density $p(\underset{\sim}{R}_2|\underset{\sim}{R}_1)$ will be taken

$$\begin{aligned} p(\underset{\sim}{R}_2|\underset{\sim}{R}_1) &= 1/V \ , \quad |\underset{\sim}{R}_2 - \underset{\sim}{R}_1| \geq 2a \\ &= 0 \ , \quad |\underset{\sim}{R}_2 - \underset{\sim}{R}_1| < 2a \end{aligned} \tag{16}$$

This is the "well-stirred" approximation whose validity for high concentrations is questionable [9]. However, the results obtained in Ref. [6] under this assumption coincide with the lower (upper) bound of Hashin and Shtrikman [17]. (See Ref. [2].) Although this is no justification for adopting Eq. (16), we use it here for simplicity.

In taking the ensemble average of Eq. (12), for random orientation, the average of $T_{\mu\nu}^{\mu_1\nu_1}$ over all orientations is simply

$$\langle T_{\mu\nu}^{\mu_1\nu_1} \rangle = 3\, P_\nu = \sum_{\mu_1=-\nu}^{\nu} \frac{1}{2\nu+1}\, T_{\mu_1\nu}^{\mu_1\nu} \tag{17}$$

Thus,

$$\begin{aligned} \langle A_{i\mu\nu} \rangle_i = \frac{iv_0\epsilon^3}{4\pi c^3}\, 3\, P_\nu \Big[& \frac{1}{i}\, e^{ik_1\zeta_i}\, i^\nu\, (2\nu+1)\, \delta_{\mu 0} \\ & + n_0 \sum_{\nu_1} \sum_{\mu_1} \int_{|\underset{\sim}{R}_j - \underset{\sim}{R}_i| \geq 2a} \langle A_{j\mu_1\nu_1} \rangle_{ji} A_{\mu\nu}^{\mu_1\nu_1}\, d\underset{\sim}{R}_j \\ & + \delta(\nu) \Big\{ \frac{1}{i}\, e^{ik_2\zeta_i}\, i^\nu\, \frac{2\nu+1}{2\nu(\nu+1)}\, (\delta_{\mu 1} - \nu(\nu+1)\delta_{\mu,-1}) \\ & + n_0 \sum_{\nu_1} \sum_{\mu_1} \Delta(\nu_1) \int_{|\underset{\sim}{R}_j - \underset{\sim}{R}_i| \geq 2a} \langle A_{j\mu_1\nu_1} \rangle_{ji}\, B_{\mu\nu}^{\mu_1\nu_1}\, d\underset{\sim}{R}_j \Big\} \Big] \end{aligned} \tag{18}$$

Here n_o is the number density the SiC particles. Equation (18) has the same form as derived in Ref. [6] for a distribution of spherical particles. It contains the conditional expectations with two particles held fixed. An approximation to $\langle A_{i\mu\nu} \rangle_i$ is obtained by assuming the Lax [10] quasi-crystalline approximation. This approximation assumes that

$$\langle A_{j\mu_1\nu_1} \rangle_{ji} = \langle A_{j\mu_1\nu_1} \rangle_j \tag{19}$$

Substituting Eq. (19) into Eq. (18) leads to an integral equation for the determination of $\langle A_{i\mu\nu} \rangle_i$. To find the effective wave speeds of plane-wave propagation, we assume a solution to the integral equation:

$$\langle A_{i\mu\nu} \rangle_i = X_{\mu\nu} e^{iK\zeta_i} \tag{20}$$

where K is the effective number and $X_{\mu\nu}$ are constants. Substituting Eq. (20) into Eq. (18) it can be shown following Ref. [6] that for plane-longitudinal and plane-shear waves the respective wavenumbers K_1 and K_2 are

$$\frac{K_1^2}{k_1^2} = \frac{(1 + 9\bar{c}P_1)\ (1 + 3\bar{c}P_0)\ \{1 + \frac{3}{2}\bar{c}P_2\ (2+3k_2^2/k_1^2)\}}{1-15\bar{c}P_2\ (1+3\bar{c}P_0) + \frac{3}{2}\bar{c}P_2\ (2+3k_2^2/k_1^2)} \tag{21}$$

$$\frac{K_2^2}{k_2^2} = \frac{(1+9\bar{c}P_1)\ \{1a+ \frac{3}{2}\bar{c}P_2\ (2+3k_2^2/k_1^2)\}}{1+ \frac{3}{4}\bar{c}P_2\ (4-9k_2^2/k_1^2)} \tag{22}$$

where

$$\bar{c} = \frac{4}{3}\pi abcn_0.$$

Using the expressions for $T^{\mu'_1 1}_{\mu_1 1}$ [15] it is found that

$$9P_1 = (\rho'/\rho - 1) \tag{23}$$

Now writing

$$K_1 = \omega/c_1^*,\ K_2 = \omega/c_2^* \tag{24}$$

where c_1^*, c_2^* are the effective longitudinal-wave and shear-wave speeds, the effective Lamé constants λ^* and μ^* are obtained from the equations

$$\frac{\lambda+2\mu}{\lambda^*+2\mu^*} = \frac{(1+3\bar{c}P_0)}{1-15\bar{c}P_2\ (1+3\bar{c}P_0) + \frac{3}{2}\bar{c}P_2(2+3k_2^2/k_1^2)} \frac{\{1+ \frac{3}{2}\bar{c}P_2\ (2+3k_2^2/k_1^2)\}}{}$$

$$\frac{\mu}{\mu^*} = \frac{1+ \frac{3}{2}\bar{c}P_2(2+3k_2^2/k_1^2)}{1+ \frac{3}{4}\bar{c}P_2(4-9k_2^2/k_1^2)} \tag{25}$$

4 - EFFECTIVE WAVE SPEEDS IN A COMPOSITE OF RANDOM DISTRIBUTION OF ORIENTED ELLIPSOIDS

When the ellipsoids are aligned, effective wave speeds of plane waves can be calculated as in the previous section by taking the ensemble average of Eq. (12). However, for propagation in an arbitrary direction the dispersion equation is complicated. The equation simplifies for propagation along the ellipsoidal axes. Results for this particular case are derived here. A later publication will consider the general case.

When an incident plane wave propagates along one of the ellipsoid axes, c-axis say, the XYZ axes can be chosen to be parallel to the ellipsoidal abc-axes. Then

$$T_{\mu\nu}^{\mu_1'\nu_1} = T_{\mu\nu}^{\mu_1'\nu_1} \tag{26}$$

Taking now the ensemble average of Eq. (12) one makes, as before, the quasi-crystalline approximation to derive an integral equation for $\langle A_{i\mu\nu} \rangle_i$. Considering now a longitudinal-plane-wave solution of this equation ($\langle A_{i\mu\nu}\rangle_i = X_{\mu\nu} e^{iK_1\zeta_i}$; $\mu = 0, \nu = 0, 1, 2$) a set of linear homogeneous equations in X_{00}, X_{01}, and X_{02} is obtained. Keeping only the lowest-order terms in K_1^2/K_1^2 and equating the determinant of the coefficients of X_{00}, X_{01}, and X_{02} to zero one finds.

$$\frac{K_1^2}{k_1^2} = (1 + 3\bar{c}\, T_{01}^{01})\,[(1 + \bar{c}\, T_{00}^{00})\,\{1 + \bar{c}\, T_{02}^{02}\,(1 + \tfrac{3}{2}\, k_2^2/k_1^2)\,\}$$

$$- \bar{c}^2\,(1 + k\tfrac{3}{2}\, k_2^2/\, K_1^2\,)\, T_{00}^{02}\, T_{02}^{00}\,]/[1 - 5\bar{c}\, T_{02}^{02}(1 + \bar{c}\, T_{00}^{00}$$

$$+ \bar{c}\,(\,1 + \tfrac{3}{2}\, k_2^2/k_1^2)\, T_{02}^{02} + \bar{c}\,\{5\, T_{00}^{02} + T_{02}^{00} + 5\,\bar{c}\, T_{00}^{02}\, T_{02}^{00}\}\,] \tag{27}$$

For a plane shear wave polarized in the X-direction and propagating along the Z-direction the dispersion equation is obtained by taking

$$\langle A_{i\mu\nu} \rangle_i = X_{\mu\nu}\, e^{iK_2\zeta_i} \quad ; \; \mu = -1, 1; \; \nu = 1, 2$$

It is found that

$$\frac{K_2^2}{k_1^2} = \frac{(1 + 3\,\bar{c}\, T_{11}^{11})\,[1 + \bar{c}\,(T_{12}^{12} + 6T_{12}^{-12})\,(1 + \tfrac{3}{2}\, k_2^2/k_1^2)]}{1 - \bar{c}\,(T_{12}^{12} + 6\,\bar{T}_{12}^{12})\,(\tfrac{9}{4}\, k_2^2/k_1^2 - 1)} \tag{28}$$

It is also easily show that for a shear wave polarized along the Y-axis and propagating along the Z-axis the effective wavenumber K_2 is obtained by replacing $T_{12}^{12} + 6T^{-12}_{12}$ with $T_{12}^{12} - 6T^{-12}_{12}$ in Eq. (28).

The above derivation is for propagation along the Z-axis. Results for propagation along the X-axis and Y-axis are obtained by cyclic interchange of (abc). It is shown easily that the speed of propagation of a shear wave polarized along the X-direction and moving along the Z-direction is the same as that of a shear wave polarized along the Z-direction and moving along the X-direction.

5 - EXPERIMENT

Material

We obtained materials from a commercial supplier in the form of 1-cm plates. The supplier started with commercially available Al-6061 and SiC particles. These powders were blended, compacted, and sintered to produced billets measuring 25 x 30 x 4 cm. Billets were hot rolled at 700-783 K with a reduction per pass ranging from 10 to 50 percent. Rolled plates were subjected to a standard T6 heat treatment: solution treat at 800 K (980°F) for 2 h, water quench, age at 436 K (325°F) for 18 h. The plate contained nominally 30 volume percent SiC.

Sound-velocity measurements

Sound velocities were determined by a pulse-echo method described in detain previously [18]. Briefly, 1-cm cubes were prepared by grinding so that opposite faces were flat and parallel within 5 μm. Quartz piezoelectic crystals with fundamental resonances between 4 and 7 MHz were cemented with phenyl salicylate to the specimens. An x-cut transducer was used for longitudinal waves and an ac-cut for transverse waves. Ultrasonic pulses 1 to 2 cycles long were launched into the specimen by electrically exciting the transducer. The pulses propagated through the specimen, reflected from the opposite face, and propagated back and forth. The pulse echoes were detected by the transducer and displayed on an oscilloscope equipped with a time delay and a microprocessor for time-interval measurements. The sound velocity was computed by

$$v = 2\ell/t \tag{29}$$

where ℓ denotes specimen length, and t the round-trip transit time. On the oscilloscope, t was the time between adjacent echoes, the first and second echoes usually being measured, and within these the time between leading cycles. Elastic constants were computed from the general relationship

$$C = \rho v^2 \tag{30}$$

where ρ denotes mass density.

Other Measurements

Mass density was determined by Archimedes's method using distilled water as a standard. For 30 volume-percent SiC/Al, we found $\rho = 2.838$ g/cm^3.

Using quantitative-metallographic equipment we verified the overall SiC volume fraction to be $\bar{c} = 28.1 \mp 1.9$ percent and the Aℓ-island concentration to be $c^* = 48.5$ percent. This means that within the sea the SiC volume fraction was 54.6 percent. For the calculations reported below, we took $\bar{c} = 0.30$ and varied c^* from 0.0 to 0.5. Metallography showed that the SiC particles represented as prolate spheroids possess an aspect ratio of approximately 3.0. Similarly, the aluminum islands represented as oblate spheroids possess an aspect ratio of approximately 0.33.

6 - RESULTS: CALCULATIONS AND OBSERVATIONS

Table 1 shows the principal results of the study represented as elastic-stiffness coefficients, C_{ij} in Voigt's notation. Columns 2 and 3 give the properties of the constituents: aluminum alloy 6061 (measured in this study) and SiC (reported by Schreiber and Soga [19]). Column 4 contains the observed elastic constants of 30-volume-percent SiC/Al. Column 5 gives the rule-of-mixture prediction and column 6 the prediction based on the assumption of homogeneously distributed SiC particles. Finally, column 7 gives predictions based

on the present model for the nonhomogeneous case shown in Fig. 1. The coordinate system is x_3 perpendicular to plate, x_1 in plate in rolling direction, x_2 in plate perpendicular to rolling direction.

For homogeneous-particle-distribution case, Fig. 2 shows the effects of SiC-particle volume fraction and SiC-particle aspect ratio. B, the bulk modulus, is calculated from

$$B = [C_{11} + C_{22} + C_{33} + 2(C_{12} + C_{13} + C_{23})]/9 \tag{31}$$

For the nonhomogenous-particle-distribution case, Figs. 3 and 4 show the effects of aluminum-island volume fraction, c*, and aluminum-island aspect ratio. For all these results, we fixed the SiC-particle volume fraction at 0.3 and the SiC-particle aspect ratio at 3.0. Figures 5 and 6 show the effect of aspect ratios of nonaligned SiC particles on the longitudinal and shear wave speeds.

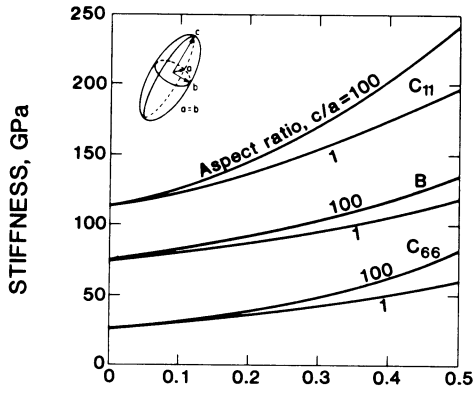


Fig. 2. For a homogeneous SiC-particle distribution, variation of three elastic stiffnesses with volume fraction and particle aspect ratio. C_{11} denotes longitudinal modulus, B bulk modulus, and C_{66} shear modulus.

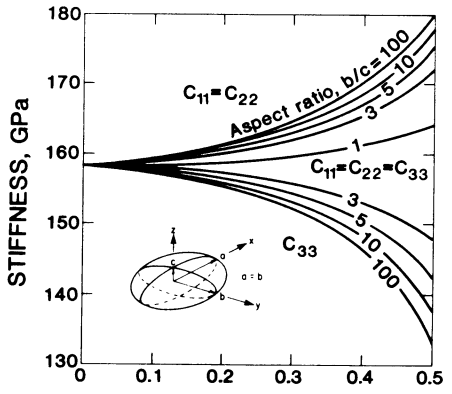


Fig. 3. For a nonhomgeneous SiC-particle distribution, variation of three longitudinal elastic stiffnesses: C_{11}, C_{22}, and C_{33}, with aluminum-island volume fraction and aspect ratio of island (represented as an oblate spheroid). The SiC volume fraction is 0.3 and the SiC aspect ratio is 3.0

Table 1. Observed and predicted elastic stiffnesses, C_{ij}, of 30-volume-percent SiC/6061 Al at room temperature. Units on elastic constants are 10^{11} N/m^2.

	6061	SiC[a]	30-volume-percent SiC/6061-Al			
			Obs.	R-o-m	Homog.	Nonhomog.
Spec. Grav.	2.706	3.181	2.838	2.849	2.849	2.849
C_{11}	1.105	4.742	1.659	2.195	1.583	1.727
C_{22}	1.105	4.742	1.651	2.195	1.583	1.727
C_{33}	1.105	4.742	1.483	2.195	1.583	1.480
C_{44}	0.267	1.881	1.433	0.751	0.443	0.429
C_{55}	0.267	1.881	0.434	0.751	0.443	1.429
C_{66}	0.267	1.881	0.487	0.751	0.443	0.513
C_{12}	0.571	0.980	0.685	0.693	0.697	0.701
C_{13}	0.571	0.980	0.662	0.693	0.697	0.677
C_{23}[c]	0.571	0.980	0.662	0.693	0.697	0.677[c]

[a] From Schreiber and Soga [19].

[b] We assume $C_{23} = C_{13}$.

[c] We assume $C_{13} = C_{23} = 0.966\ C_{12}$.

Predictions in this table are based on $\bar{c} = 0.30$, $c^* = 0.50$, SiC-particle aspect ratio = 3.0, Aℓ-island aspect ratio = 0.33.

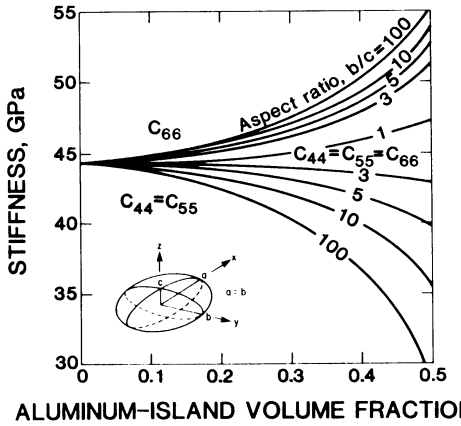


Fig. 4. For a nonhomogeneous SiC-particle distribution, variation of three shear stiffnesses: $C_{44} = C_{55}$ and C_{66}, with aluminum-island volume fraction and aspect ratio of island (represented as an oblate spheriod). The SiC volume fraction is 0.3 and the SiC aspect ratio is 3.0

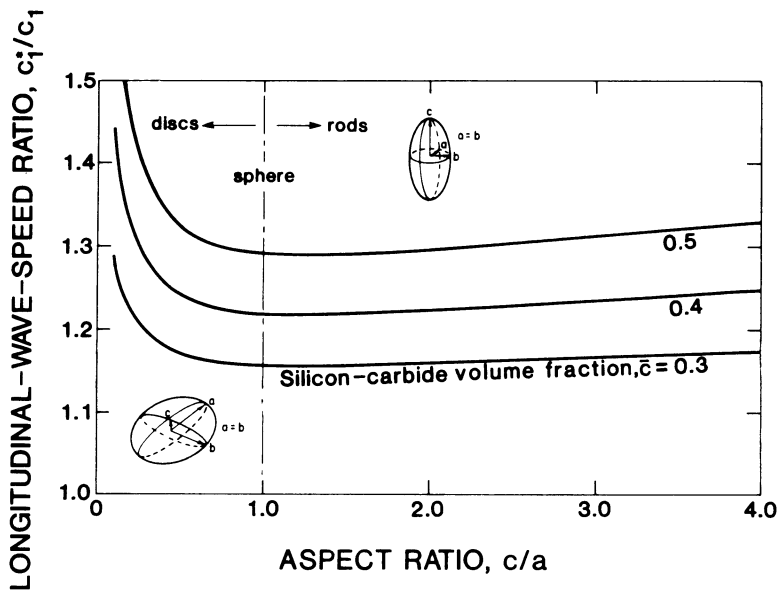


Fig. 5. For a homogeneous SiC-particle distribution, variation of longitudinal-wave speed with volume fraction and particle aspect ratio.

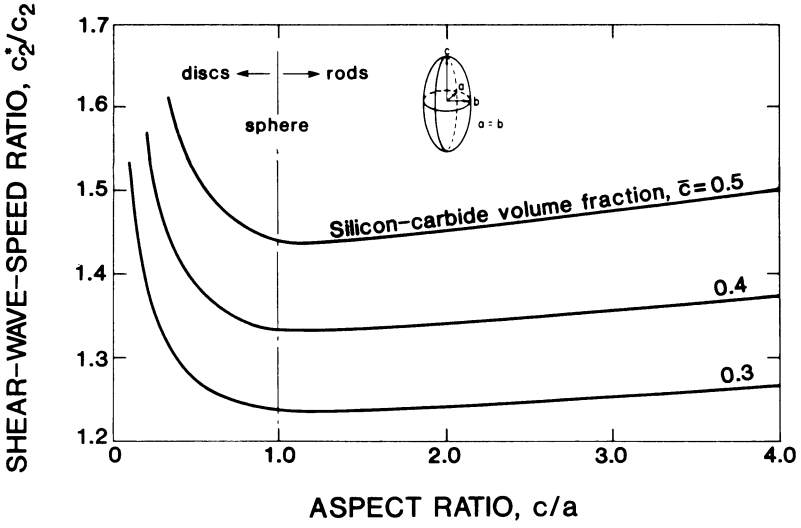


Fig. 6. For a homogeneous SiC-particle distribution, variation of shear-wave speed with volume fraction and particle aspect ratio.

7 - DISCUSSION

Experimental results in Table 1 show several interesting features.

1. The $x_1 - x_2$ plane is elastically isotropic. Such isotropy requires that $C_{11} = C_{22}$ and $C_{44} = C_{55}$, which are observed within approximately one per-

cent. This agrees with the microstructure, which shows that the aluminum islands are oblate spheroids lying in the x_1-x_2 plane.

2. The x_3 direction differs from the x_1 and x_2 directions and is elastically softer as shown by $C_{33} < C_{11} = C_{22}$ by about ten percent. Again this agrees with the microstructure. Along x_3 one "sees" a larger area fraction of softer aluminum islands than along x_1 and x_2.

3. Ignoring small differences along the x_1 and x_2 directions, these composites can be considered elastically transversely isotropic with five independent elastic constants. In Voigt's contracted notation, and in symmetrical 6 x 6 matrix array, these are:

$$C_{ij} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{vmatrix} \qquad (32)$$

where $C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$.

4. Elastic anisotropy for the shear constants $C_{66}/C_{44} = 1.2$ nearly equals that for the longitudinal constants describe above. Again, a microstructural correlation occurs. The x_1-x_2 planes, containing the largest area fraction of soft aluminum islands, offer the lowest resistance to shear deformation.

The rule-of-mixture (rom) fails dramatically for this material. For the nine C_{ij}, Table 1 shows an average rom-observed departure of 34 percent. For the three shear moduli, C_{ij} (i = 4, 5, 6), the rom value differs from the observed by up to 73 percent! Reflecting the matrix control of the elastic stiffness, all rom values are too high. Perhaps surprising is that an rom predicts rather well the off-diagonal stiffnesses: C_{12}, C_{13}, and C_{23}.

The present model, even for the unrealistic homogeneous cases, provides considerable improvement over an rom calculation. Column 6 in Table I, for nine C_{ij}, shows an average observation-theory departure of 5 percent, the largest discrepancies being 9 percent for C_{66} and 7 percent for C_{33}. The principal failure of the homogeneous-particle-distribution model is to explain the anisotropy of C_{11}/C_{33} and C_{44}/C_{66}. Interestingly, the homogeneous model does not improve the C_{12} predictions over the rom values.

The present model, invoking a simple nonhomogeneous particle distribution, both explains the elastic anisotropy and gives better overall absolute predictions of the elastic constants. Column 7 in Table 1 shows an average 2 percent observation-theory difference. C_{22} and C_{66} show the largest differences, 5 percent. The overall agreement would improve considerably if either the volume fraction or the aspect ratio of the aluminum islands were changed toward lower volume fraction or toward more spherical islands, respectively. (But, we did not juggle these parameters.) The present model, with nonhomogeneity does improve the predicted C_{12} value over the rom value. The present model does not provide estimates of $C_{13} = C_{23}$. Column 7 of Table 1 uses the observed ratio of these to C_{12}.

Although the discussion above pertains to a particular composite the analysis applies to other multiphase materials. One such problem of particular interest is the effective properties of a porous rock with a distribution of variously shaped cavities. Figures 7 and 8 show the effects of nonaligned

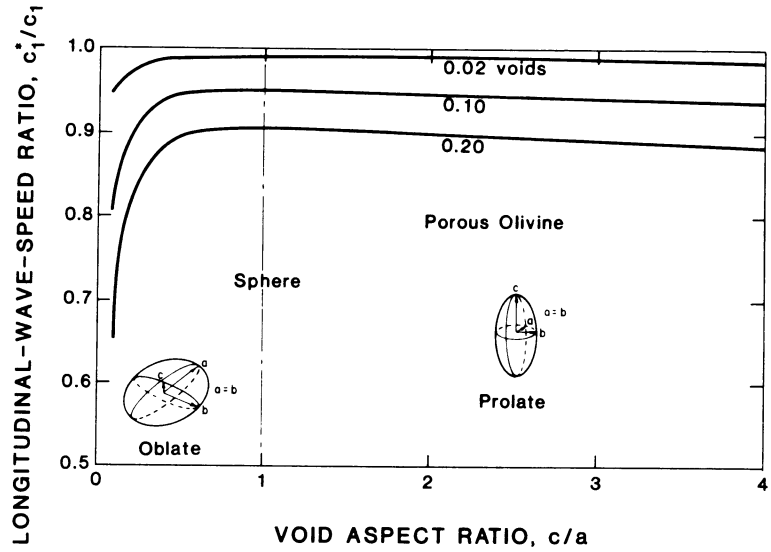


Fig. 7. For a homogeneous distribution of voids in olivine, variation of longitudinal-wave speed with volume fraction and void aspect ratio.

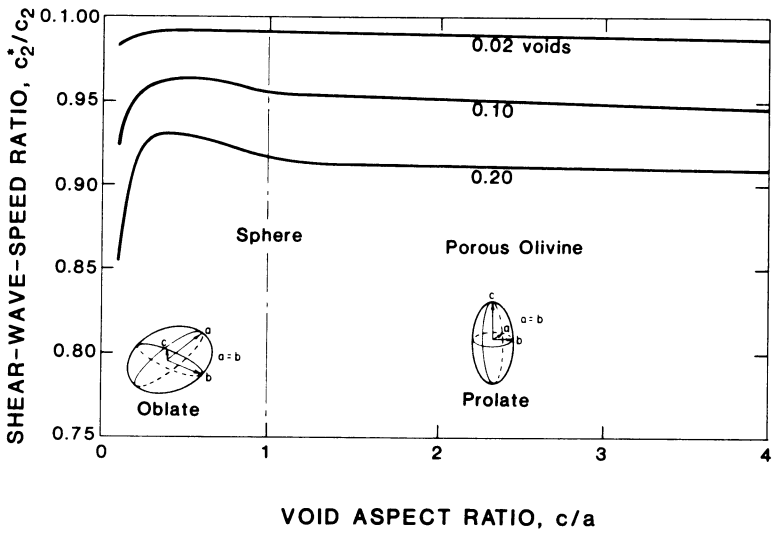


Fig. 8. For a homogeneous distribution of voids in olivine, variation of shear-wave speed with volume fraction and void aspect ratio.

oblate spheriodal voids of various aspect ratios distributed in olivine with 5 percent spherical pores. We used the following physical properties for nonporous olivine: Young's modulus = 1.9681 x 10^{11}Pa, shear modulus = 0.7895 x 10^{11}Pa. With 5 percent spherical pores these become: Young's modulus = 1.781 x 10^{11}Pa, shear modulus = 0.7157 x 10^{11}Pa.

8 - CONCLUDING REMARKS

Experimentally and theoretically, we studied the macroscopic elastic-constant tensor, C_{ij}, of a soft matrix with hard inclusions: SiC-particle-rein-

forced aluminum-alloy-matrix composite. Observed elastic stiffnesses exhibit orthotropic symmetry, consistent with the composite's processing during manufacture. Approximately, the elastic stiffnesses exhibit transverse-isotropic symmetry. Except for C_{12}, C_{13}, and C_{23}, a rule-of-mixture calculation fails badly to predict the C_{ij}. Calculations using a scattered-plane-wave, ensemble-average model give good predictions for the C_{ij}, except for anisotropies in C_{11}/C_{33}, C_{44}/C_{66}, and others. Allowing for nonhomogeneous particle distribution (corresponding to observation) explains these anisotropies and gives better overall theory-observation agreement than the homogeneous-particle-distribution case. This study may represent the first calculation to account for the effects of nonhomogeneous distribution of reinforcing particles. We give detailed numerical results for one material (30 volume percent SiC) and graphical results for a wide range of materials. These graphical results include the effects of particle volume fraction, particle aspect ratio, nonhomogeneity, and aspect ratio of occluded matrix-material "islands." Analysis presented applies also to other systems as well. As an example, results are presented showing the effects of void distribution in a porous rock.

9 - ACKNOWLEDGMENTS

DARPA sponsored this study through the David Taylor Naval Ship Research and Development Center. M. W. Austin measured the sound velocities. R. D. Kriz contributed computer calculations and graphics. R. J. Fields contributed the quantitative metallography. DWA Composite Specialities of Chatsworth, California contributed the material.

10 - REFERENCES

[1] Read, D. T. and Ledbetter, H. M., "Elastic Properties of a Boron-Aluminum Composite at Low Temperatures," Journal of Applied Physics, vol. 48, 1977, pp. 2827-2831.

[2] Kinra, V. K., Petraitis, M. S., and Datta, S. K., "Ultrasonic Wave Propagation in a Random Particulate Composite," International Journal Solids Structures, vol. 16, 1980, pp. 301-312.

[3] Datta, S. K. and Ledbetter, H. M., "Anisotropic Elastic Constants of a Fiber-reinforced Boron-Aluminum Composite," Mechanics of Nondestructive Testing, Ed. W. W. Stinchcomb, Plenum Press, New York, 1980, pp. 215-230.

[4] Datta, S. K. Shah, A. H., and Ledbetter, H. M., "Harmonic Waves in a Periodically Laminated Medium," Mechanics of Composite Materials, Recent Advances, Eds. Z. Hashin and C. T. Herakovich, Pergamon Press, New York, 1983, pp. 207-216.

[5] Bose, S. K. and Mal, A. K., "Elastic Waves in a Fiber-reinforced Composite," Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 22, 1974, pp. 217-229.

[6] Mal, A. K. and Bose, S. K., "Dynamic Elastic Moduli of a Suspension of Imperfectly Bonded Spheres," Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 76, 1974, pp. 587-600.

[7] Datta, S. K. "A Self-Consistant Approach to Multiple Scattering of Elastic Waves," Journal of Applied Mechanics, vol. 44, 1977, pp. 657-662.

[8] Varadan, V. K., Varadan, V. V., and Pao, Y. H., "Multiple Scattering of Elastic Waves by Cylinders of Arbitrary Cross-Section I. SH Waves," Journal of the Acoustical Society of America, vol. 63, 1978, pp. 1310-1319.

[9] Willis, J. R., "A Polarization Approach to the Scattering of Elastic Waves-II. Multiple Scattering from Inclusions," Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 28, 1980, pp. 307-327.

[10] Lax, M., "Multiple Scattering of Waves. II. The Effective Field in Dense Systems," Physical Review, vol. 85, 1952, pp. 621-629.

[11] Chow, T. S., "Elastic Moduli of Filled Polymers: The Effect of Particle Shape," Journal of Applied Physics, vol. 48, 1977, pp. 4072-4075.

[12] Datta, S. K., "Diffraction of Plane Elastic Waves by Ellipsoidal Inclusions," Journal of the Acoustical Society of America, vol. 61, 1977, pp. 1432-1437.

[14] Stein, S., "Addition Theorems for Spherical Wave Functions," Quarterly of Applied Mathematics, vol. 19, 1961, pp. 15-24.

[15] Datta, S. K. and Ledbetter, H. M., "Effective Wave Speeds in an SiC-particle-reinforced Al Composite," submitted for publication.

[16] Cruzan, O. R., "Translational Additional Theorems for Spherical Vector Wave Functions," Quarterly of Applied Mathematics, vol. 20, 1962, pp. 33-40.

[17] Hashin, Z. and Shtrikman, S., "A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behavior of Multiphase Materials," Journal of the mechanics and Physics of Solids, vol. 11, 1963, pp. 127-140.

[18] Ledbetter, H. M., Frederick, N. V., and Austin, M. W., "Elastic Constant Variability in Stainless-Steel 304," Journal of Applied Physics, vol. 51, 1980, pp. 305-309.

[19] Schreiber, E. and Soga, N., "Elastic Constants of Silicon Carbide," Journal of the American Ceramic Society, vol. 49, 1966, p. 342.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 307-326

Recherches sur l'évaluation des propriétés macroscopiques des matériaux hétérogènes viscoélastiques anisotropes

Researches on the evaluation of macroscopic properties of anisotropic heterogeneous materials with viscoelastic constituents

S. CHETOUI, P. NAVI, C. HUET

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
Centre d'Enseignement et de Recherches en Matériaux de Construction
CERMaC – ENPC
28, rue des Saint-Pères, 75007 Paris, France

RESUME

On étudie les milieux viscoélastiques dont la constitution est aléatoire. Les constituants sont viscoélastiques linéaires non vieillissants. Trois approches sont examinées : la méthode du matériau de comparaison, la théorie systématique de KRÖNER et la méthode self-consistente.

La méthode du matériau de comparaison fait intervenir un matériau élastique convenablement défini et fournit des bornes élémentaires pour la partie réelle et la partie imaginaire du tenseur du module complexe.

La théorie systématique, qui exprime le tenseur module effectif par une série faisant intervenir l'information statistique sur la constitution sous forme de fonctions de corrélation d'ordre croissant, est étendue formellement à l'évaluation du module complexe effectif.

La méthode self-consistente est appliquée à la viscoélasticité anisotrope. On étend à ce cas la propriété d'Eshelby relative au problème de l'inclusion; ceci permet une évaluation self-consistente du module complexe effectif et des variations dimensionnelles effectives.

Les relations entre les deux dernières méthodes sont étudiées.

Les résultats fournis couvrent tant les cas anisotropes que le cas isotrope.

ABSTRACT

Random heterogeneous media are studied. Constituents are linearly viscoelastic without aging. Three approaches are considered : the method of the comparison material, the systematic theory of KRÖNER, and the self-consistent method.

The comparison material method involves a convenient elastic material, and provides elementary bounds for the real and imaginary parts of the complex moduli tensor.

The systematic theory, wich expresses the effective moduli tensor by a series involving the statistical information on the constitution of the material through correlation functions of increasing orders, is formally extended to the evaluation of the effective complex moduli tensor.

The self-consistent method is applied to anisotropic viscoelasticity. The Eshelby property relative to the problem of the inclusion is extended to that case. This allows one to perform a self-consistent evaluation of the effective complex modulus.

The relationships between the two latter methods are studied.

The results are provided in the anisotropic as well as isotropic cases.

1 - INTRODUCTION

Dans les milieux viscoélastiques dont la constitution est aléatoire, les champs de contraintes et de déformations sont très oscillants. On s'efforce de dégager à partir des données microscopiques des données macroscopiques globales, et de les relier entre elles. On se place en représentation complexe. On trouve d'abord des bornes élémentaires d'ordre quelconque de la partie réelle et imaginaire du module complexe effectif. On étend ensuite la théorie systématique de KRÖNER au cas du module complexe. La méthode self-consistente est étendue à la viscoélasticité anisotrope. Les relations entre les deux approches sont étudiées.

2 - HYPOTHESES ET DEFINITIONS

On se place dans le cadre de la viscoélasticité linéaire non vieillissante et dans le cas où les forces d'inertie sont négligées, ce qui nous limite aux basses fréquences.

On fait l'hypothèse des variables cachées, ce qui implique [1] que la fonction de relaxation $M(t)$ s'écrit :

$$M_{ijkl}(t) = \int_0^\infty \psi_{ijkl}(s)\, e^{-st}\, ds \qquad (1)$$

La fonction $\psi(s)$ est le spectre de relaxation. Il est défini positif pour tout s et possède les symétries suivantes :

$$\psi_{ijkl} = \psi_{klij} = \psi_{jikl} = \psi_{ijlk} \ . \qquad (2)$$

La loi de comportement peut s'écrire dans la représentation complexe [1] :

$$\sigma^+(i\omega) = M^\star(i\omega)\, \varepsilon^+(i\omega) \qquad (3)$$

La contrainte et la déformation s'écrivent alors :

$$\sigma = \mathrm{Re}(\sigma^+ e^{i\omega t}) \ ; \ \varepsilon = \mathrm{Re}(\varepsilon^+ e^{i\omega t}) \ , \ i^2 = -1 \ . \qquad (4)$$

Re signifie la partie réelle. $M^\star(i\omega)$ est le module complexe local qui est obtenu en remplaçant p par $i\omega$ dans la transformation de Laplace-Carson (cf. [1]) :

$$M^\star(p) = \int_0^\infty p\, M(t)\, e^{-pt}\, dt \ . \qquad (5)$$

En séparant parties réelle et imaginaire, le module complexe s'écrit :

$$M^\star(i\omega) = M'(\omega) + i M''(\omega) \ . \qquad (6)$$

M' et M'' sont deux tenseurs d'ordre quatre symétriques défini-positifs. La complaisance complexe $C^\star(i\omega)$ est telle que, en produit doublement contracté :

$$M^\star(i\omega)\ C^\star(i\omega) = C^\star(i\omega)\, M^\star(i\omega) = I_4 \ . \qquad (7)$$

I_4 est le tenseur unité d'ordre 4, défini par :

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk}) \ . \qquad (8)$$

$\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon.

La complaisance complexe s'écrit d'après (7) :

$$C^\star(i\omega) = C'(\omega) - iC''(\omega) \ . \qquad (9)$$

C' et C" sont deux tenseurs d'ordre 4 symétriques défini-positifs.
La moyenne volumique d'une quantité X(x) définie pour tout point x est :

$$<X> = \frac{1}{V} \int_V X(x)\, dV \quad . \tag{10}$$

V est le volume du corps étudié.
De même on définit la moyenne stochastique d'une quantité X(x) de la manière suivante :

$$\overline{X(x)} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha} X_{\alpha}(x) \qquad ; \alpha = 1 \text{ à } N \tag{11}$$

$X_{\alpha}(x)$ est la valeur prise par la quantité X au point x dans la réalisation D_{α} de D (cf. [2]).

3 - BORNES ELEMENTAIRES SUR LE MODULE COMPLEXE EFFECTIF

3.1 - Module effectif spatial

Imposons au contour des conditions uniformes soit en contraintes, soit en déformations et supposons les forces volumiques nulles. Par le même procédé que dans le cas élastique (cf. [2]) on obtient :

$$<\sigma^+> <\underline{\varepsilon}^+> = <\sigma^+ \underline{\varepsilon}^+> \tag{12}$$

où la barre en bas signifie conjugué au sens des nombres complexes. Posons :

$$<\sigma^+> = M^{*eff} <\varepsilon^+> \; ; \; C^{*eff} = M^{*eff-1} \; ;$$

$$M^{*eff} = M'^{eff} + i\, M''^{eff} \; , \quad C^{*eff} = C'^{eff} - iC''^{eff} \; . \tag{13}$$

Il résulte de (6), (9) et (13) que :

$$M'^{eff} <\varepsilon^+> <\underline{\varepsilon}^+> = <M'\, \varepsilon^+ \underline{\varepsilon}^+> \; ; \; M''^{eff} <\varepsilon^+> <\underline{\varepsilon}^+> = <M''\, \varepsilon^+ \underline{\varepsilon}^+> \tag{14}$$

et

$$C'^{eff} <\sigma^+> <\underline{\sigma}^+> = <C'\, \sigma^+ \underline{\sigma}^+> \; ; \; C''^{eff} <\sigma^+> <\underline{\sigma}^+> = <C''\, \sigma^+ \underline{\sigma}^+> \tag{15}$$

Imposons aux limites un déplacement fonction linéaire des coordonnées :

$$u(t) = Re(\varepsilon^{o+} x\, e^{i\omega t}) = Re\,(u^+ e^{i\omega t}) \; , \; \varepsilon^{o+} \text{ tenseur réel}$$

symétrique de valeur donnée a priori.

Par le même procédé qu'en élasticité (cf. [2]), on obtient dans ces conditions :

$$<\varepsilon^+> = \varepsilon^{o+} = <\varepsilon^{o+}> \; . \tag{16}$$

La moyenne des déformations dans le volume(qui sont complexes) est donc réelle.

Introduisons le module élastique effectif $M^{o'\,eff}$ du milieu qui a la même géométrie que le milieu viscoélastique, et qui a pour tenseur d'élasticité M' ; alors on a d'après (14) :

$$M'^{eff} <\varepsilon^{o+}> <\varepsilon^{o+}> = <M'\, \varepsilon^+ \underline{\varepsilon}^+> \; ; \; M'^{o\,eff} <\varepsilon^{+o}> <\varepsilon^{+o}> = <M' \varepsilon^{el} \varepsilon^{el}> \tag{17}$$

ε^{el} est la solution en déformation du problème élastique. Posons $\varepsilon^{+} = \varepsilon^{el} + \delta\varepsilon$ alors :

$$(M'^{eff} - M'^{o\,eff}) < \varepsilon^{o+} > < \varepsilon^{o+} > = < M' \delta\varepsilon \delta\varepsilon + M' \varepsilon^{el} \delta\varepsilon + M'\varepsilon^{el}\delta\varepsilon > \quad (18)$$

$M' \delta\varepsilon \delta\varepsilon$ est réel positif ; $M' \varepsilon^{e} \delta\varepsilon$ et $M' \varepsilon^{el} \delta\varepsilon$ sont conjugués l'un de l'autre. On démontre facilement, vu les conditions aux limites, que $<M' \varepsilon^{el}\delta\varepsilon>=0$ et donc $M'^{eff} \geqslant M'^{o}eff$. Si on note M'^{o}_{i} une borne inférieure quelconque de $M'^{o}eff$ alors on a :

$$M'^{eff} \geqslant M'^{o\,eff} \geqslant M'^{o}_{i} . \quad (19)$$

De même on obtient pour la partie imaginaire :

$$M''^{eff} \geqslant M''^{o\,eff} \geqslant M''^{o}_{i} . \quad (20)$$

Une formulation duale permet d'arriver facilement à :

$$C'^{eff} \geqslant C'^{o\,eff} \geqslant C'^{o}_{i} \quad \text{et} \quad C''^{eff} \geqslant C''^{o\,eff} \geqslant C''^{o}_{i} . \quad (21)$$

$C^{o'\,eff}$ (resp. $C^{o''\,eff}$) est la complaisance élastique effective du matériau élastique qui a la même géométrie que le corps viscoélastique, mais qui a pour complaisance élastique C' (resp. C'').

C'^{o}_{i} (resp. C''^{o}_{i}) est une borne inférieure quelconque de $C'^{o\,eff}$ (resp. $C''^{o\,eff}$).

En particulier, les bornes d'ordre 1 du cas élastique donnent :

$$M'^{o\,eff} \geqslant <M'^{-1}>^{-1} \quad \text{et} \quad C'^{o\,eff} \geqslant <C'^{-1}>^{-1} . \quad (22)$$

$<M'^{-1}>^{-1}$ est la borne de Reuss de $M'^{o\,eff}$.

L'écriture de $M^{*eff}\ C^{*eff} = I_4$ fournit l'égalité suivante :

$$M'^{eff} = (C'^{eff} + C''^{eff}\ C'^{eff-1}\ C''^{eff})^{-1} \quad (23)$$

et donc :

$$M'^{eff} \leqslant C'^{eff-1} \quad (24)$$

De (22) et (24) on tire facilement :

$$<M'^{-1}>^{-1} \leqslant M'^{o\,eff} \leqslant M'^{eff} \leqslant C'^{o\,eff-1} \leqslant <M' + M''\ M'^{-1}\ M''> = <C'^{-1}> \quad (25)$$

On obtient aussi des relations similaires pour M''^{eff}, C'^{eff} et C''^{eff}.

En particulier pour un mélange binaire isotrope de matériaux isotropes, on a pour la partie réelle du module d'Young effectif, lorsqu'on fait l'hypothèse que les coefficients de Poisson des deux constituants sont nuls :

$$\left(\frac{c}{E'_1} + \frac{1-c}{E'_2}\right)^{-1} \leqslant E'^{eff} \leqslant \left(c\,E'_1 + (1-c)\,E'_2 + \frac{c\,E''^{2}_{1}}{E'_1} + (1-c)\frac{E''^{2}_{2}}{E'_2}\right) \quad (26)$$

où les modules de Young des deux phases sont :

$$E_1 = E'_1 + i\,E''_1 \quad \text{et} \quad E_2 = E'_2 + i\,E''_2 \quad (27)$$

c est la fraction volumique du constituant 1, et où :

$$E^{eff} = E'^{eff} + i\, E''^{eff} \qquad (28)$$

Avec les données numériques suivantes, provenant des relevés expérimentaux présentés en [3] pour la fréquence 10 Hz :

$E_1' = 72{,}4$ G Pa , $E_1'' = 0$, $c = 0{,}13$ (constituant élastique)

$E_2' = 7{,}31$ G Pa , $E_2'' = 0{,}1324$ G Pa

1 G Pa = 10^9 Pa ,

on trouve d'après (26) :

$$8{,}28 \text{ G Pa} \leqslant E'^{eff} \leqslant 15{,}78 \text{ G Pa}$$

alors que la valeur expérimentale de E'^{eff} est 15 G Pa (cf. [3] , les coefficients de Poisson, non fournis, étant probablement différents de zéro). On notera que dans le cas où l'un au moins des coefficients de Poisson est différent de zéro, l'expression de la borne supérieure dans (26) doit être modifiée en tenant compte de l'expression des termes diagonaux de la matrice de raideur.

En traçant, à fréquence constante, les bornes inférieure et supérieure (26) en fonction de c, on obtient, contrairement au cas élastique (cf. [2]) un fuseau non fermé en haut. Ceci tient au fait qu'ici, la borne supérieure est obtenue à partir d'une borne inférieure de la partie réelle de la complaisance, et que celle-ci contient non seulement E_2', mais aussi E_2'' (alors que la borne inférieure ne contient que E_2'). Toutefois, du fait des valeurs numériques prises ici par E_2'' et E_2', l'écart à la ferméture à 10 Hz est négligeable ici (de l'ordre de 10^{-4} E_2').

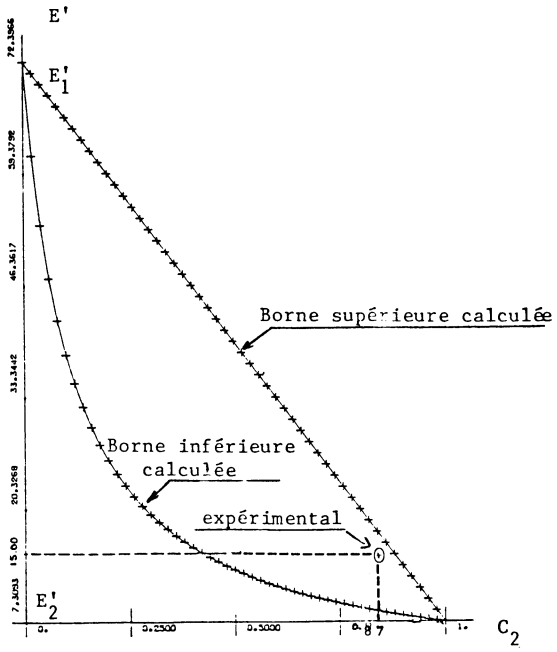


Figure 1 : Bornes élémentaires de la partie réelle du module d'Young.

3.2 - Conséquences pour le module effectif stochastique

On se place dans l'hypothèse d'homogénéité stochastique et sous sollicitations extérieures uniformes (cf. HUET [4], [5]). On définit le module effectif stochastique par la relation entre les moyennes stochastiques (11) de σ^+ et ε^+:

$$\overline{\sigma^+} = M^{*eff}\,\overline{\varepsilon^+} \tag{29}$$

Supposons qu'on applique à la surface extérieure un déplacement $u^+ = \varepsilon^{o+}.x$ dérivant d'un tenseur ε^{o+} de valeur fixée a priori .

M^{*eff} uniforme implique $\overline{\sigma^+}$ et $\overline{\varepsilon^+}$ uniformes sur V. Alors $\overline{\sigma^+} = <\sigma^+>$, et par le théorème de FUBINI on a :

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\sigma^+} = <\overline{\sigma^+}> = \overline{<\sigma^+>} \\ &\text{et} \\ &\overline{\varepsilon^+} = <\overline{\varepsilon^+}> = \overline{<\varepsilon^+>} = \varepsilon^{+o} = <\varepsilon^+>_\alpha \\ &\text{et} \\ &\overline{\sigma^+\,\underline{\varepsilon}^+} = <\overline{\sigma^+\,\underline{\varepsilon}^+}> = \overline{<\sigma^+\,\underline{\varepsilon}^+>} = <\overline{\sigma^+}\;\underline{\varepsilon}^{o+}> = \overline{\sigma^+}\;\overline{\underline{\varepsilon}^+} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

On en déduit comme dans le cas élastique (cf. [4], [5]) que :

$$M^{*eff} = \overline{M_\alpha^{*eff}} \quad . \tag{31}$$

M_α^{*eff} est le tenseur module complexe effectif spatial de la réalisation α.

On en déduit facilement:

$$M'^{eff} = \overline{M'^{eff}_\alpha} \geqslant \overline{M'^{o\,eff}_\alpha} \geqslant \overline{M'^{o}_{i\alpha}} \quad . \tag{32}$$

M'^{eff}_α (resp. $\overline{M'^{eff}_\alpha}$) est la partie réelle du module effectif stochastique (resp. spatial dans la réalisation α). $M'^{o\,eff}_\alpha$ est le module élastique effectif spatial du matériau élastique, qui a la même géométrie que le corps viscoélastique avec le module d'élasticité M'_α ; $M'^{o}_{i\alpha}$ est une borne inférieure quelconque de $M'^{o\,eff}_\alpha$. On obtient des relations similaires pour M''^{eff}.

Si on impose sur la surface extérieure un vecteur contrainte $F^+ = \sigma^+_o.n$ dérivant d'un tenseur σ^{o+} de valeur fixée a priori, on obtient :

$$\overline{M'^{-1}_{i\alpha}} \leqslant \overline{M'^{o\,eff}_\alpha} \leqslant M'^{eff} \leqslant \overline{C'^{o\,eff-1}_\alpha} \leqslant \overline{C'^{-1}_{i\alpha}} \tag{33}$$

On obtient des relations similaires pour :

$$M''^{eff},\quad C'^{eff} \quad \text{et} \quad C''^{eff} \quad .$$

4 - EXTENSION AU MODULE COMPLEXE DE LA THEORIE SYSTEMATIQUE DE KRÖNER

4.1 - Fonction de Green en représentation complexe du problème viscoélastique

Soit un corps constitué par un matériau viscoélastique de module complexe $M^*(i\omega)$, de volume V, de surface extérieure S, soumis à des forces extérieures et des conditions aux limites fonctions sinusoïdales du temps. On se place dans la représentation complexe du problème. On impose des densités de forces surfaciques F^+ sur la partie S_F, et des déplacements complexes U_d^+ sur la partie S_u. On a :

$$S = S_u \cup S_F \quad . \tag{34}$$

S_u et S_F sont supposées indépendantes du temps. Le déplacement complexe U^+ vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} L^* u^+ = + f^+ & \text{pour} \quad x \in V \quad (35) \\ u^+ = u^{+d} & \text{pour} \quad x \in S_u \quad (36) \\ M^*_{ijkl}(x) \dfrac{\partial u_k^+}{\partial x_l} n_j = F_i^+ & \text{pour} \quad x \in S_F \quad (37) \end{cases}$$

n_j est la j ème composante du vecteur unitaire normal extérieur, et f^+ est la force volumique complexe éventuellement présente.

L^* est l'opérateur différentiel complexe défini par :

$$L^* u^+ = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(M^*_{ijkl}(x) \frac{\partial u_k^+}{\partial x_l} \right) = - \operatorname{div} \sigma^+ \quad . \tag{38}$$

Introduisons la fonction de Green complexe $G^*(x,x')$ tenseur d'ordre 2, vérifiant par définition :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j} \left[M^*_{ijkl}(x) \, G^*_{km}(x,x') \right] = - \delta_{im} \, \delta(x-x') \ , \quad x \in S_u & (39) \\ x_j \, M^*_{ijkl}(x) \dfrac{\partial}{\partial x_l} G^*_{km}(x,x') = 0 \ , \quad x \in S_F & (40) \\ G^*_{km}(x,x') = 0 \ , \quad x \in S_u & (41) \end{cases}$$

$\delta(x-x')$ est la distribution de Dirac scalaire, définie sur $\mathcal{R}^3$; δ_{im} est le symbole de Kronecker.

Définissons le produit suivant, pour deux champs de vecteur quelconques w^+ et v^+ par :

$$\int_V w^+ \, v^+ \, dV = \int_V w_i^+ \, v_i^+ \, dV \quad . \tag{42}$$

Alors on obtient par la formule de la divergence :

$$\int_V u^+ L^* v^+ \, dV = - \int_S M^*_{ijkl}(x) \frac{\partial v_k^+}{\partial x_l} u_i^+(x) \, n_j \, dS + \int_V M^*_{ijkl}(x) \frac{\partial v_k^+(x)}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^+(x)}{\partial x_j} \, dV \tag{43}$$

$$\int_V v^+ L^* u^+ dV = -\int_S M^*_{ijkl}(x) \frac{\partial u_k^+(x)}{\partial x_l} v_i^+(x) n_j \, dS + \int_V M^*_{ijkl}(x) \frac{\partial u_k^+(x)}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^+(x)}{\partial x_j} dV \qquad (44)$$

Or, d'après (6), $M^*_{ijkl}(x) = M^*_{klij}(x)$; donc :

$$M^*_{ijkl}(x) \frac{\partial u_k^+}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^+(x)}{\partial x_j} = M^*_{ijkl}(x) \frac{\partial v_k^+}{\partial x_l}(x) \frac{\partial u_i^+}{\partial x_j}(x) \qquad (45)$$

Il vient donc de (43), (44), (45) l'identité de Green suivante :

$$\int_V (u^+ L^* v^+ - v^+ L^* u^+) \, dV =$$

$$\int_S \left(M^*_{ijkl}(x) \frac{\partial u_k^+(x)}{\partial x_l} v_i^+(x) - M^*_{ijkl}(x) \frac{\partial v_k^+}{\partial x_l}(x) u_i^+(x) \right) n_j \, dS \qquad (46)$$

Prenons pour u^+ la solution du problème (35), (36), (37) et pour v^+ la fonction de Green (39), (40), (41) ; il vient alors de (46) :

$$u_i^+(x) = \int_V G^*_{im}(x,x') f_m^+(x') dV' - \int_{Su} M^*_{ijkl}(x') \frac{\partial G_{km}}{\partial x_l}(x,x') u_m^{d+}(x') x_j dS' + \int_{S_F} G^*_{im}(x,x') F_m^+(x') dS' \qquad (47)$$

Si on a des conditions aux limites de type Neumann, c'est-à-dire $S_F = S$, on aura :

$$u_i^+(x) = \int_V G^*_{km}(x,x') f_m^+(x') dV' + \int_S G^*_{km}(x,x') F_m^+(x') dS' \, . \qquad (48)$$

Les contraintes vérifient :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^+}{\partial x_j} + f_i^+ = 0 \quad \text{dans} \quad V \quad \text{et} \quad \sigma_{ij}^+ n_j = F_i^+ \quad \text{sur} \quad S \, . \qquad (49)$$

En calculant à partir de (48) la partie symétrique du gradient de u^+ et en tenant compte de (49) on peut alors montrer que :

$$\varepsilon_{ij}^+(x) = \int_V \Gamma^*_{ijkl}(x,x') \sigma_{kl}^+(x') dV' \qquad (50)$$

où :

$$\Gamma^*_{ijkl}(x,x') = \frac{1}{4}(G^*_{ik,l'j} + G^*_{il,k'j} + G^*_{jk,l'i} + G^*_{lj,k'i}) \qquad (51)$$

avec, par exemple :

$$G^{\star}_{ik,l'j} = \frac{\partial^2 G^{\star}_{ik}(x,x')}{\partial x'_l \partial x_j} \tag{52}$$

La relation (50) s'écrit formellement :

$$\varepsilon^{+} = \overset{v}{\Gamma}{}^{\star} \sigma^{+} \tag{53}$$

$\overset{v}{\Gamma}{}^{\star}$ est un opérateur intégral de noyau $\Gamma^{\star}$.

De même si on a des conditions aux limites de type Dirichlet, c'est-à-dire $S_u = S$ et des forces volumiques nulles, on démontre que :

$$\sigma^{+}_{ij}(x) = \int_V \Delta^{\star}_{ijkl}(x,x')\, \varepsilon^{+}_{kl}(x')\, dV' \tag{54}$$

qui s'écrit formellement :

$$\sigma^{+} = \overset{v}{\Delta}{}^{\star} \varepsilon^{+} \tag{55}$$

où le noyau $\Delta^{\star}$ est relié à $\Gamma^{\star}$ par la relation suivante :

$$\Delta^{\star}_{ijkl}(x,x') = M^{\star}_{ijkl}(x) - M^{\star}_{ijmn}(x)\, \Gamma^{\star}_{mnpq}(x,x')\, M^{\star}_{pqkl}(x') \quad . \tag{56}$$

On démontre aussi que :

$$G^{\star}_{km}(x,x') = G^{\star}_{mk}(x',x) \tag{57}$$

$$\Gamma^{\star}_{ijkl}(x,x') = \Gamma^{\star}_{klij}(x',x) \tag{58}$$

$$\Delta^{\star}_{ijkl}(x,x') = \Delta^{\star}_{klij}(x',x) \tag{59}$$

c'est-à-dire que $G^{\star}$, $\Gamma^{\star}$ et $\Delta^{\star}$ admettent chacun un théorème de réciprocité.

4.2 - Analogue complexe des équations de LIPMANN-SCHWINGER

Définissons une classe d'opérations linéaires $\overset{v}{A}$, s'appliquant à des champs de tenseurs du deuxième ordre $\varphi(x)$ définis sur $\mathbb{R}^3$, par la relation :

$$\psi = \overset{v}{A}\, \varphi \Leftrightarrow \psi_{ij}(x) = \int_V A_{ijkl}(x,x')\, \varphi_{kl}(x')\, dV' \tag{60}$$

où le tenseur du quatrième ordre $A(x,x')$ est le noyau de l'opérateur $\overset{v}{A}$. Ces opérateurs peuvent servir à définir des propriétés non locales, et sont de ce fait nommés opérateurs non locaux.

Soient deux opérateurs non locaux $\overset{v\star}{A}$ et $\overset{v\star}{B}$ de noyaux respectifs les tenseurs du quatrième ordre $A^{\star}(x,x')$ et $B^{\star}(x,x')$. On définit le produit $\overset{v\star}{A}\ \overset{v\star}{B}$ des opérateurs $\overset{v\star}{A}$ et $\overset{v\star}{B}$ par l'opérateur qui a pour noyau :

$$(\overset{v\star}{A}\ \overset{v\star}{B})\big|_{ijkl}(x,x'') = \int_V A^{\star}_{ijmn}(x,x')\, B^{\star}_{mnkl}(x',x'')\, dV' \tag{60bis}$$

On démontre facilement l'analogue complexe de la première équation de LIPMANN-SCHWINGER au sens de KRÖNER [14] :

$$\varepsilon^{+o} = \varepsilon^{+} + \overset{v}{\Gamma}{}^{o\star} \delta \overset{v}{M}{}^{\star} \varepsilon^{+} \quad . \tag{61}$$

$\delta \overset{v}{M}{}^{\star}$ est l'opérateur intégral de noyau $(M^{\star} - M^{o\star})(x')\,\delta(x-x')$ où $M^{o\star}$ est uniforme ; ε^{o+} est la déformation complexe solution du problème qui a les mêmes forces volumiques et conditions aux limites que le problème réel, mais a pour module complexe $M^{o\star}$, module complexe d'un matériau viscoélastique de comparaison.

On démontre aussi l'analogue de la deuxième équation de LIPMANN-SCHWINGER:

$$\overset{v}{\Gamma}{}^{\star o} = \overset{v}{\Gamma}{}^{\star} + \overset{v}{\Gamma}{}^{o\star} \delta \overset{v}{M}{}^{\star} \overset{v}{\Gamma}{}^{\star} \quad . \tag{62}$$

L'équation (62) est valable pour $M^{o\star}$ quelconque, mais les conditions aux limites sont de type Neumann.

On peut aussi démontrer l'analogue des équations (61) et (62) pour l'opérateur $\overset{v}{\Delta}{}^{\star}$.

L'analogue de (61) est :

$$\sigma^{o+} = \sigma^{+} + \overset{v}{\Delta}{}^{o\star} \delta \overset{v}{C}{}^{\star} \sigma^{+} \tag{63}$$

avec $\sigma^{+o} = M^{o\star} \varepsilon^{o+}$; $\delta \overset{v}{C}{}^{\star}$ opérateur de noyau $(C^{\star} - C^{o\star})(x')\,\delta(x - x')$ et $C^{o\star} = (M^{o\star})^{-1}$.

De même, l'analogue de (62) pour $\overset{v}{\Delta}{}^{\star}$ est :

$$\overset{v}{\Delta}{}^{\star o} = \overset{v}{\Delta}{}^{\star} + \overset{v}{\Delta}{}^{o\star} \delta \overset{v}{C}{}^{\star} \overset{v}{\Delta}{}^{\star} \tag{64}$$

$C^{o\star}$ cette fois est quelconque; (64) est valable dans le cas des forces volumiques nulles et des conditions aux limites du type Dirichlet.

4.3 - Solution par développement du noyau résolvant

On se place dans le cas où les conditions aux limites sont quelconques, mais non aléatoires. On suppose les forces volumiques non aléatoires.

On définit l'opérateur module complexe effectif stochastique (cf. 3.2) par :

$$\overline{\sigma^{+}} = \overset{v}{M}{}^{\star}\mathrm{eff}\ \overline{\varepsilon^{+}} = \overline{\overset{v}{M}{}^{\star}\ \varepsilon^{+}} \quad . \tag{65}$$

A priori $\overset{v}{M}{}^{\star}\mathrm{eff}$ est un opérateur intégral non local, même si on part d'une loi microscopique locale. Dans ce dernier cas $\overset{v}{M}$ est l'opérateur de noyau $M^{\star}(x')\,\delta(x - x')$.

L'équation (61) donne :

$$\varepsilon^{+} = \overset{v}{A}{}^{\star}\ \varepsilon^{o+} \tag{66}$$

où :

$$\overset{V\star}{A} = (\overset{V}{I} + \overset{V}{\Gamma}^{o\star}\ \delta\overset{V\star}{M})^{-1} \qquad (67)$$

où l'inversion est prise au sens des opérateurs $(\overset{V}{A} = \overset{V}{B}^{-1} \iff \overset{VV}{AB} = \overset{V}{I})$.

$\overset{V}{I}$ est l'opérateur intégral de noyau

$$I_{ijkl}(x,x') = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\,\delta(x-x') \qquad (68)$$

On suppose $M^{o\star}$ uniforme et non aléatoire ; alors ε^{o+} est non aléatoire.

L'équation (65) donne donc:

$$\overset{V\star eff}{M} = \left(\overline{\overset{V\star}{M}\ \overset{V\star}{A}}\right)\left(\overline{\overset{V\star}{A}}\right)^{-1} \quad . \qquad (69)$$

Posons :

$$\overset{V\star}{T} = \delta\overset{V\star}{M}\ \overset{V\star}{A} \quad . \qquad (70)$$

Si on développe $\overset{V\star}{A}$ en série géométrique, on obtient d'après (70)

$$\overset{V\star}{A} = \overset{V}{I} - \overset{V}{\Gamma}^{o\star}\ \overset{V\star}{T} \qquad (71)$$

On tire facilement de (69) et (70) l'égalité suivante :

$$\overset{V\star eff}{M} = \overset{V o\star}{M} + \overline{\overset{V\star}{T}}\left(\overset{V}{I} - \overset{V}{\Gamma}^{o\star}\ \overline{\overset{V\star}{T}}\right)^{-1} \qquad (72)$$

La relation (72) donne, si on développe $\left(\overset{V}{I} - \overset{V}{\Gamma}^{o\star}\ \overline{\overset{V}{T}}\right)^{-1}$ en série géométrique:

$$\overset{V\star eff}{M} = M^{o\star} + \overline{\overset{V\star}{T}} + \overline{\overset{V\star}{T}}\ \overset{V}{\Gamma}^{o\star}\ \overline{\overset{V\star}{T}} + \overline{\overset{V\star}{T}}\ \Gamma^{o\star}\ \overline{\overset{V\star}{T}}\ \Gamma^{o\star}\ \overline{\overset{V\star}{T}} + \ldots \qquad (73)$$

Si on remplace $\overset{V\star}{T}$ par sa valeur donnée par (70) et si on tient compte du développement en série géométrique de $\overset{V\star}{A}$, il vient :

$$\overset{V\star eff}{M} = \overline{\overset{V\star}{M}} - \overline{\delta\overset{V\star}{M}\ \overset{V}{\Gamma}^{o\star}\ \delta\overset{V\star}{M}} + \overline{\delta\overset{V\star}{M}\ \overset{V}{\Gamma}^{o\star}\ \delta\overset{V\star}{M}\ \overset{V}{\Gamma}^{o\star}\ \delta\overset{V\star}{M}} + \ldots \qquad (74)$$

Définissons maintenant l'opérateur complaisance complexe effective $\overset{V\star eff}{C}$ par:

$$\overset{V\star eff}{C} = (\overset{V\star eff}{M})^{-1} \quad . \qquad (75)$$

On démontre facilement que :

$$\overset{V\star eff}{C} = \overline{\overset{V\star}{C}\ \overset{V\star}{B}} \cdot \overline{\overset{V\star}{B}}^{-1} \qquad (76)$$

où :

$$\overset{V}{B} = (\overset{V}{I} + \overset{V}{\Delta}^{o\star}\ \delta\overset{V\star}{C})^{-1} \qquad (77)$$

avec :

$$\overset{v}{C}{}^{o\star} = (\overset{v}{M}{}^{o\star})^{-1} \quad ; \qquad \overset{v}{\delta C}{}^{\star} = \overset{v}{C}{}^{\star} - \overset{v}{C}{}^{o\star} \tag{78}$$

et $\overset{v}{\Delta}{}^{\star o}$ calculé à partir de $\overset{v}{C}{}^{o\star}$. On trouve comme en (74) :

$$\overset{v}{C}{}^{\star}\text{eff} = \overline{\overset{v}{C}{}^{\star}} - \overline{\overset{v}{\delta C}{}^{\star}\ \overset{v}{\Delta}{}^{o\star}\ \overset{v}{\delta C}{}^{\star}} + \overline{\overset{v}{\delta C}{}^{\star}\ \overset{v}{\Delta}{}^{o\star}\ \overset{v}{\delta C}{}^{\star}\ \overset{v}{\Delta}{}^{o\star}\ \overset{v}{\delta C}{}^{\star}} \ . \tag{79}$$

Remarquons que les relations (74) et (79) sont formellement semblables à celles trouvées pour l'élasticité dans [6] et [7].

4.4 - Application à la recherche des bornes

Prenons $\overset{v}{M}{}^{o\star}$ réel. Alors :

$$\overset{v}{\delta M}{}^{\star} = \overset{v}{\delta M'} + i\ \overset{v}{M''} \tag{80}$$

où $\overset{v}{\delta M'}$ est l'opérateur de noyau $(M' - M^{o})(x')\ \delta(x-x')$.

Si on sépare le développement en parties réelle et imaginaire, on obtient pour la partie réelle :

$$\overset{v}{M'}\text{eff} = \overline{\overset{v}{M'}} - \overline{\overset{v}{\delta M'}\ \overset{v}{\Gamma}{}^{o}\ \overset{v}{\delta M'}} + \overline{\overset{v}{M''}\ \overset{v}{\Gamma}{}^{o}\ \overset{v}{M''}} + \ldots + \tag{81}$$

et, pour la partie imaginaire :

$$\overset{v}{M''}\text{eff} = \overline{\overset{v}{M''}} - \overline{\overset{v}{\delta M'}\ \overset{v}{\Gamma}{}^{o}\ \overset{v}{M''}} - \overline{\overset{v}{M''}\ \overset{v}{\Gamma}{}^{o}\ \overset{v}{\delta M'}} + \ldots + \tag{82}$$

On pourra comme en élasticité (cf. [6]), faire des troncatures sur les séries (81) et (82). On peut ainsi espérer obtenir des bornes supérieures plus fines que celles trouvées dans les paragraphes précédents. Ce travail reste à effectuer.

5 - LA METHODE SELF-CONSISTENTE

5.1 - Principe

Soit un milieu hétérogène formé de N familles d'éléments homogènes. Chacune des familles (i) a un comportement connu décrit symboliquement par une relation $\sigma_i^{+} = \underset{\sim}{g}_i^{+}(\varepsilon_i^{+})$ entre contrainte et déformation complexes. On se fixe la fraction volumique c_i, ainsi que la forme moyenne des constituants et leur disposition par rapport au repère macroscopique.

On va résoudre N problèmes de type "inclusion-matrice" où l'on établit la relation entre, d'une part, σ_i^{+} , ε_i^{+} dans la phase i, rassemblée dans l'inclusion et la représentant en moyenne, et, d'autre part, les contraintes et les déformations totales σ_∞^{+} et ε_∞^{+} appliquées à l'infini à la matrice homogène dans laquelle est située cette inclusion.

La solution de ces N problèmes fait intervenir les caractéristiques inconnues du milieu homogène équivalent constituant la matrice et les conditions de liaisons spécifiques entre la phase (i) et la matrice ; cette solution se met alors sous la forme :

$$f_i(\sigma_i^{+}, \varepsilon_i^{+}, \sigma_\infty^{+}, \varepsilon_\infty^{+}) = 0 \quad ; \qquad i = 1 \text{ à } N \ . \tag{83}$$

Des relations supplémentaires sont fournies par :

$$\sigma_{\infty}^{+} = c_i \, \sigma_i^{+} = <\sigma^{+}> \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\infty}^{+} = c_i \, \varepsilon_i^{+} = <\varepsilon^{+}> , \quad i = 1 \text{ à } n \ . \tag{84}$$

La résolution de (83) et (84) fournit le comportement inconnu équivalent.

On est ainsi conduit à étudier le problème d'une inclusion homogène qui n'a pas les mêmes constantes viscoélastiques que la matrice, dans une matrice homogène. On va étudier d'abord l'extension au cas viscoélastique du problème d'Eshelby [8], lequel a étudié dans le cas élastique le problème d'une variation dimensionnelle uniforme limitée à une inclusion qui a les mêmes coefficients viscoélastiques que la matrice. Ensuite on verra comment le premier problème peut se ramener au problème d'Eshelby.

5.2 - Le problème d'Eshelby viscoélastique

On étudie l'état de déformation et de contrainte dans une inclusion ellipsoïdale homogène située dans une matrice infinie de mêmes propriétés mécaniques que l'inclusion, et présentant à l'état libre une variation dimensionnelle uniforme. Soient ε^{o+} cette variation dimensionnelle, et V le domaine occupé par l'inclusion.

Posons :

$$\sigma_{ij}^{o+} = M^{\star}_{ijkl}(i\omega) \, \varepsilon_{kl}^{o+} \tag{85}$$

$M^{\star}(i\omega)$ est le module complexe commun à la matrice et à l'inclusion.

Dans le cas viscoélastique, la résolution du problème mécanique donne dans l'inclusion :

$$\varepsilon_{ij}^{+}(x) = \int_V \Gamma^{\star}_{ijkl}(x - x') \, \sigma_{kl}^{o+}(x') \, dV' \tag{86}$$

et comme, dans V, σ^{o+} est uniforme d'après (85), la relation (86) devient :

$$\varepsilon_{ij}^{+}(x) = P^{\star}_{ijkl}(x) \, \sigma_{kl}^{o+} \tag{87}$$

avec :

$$P^{\star}_{ijkl}(x) = \int_V \Gamma^{\star}_{ijkl}(x - x') \, dV' \tag{88}$$

$\Gamma^{\star}_{ijkl}$ est le tenseur de Green modifié pour les contraintes pour le milieu infini. V est le domaine intérieur à l'ellipsoïde d'équation

$$a_{ij} \, y_i \, y_j = 1 \tag{89}$$

a_{ij} est une matrice symétrique défini-positive.

Par un changement de variable, on peut transformer l'ellipsoïde en la sphère unité de $\mathcal{R}^3$.

$$S = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathcal{R}^3 \mid \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 1\} \ .$$

Soit $H^{\star}_{ij}$, la matrice inverse de $M^{\star}_{ikjl} \, \omega_k \, \omega_l$, inverse qui existe d'après la condition (6).

On peut facilement, à l'aide du changement de variables ci-dessus, voir que, pour x à l'intérieur de l'ellipsoïde, on a :

$$P^{\star}_{ijkl} = \frac{1}{16\pi a^{1/2}} \int_S \frac{1}{\alpha^3} [H^{\star}_{ik}\,\omega_j\,\omega_l + H^{\star}_{jk}\,\omega_i\,\omega_l + H^{\star}_{il}\,\omega_j\,\omega_k + H^{\star}_{il}\,\omega_i\,\omega_k]\, dS(\omega) \tag{90}$$

où :

$$a = det\,[a_{ij}] \quad , \tag{91}$$

$$\alpha^2 = b_{ij}\,\omega_i\,\omega_j \quad , \tag{92}$$

b est la matrice inverse de a.

On voit d'après (90) que $P^{\star}$ est uniforme à l'intérieur de l'ellipsoïde. Les équations (85) et (87) donnent alors :

$$\varepsilon^{+} = S^{\star}\,\varepsilon^{o+} \tag{93}$$

où :

$$S^{\star} = P^{\star}\,M^{\star} \tag{94}$$

$S^{\star}$ est uniforme. L'équation (93) est l'extension de la proposition d'Eshelby au cas de la viscoélasticité anisotrope en représentation complexe du régime sinusoïdal permanent.

On retrouve ainsi un résultat analogue à celui fourni par Laws [9] en utilisant une transformation de Laplace-Carson et en supposant que $M^{\star}_{ijkl}(p)\,\omega_j\,\omega_l$ admet un inverse pour tout p complexe. La méthode utilisée ici est plus avantageuse parce-qu'on n'a pas besoin d'inverser la transformation de Laplace-Carson. Les calculs se font comme en élasticité, à condition de remplacer les réels par les complexes.

En l'absence de forces extérieures (contraintes nulles à l'infini), l'état de contrainte dans l'inclusion est :

$$\sigma^{+} = M^{\star}(i\omega)\,(S^{\star} - I)\,\varepsilon^{o+} = M^{\star}(i\omega)(\varepsilon^{+} - \varepsilon^{o+}) \tag{95}$$

I est le tenseur unité donné par (8). Si une variation dimensionnelle ε^{o+}_m existe dans la matrice, alors (cf. [10]), ε^{o+} dans (95) doit être remplacé par la déformation $\varepsilon^{o+} - \varepsilon^{o+}_m$ (qui annule bien σ^{+} pour $\varepsilon^{o+} = \varepsilon^{o+}_m$) :

$$\sigma^{+} = M^{\star}(S^{\star} - I)\,(\varepsilon^{o+} - \varepsilon^{o+}_m) \quad . \tag{96}$$

La déformation dans l'inclusion est alors :

$$\varepsilon^{+} = S^{\star}(\varepsilon^{o+} - \varepsilon^{o+}_m) + \varepsilon^{o+}_m \tag{97}$$

$\varepsilon^{o+} - \varepsilon^{o+}_m$ est la variation dimensionnelle relative de l'inclusion par rapport à la matrice; le résultat (97) s'obtient facilement à l'aide du principe de superposition. Si on applique des contraintes à l'infini σ^{+}_{∞}, alors la contrainte dans l'inclusion par application du principe de superposition est :

$$\sigma^{+} = \sigma^{+}_{\infty} + M^{\star}(S^{\star} - I)\,(\varepsilon^{o+} - \varepsilon^{o+}_m) \quad . \tag{98}$$

Ceci est valable puisque le milieu est homogène quant à ses propriétés viscoélastiques, ce qui entraîne que $\sigma^+ = \sigma_\infty^+$ en tout point de l'inclusion lorsque l'on annule ε^{o+} et ε_m^{o+}, ou $(\varepsilon^{o+} - \varepsilon_m^{o+})$.

Par abréviation, nous désignerons dans la suite par l'expression "problème de l'inclusion homogène" le problème, traité dans le présent paragraphe, où matrice et inclusion ont mêmes propriétés viscoélastiques.

5.3 - Problème de l'inclusion dite "hétérogène"

Soit un milieu infini de module complexe $M^*(i\omega)$, soumis à l'infini à une contrainte uniforme σ_∞^+ produisant une déformation uniforme ε_∞^+. Il contient une inclusion de module complexe M^{o*} différent de celui de la matrice et dépourvue de déformation libre. Cette inclusion perturbe localement l'état de déformations et de contraintes. Par abréviation nous désignons le problème ainsi posé par l'expression "problème de l'inclusion hétérogène". Suivant le procédé d'Eshelby la solution de ce problème peut être trouvée à partir du problème précédent : on cherche une déformation libre fictive ε^{o+} qui conduise aux mêmes déformations et contraintes dans l'inclusion dans les deux cas.

Dans le problème de l'inclusion homogène, on a dans l'inclusion, d'après (95), et sous l'effet de ε^{o+} et σ_∞^+ appliqués simultanément :

$$\sigma^+ = \sigma_\infty^+ + M^*(S^* - I)\,\varepsilon^{o+} \tag{99}$$

$$\varepsilon^+ = S^*\,\varepsilon^{o+} + \varepsilon_\infty^+ \tag{100}$$

Dans le problème de l'inclusion hétérogène on a dans l'inclusion :

$$\sigma^+ = M^{*o}\,\varepsilon^+ \quad . \tag{101}$$

Portons (100) dans (101) et égalons avec (99). On trouve :

$$M^{o*}(S^*\varepsilon^{o+} + \varepsilon_\infty^+) = \sigma_\infty^+ + M^*(S^* - I)\,\varepsilon^{o+} \quad ; \tag{102}$$

avec

$$\sigma_\infty^+ = M^*\,\varepsilon_\infty^+ \quad . \tag{103}$$

On trouve :

$$[\,(M^{o*} - M^*)\,S^* + M^*\,]\,\varepsilon^{o+} = (M^* - M^{o*})\,\varepsilon_\infty^+ \quad . \tag{104}$$

L'équation (104) permet de calculer ε^{o+}, qui dépend de M^*, M^{o*} et ε_∞^+. On substitue cette valeur dans (99) et (100), ce qui permet de calculer la contrainte et la déformation dans l'inclusion.

5.4 - Schéma self-consistent

La déformation dans le cas précédent s'écrit après simplification :

$$\varepsilon^+ = A^*\,\varepsilon_\infty^+ \tag{105}$$

$$A^* = [\,I + P^*(M^{*o} - M^*)\,]^{-1} \tag{106}$$

A^* est le facteur de concentration. Le schéma self-consistent s'écrit (voir (84)):

$$\langle \varepsilon^+ \rangle = \varepsilon_\infty^+ \quad \text{et} \quad \langle \sigma^+ \rangle = \sigma_\infty^+ \quad . \tag{107}$$

Ceci donne, d'après (101) et (103) :

$$\langle A^* \rangle = I \quad \text{et} \quad \langle M^{o*} A^* \rangle = M^* \tag{108}$$

M^{*Sc} est le tenseur self-consistent inconnu, donc $M^* = \langle M^{o*} A^* \rangle \langle A^* \rangle^{-1}$, qui s'écrit encore ici :

$$M^{*Sc} = \langle M^{*o}[(I + P^* (M^{*o} - M^{*Sc})]^{-1} \rangle \langle I + P^* (M^{*o} - M^{*Sc})^{-1} \rangle^{-1} \tag{109}$$

M^{*Sc} figure dans les deux membres de l'équation (109), celle-ci est donc implicite, alors que (69) est explicite.

Pour les variations dimensionnelles, on répète le même formalisme pour une variation dimensionnelle ε^{o+} limitée à une inclusion. Cette inclusion est entourée d'une matrice où règne une variation dimensionnelle ε_m^{o+} ; alors la variation dimensionnelle relative à l'inclusion par rapport à la matrice est :

$$\varepsilon_l^+ = \varepsilon^{o+} - \varepsilon_m^{o+} \ . \tag{110}$$

Notons ε^{+T} la déformation totale réelle, compte tenu de la solidarité entre matrice et inclusion, rapportée à la configuration avant toute variation dimensionnelle.

Posons :

$$\varepsilon^+ = \varepsilon^{+T} - \varepsilon_m^{o+} \tag{111}$$

où ε^+ est la déformation réelle par rapport à une configuration ayant subi la variation dimensionnelle ε_m^{o+} de la matrice.

On a alors pour la contrainte dans l'inclusion :

$$\sigma^+ = M^* (\varepsilon^{+T} - \varepsilon^{o+}) = M^* (\varepsilon^+ - \varepsilon_l^+) \ . \tag{112}$$

On cherche comme au § 5.3 une déformation libre ε^{*+} qui permette de passer de l'inclusion "hétérogène" à l'inclusion "homogène". On a :

$$M^* (\varepsilon^+ - \varepsilon_l^+) = M^{*Sc} (\varepsilon^+ - \varepsilon^{*+}) \tag{113}$$

avec :

$$\varepsilon^+ = S^* \varepsilon^{*+} \tag{114}$$

On trouve après calcul :

$$\varepsilon^+ = A^{*Sc} P^{*Sc} M^* \varepsilon_l^+ \tag{115}$$

A^{*Sc} est donné par (106).

Le schéma self-consistent permet d'écrire que :

$$\langle \varepsilon^{+T} \rangle = \varepsilon_m^{o+} \quad \text{ou encore}$$
$$\langle \varepsilon^+ \rangle = 0 \ . \tag{116}$$

Ceci donne après calcul :

$$<A^{*Sc}\ M^{*}>\varepsilon^{eff+} = <A^{*Sc}\ P^{*Sc}\ M^{*}\ \varepsilon^{+o}> \qquad (117)$$

A^{*Sc} dépend de M^{*Sc} et de M^{*} ; P^{*Sc} ne dépend que de M^{*Sc} par la relation (94) ; S^{*} ne dépend que de M^{*Sc}.

La relation (109) est l'analogue complexe de celle trouvée pour l'élasticité dans ([11], [12]), de même que l'équation (117) est l'analogue complexe de l'équation pour l'élasticité qui se trouve dans [13].

On remarque que l'expression des déformations libres effectives fait intervenir, outre les déformations libres des constituants , le module complexe effectif du matériau, alors que l'expression du module complexe effectif ne fait intervenir que les modules complexes des constituants à l'exclusion de leurs variations dimensionnelles.

6 - RELATION ENTRE LES APPROCHES SYSTEMATIQUE ET SELF-CONSISTENTE

On se place dans les hypothèses de 2. On peut montrer que le tenseur de Green modifié Γ^{*} d'un milieu infini formé d'un matériau homogène isotrope ou non peut se décomposer sous la forme suivante :

$$\Gamma^{*}(x - x') = E^{*}\ \delta(x, x') + \frac{1}{(x - x')^{3}}\ F^{*}(\theta, \varphi) \qquad (118)$$

θ, φ sont les angles dans la représentation en coordonnées sphériques, E^{*} est uniforme et

$$\int_{V} \Gamma^{*}(x - x')\ dV' = E^{*} \qquad (119)$$

où V est le volume d'une boule quelconque. Donc, pour une sphère $P^{*} = E^{*}$. Dans le cas des constituants de forme sphérique (ou en moyenne sphérique) l'équation (109) peut donc s'écrire :

$$M^{*Sc} = <M^{*}(I + E^{*}\ \delta M^{*})^{-1}> <(I + E^{*}\ \delta M^{*})^{-1}>^{-1} \qquad (120)$$

où :

$$\delta M^{*} = M^{*} - M^{*Sc} \quad . \qquad (121)$$

Dans le cas du désordre parfait (cf [14]) qui traduit la décorrelation parfaite des propriétés locales du matériau, on a :

$$\overline{T^{*k_1}(n_1) \ldots T^{*k_p}(x_p)} = \overline{T^{*k_1}(x_1)} \ldots \overline{T^{*k_p}(x_p)} \qquad (122)$$

où T^{*} est une propriété locale du matériau (par exemple M^{*}).

Alors le tenseur (69) coïncide avec celui donné par (120) si l'on choisit M^{o*} égal à M^{*eff} et si l'on pose l'égalité entre la moyenne volumique (10) et la moyenne d'ensemble (11) (hypothèse d'ergodicité). Ceci montre que le tenseur module complexe self-consistent est la solution exacte dans le cas du désordre parfait.

Ce résultat a été établi par Kröner [15] dans le cas élastique. On voit qu'il s'étend au cas viscoélastique linéaire non vieillissant dans la représentation complexe.

7 - CONCLUSION

On a trouvé des bornes inférieures et supérieures simples d'ordre quelconque pour la partie réelle et la partie imaginaire du module complexe effectif spatial et du module complexe effectif stochastique. On a aussi étendu la théorie systématique de Kröner au cas viscoélastique linéaire non vieillissant en représentation complexe, ce qui devrait permettre, par des études ultérieures, de trouver des encadrements plus fins que ceux ainsi obtenus.

On a étendu la propriété d'Eshelby au cas de la viscoélasticité linéaire non-vieillissante anisotrope en représentation complexe et on a calculé le module complexe self-consistent ainsi que les variations dimensionnelles effectives. On a aussi étudié la relation entre la théorie systématique de Kröner étendue au module complexe et le schéma self-consistent. Mais pour trouver ces derniers résultats on a admis les hypothèses suivantes :

- régime quasi statique (forces d'inertie négligeables au sein de l'élément de volume représentatif) ce qui limite aux fréquences suffisamment basses;
- hypothèse des variables cachées qui assure que la partie réelle et la partie imaginaire du module complexe sont deux tenseurs symétriques définis-positifs ;
- hypothèse d'ergodicité qui comporte une exigence de stationnarité spatiale (ou uniformité) des grandeurs physiques macroscopiques, et oblige à considérer des structures de dimensions infinies.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. MANDEL. *Cours de mécanique des milieux continus.* Annexe 14.Gauthier-Villars (1966).

[2] C. HUET. *Eléments de thermomécanique des matériaux hétérogènes.* Cours de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, édition 1984.

[3] RONALD F. GIBSON, and ANNA YAU. *Complex moduli of chopped fiber and continuous fiber composites : comparaison of measurements with estimated bounds.* J. Composite materials, vol. 14, pp. 155-166, avril 1980.

[4] C. HUET. *Universal conditions for assimilation of a heterogeneous material to an effective continuum.* Mechanics research communications, vol. 9(3), pp. 165-170, 1980.

[5] C. HUET. *On the definition and experimental determination of effective constitutive equations for heterogeneous materials.* Mechanics research communications, vol. 11 (3), pp. 195-200, 1984.

[6] E. KRÖNER. *Linear properties of random media : the systematic theory* in C. HUET, A. ZAOUI *Comportements rhéologiques et structures des matériaux,* pp. 15-40, 15ème Colloque annuel du G.F.R., Paris, 1981, Presses de l'ENPC.

[7] PH. DEDERICHS and R. ZELLER.*Elastische Konstanten von vielkristallen.* KFA JÜL-REP, JÜL-877-FF, pp. 1-106, 1972.

[8] J.D. ESHELBY. *The determination of the elastic field of an ellipsoïdal inclusion and related problems.* Proc. Roy. Soc, A241, pp. 376-396, 1957.

[9] N. LAWS and R. Mc LAUGHLIN. *Self-consistentestimates for the visccelastic creep compliances of composite materials.* Proc. Roy. Soc Lond. A. 359, pp. 251-273, 1978.

[10] M. BERVEILLER et A. ZAOUI. *Methodes self-consistentes en mécanique des solides hétérogènes.* Dans même ouvrage que [5], pp. 175-199, 1981.

[11] E. KRÖNER. *Berechnung der elastischen Konstanten der Vielkristalls aus der konstanten der Einkristalls.* Zeitschrift für Physik, Bd 151S, pp. 504-518, 1958.

[12] A.V. HERSHEY. *The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals.* J. Appl. Mech 21, pp. 236-240, 1954.

[13] N. LAWS. *The overall thermoelastic moduli of transversely isotropic composites according to the self consistent method.* Int. J. Engng. Sci, vol. 12, pp. 79-87, 1974.

[14] E. KRÖNER. *Statistical continuum mechanics.* Springer Verlag, 1971.

[15] E. KRÖNER. *Self-consistent scheme and graded disorder in polycrystal elasticity.* J. Phy. F : Metal Phys. Vol. 8, n° 11, pp. 2261-2267, 1978.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 327-338

Approche de l'écrouissage textural des métaux aux grandes vitesses de déformations

Approach to the texture hardening of metals at high strain rates

G.R. CANOVA, A. MOLINARI, C. FRESSENGEAS

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux
GRECO « Grandes déformations et endommagement »
Université de Metz, F-57045 Metz Cedex

ABSTRACT

A single crystal deformation is considered via sliding on the crystallographic slip system under a linear viscous law. The constitutive law obtained may be representative of the single crystal behaviour at very high strain rates. In the context of isotropic hardening, it is shown that the single crystal presents no plastic rotation. Some conclusions follow about textural hardening of a polycrystal in the framework of full constrain theory. Other conclusions on plastic instability are presented.

RESUME

On considère un monocristal se déformant par glissement sur les plans cristallographiques suivant une loi visqueuse linéaire. La loi de comportement obtenue peut être représentative du comportement d'un monocristal aux très grandes vitesses de déformation. En se plaçant dans le contexte d'un écrouissage isotrope, on montre que le monocristal ne subit aucune rotation plastique. On en déduit des conséquences sur l'écrouissage textural d'un polycristal dans le cadre de la théorie de Taylor. Certaines conclusions relatives à l'instabilité d'écoulement sont présentées

It has been observed (1) that under dynamic conditions of testing, the flow can be considered very close to a viscous regime. In this range of strain rates, adiabatic heating tends to promote plastic instability whereas the inertia effects would tend to prevent or delay it (2). It has already been shown (3) how these inertia effects could explain the increase in ductility observed at high rates of deformation (say at rates greater than $10^3\ s^{-1}$) in Tantalum and Copper (4).

However to our knowledge, nothing has been done yet concerning the effect of texture, i.e. of the starting and of the deformation textures on the stability of flow. The present work wants to be a first insight into that domain.

THE SINGLE CRYSTAL MODEL

The model material is a polycrystal and each slip system of its constituent crystallites is supposed to obey a purely linear viscous law:

$$\dot{\gamma}^s = \dot{\gamma}_o^s \frac{\tau^s}{\tau_c^s} \qquad (1)$$

where the microscopic shearing rate $\dot{\gamma}^s$ of that system s is expressed as a function of a reference shear strain rate $\dot{\gamma}_o^s$, the resolved shear stress τ^s on the slip system and the critical resolved shear stress τ_c^s. Knowing the normal vector $\underset{\sim}{n}^s$ to the slip plane and the slip direction $\underset{\sim}{b}^s$, τ^s can be expressed as:

$$\tau^s = \underset{\sim}{m}^s : \underset{\sim}{S} \qquad (2)$$

with:

$$\underset{\sim}{m}^s = \underset{\sim}{b}^s \otimes \underset{\sim}{n}^s \qquad (3)$$

where $\underset{\sim}{S}$ is the (deviatoric) stress tensor in the particular grain. note that the sign : indicates a double contraction ofthe two tensors. Also when an index is repeated twice on one side of an equality, it indicates summation on that index. Experiments on shear deformation of single crystals at high strain rates (10) , have reported that shear stress τ is related to the shear strain rate $\dot{\gamma}$ through an affine relation: $\tau = \tau_0 + \mu\dot{\gamma}$,here we assume as a first step that τ_0 is negligible. This can be justified for very high strain rates, when $\mu\dot{\gamma}$ becomes large compared to τ_0 .

The strain rate tensor $\underset{\sim}{D}$ can be written:

$$\underset{\sim}{D} = \sum_s \left(\underset{\sim}{m}^s + {}^t\underset{\sim}{m}^s \right) \dot{\gamma}^s \qquad (4)$$

which, by using equs.(1) and (2), leads to:

$$\underset{\sim}{D} = \sum_s \frac{\dot{\gamma}_0^s}{2\tau_c^s} \left(\underset{\sim}{m}^s + {}^t\underset{\sim}{m}^s \right) \left(\underset{\sim}{m}^s : \underset{\sim}{S} \right) \qquad (5)$$

If a fourth rank tensor $\underset{\sim}{Q}'^{-1}$ is defined so that:

$$\underset{\sim}{Q}'^{-1} = \sum_s \frac{\dot{\gamma}_0^s}{4\tau_c^s} \left(\underset{\sim}{m}^s + {}^t\underset{\sim}{m}^s \right) \otimes \left(\underset{\sim}{m}^s + {}^t\underset{\sim}{m}^s \right) \qquad (6)$$

equ. (5) becomes:

$$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{Q}'^{-1} : \underset{\sim}{S} \qquad (7)$$

and therefore the deviatoric stress tensor is:

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{Q}' : \underset{\sim}{D} \qquad (8)$$

From here on, it will be assumed that $\dot{\gamma}_0^s$ and τ_c^s are independent of s, so that equ. (8) becomes:

$$\underset{\sim}{S} = \frac{\tau_c}{\dot{\gamma}_0} \underset{\sim}{Q} : \underset{\sim}{D} \qquad (9)$$

with:

$$\underset{\sim}{Q}^{-1} = \frac{1}{4}(\underset{\sim}{m}^s + {}^t\underset{\sim}{m}^s) \otimes (\underset{\sim}{m}^s + {}^t\underset{\sim}{m}^s) \qquad (9')$$

this condition implies isotropic hardening of the crystal.

This equation links the stress state of a given grain to its strain-rate by means of τ_c which characterizes the microscopic hardening and the tensor $\underset{\sim}{Q}$. This tensor is built knowing the 'Schmid' tensors $\underset{\sim}{m}^s$ and is only related to the crystallite orientation. When $\underset{\sim}{S}$ and $\underset{\sim}{D}$ are both expressed in the sample reference system, the variations of $\underset{\sim}{Q}$ will reflect the textural hardening.

The 'work conjugate' effective stress (5,6) which is simply:

$$S_{eff} = \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{D} \qquad (10)$$

with $\underset{\sim}{D}^*$ defined by:

$$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}^* D_{eff} \qquad (11)$$

$$\underset{\sim}{D}^* : \underset{\sim}{D}^* = 3/2 \qquad (12)$$

where D_{eff} is the von Mises effective strain rate. By using equ.(9), we get:

$$S_{eff} = \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{D}^* = \frac{\tau_c}{\dot{\gamma}_0}(\underset{\sim}{Q} : \underset{\sim}{D}^*) : \underset{\sim}{D}^* D_{eff} \qquad (13)$$

The scalar orientation factor P:

$$P = \underset{\sim}{D}^* : \underset{\sim}{Q} : \underset{\sim}{D}^* \qquad (14)$$

can be defined so that equ.(13) becomes:

$$S_{eff} = \frac{\tau_c}{\dot{\gamma}_0} P D_{eff} \qquad (14')$$

It is important to note that P is not the Taylor factor as defined in a general way by Tome et al. (5). P can be linked to the microscopic shear rates in the following way:

$$\underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{D}^* D_{eff} = \frac{\tau_c}{\dot{\gamma}_0} P D^2_{eff} = \sum \tau^s \dot{\gamma}^s = \frac{\tau_c}{\dot{\gamma}_0} \sum_s (\dot{\gamma}^s)^2 \qquad (15)$$

and therefore:

$$P = \frac{\Sigma (\dot{\gamma}^s)^2}{D_{eff}^2} \qquad (16)$$

whereas from Tomé et al.(5), the Taylor factor is:

$$M = \frac{\Sigma \dot{\gamma}^s}{D_{eff}} \qquad (17)$$

It may be worth pointing out that by setting D_{eff} to a fixed value, and scanning the 5D strain rate space by the $\underset{\sim}{D}^P$ tensor, equ.(9) gives the (iso-effective strain rate) flow surface. While D is normal to a tangent hyperplane of that flow surface, P in equ.(14) is proportional to the distance from that plane to the origin.

Finally, it is of interest to be able to calculate the velocity gradient tensor L, defined by:

$$\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{m}^s \dot{\gamma}^s \qquad (18)$$

which using equs.(1) and (2) can also be expressed as:

$$\underset{\sim}{L} = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\varepsilon} e^s \underset{\sim}{m}^s = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\varepsilon} (\underset{\sim}{m}^s : \underset{\sim}{S}) \underset{\sim}{m}^s \qquad (19)$$

or as (by using equs.(9) and (19))

$$\underset{\sim}{L} = (\underset{\sim}{m}^s : \underset{\sim}{Q} : \underset{\sim}{D}) \underset{\sim}{m}^s$$

$$= \underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{D} \qquad (20)$$

This tensor is important, for it allows us to derive the orientation changes knowing which material line and plane remain fixed in space (7).

An application will now be made to the case of f.c.c. metals.

THE F.C.C CRYSTAL

The slip systems of that crystal are listed in Table 1. Since it is easier to visualize second rank tensors, the notation of Kocks et al.(8) will be used, i.e.:

$$\hat{\underset{\sim}{S}} = (\tfrac{1}{2}(S11-S22), \tfrac{3}{2}S33,\ S23,\ S13,\ S12)$$

$$\hat{\underset{\sim}{D}} = (D11-D22,\ D33,\ 2D23,\ 2D13,\ 2D12) \qquad (21)$$

These are the 5D vectors associated with the S and D tensors, so that the dot product of those vectors is the work rate. Using equ.(11), a vector $\hat{\underset{\sim}{m}}^s$ can be defined as:

$$\hat{\underset{\sim}{m}}^s = \left(m^s_{11}-m^s_{22},\ m^s_{33},\ m^s_{23}+m^s_{32},\ m^s_{13}+m^s_{31},\ m^s_{12}+m^s_{21}\right) \qquad (22)$$

These vectors are also listed in Table 1. Equ.(9) now becomes:

$$\hat{\underset{\sim}{S}} = \frac{\sigma_0}{\dot{\varepsilon}_0}\hat{\underset{\sim}{Q}}.\hat{\underset{\sim}{D}} \qquad (9')$$

where:

$$\hat{\underset{\sim}{Q}}^{-1} = \hat{\underset{\sim}{m}}^s \otimes \hat{\underset{\sim}{m}}^s \qquad (23)$$

This matrix in the crystal reference system turns out to be diagonal, and its inverse is:

$$\hat{\underset{\sim}{Q}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{bmatrix} \qquad (24)$$

Note that the locus of stress states associated to the same von Mises effective strain rate is not spherical, so that the 'flow' surface (i.e. yield surface of a viscous material) is not like a von Mises yield surface.

The deformation rate tensor $\underset{\sim}{L}$ is linked to the vector D by the relation:

$$\underset{\sim}{L} = (\underset{\sim}{b}^s \otimes \underset{\sim}{n}^s)\hat{\underset{\sim}{m}}^s.\hat{\underset{\sim}{Q}}.\hat{\underset{\sim}{D}} \qquad (20')$$

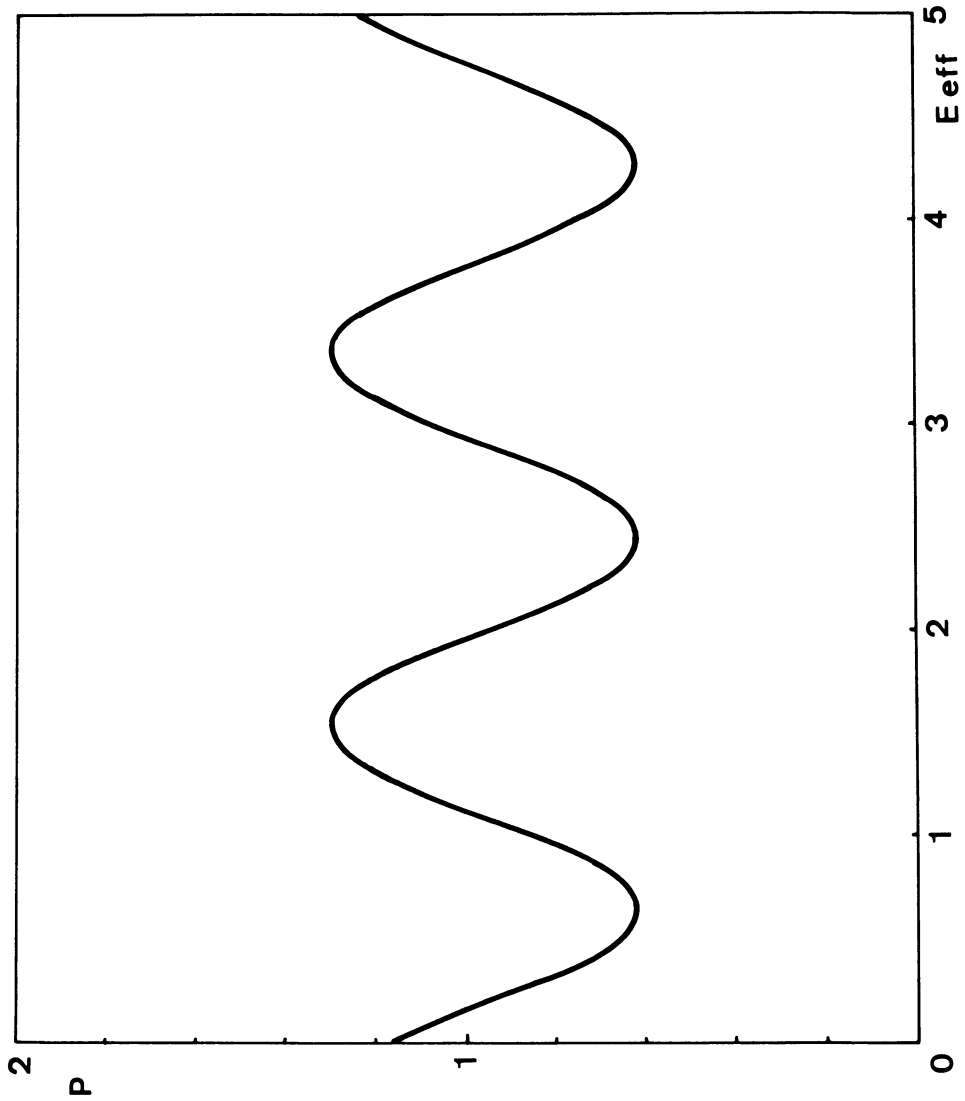


Fig. 1 Cyclic textural hardening of a fully constrained F.C.C. single crystal sliding on the 12 {111} <110> slip systems which harden at the same rate. Note that the periodicity of P is directly linked to the rotation period of the flow surface. When the flow surface makes one cycle, P has two maxima. In the particular orientation taken here for the grain ({100} <010>), it turns out that the maxima are equal. Then the periodicity of P is $E_{eff} = \frac{\gamma}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$. In general the periodicity of P is $E_{eff} = \frac{\gamma}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

but since Q is diagonal, it can be written:

$$L_{ij} = b_i^s n_j^s \hat{m}_k^s \hat{Q}_{kk} \hat{D}_k \qquad (20")$$

$$\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{I} \cdot \hat{\underset{\sim}{D}}$$

The tensor $\underset{\sim}{I}$ is listed in Table 2.

The symmetry of $\underset{\sim}{L}$ deduced from that Table shows that the antisymmetric part $\underset{\sim}{\Omega}$ of $\underset{\sim}{L}$ is zero, i.e. there is no plastic rotation. Knowing the relation:

$$\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{\Omega} \qquad (25)$$

it is possible to draw some interesting conclusions.

CONCLUSIONS

If the crystallites constituting the polycrystal are supposed fully constrained, i.e. they are submitted to the same strain rate (Taylor conditions), then the lattice rotation rate can be expressed as:

$$\underset{\sim}{\Omega}^* = \underset{\sim}{\Omega}^T - \underset{\sim}{\Omega} \qquad (26)$$

where $\underset{\sim}{\Omega}$ comes from equ.(25) and $\underset{\sim}{\Omega}^T$ is the total rotation rate occurring, for example, in a simple shear test.

The main conclusion due to the fact that $\underset{\sim}{\Omega}$ is zero is that there is no textural hardening in absence of total rotation. However, in a simple shear process, there is a cyclic textural hardening at a grain level (Fig.1) that will average out to zero when the starting orientation distribution is uniform but that will produce a cyclic macroscopic hardening when a non-random initial texture is present. Finally, the starting texture is not important in e.g. tension, but may be important in e.g. shear.

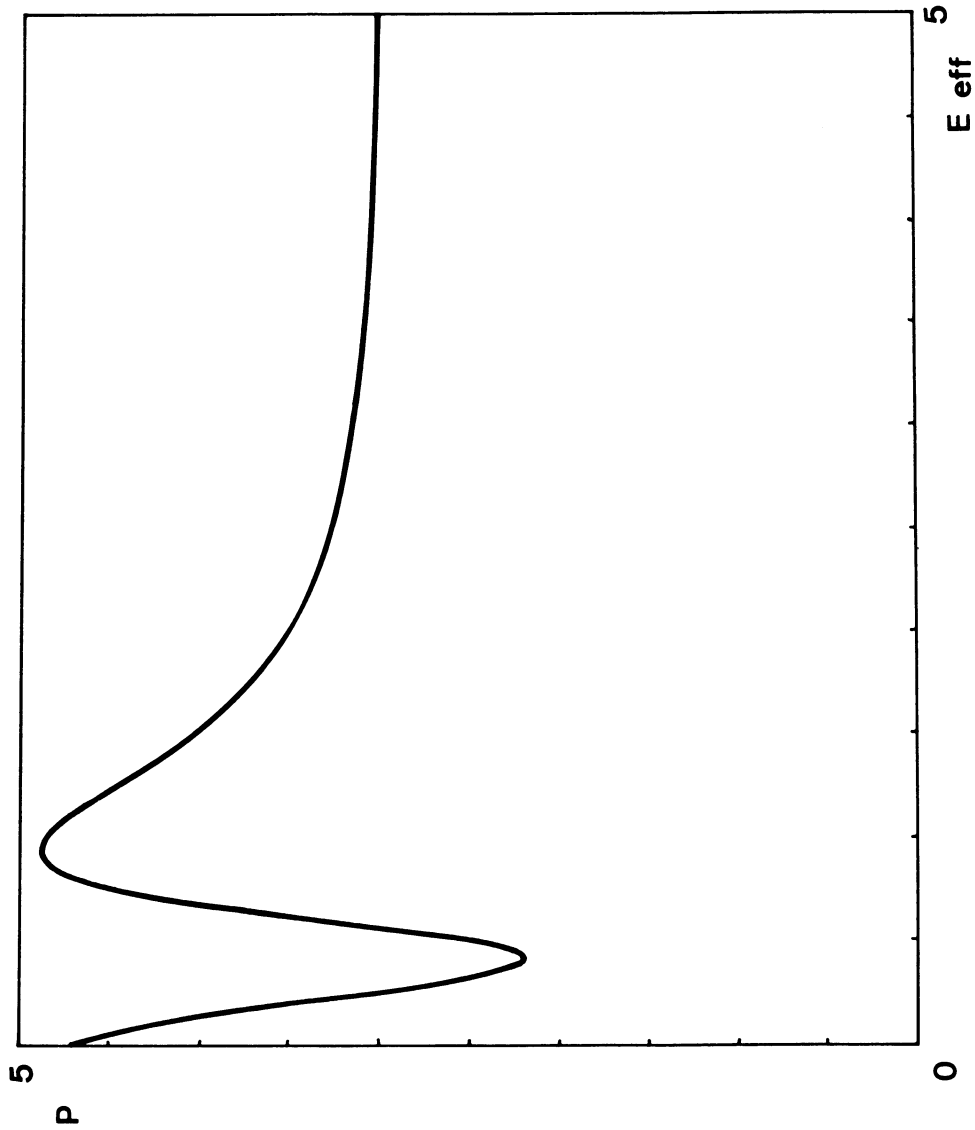


Fig. 2 Hardening of a theoretical single crystal having only two systems : {001} <010> and {023}<0 $\bar{3}$2> hardening at the same rate. For this particular case, the crystal orientation is 35° away from the shear plane. Note the asymptotic tendancy, proving that the cyclic hardening shown in Fig. 1 is only a result of the single crystal mechanical symmetry.

It should also be noted that the absence of plastic rotation ($\underset{\sim}{\Omega}=0$) is linked to the cubic symmetry of the single crystal mechanical properties, and also to the fact that the concept of threshold stress has not been considered in the present calculations. The results, therefore, may not hold for crystals of lower symmetry (monoclinic,...) in which case textural effects will be non negligible in any case.For example, the theoretical case of bislip in simple shear (Fig.2), does not exhibit any cyclic hardening but rather an asymptotic tendancy.

Furthermore, since in f.c.c. metals considered here, the crystal reference system (which may also be the reference system in Mandel's directors theory (9)) rotates with the spin $\underset{\sim}{\Omega}^T$, the objective derivative to be used in the phenomenological constitutive law when considering the evolution of the hardening tensors (e.g. kinematic hardening tensors) should be the Jaumann derivative.

Concerning plastic instability of flow in such materials, the absence of textural corners in the flow surface would tend to increase the stability in biaxial stretching. Shear bands formation when linked to the corner theory should also be hindered in such materials. However, the shear bands should be promoted by the softening effect analyzed above in simple shear which occurs at a given strain depending on the initial texture.

The polycrystal model presented here, based on Taylor theory will be improved by introducing a better description of the interaction of the grain with its surroundings as well as a better representation of the microscopic shearing of the slip systems.

REFERENCES

(1) Kumar, and Kumble, J. App. Phys., 40, n.9, 1969, pp.3475

(2) A. Molinari, accepted for publication in J. Meca. Th App.

(3) C. Fressengeas and A. Molinari, accepted for publication in Acta. Met.

(4) G. Reggazzoni, F. Montheillet, Dormeval and Stelly, Proc. Riso Int. Conf., 1981

(5) C.N. Tome, G.R. Canova, U.F. Kocks, N. Christodoulou and J.J. Jonas, Acta Met., n[32, 1984, PP.

(6) G.R. Canova, U.F. Kocks and M.G. Stout, Scripta Met.,

(7) U.F. Kocks and H. Chandra, Acta. Met., n[30, 1982, pp.695

(8) U.F. Kocks, G.R. Canova and J.J. Jonas, Acta. Met., n[31, 1984, PP.1243

(9) J. Mandel, Int. J. Sol. Str., vol. 9, 1973, pp.725

(10) J.P. Dubois, C.Y. Chiem, Journées d'Etudes "Déformations des métaux aux grandes vitesses", GAMI, Paris, 22-23.11.1983

ANNEXE : Tableaux

Table 1

Slip System Index	Slip System n	Slip System b	Strain Vector Component
1	1 1 -1	0 1 1	-1 -1 0 1 1
2	1 1 -1	1 0 1	1 -1 1 0 1
3	1 1 -1	1 -1 0	2 0 1 -1 0
4	1 -1 -1	0 1 -1	1 1 0 -1 1
5	1 -1 -1	1 0 1	1 -1 -1 0 -1
6	1 -1 -1	1 1 0	2 0 -1 -1 0
7	1 -1 1	0 1 1	1 1 0 1 1
8	1 -1 1	1 0 -1	1 -1 1 0 -1
9	1 -1 1	1 1 0	2 0 1 1 0
10	1 1 1	0 1 -1	-1 -1 0 -1 1
11	1 1 1	1 0 -1	1 -1 -1 0 1
12	1 1 1	1 -1 0	2 0 -1 1 0

Table 2

ij \ k	1	2	3	4	5
11	1/2	-1/2	0	0	0
21	0	0	0	0	1/2
31	0	0	0	1/2	0
12	0	0	0	0	1/2
22	-1/2	-1/2	0	0	0
32	0	0	1/2	0	0
13	0	0	0	1/2	0
23	0	0	1/2	0	0
33	0	1	0	0	0

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 339-348

Ecrouissage anisotrope et courbes limites de formage

Anisotropic hardening and forming limit diagrams

D. DUDZINSKI, A. MOLINARI

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux LPMM,
GRECO « Grandes déformations et endommagement »
Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex

RESUME

Un modèle d'écrouissage anisotrope est utilisé pour étudier l'instabilité d'une tôle en biaxé. Les résultats sont comparés à ceux obtenus avec l'écrouissage isotrope et on précise l'influence de la courbure de la surface d'écoulement sur l'apparition de l'instabilité. On utilise une loi d'écrouissage cinématique avec un terme de restauration. On étudie l'influence de ce terme de restauration sur la localisation.

ABSTRACT

An anisotropic hardening model is used in the study of the instability of a sheet under bi-axial loading. The results are compared with those obtained when using isotropic hardening, and the influence of the curvature of the yield surface on the occurence of instability is clarified. The kinematic hardening law which is used involves a restoring term. The influence of the latter on the localization phenomena is studied.

I.- INTRODUCTION

On observe expérimentalement, sur une plaque soumise à un chargement biaxial (ε_1, ε_2), que la déformation se localise dans une bande inclinée d'un angle ψ. Il se produit dans cette bande une forte diminution d'épaisseur. Si l'on reporte la déformation ε_1, mesurée en dehors de la bande à la localisation, dans un diagramme (ε_1, ε_2), on obtient une courbe limite de formage (CLF). Cette courbe décrit la dépendance de la déformation ε_1 à la localisation avec le rapport fixé des déformations :

$$\rho = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

On a cherché à prédire les courbes limites de formage en fonction de différents paramètres qui influent sur le niveau et la forme de ces courbes. Citons principalement :

- l'endommagement
- la vitesse de déformation
- le couplage thermo-mécanique
- le chemin de déformation (direct ou complexe)
- l'écrouissage

On analyse dans ce travail les effets de l'écrouissage anisotrope en s'intéressant plus particulièrement aux effets de courbure de la surface d'écoulement. L'apparition d'un vertex ou d'une région de forte courbure sur la surface d'écoulement, au voisinage du point de charge, est sans doute un facteur déterminant dans l'apparition d'une instabilité plastique.

Différentes approches parviennent à prendre en compte directement ou indirectement cet aspect du problème (théorie de la déformation, théorie de l'écoulement avec vertex [1] [2] [3]). TVERGAARD [4] puis NEEDLEMAN et TVERGAARD [5] ont utilisé la théorie de l'écrouissage cinématique afin de conserver, contrairement à l'écrouissage isotrope, une courbure significative au voisinage du point de charge. Nous utilisons ici un modèle d'écrouissage cinématique avec terme de restauration qui tend à saturer l'écrouissage aux grandes déformations. Nous complétons l'étude de TVERGAARD par une analyse détaillée des effets de courbure. Nous nous intéressons ensuite au rôle joué par l'adoucissement en cisaillement simple observé avec notre modèle d'écrouissage.

2.- EQUATIONS DU PROBLEME

Le matériau est supposé initialement isotrope et son comportement rigide plastique. Nous prenons la théorie de l'écoulement qui donne la vitesse de déformation plastique :

$$D_{ij} = \lambda \frac{s_{ij} - \alpha_{ij}}{\sigma_y}$$

en fonction de

s_{ij} : composantes du déviateur des contraintes

α_{ij} : paramètre d'écrouissage anisotrope (cinématique) représente le déplacement de la surface d'écoulement dans l'espace du déviateur

σ_y : est la contrainte initiale d'écoulement, c'est aussi le rayon de la surface d'écoulement

on a : $\lambda = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}}{\sigma}$; $\dot{\varepsilon} = \left| \frac{2}{3} D_{ij} D_{ij} \right|^{1/2}$

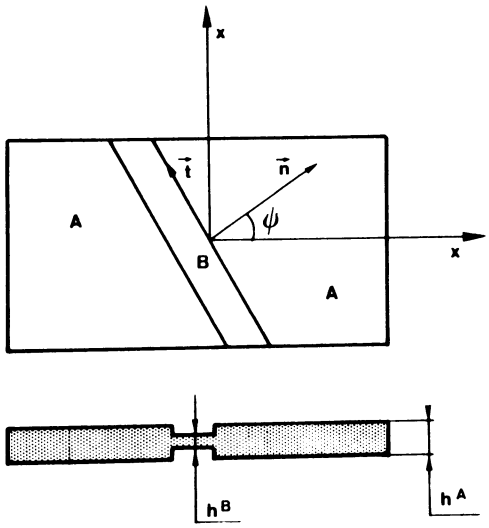


FIGURE 1

Tôle présentant un défaut géométrique
sous forme d'une bande de sous-épaisseur
inclinée d'un angle ψ

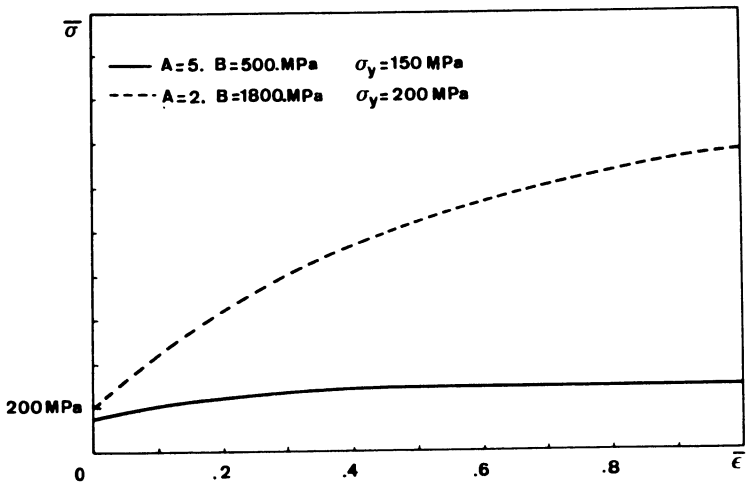


FIGURE 2

Courbes d'écrouissage des deux matériaux

Matériau 1 : A = 5. B = 500.MPa σ_y = 150.MPa

Matériau 2 : A = 2. B = 1800.MPa σ_y = 200.MPa

Les lois d'écrouissage sont données par les équations (3) et (4)

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}) \quad ; \quad \bar{\varepsilon} = \int_o^t \dot{\bar{\varepsilon}}\, dt \tag{3}$$

$$\overset{\nabla}{\alpha}_{ij} = B(\bar{\varepsilon})\ D_{ij} - A(\bar{\varepsilon})\ .\ \dot{\bar{\varepsilon}}\ .\ \alpha_{ij} \tag{4}$$

Cette dernière relation donne l'évolution de α_{ij}. C'est une loi de PRAGER-ZIEGLER [6] modifiée par un terme de restauration [7,8] et élargie aux grandes déformations par l'utilisation de la dérivée de Jaumann $\overset{\nabla}{\alpha}_{ij}$ de α_{ij} [9,10].

Dans la suite, nous considérons que A, B et σ_y sont des constantes.

L'analyse de la striction localisée est effectuée avec la théorie de MARCINIAK et KUCZINSKI [11]. La plaque présente un défaut géométrique initial sous forme d'une bande de sous-épaisseur inclinée d'un angle ψ (o). La plaque est alors décomposée en deux zones homogènes : la zone A d'épaisseur h^A, la zone B d'épaisseur h^B (figure 1).

Les équations sont résolues par une intégration directe au moyen d'une méthode de Runge-Kutta.

Il y a localisation de l'écoulement lorsque :

$$\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^A}{\dot{\bar{\varepsilon}}^B} \to 0 \tag{5}$$

3.- RESULTATS

3.1.- EFFET DE COURBURE

Les résultats de la théorie d'écrouissage cinématique sont comparés avec ceux de la théorie d'écrouissage isotrope. La loi d'écrouissage isotrope est identifiée, en trajet proportionnel, à la fonction d'écrouissage $(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon})$ définie à partir du modèle cinématique, fonction qui donne l'évolution de la contrainte équivalente $\bar{\sigma}$:

$$\bar{\sigma} = \left[\frac{3}{2}\, s_{ij}\, s_{ij} \right]^{1/2} \tag{6}$$

avec la déformation plastique cumulée $\bar{\varepsilon}$

$$\bar{\sigma} = \sigma_y + \frac{3B}{2A}\,(1 - \exp(-A\bar{\varepsilon})) \tag{7}$$

Nous imposons aux extrémités de la plaque, le chemin de déformation caractérisé par le rapport

$$\rho = \frac{D_{22}}{D_{11}} = \underline{\text{cte}} \tag{8}$$

que nous ferons varier de -1 à + 1.

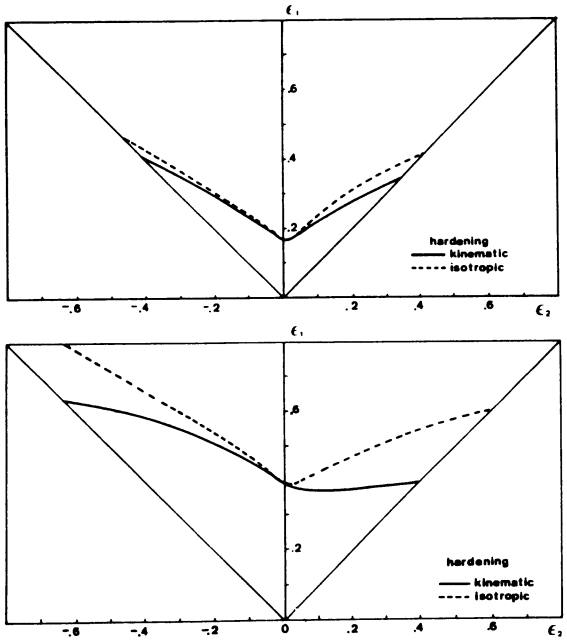


FIGURE 3

CLF - Comparaison des résultats obtenus
par les deux théories d'écrouissage
a - Matériau 1 : faiblement écrouissable
b - Matériau 2 : fortement écrouissable

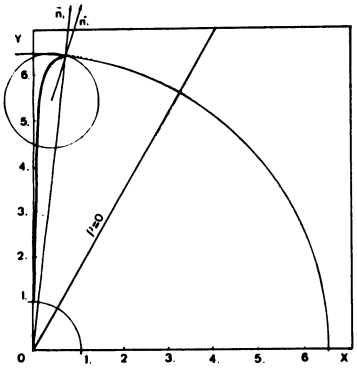


FIGURE 4

Surfaces d'écoulement initiale et actuelles (cinématique et isotrope),
trajets de chargements dans les deux zones
pour le matériau 2, fortement écrouissable

- trajet de chargement dans la zone A $\rho = 1$
(axe des ordonnées)
- trajet de chargement dans la bande (trait fort)

$$X = 3(S11 - S22)/2\sqrt{3}\sigma_y$$

$$Y = 3(S11 + S22)/2\sigma_y$$

Les calculs sont effectués pour les deux matériaux théoriques suivants :

Matériau 1, faiblement écrouissable :

$$A = 5 \quad B = 500.MPa \quad \sigma_y = 200.MPa$$

Matériau 2, fortement écrouissable :

$$A = 2 \quad B = 1800.MPa \quad \sigma_y = 200.MPa \qquad \text{(figure 2)}$$

on suppose que σ_y reste constant au cours de la déformation

Le défaut géométrique initial étant défini par :

$$\frac{h^B(o)}{h^A(o)} = .99$$

On observe des déformations ε_1, à la localisation, plus faibles avec le modèle cinématique et l'égalité des déformations critiques en déformation plane (figure 3).

Le chemin de déformation dans la bande étant non proportionnel, quand $\rho \neq o$, la forte courbure de la surface d'écoulement cinématique au point de charge (par comparaison avec celle de la surface isotrope au même point) destabilise l'écoulement. Cet effet de courbure est plus sensible pour le matériau fortement écrouissable pour lequel le déplacement de la surface d'écoulement est important et la différence de courbure entre surfaces isotrope et cinématique grande (figure 4). En déformation plane, les chemins de déformation sont identiques dans les deux zones, les deux modèles d'écrouissage donnent le même résultat (pas d'effet de courbure).

3.2.- INFLUENCE DE LA CONTRAINTE INITIALE D'ECOULEMENT

La contrainte σ_y correspond à la contrainte initiale d'écoulement et, à un instant quelconque, au rayon de courbure de la surface d'écoulement cinématique. On supposera que σ_y reste constant au cours de la déformation. On montre facilement, en déformation plane (chemin pour lequel il n'y a pas d'effet de courbure), que la diminution de σ_y (donc de la contrainte initiale d'écoulement) provoque l'augmentation de la déformation ε_1 à la localisation; ceci met en évidence l'influence de la contrainte initiale d'écoulement.

En expansion biaxée symétrique, nous avons vu (figure 4), que diminuer le rayon de courbure destabilise l'écoulement, c'est à dire diminue la déformation critique ε_1.
Pour $0 < \rho < 1$, il y a compétition entre ces deux effets contraires ; la figure 5 donne les CLF obtenues. En biaxé symétrique, les effets destabilisants de la courbure, quand σ_y diminue, l'emportent sur l'effet stabilisant lié à la diminution de la contrainte initiale d'écoulement.

3.3.- INSTABILITE EN CISAILLEMENT

Le modèle cinématique donne un comportement en glissement simple décrit par la figure 6. Le maximum sur la courbe (τ,γ) est lié à l'utilisation de la dérivée de Jauman et le plateau à l'introduction du terme de restauration $-A\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,\alpha_{ij}$ dans la loi d'évolution (4) du paramètre d'écrouissage α_{ij}.

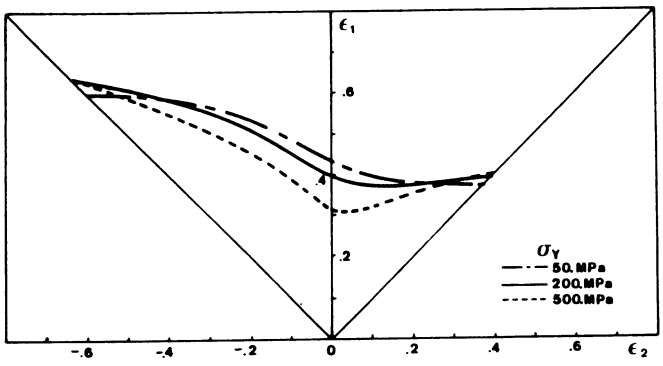


FIGURE 5

Influence de σ_y - A = 2

B = 1800.MPa

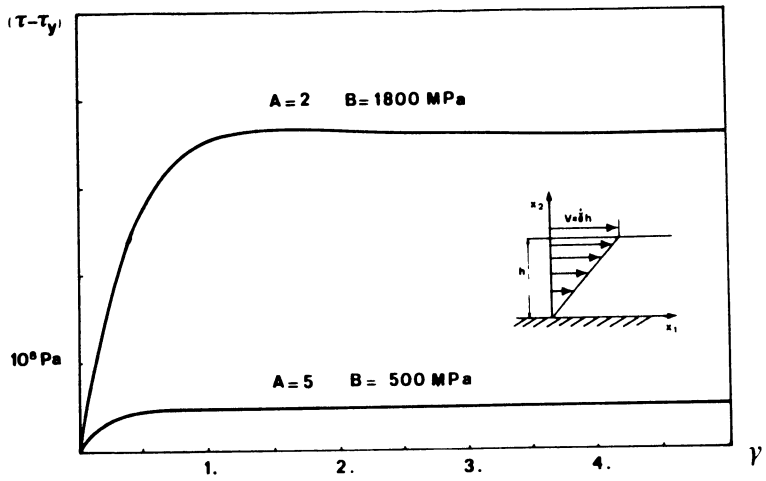


FIGURE 6

Comportement en cisaillement simple

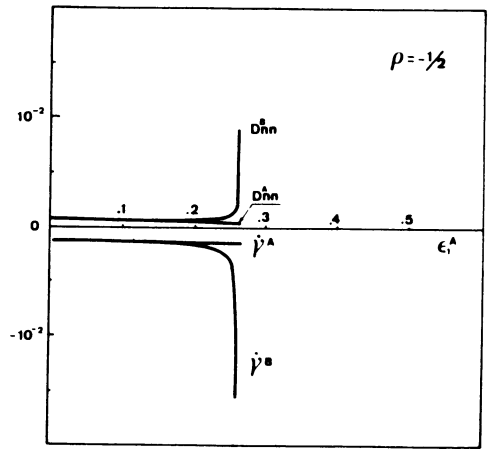


FIGURE 7

Modes de localisation pour le materiau :

A = 5 B = 500.MPa σ_y = 150.MPa

et pour $\rho = -\frac{1}{2}$

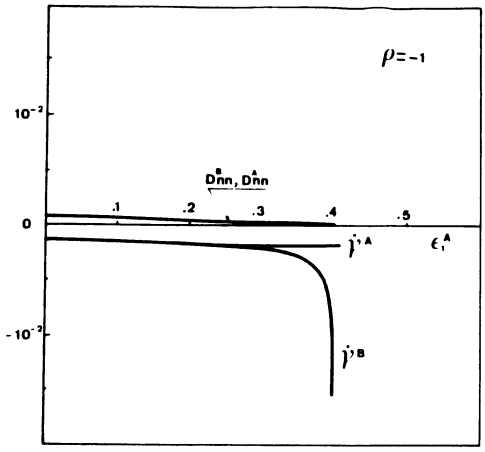


FIGURE 8

Modes de localisation pour le matériau

A = 5 B = 500.MPa σ_y = 150.MPa

et pour $\rho = -1$

Pour les valeurs négatives du rapport des vitesses de déformations la bande de localisation est inclinée d'un angle $\psi \neq 0$ et est par conséquent soumise à des contraintes de cisaillement. On peut alors s'attendre à un effet de l'instabilité en cisaillement, observée précédemment, sur la localisation de l'écoulement plastique. Sur les figures 7 et 8, nous présentons les modes de localisation rencontrés pour les chemins radiaux $\rho = -1$ et $-\frac{1}{2}$. On remarque après traction simple ($\rho = -\frac{1}{2}$), localisation en cisaillement ($\dot{\gamma}^B/\dot{\gamma}^A \to \infty$) et striction ($D^B_{nn}/D^A_{nn} \to \infty$) apparaissent simultanément, par contre pour $\rho = -1$ seule la localisation en cisaillement se développe. On peut alors en conclure que les déformations critiques en cisaillement $\rho = -1$ calculées pour les matériaux à comportement cinématique (figure 3) sont directement liées à l'instabilité en cisaillement (figure 6) observée pour ces matériaux.

4.- CONCLUSION

Les CLF prévues pour le modèle cinématique proposé s'accordent bien avec les résultats expérimentaux [12, 13, 14] . L'écrouissage cinématique est particulièrement intéressant car il donne une meilleure représentation de la courbure de la surface d'écoulement au point de charge et donc une meilleure estimation des composantes du vecteur vitesse de déformation que l'écrouissage isotrope.

BIBLIOGRAPHIE

1.- S. STOREN et J.R. RICE
Localized necking in thin sheets.
J. Mech. Phys. Solids, Vol. 23, pp 421-441, 1975.

2.- J.W. HUTCHINSON and K.W. NEALE
Sheet Necking - II.
Time independant behaviour.
Mechanics of sheet Metal forming (edited by D.P. KORSTINEN and N.M. WANY)
Plenum Press pp 127-150, 1978.

3.- J. CRISTOFFERSEN and J.W. HUTCHINSON
A class of phenomenological corner theories of plasticity.
J. Mech. Solids, Vol. 27, pp 465-487, 1979.

4.- V. TVERGAARD
Effect of kinematic hardening on localized necking in biaxially stretched sheets.
Int. J. Mech. Sci., Vol. 20, pp 651-658, 1978.

5.- A. NEEDLEMAN and V. TVERGAARD
Limits to formability in rate-sensitive metal sheets.
Proc. ICM4 Stockholm 1983.
Edited by J. CARLSSOON and N.G. OHLSON
Pergamon Press up 51-65

6.- H. ZIEGLER
A modification of Prager's hardening rule.
Quart. Appl. Math. Vol. XVII, pp 55-65, 1959.

7.- P.J. AMSTRONG and C.O. FREDERICK
A mathematical representation of the multiaxial Baushinger Effect.
CEGB Repport n° RB/B/N 731, 1966.

8.- J.L. CHABOCHE
Viscoplastic constitutive equations for the description of cyclic and anisotropic behaviour of metals.
Bulletin de l'Ac. Polonaise des Sciences, série Sci. et Techniques, Vol. 25, pp 33-42, 1975.

9.- A. MOLINARI
Instabilité en cisaillement simple, 1981, non publié.

10.- C. FRESSENGEAS et A. MOLINARI
Modèles d'écrouissage cinématique en grande déformation.
C.R. Acad. Sc., Paris, T. 297, 1983.

11.- Z. MARCINAK and K. KUCZINSKI
Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal.
Int. J. Mech. Sci., Vol. 9, pp 609-620, 1967.

12.- M. AZRIN and W.A. BACKHOFEN
The deformation and failure of a biaxially stretched sheet.
Metal. trans., Vol. 1, pp 2857-2865, 1970.

13.- A. GHOSH and S.S. HECKER
Stretching limits in sheet metals : in plane versus out-of-plane deformation.
Metal. trans., Vol. 5, pp 2161-2164, 1974.

14.- A. GHOSH
The effect of lateral drawing in stretch formability.
Metal. Eng. Quart., pp 53-64, Août 1975.

DEUXIEME PARTIE
LE BOIS MATERIAU

SECOND PART
WOOD AS A MATERIAL

2.1 Conférence générale

2.1 Plenary lecture

par – *by*

M. MUDRY

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials*
CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 353-410

CONFERENCE GENERALE
PLENARY LECTURE

Panorama des travaux scientifiques mondiaux sur la mécanique et la rhéologie du bois

Survey of world scientific works on mechanics and rheology of wood

M. MUDRY

Laboratoire de Mécanique et d'Energétique
E.S.E.M., Université d'Orléans
Domaine Universitaire, 45046 Orléans Cedex

RESUME

Nous présentons ici une synthèse critique des travaux scientifiques parus depuis une vingtaine d'années sur le sujet indiqué.
Notre présentation est articulée en fonction des principaux domaines du comportement du matériau bois et assise sur une compilation bibliographique d'environ 400 titres.

ABSTRACT

We present here a critical survey of significant works published on this subject since about twenty years.
Our approach is built according to the different aspects of wood rheology and founded on about 400 titles of books or articles.

1 - INTRODUCTION

Cette communication s'appuie pour l'essentiel sur un rapport réalisé par l'auteur à la demande des Services officiels de l'Aéronautique. Il s'agit d'une synthèse critique fondée sur une importante compilation bibliographique (près de 400 références) entièrement restituée ici.

La compréhension de ce document sera facilité par lecture des quelques références générales qui traitent de mécanique et de rhéologie du bois. On peut conseiller les références [1] [2] [5] [6] [9] [11] [13] mais surtout [14] excel-

lent ouvrage paru au moment où nous terminions ce travail.

L'appel aux références de la bibliographie en question sont dans la suite repérées par un symbole placé entre crochets : [3] [B2] , ... On a distingué d'une part quelques références générales repérées par un nombre à partir de [1] , ... et d'autre part des articles spécialisés, classés par ordre alphabétique "auteurs" et repérés par un symbole alphanumérique tel que [B2] , soit : 2e référence de la lettre B.

Malgré son volume, cette compilation résulte d'un "tri" opéré à partir de toute la littérature théoriquement existante et selon plusieurs critères.

Le premier est d'ordre chronologique. Les références retenues sont toutes assez récentes, c'est-à-dire, jamais antérieures -sauf exception- aux années soixante.

Une telle limitation était indispensable d'abord en raison des difficultés d'accès aux articles trop anciens. Mais elle résulte surtout de l'existence des deux références [1] et [6] :

[1] Design of Wood Aircraft Structures

ANC 18 Bulletin - Second Edition - June 1951

[6] Principales of Wood Science and Technology - I. Solid Wood

F.P. KOLLMANN - W.A. COTE Jr - Springer Verlag - New York - 1968

qui réalisaient à cette époque une bonne synthèse des travaux disponibles. La première est un manuel destiné spécialement à la construction aéronautique, la seconde un véritable traité des Sciences du Bois, si l'on ajoute le second volume [11] .

Notre compilation couvre donc à peu près les vingt dernières années, l'état de chaque question abordée étant fait à partir de [1] et surtout [6] .

Le second critère est d'ordre qualitatif, et est relatif à la nature des articles. Seuls ont été retenus les travaux de portée suffisamment générale pour être utilisables soit d'un point de vue technologique, soit même au plan fondamental.

Bien qu'il présente l'inconvénient d'être en partie subjectif, ce critère a contribué à maintenir le volume de la compilation dans des limites raisonnables. Dans le même esprit, les références jugées les plus importantes sur chaque question abordée ont été privilégiées dans le texte principal, la discussion étant construite autour d'elles, en en citant parfois l'essentiel.

Le dernier critère enfin résulte du choix de privilégier la finalité "bois : matériaux de construction", lequel nous a conduit à laisser de côté quelques questions qui, quoique importantes, présentaient un caractère trop fondamental ou trop amont.

Nous pensons en particulier au phénomène de contraintes de croissance qui pourrait d'ailleurs être l'objet à lui seul d'une synthèse spécialisée au Centre Technique Forestier Tropical.

C'est aussi le cas dans une moindre mesure de la micromécanique du matériau bois. Cette question est évoquée au § 7, mais la bibliographie correspondante comporte sans doute quelques lacunes, et la discussion correspondante n'a peut-être pas tout à fait l'importance qu'elle mérite.

Les aspects macroscopiques du comportement du matériau et des structures bois ont donc finalement été priviligiées, dans la mesure où ce sont ceux qui intéressent le plus directement le constructeur.

La synthèse critique des travaux scientifiques retenus est l'objet des paragraphes 2 et 7 qui suivent.

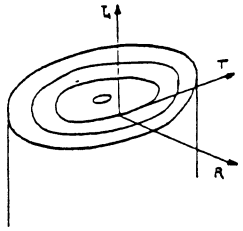
Les § 2, 3, et 4 traitent de la connaissance de la loi de comportement du matériau, dans le domaine élastique (§ 2) ou inélastique (§ 3, 4). La question du calcul et du dimensionnement des pièces et structures en bois y est également envisagée, en particulier au § 2 à propos d'élasticité orthotrope.

L'influence des deux paramètres internes que sont le taux d'humidité et la tem-

pérature sur les différents aspects du comportement est examinée au § 5.
Les problèmes particuliers que posent les essais mécaniques sur le bois sont évoqués au § 6.
Comme on l'a indiqué précédemment, seul le § 7 traite de l'aspect ultrastructural, avec d'une part, l'étude micromécanique du comportement et d'autre part, la question de l'homogénéisation, c'est-à-dire les relations explicites entre ce comportement et la caractérisation macroscopique traitée dans les paragraphes précédents.
Enfin le § 8 rassemble nos conclusions et quelques suggestions.

2 - LE BOIS COMME SOLIDE ELASTIQUE

Dans le domaine linéaire, le comportement élastique du bois a été identifié, dès les premiers travaux (voir [6]) comme (localement) orthotrope, les directions d'orthotropie étant les directions naturelles locales.



(T) Tangentielle : aux couches annuelles
(L) Longitudinale : "sens du fil"
(R) Radiale : perpendiculaire aux couches annuelles

En écrivant l'invariance du comportement élastique par symétrie relativement à chacun des trois plans naturels ainsi définis, le bois de comportement :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\ e_{kl} \qquad \text{ou encore :} \qquad \sigma_\alpha = C_{\alpha\beta}\ e_\beta$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 6)$$

est telle que, dans la base naturelle, la matrice de rigidité $(C_{\alpha\beta})$ symétrique, est de la forme :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

soit neuf constantes indépendantes.
La loi inverse :

$$e_{kl} = S_{klij}\ \sigma_{ij} \qquad \text{ou encore :} \qquad e_\beta = S_{\beta\alpha}\ \sigma_\alpha$$

donne la matrice de complaisance ($S_{\beta\alpha}$), inverse de ($C_{\alpha\beta}$). Toujours dans la base naturelle, ses éléments s'expriment simplement en fonctions des constantes techniques du matériau :

E_i Modules d'YOUNG

G_{ij} Modules de cisaillement ($i \neq j$ $G_{ij} = G_{ji}$)

ν_{ij} Coefficients de POISSON ($i \neq j$)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_2} & \frac{-\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_1} & \frac{-\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

Les références générales [1] [6] donnent sous formes de tableaux les valeurs, mesurées par divers auteurs entre 1920 et 1955, de ces constantes techniques pour moins d'une vingtaine d'essences usuelles, avec les constatations classiques à leur propos : ordres de grandeur, inégalités, influence de la masse volumique, de l'humidité et de la température (ces deux derniers points sont repris au § 5). Ces données n'ont cependant qu'un intérêt pratique limité :

- d'une part du fait que certains travaux sont fort anciens et que la fiabilité de certaines mesures peut être mise en cause ;
- d'autre part et surtout en raison de la dispersion naturelle des caractéristiques du bois, les valeurs indiquées ne représentant au mieux que les propriétés de telle ou telle éprouvette.

De ce dernier point de vue, la seule référence importante depuis [6] est le travail de BODIG et GOODMAN [B36], synthétisé recemment dans l'excellent ouvrage [14]. A partir de l'ensemble des données expérimentales disponibles et d'une campagne spécifique d'essais, les auteurs proposent, au moyen d'une analyse statistique, un tableau de constantes élastiques : E_i, G_{ij} les plus probables pour une centaine d'essences avec par ailleurs des indications sur les dispersions. Un extrait de leurs résultats, convertis en unités S.I. (daN/mm2) est reproduit ci-après.

FEUILLUS - (d'après BODIG et GOODMAN B36)

(H ≙ 12 %)

(daN/mm2)

ESSENCE	Densité	E_L	E_R	E_T	G_{LR}	G_{LT}	G_{RT}
Frêne (Black Ash)	0,45	1192	98	45	76	55	17
Hêtre (American beech)	0,57	1288	129	67	100	74	25
Bouleau (Paper birch)	0,48	1189	105	51	82	50	20
Peuplier (Black cottonwood)	0,31	955	63	25	49	35	11
Orme (Slippery elm)	0,49	1113	108	53	84	61	20
Noyer (Pignot hickory)	0,67	1690	157	87	121	91	31
Chêne rouge (Red Oak-Scarlet)	0,61	1433	140	74	108	81	28
Chêne blanc (White Oak-Bur)	0,60	773	137	72	106	79	27

RESINEUX - (d'après BODIG et GOODMAN B36)

(H ≃ 12 %)

(daN/mm2)

ESSENCE	Densité	E_L	E_R	E_T	G_{LR}	G_{LT}	G_{RT}
Cèdre (Alaska Cedar)	0,42	1059	90	56	74	70	8
Sapin Douglas (Coast Douglas fir)	0,45	1457	97	62	79	73	8
Sapin (Subalpine fir)	0,31	675	67	36	59	57	5
Hemlock (Western hemlock)	0,42	1220	90	56	75	70	8
Pin (Sugar pine)	0,35	897	75	43	65	62	6
Séquoia (Old growth redwood)	0,39	1011	84	51	70	66	7
Spruce (Sitka spruce)	0,38	1167	82	49	69	65	7

Les auteurs donnent de plus un système de valeurs moyennes des coefficients de POISSON , pour l'ensemble des résineux d'une part et pour les feuillus d'autre part (ci-après), mais avec des indications de dispersion extrêmement importantes.

Coefficients de POISSON (BODIG-GOODMAN [B36])	RESINEUX	FEUILLUS
ν_{RL}	0,37	0,37
ν_{TL}	0,42	0,5
ν_{TR}	0,47	0,67
ν_{RT}	0,35	0,33
ν_{LR}	0,041	0,044
ν_{LT}	0,033	0,027

Ces données ne concernent que des essences nord-américaines et donc, pour l'essentiel, provenant de régions tempérées.
La bibliographie récente contient, çà et là, des mesures de constantes pour telle ou telle essence isolée, en général à l'occasion de travaux sur d'autres questions ([G1] [T18] par exemple). On mentionnera spécialement les références [G26] [G30] , où les auteurs, au moyen d'une méthode expérimentale originiale (§ 6) fournissent les constantes élastiques de quelques essences usuelles. On citera enfin les travaux du Laboratoire de Mécanique Energétique de l'E.S.E.M. (Université d'Orléans) qui appliquent systématiquement au bois une méthode ultrasonore (§ 6). Le tableau ci-dessous donne un extrait des résultats obtenus sur une quizaine d'essences tropicales [P21] , dont les masses volumiques se situent sur une plage extrêmement large.

ESSENCES TROPICALES (d'après [P21])

Constantes techniques : E, G

(daN/mm2)

ESSENCE	H (%)	Densité	E_L	E_R	E_T	G_{LR}	G_{LT}	G_{RT}
Dodomissinga	14	0,26	532	60	26	59	43	8
Marupa	14	0,42	774	119	75	85	64	8
Bagasse	12	0,68	1230	198	145	109	87	43
Amarante	11	0,80	1910	283	190	147	117	64
Azobé	12	1,02	1920	470	288	200	140	96
Endranendrana	9	1,28	2480	572	509	285	262	171

Coefficients de POISSON

ESSENCE	RL	TL	TR	RT	LR	LT
Dodomissinga	0,24	0,28	0,85	0,37	0,03	0,01
Marupa	0,40	0,34	0,70	0,44	0,06	0,03
Bagasse	0,20	0,60	0,58	0,42	0,003	0,07
Amarante	0,43	0,31	0,62	0,42	0,06	0,03
Azobé	0,29	0,22	0,68	0,41	0,07	0,03
Endranendrana	0,32	0,49	0,50	0,44	0,07	0,01

D'une façon générale, les études sur la caractérisation élastique linéaire du bois restent assez actives en FRANCE, grâce à l'impulsion donnée à partir de 1976 par l'ancienne D.G.R.S.T. (voir § 6).

La connaissance du comportement élastique linéaire est indispensable à l'analyse théorique et au calcul de pièces et structures (tant en statique qu'en dynamique). Cette question ne relève pas pour l'essentiel exclusivement de la "Mécanique du bois", puisqu'il s'agit très généralement d'élasticité anisotrope (problèmes de champ), et l'on sait que ce domaine a été remis à l'honneur lorsque sont apparus les composites modernes. En conséquence, toute étude faite sur ce sujet "à propos du bois" sera de portée beaucoup plus générale, puisque valable à propos de tout matériau orthotrope.

A titre d'exemple, un certain nombre d'abaques relatifs au flambage de panneaux sandwich (nid d'abeille + revêtement composite) donnés par [5] proviennent d'études réalisées par le U.S. FOREST PRODUCT LABORATORY dans la perspective de revêtements contreplaqués.

Il n'est pas question d'évoquer ici l'ensemble de la bibliographie traitant d'élasticité anisotrope. On rappellera seulement que l'ouvrage de base dans ce domaine est certainement celui de LEKHNITSKII [4] . Par ailleurs dans la bibliographie réalisée dans le cadre de ce rapport, on mentionnera, outre les références générales [5] [6] [8] [10] [11] , les articles suivants :
[B19] [B23] [B30] [C10] [D2] [F3] [F4] [H12] [J5] [L9] [M32] [M39] [N5] [S27] [S37] [T11].

On distinguera deux d'entre eux :
[N5] qui apporte une contribution intéressante à la théorie de l'élasticité orthotrope, en particulier avec le développement des équations de BELTRAMI en coordonnées cylindriques.
[L9] qui présente une analyse générale des poutres orthotropes en élasticité plane.

A l'heure actuelle, en dehors des équipes travaillant en général sur le calcul des structures ou la mécanique des composites, les foyers de compétence en France du point de vue du bois se situent essentiellement à l'E.N.S.E.M. de NANCY, à l'Universtié d'ORLEANS et, bien sûr, dans les deux Centres Techniques (C.T.F.T., C.T.B.), les liens entre ces organismes se faisant d'ailleurs de plus en plus précis.

Pour conclure à propos de l'élasticité du bois, on notera que l'étude du comportement élastique non-linéaire du bois, pourtant net dans certaines situations, n'a pas été l'objet d'étude de base récente, en dehors du classique comportement en traction-compression dans le sens longitudinal.

3 - LE COMPORTEMENT INELASTIQUE (I)

Nous traitons dans ce paragraphe des travaux portant sur les aspects "statiques" du comportement inélastique, depuis la limite élastique jusqu'au phénomène de rupture. Les aspects "dynamiques" font l'objet du § 4.

Du fait des besoins les plus immédiats de l'utilisateur, la caractérisation de la "résistance" d'un matériau est l'aspect du comportement qui fait généralement l'objet du plus grand nombre d'essais. Ceci est particulièrement vrai pour le bois, en raison notamment de certaines facilités dans l'expérimentation : matériau abondant et bon marché, charges de rupture relativement faibles. Ainsi la plus grande partie du chapitre 7 : "Mechanics and Rheology of wood" (pp 292 à 419) de la référence [6] est elle consacrée aux propriétés dites de "résistance à la rupture" (trengh) :

§ 7.2 Tensile strength
§ 7.3 Maximum crushing strength
§ 7.4 Bending strength
§ 7.6 Shear strength and torsional properties

Il en est de même de la bibliographie postérieure à 1965, où l'on constatera que la motié environ des références traitent de résistance, y compris sous des aspects qui relèvent de nos § 4 et 5. On ne doit cependant pas en déduire que le comportement inélastique du bois et ses propriétés de résistance à la rupture constituent la partie la mieux connue du comportement mécanique. En effet, cette ques-

tion est très complexe, multiforme et la principale critique que l'on peut faire à la majorité des références évoquées est de se cantonner trop souvent dans l'empirisme. En particulier les notions de résistance "à la flexion", "à la torsion" n'ont guère de portée pratique générale car elles ne constituent pas des caractéristiques intrinséques du matériau, directement utilisables, ce dont a justement besoin l'ingénieur pour tout dimensionnement.

Dans ces conditions, il n'est pas question de présenter l'inventaire des références en question. Nous ne détaillerons ici que deux approches, à la fois plus fondamentales et de grande portée pratique :

- les critères de contrainte limite
- la mécanique de la rupture.

La nécessité de disposer d'un critère général et local de comportement limite (de type "élasto-plastique") pour le bois est apparue bien avant guerre avec des travaux étudiant l'influence de l'orientation des directions naturelles (en particulier le sens L) sur la résistance en traction ou en compression. D'autres auteurs étudient de même la résistance au cisaillement dans les trois couples de directions naturelles au moyen d'essais de torsion.
On consultera [1][6] pour une bibliographie des sources anciennes et un état de la question à ce moment. La référence [G19] donne aussi ces renseignements, avec un point de vue plus moderne, et introduit la notion de "surface de résistance" dans le cas d'un état de contrainte arbitraire. Ce point de vue est également adopté dans [K23] en bidimensionnel.
Cependant une approche générale du problème n'a été faite que très récemment (1980) par M.T. GAUTHERIN à l'E.N.S.E.T. [G1] (voir aussi [C4] [L10]).
Après une revue de divers critères de contrainte limite pour des solides anisotropes, l'auteur arrête son choix sur les plus usuel, celui de TSAI, abondamment appliqué depuis une dizaine d'années aux métériaux composites. On rappelle [T20] que sous la forme générale (matériau anisotrope quelconque) ce critère de TSAI utilise une fonction seuil : $\mathcal{F}$ qui, dans une base orthonormée quelconque s'écrit :

$$\mathcal{F}(\sigma) = H_\alpha \sigma_\alpha + F_{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta - 1 \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, 6)$$

Le matériau est considéré comme élastique tant que l'état de contrainte local est tel que :

$$\mathcal{F}(\sigma) < 0$$

La limite élastique étant atteinte lorsque :

$$\mathcal{F}(\sigma) = 0$$

Les 27 (= 6 + 21) constantes indépendantes (H_α , $F_{\alpha\beta}$) caractérisent le matériau.
On démontre facilement que l'orthotropie entraîne que, dans la base naturelle, il n'y a que 12 constantes non nulles indépendantes et $\mathcal{F}$ s'écrit explicitement :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\sigma) = {} & H_1 \sigma_1 + H_2 \sigma_2 + H_3 \sigma_3 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{33} \sigma_3^2 \\ & + 2 F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2 F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2 F_{31} \sigma_3 \sigma_1 \\ & + F_{44} \sigma_4^2 + F_{55} \sigma_5^2 + F_{66} \sigma_6^2\end{aligned}$$

Une hypothèse supplémentaire fréquemment admise d'indépendance de la limite élastique relativement à un état de contrainte hydrostatique permet d'ailleurs d'en réduire le nombre à 8.
[G1] décrit un protocole expérimental fondé sur un nombre suffisant d'essais simples, dont l'ensemble fournit toutes les constantes et donc la fonction $\mathcal{F}$.
Ce protocole est appliqué par l'auteur à quelques essencesusuelles et le tableau

ci-dessous reproduit, à titre d'illustration, les résultats donnés par G1 pour le pin sylvestre.

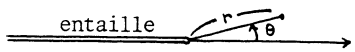
(H_α en $(daN/mm^2)^{-1}$; $F_{\alpha\beta}$ en $(daN/mm^2)^{-2}$)

$H_1 = 0,2$	$H_2 = 0,7$	$H_3 = 0,06$
$F_{11} = 4$	$F_{22} = 3$	$F_{33} = 0,023$
$F_{23} = -0,3$	$F_{31} = -0,8$	$F_{12} = 3$
$F_{44} = 1$	$F_{55} = 1,2$	$F_{66} = 10$

Comme l'indique l'auteur, ce travail est une première approche, mais qui a le mérite essentiel d'identifier un critère, déjà utilisé avec succès pour d'autres matériaux anisotropes, qui représente assez correctement le comportement limite du matériau bois.
Il y a là une voie d'études très importante pour les applications et il est dommage que le laboratoire en question ait décidé d'abandonner ses recherches sur le bois. Elles doivent cependant être reprises très prochainement à Orléans, au Laboratoire de Mécanique et d'Energétique de l'E.S.E.M.

Le développement de la Mécanique de la rupture est relativement récent. Il s'est fait tout d'abord à propos de matériaux à peu près isotropes tels que les métaux, mais les composites ont été dès le début des années soixante-dix l'objet d'étude de cette branche aujourd'hui importante de la "Rhéologie des matériaux". On rappelle qu'elle traite des conditions de propagation brutale de fissures dans une pièce ou structure chargée. Elle est fondée sur l'analyse du champ de contraintes au voisinage du fond d'une entaille, lequel admet -dans le cas élastique- la forme universelle :

$$\sigma_{ij} = K f_{ij}(\theta)\, r^{-\frac{1}{2}}$$



La constante K est appelée facteur d'intensité de contrainte et dépend des conditions aux limites du problème. On peut l'écrire :

$$K = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}\, .\, g$$

où σ_∞ est, dans des cas standards, une contrainte de chargement loin de la fissure, a : la longueur caractéristique de la fissure et g une fonction dépendant de la forme de la pièce.
La mécanique de la rupture montre que la grandeur qui caractérise un matériau du point de vue de la propagation brutale d'une fissure est une valeur "critique" de K, notée K_C , et appelée facteur d'intensité de contrainte critique -ou encore ténacité- du matériau.
Aux trois classes canoniques de chargement habituellement retenues correspondent alors trois valeurs critiques K_{IC} , K_{IIC} , K_{IIIC} , la première étant la plus utilisée. Leur connaissance permet par exemple, le chargement étant connu, de calculer la dimension maximale tolérable pour de petits défauts.

Il se trouve que plusieurs auteurs étrangers se sont intéressés très tôt aux applications au matériau bois. Dès 1961, on mentionnera ATACK et-al [A8] . En 1971 WALSH [W2] mesure le facteur K_{IC} pour une entaille orientée dans le sens du fil, à propos de quatre essences différentes. A peu près à la même époque TOMIN [T13] [T14] contribue à l'analyse théorique des 3 modes d'ouverture des lèvres

pour divers types d'entailles et donne des résultats numériques représentatifs de plusieurs essences usuelles.
On citera encore des références étrangères telles que [K7] [O7] [P7] [S9] [S10]. Ce n'est que très récemment, et grâce à l'appui de l'ancienne DGRST, que des équipes françaises se sont intéressées à la question.
Il s'agit d'abord du Laboratoire de Fiabilité Mécanique de G. PLUVINAGE (Université de METZ) dont les travaux sur le bois remonte à 1977. A côté de recherches de base sur l'analyse et la mesure de facteurs d'intensité de contrainte critique et de taux de restitution d'énergie [D9] [T18] (par exemple), cette équipe a travaillé également sur l'influence des noeuds ([D9] [O2]) ou la tenacité des collages [D10] . Ces travaux se poursuivent activement, dans l'environnement favorable qu'est la Lorraine pour les sciences du bois.
Presque simultanément, un autre laboratoire français s'est intéressé à ce sujet à l'Université de BORDEAUX I [M33] .

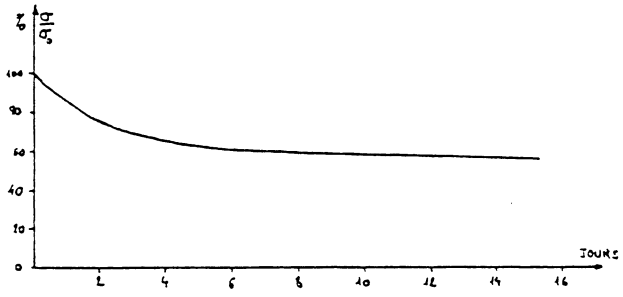
On voit que le domaine d'étude évoqué dans le paragraphe est actuellement bien exploré par plusieurs laboratoires français, ceux de BORDEAUX, ORLEANS et METZ étant d'ailleurs par un même contrat D.G.R.S.T.

4 - LE COMPORTEMENT INELASTIQUE (II)

Nous rassemblons ici les aspects inélastiques du comportement dans lesquels le paramètre temps est une variable fondamentale. Il s'agit essentiellement :

- de l'infuence de vitesse de chargement et du temps d'application de la charge sur la rupture
- de l'étude des aspects viscoélastiques (fluage, relaxation) du comportement
- du phénomène de fatigue.

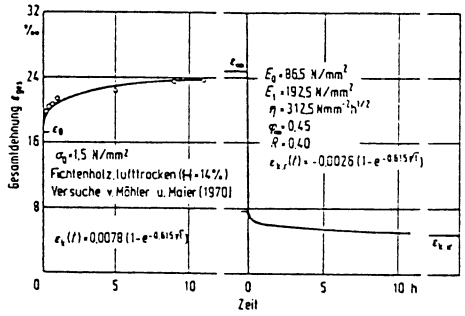
On trouvera dans [6] (cf. p 334) l'identification du phénomène de "rupture par fluage" du bois, c'est-à-dire, par application d'une charge constante pendant une longue durée. Le diagramme ci-dessous, reproduit d'après [6] , le montre dans le cas du pin en traction. On constate une valeur de la contraite de rupture de l'ordre de 60 % de la valeur asymptotique mesurée lors d'un essai de courte durée.



Depuis la synthèse réalisée par [6] , cette rupture par fluage du bois a fait l'objet d'un nombre non négligeable de travaux, probablement en raison de son importance en génie civil. Dans notre bilbiographie, les articles suivants en traitent : [G12] [K10] [K35] [M6] [M7] [M16] [M18] [P9] [S38] [W4] .
Le travail à la fois le plus récent (1977) et le plus important est celui de GERHARDS [G12] . Cet auteur y étudie à la fois le phénomène de rupture sous charge de longue durée et la "rupture dynamique" à chargement rapide, tant pour le bois massif que pour des structures à base de bois (panneaux de particules, contre plaqués, lamellés-collés, ...). Par ailleurs, différents modes de chargement sont examinés. Enfin l'article en question contient une importance bibliographique (une quarantaine de références, dont vingt d'entre elles sont postérieures à 1965) qui ajoute à la nôtre certains rapports internes à des organismes

Nord-américains.
Cette référence, qui doit servir de base à toute nouvelle recherche sur ce phénomène, est tout aussi fondamentale pour l'étude de la rupture sous chargement rapide. Il convient de mentionner également les références : [K29] [J1] [M19] [S34] [Y1] . Pour l'essentiel tous ces travaux montrent une augmentation importante de la valeur de la contrainte à la rupture pour des temps de chargement inférieurs à la seconde.
Il est clair que c'est surtout du point de vue aéronautique que des recherches nouvelles sur cette classe de phénomènes pourraient être intéressantes.
Enfin, il convient aussi de mentionner la question voisine de la résistance au choc, qui est étudiée par les deux références [M21] [T15.] Elle sous-tend la notion particulièrement empirique de cote dynamique, dont la rationalisation serait la bienvenue.

Le bois présente un caractère viscoélastique tout à fait notable, même s'il est moins net que celui des polymères et donc de certains composites. KOLLMANN-COTE [6] ne donnent que des indications qualitatives et proposent l'utilisation de quelques "modèles rhéologiques" classiques pour modéliser le comportement.
A partir des années soixante-dix, divers auteurs se sont attachés à préciser l'identification des modèles et surtout à mesurer les différents paramètres y intervenant, à partir d'expérimentations de référence. On mentionnera ainsi [B7] [B8] [B9] [D13] [M22] [N3] [P14] [R5] [R8] [R10] [S19] [S25] [Y2] .
A titre d'illustration, la figure ci-dessous reproduit un résultat de [M22] montrant une reconstitution du fluage.



Parmi ces références, l'article de NIEMZ [N3] est à distinguer parce qu'assez récent (1970) et du fait qu'il s'agit essentiellement d'une synthèse bibliographique des sources de langue allemande sur la question.
Tous les travaux mentionnés ci-dessus sont relatifs à des essais monodimensionnels. Plus ambitieux sont ceux de SCHNIEWIND et BARRETT [S11] et plus récemment, de LYON et SCHNIEWIND [L13] .
Ces auteurs critiquent, en effet, l'identification de la loi de comportement bidimensionnelle, laquelle s'écrit en général :

$$\varepsilon_{ij} = \int_{-\infty}^{t} S_{ijkl}(t-\tau)\ \frac{d\sigma_{kl}}{d\tau}\, d\tau$$

où les fonctions : $t \longmapsto S_{ijkl}(t)$ sont les composantes du tenseur de complaisance viscoélastique. Ces fonctions satisfont aux mêmes relations de symétrie indicielle que les composantes du tenseur de complaisance élastique, d'où l'introduction d'une matrice de dimension 6, symétrique :

$$[\, S_{\alpha\beta}(t) \,]$$

de complaisance viscoélastique, soit 21 fonctions indépendantes. Dans le cas orthotrope, cette matrice exprimée dans la base naturelle (locale) est donc (§ 2) de la forme :

$$[S_{\beta\alpha}(t)] = \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) & S_{13}(t) & 0 & 0 & 0 \\ S_{21}(t) & S_{23}(t) & S_{23}(t) & 0 & 0 & 0 \\ S_{31}(t) & S_{32}(t) & S_{33}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}(t) \end{bmatrix}$$

Ces deux articles en question décrivent les expérimentations permettant d'atteindre ces neuf fonctions et proposent des modèles viscoélastiques simples permettant de reconstituer ces fonctions avec une bonne approximation.
Dans [S11] il est envisagé, pour n'importe quelle $S_{\beta\alpha}$ une fonction J de la forme :

$$J(t) = J_o + m\, t^r$$

Dans [L13] on propose le modèle très classique :

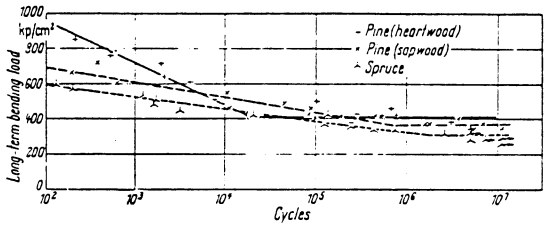
$$J(t) = J_1 - J_2^{\,-t/\lambda}$$

Les 3 paramètres (J_o , m, n) ou (J_1 , J_2 , λ) sont déterminés pour rendre compte aux mieux des mesures.
Nous reproduisons ci-après des valeurs extraites de [S11] relatives au premier modèle dans le plan (1,2) .

	$J_o \times 10^{-6}$ (PSI^{-1})	$m \times 10^{-6}$ (PSI^{-1})	n
S_{11}	0,3602	0,0147	0,0608
$S_{21} = S_{12}$	- 0,1389	0,0003	0,4420
S_{22}	9,1481	0,5527	0,2075
S_{66}	8,5260	0,5943	0,1415

On voit donc que l'étude de la viscoélasticité du bois s'est considérablement développée depuis une quinzaine d'années, principalement aux Etats-Unis et en Allemagne, avec des travaux de bonne qualité. Peu de choses ont été faites en France dans ce domaine, mais le Centre Technique du Bois devrait engager prochainement, un programme de recherche sur plusieurs années, en collaboration étroite avec l'ENSEM de Nancy (L.E.M.T.A.) qui s'est déjà intéressé à ces questions, et probablement en relation avec le C.T.F.T. et l'E.S.E.M. d'Orléans (L.M.E.).

Comme l'indiquent les références générales [1] [6] , le phénomène de fatigue est probablement l'aspect du comportement du bois qui a été le moins étudié. Des sources anciennes, citées dans [6] , fournissent des courbes de WÖHLER typiques, obtenues en flexion alternée. L'une d'entre elles est reproduite ci-après.



Le phénomène n'a pratiquement pas été l'objet d'étude récente. La non-linéarité du comportement en compression et la mauvaise identification de la limite élastique du bois (§ 3) rendent tout à fait illusoire l'utilisation des résultats disponibles. Indiquons qu'une étude limitée doit débuter prochainement à l'E.S.E.M. à ORLEANS, mais qu'un programme de recherche plus systématique sur ce sujet difficile est à recommander.

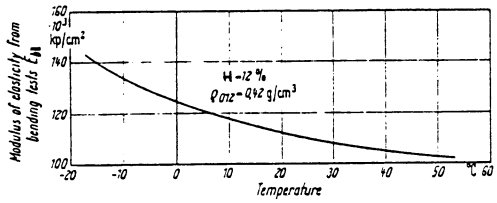
5 - TAUX D'HUMIDITE ET TEMPERATURE

La température : T (absolue) et surtout le taux d'humidité H (en %) sont les deux variables internes importantes quant à l'évolution des divers aspects du comportement mécanique envisagés dans les paragraphes précédents.

Les propriétés thermiques du bois font l'objet dans [6] d'un exposé de base utile (§ 6.5 pp 240 à 257), tant du point de vue de l'identification du comportement : chaleur massique, conductivité thermique, coefficient de dilatation que de celui de la détermination du champ de température, régi pratiquement par une

équation de la chaleur "non isotrope". Comme on l'a dit au § 2 à propos d'élasticité anisotrope, cette dernière question n'est pas propre au bois et les études récentes sur les propriétés thermiques des matériaux composites sont à considérer.

Par ailleurs, le point est fait dans [6] (à cette date) sur l'influence de T sur les différentes propriétés mécaniques du bois, en se limitant généralement à l'intervalle "atmosphérique" usuel compris entre -20°C et +50°C. La figure ci-dessous reproduit, à titre d'exemple la variation de E_L en fonction de T pour le pin.



D'une façon générale, on sait que l'on constate pour le bois, comme pour tout solide, une diminution de la rigidité et de la résistance lorsque la température augmente.
Quelques références plus récentes telles que [C9] [F6] [G6] [G20] [K20] [S3] [S7] [P1] complètent [6] sur tel ou tel aspect. On mentionnera spécialement [C9] qui étudie l'influence des très basses températures, et [S7] qui envisage celle de "traitements" thermiques à 100 ou 200°C. Par ailleurs [G31] réalise une synthèse récente sur ce sujet.

L'ensemble des références examinées ne donne pas de vision complète de l'influence de la température sur les divers aspects du comportement. On notera cependant que cette influence reste limitée lorsque l'on évite les conditions climatiques extrêmes.

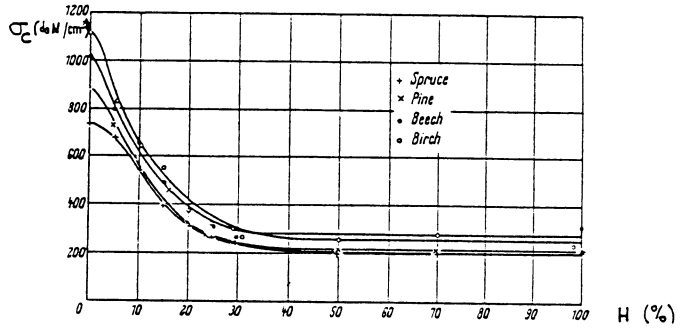
Dans le cas du bois, la variable interne la plus importante est certainement le taux d'humidité : H (moisture content) :

$$H = \frac{m(H) - m(o)}{m(o)} \qquad \text{(en \%)}$$

où m(H) = masse d'une éprouvette au taux d'humidité actuel H
m(o) = masse de l'éprouvette "anhydre".
qui mesure la masse d'eau contenue dans le bois.
On rappelle que au-dessous d'une certaine valeur H_S (voisine de 30 %) de H, appelée point de saturation et caractéristique de l'essence étudiée, l'eau en question est en fait retenue par les membranes cellulosiques des parois cellulaires, en raison de cette propriété de la cellulose d'accrocher sur ses chaines non saturées un certain nombre de molécules d'eau. Ainsi : le matériau change de constitution lorsque H varie et l'on conçoit dans ces conditions que, dans ce domaine, les propriétés du bois soient influencées par la valeur de H. Au contraire, pour $H > H_S$, les membranes sont saturées et le surplus d'eau est libre à l'intérieur des cellules.

Les problèmes de la diffusion de l'eau (et plus généralement des liquides) dans le bois et d'autre part de l'influence de H sur les propriétés mécaniques ont fait l'objet de plus d'études qu'à propos de la température.
L'essentiel sur le premier aspect est donné par [6] et surtout un peu plus récemment (1971) par [9] . Les références plus récentes sont fort rares et là encore il y a lieu de comparer cette situation avec celle rencontrée dans le domaine des composites, en particulier au plan de la modélisation du phénomène de diffusion. On citera cependant l'intéressant travail [B5] à propos du séchage rapide.

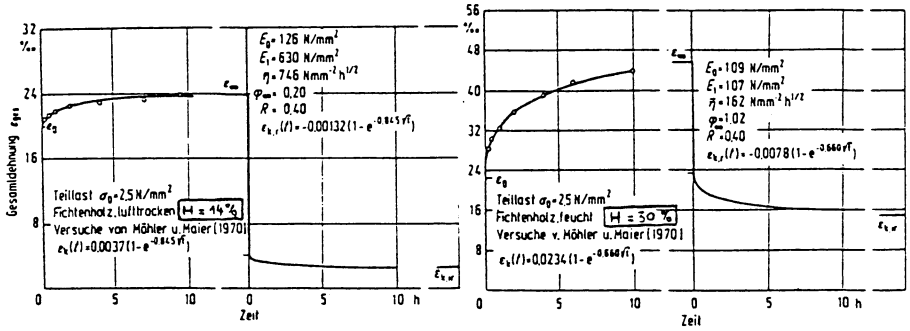
Toute la bibliographie (voir d'abord [1] [6] ainsi que la synthèse bibliographique récente [G31]) montre comment H influence, parfois fortement, le comportement mécanique du matériau au dessous du point de saturation. Le phénomène est bien connu dans des cas simples, par exemple, à propos du module d'YOUNG longitudinal E_L et de la résistance à la compression σ_c (sens longitudinal) qui diminuent lorsque H augmente jusqu'au point de saturation (figure ci-dessous d'après [6]).



L'étude de la variation du comportement mécanique dans les divers aspects évoqués aux § 2, 3, 4 est loin d'être complète.
Ainsi la seule étude qui rend compte des variations des neuf constantes élastiques en fonction de H est celle de CARRINGTON, laquelle remeonte à ... 1922. L'essence étudiée était le Spruce (choisi en raison de son importance dans la construction aéronautique de l'époque) et ses résultats sont reproduits dans [6] . Sous réserve de vérification, ils montrent que E_L n'est pas la constante la plus influencée par le taux d'humidité. Ainsi, par exemple, le module E_R diminuerait de près de 40 % lorsque H passe simplement de 10 à 20 %. Par ailleurs, on constate que certains coefficients de POISSON augmenteraient avec H. Les travaux plus récents [C12] [H13] [K1] [L6] [M3] n'apportent que des compléments à [6] à propos de tel ou tel module d'YOUNG.
Il convient cependant de signaler l'étude réalisée par l'E.S.E.M. (Université d'ORLEANS) portant sur toutes les constantes élastiques au moyen de la méthode ultrasonore et qui fait l'objet d'une autre communication de ce colloque.

Le problème de la variation des propriétés de "résistance" du bois en fonction de H semble avoir été l'objet de peu de travaux importants depuis l'époque de [6] : [K34] [M3] [M41] [P3] [P4] . Ainsi de nouvelles recherches d'identification de critères limite dans l'esprit de [G1] devraient inclure ce point de vue.

L'influence de H sur le comportement visco-élastique, aspect pratiquement passé sous silence dans [6] , a fait l'objet depuis lors de quelques études intéressantes : [B9] [H5] [M22] par exemple, en monodimensionnel dans le sens longitudinal. La figure ci-dessous, reproduite d'après [M22] , montre un phénomène de fluage de plus en plus marqué lorsque H augmente.



Enfin, un aspect spécifique et important du comportement du bois qui met en jeu le taux d'humidité est l'effet mécano-sorptif, qui exprime un phénomène de couplage [G25] [A7] entre l'existence d'une contrainte et une variation (cyclique par exemple) du taux d'humidité, ce couplage influant sur l'évolution de la déformation. Ce phénomène, qui n'a été nettement identifié qu'au début des années soixante, a fait l'objet d'un nombre croissant de travaux depuis lors, dont la référence [G25] , réalisée à l'occasion du séminaire OTAN tenu aux Arcs en 1975 [12] , donne une excellente synthèse.
Parallèlement, une modélisation théorique très intéressante de ce phénomène est proposée par [R4] . Remarquant une similitude de comportement des variables T et H, l'auteur propose une loi de comportement inspirée de la thermoviscoélasticité, laquelle après quelques transformations est écrite (cas isotherme) en chaque point :

$$e_{ij} = \int_0^t S_{ijkl}(t-\tau)\,\frac{d\sigma_{kl}}{d\tau}\,d\tau + \int_0^t \left[K_{ijkl}(t-\tau)\sigma_{kl}(\tau) + L_{ijkl}(t-\tau)\left(\sigma_{kl}(t)-\sigma_{kl}(\tau)\right)\left(H(t)-H(\tau)\right)\right]\frac{dH}{d\tau}\,d\tau$$

Le premier terme au second membre décrit un comportement viscoélastique linéaire classique (§ 4). Les S_{kjkl} peuvent par ailleurs dépendre de H (et de T), ce qui permet de rendre compte de son influence sur le fluage telle qu'elle est décrite sur la figure précédente. C'est le second terme qui introduit cet effet mécano-sorptif, puisqu'un processus dans lequel :

$$\sigma_{kl}(\tau) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dH}{d\tau} \neq 0$$

exhibera une déformation supplémentaire, ce qu'indiquent les expériences de base ([A7] [R4] par exemple).

D'une façon générale, les variations de H semblent conditionner nombre de phénomènes rhéologiques de grande importante pratique dans le bois, y compris peut-être celui des contraintes de croissance.
Des études de base sont en cours en FRANCE, en particulier au C.T.F.T. à Nogent-sur-Marne au L.E.M.T.A. à Nancy, et récemment au L.M.S. de l'Ecole Polytechnique.

6 - SUR LES METHODES EXPERIMENTALES

L'ensemble des techniques d'essai des matériaux sont susceptibles d'être ap-

pliquées au bois et il n'est pas question de les passer systématiquement en revue dans ce paragraphe.
Par exemple, les essais statiques classiques, sur de petites éprouvettes ou sur des poutres longues (flexion), ou, plus généralement, à propos d'essais de structures sont évoqués dans [6] et dans tel ou tel article à caractère expérimental mentionné aux § précédents. Il en est de même de l'utilisation de certains capteurs comme les jauges de déformations.
Par contre, certaines méthodes plus récentes ou plus délicates d'emploi n'ont parfois été appliquées au bois que plus tardivement et ce paragraphe est l'occasion de faire le point sur quelques unes d'entre elles.

Un premier exemple est fourni par l'analyse expérimentale des contraintes par photoélasticité. La référence [6] cite son application à l'étude de l'origine des concentrations de contrainte sur éprouvette de traction dans la région des congés de raccordement au voisinage des extrémités, montrant l'importance de l'hétérogénéité des cernes. Cependant la bibliographie ne contient par ailleurs que fort peu de travaux utilisant cette technique. On ne peut mentionner que [H8] [T1] , même si quelques laboratoires l'utilisent à l'occasion.

Une autre méthode d'analyse des contraintes, celle du MOIRE, semble avoir été plus utilisée dans le domaine de la Mécanique du bois. On notera les trois références récentes et intéressantes : [C8] [H10] [S1] . Le C.T.F.T. [S1] la met en oeuvre actuellement couramment.

Un cas spécialement intéressant compte tenu des travaux récents ou en cours est la mesure des constantes élastiques du bois dans le cadre du comportement orthotrope évoqué au § 2. La référence [6] consacre son § 7.1.5 à leur présentation en distinguant essais statiques et essais dynamiques. Ces deux types de méthodes ont depuis fait l'objet, quant à leur application au matériau bois, de plusieurs travaux importants.

Dans le domaine des méthodes statiques, il convient de mentionner les deux références [G28] [W16] qui privilégient des essais sur de petites plaques sollicitées en flexion et en torsion, l'analyse théoriques de la solution, éventuellement par une méthode par éléments finis, fournissant les neuf constantes.
Plus récemment une équipe française du L.E.M.T.A. (E.N.S.E.M. de Nancy) s'est attachée depuis 1978 à mettre au point une méthode expérimentale nouvelle [G26] [G30] [S15] . Celle-ci est fondée sur l'utilisation d'un échantillon cubique unique, taillé selon les directions naturelles. Il est soumis à deux types d'essais : compression uniaxiale et cisaillements. Pour cela, les auteurs ont conçu et réalisé un capteur de déformation multidirectionnel amovible [S15] qui permet la mesure simultanée des composantes du tenseur des déformations dans le plan de la face sur laquelle il est implanté. Les difficultés initiales de mise au point semblent avoir été surmontées, et une petite série de capteurs est actuelllement en cours de réalisation pour quelques laboratoires clients. Il est clair, par ailleurs, qu'il s'agit là d'un moyen de mesure très général de l'état de déformation et peut être utilisé par exemple pour l'analyse du comportement viscoélastique du bois, travail en cours ou L.E.M.T.A.

Les méthodes dynamiques les plus classiques sont fondées sur la mesure de fréquences propres de petites éprouvettes. Elle avaient déjà été largement appliquées au bois à l'époque de [6] . Des travaux plus récents leurs sont consacrés, par exemple [B6] , qui mesure ainsi en torsion dynamique les trois modules de cisaillement. Ce type d'essai est d'ailleurs utilisé par [B33] [B34] pour caractériser partiellement l'élasticité du bois à partir de carottes de sondage prélevées in vivo dans l'arbre.
Les méthodes ultrasonores font partie des méthodes dynamiques, mais leur principe et leur mise en oeuvre sont tout à fait particuliers. Elles sont d'ailleurs d'un emploi courant plus récent que les précédentes. On rappelle que leur principe général consiste à exciter à l'aide de sondes piezo-électriques la surface d'une éprouvette du matériau à analyser. Les ondes élastiques ainsi créées se propagent avec des polarisations et des vitesses qui dépendent de la direction de propagation et des constantes élastiques du matériau en question. La mesure du temps de parcours de l'onde et donc de la vitesse correspondante pour un ensemble bien choisi de directions de propagation permet, en principe, d'en déduire ces constan-

tes. Les avantages sont bien connus et multiples : caractère non destructif - utilisation de petites éprouvettes - souplesse, rapidité et simplicité au niveau expérimental - déformation et comportement linéaires - caractérisation viscoélastique possible ...
Ces méthodes n'ont été appliquées au bois qu'à partir de 1978 -là encore grâce à l'appui d ela D.G.R.S.T.- au C.N.R.F. de Nancy [B33] [B34] en complément à des méthodes dynamiques B.F. et systématiquement au L.M.E. de l'E.S.E.M. (ORLEANS). Ce laboratoire à étendu au bois (et aussi à des roches) [M35] [M38] [P20] une méthode goniométrique qui avait été utilisée d'abord pour les matériaux composites (voir [V3] par exemple). Elle n'utilise que des éprouvettes taillées selon les directions naturelles, un triplet permettant d'atteindre les neuf constantes caractérisant le voisinage d'un point dans l'arbre. Elle semble actuellement bien au point et une vingtaine d'essences de pays tempérés et surtout tropicaux (voir § 2) ont ainsi été étudiées.

Sur ce sujet et en conclusion de ce paragraphe, indiquons un programme de recherches actuellement en cours et mis en route par la D.G.R.S.T. associant une dizaine de laboratoires. Il y a là une coordination scientifique exemplaire dont l'objet est de comparer les diverses méthodes de mesure à partir d'un système d'échantillons prélevés rationnellement sur une même grume, aifn d'éliminer autant que possbile l'influence de la dispersion. Les résultats devraient être connus très prochainement.

7 - DE L'ULTRASTRUCTURE AU COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE

Les travaux évoqués aux § 2 à 5 considèrent de fait le bois comme un "matériau homogène en moyenne" et veulent ignorer, dans les divers aspects du comportement envisagés, son caractère essentiellement hétérogène, même à un niveau relativement macroscopique (ie = accessible à l'oeil humain). Si cette approche globale est celle qui intéresse en fin de compte l'ingénieur, il est clair que la compréhension profonde des lois de comportement moyennes envisagées se situe, comme pour tout matériau, au niveau de l'ultrasctructure.

On sait que le bois est de ce point de vue un matériau fort complexe, en raison notamment de sa nature biologique. La description précise de l'anatomie du bois a fait d'énormes progrès au cours des trente dernières années, avec en particulier l'emploi systématique du microscope électronique à balayage. On a pu ainsi explorer finement les quatre niveaux d'hétérogénéité, dont l'échelle de grandeur de chacun peut-être basée sur l'épaisseur de l'élément caractéristique du niveau considéré.
Le premier niveau, qualifié de macroscopique, est de l'ordre de l'épaisseur des cernes, soit 10^{-2} m ou moins, l'hétérogénéité de celles-ci étant due, on le sait, aux différences d'épaisseur des parois cellulaires entre le bois de printemps et le bois d'été.
Le niveau cellulaire est de l'ordre de 10^{-4} m.
La cellule elle-même se présente globalement comme un fibre courte et creuse dont la paroi est constituée de plusieurs couches (paroi primaire - paroi secondaire constituée des trois couches S1, S2, S3 ...) dont les chaines cellulosiques sont d'orientation variable de l'une à l'autre. L'échelle d'épaisseur de ce niveau est de l'ordre de 10^{-6} m (1 m).
Enfin on atteint 10^{-9} m au niveau du diamètre des chaînes cellulosiques élémentaires.
Quelques ouvrages de base donnent une description très précise de ces divers niveaux d'ultrastructure. On citera bien sûr [6] , ainsi que [9] , mais surtout le bel et récent ouvrage de HA CORE, W.A. COTE, A.C. DAY [13] à la fois didactique et spécialisé, avec de très nombreuses microphotographies obtenues au M.E.B.

Du point de vue du mécanicien, cette possibilité d'observation "ultrafine" du tissu ligneux a tout d'abord suscité un certain nombre de travaux expérimentaux sur son comportement au cours de fifférents types d'essais classiques.
Il s'agit notamment de l'étude de phénomènes de rupture [C12][K11] [K19] [07] [S35] observés au niveau intercellulaire dans la lamelle mitoyenne (ie : entre deux cellules) ou intracellulaire (fractures intrapariétales ou transpariétales).
On a pu ainsi identifier très récemment chez les résineux un phénomène de rupture

par déroulement hélicoïdal de la couche S2 (couche centrale), phénomène lié à la structure elle-même hélicoïdale des chaînes cellulosiques de cette couche. On voit que cette approche, relativement récente à propos du bois, ne diffère pas de celle de la métallurgie, si l'on veut bien voir la cellule comme le "grain" du matériau.
Nul doute qu'elle se développera rapidement dans un proche avenir.

En second lieu et plus généralement se pose à propos du bois la question de l'homogénéisation, c'est-à-dire la possibilité de passer déductivement d'une description finement hétérogène du matériau à l'obtention d'une loi de comportement homogène. Le développement extrèmement rapide des méthodes d'homogénéisation est bien connu, et ce que l'on a dit de la structure du tissu ligneux montre que celle-ci en constitue à l'évidence un magnifique champ d'application. Or, force est de constater qu'aucun travail récent de la littérature générale ne s'y rapporte et on doit voir là une illustration de la marginalisation du bois par rapport à l'ensemble des matériaux. En réalité, seule la littérature spécialisée dans le domaine du bois exhibe quelques références qui, sans utiliser les approches récentes, relèvent de la même problématique. On citera principalement trois chapitres de la référence [10], soit :

Ch. 3 - R.E. MARK — Mechanical Behavior of the Molecular Components of Fiber (pp. 49 à 82).
Ch. 4 - A.P. SCHNIEWIND — Elastic Behavior of the Wood Fiber (PP 13 à 95).
Ch. 5 - R.W. PERKINS Jr — On the Mechnaical Response of Materials with Cellular and Finely Layered Internal Structure (PP. 97 à 156).

Cette dernière référence est sans doute la plus intéressante. Elle reprend en effet les approches déjà anciennes de VOIGT, COSSERAT, MINDLIN et en propose des développements importants.
On distinguera aussi le travail de P.P. GILLIS [G15] qui modélise simplement le tissu des résineux en restant au niveau cellulaire. L'auteur retrouve ainsi la plupart des inégalités universellement constatées entre les constantes élastiques (§ 2).

Les articles récents de I.D. CAVE [C1] [C2] [C3] sont également importants, l'auteur envisageant notamment l'analyse microstructurale de l'influence de l'humidité sur le comportement élastique. Enfin, il convient de noter que le travail collectif [12] fait porter l'essentiel de ses réflexions sur l'influence de la microstructure sur le comportement, son objet étant d'ailleurs de dégager les voies de recherche qui semblent les plus prometteuses.

Nous conclurons ce paragraphe sur cette question de l'homogénéisation en insistant sur les difficultés particulières que présente dans ce domaine le matériau bois par rapport aux composites par exemple . Tout d'abord sa microstructure est beaucoup plus complexe et des modèles périodiques et statistiques devront sans doute être utilisés conjointement. De plus et surtout, la loi de comportement des "constituants" sera difficilement accessible dans le cas du bois, en tout cas en termes quatitatifs. Il y a là le fait que le matériau est "biologiquement donné" de façon globale et non pas comme un composite "construit par l'homme" au moyen de plusieurs phases dont les caractéristiques sont souvent bien connues.
Ces difficultés ne pourront être surmontées que par des équipes très pluridisciplinaires asscciant étroitement des mécaniciens spécialistes de l'homogénéisation, des rhéologues physico-chimistes et des biologistes.

8 - CONCLUSION

Le jugement général que l'on portera sur l'état de la littérature scientifique mondiale relative à la Mécanique et la Rhéologie du bois sera nuancé et articulé en deux constatations :

1 - Existence de travaux significatifs et de qualité dans tous les aspects du comportement du bois ;
2 - Insuffisance quantitative de la connaissance fordamentale, très notable relativement à la situation de la plupart des autres matériaux.

Cette insuffisance a elle-même une double cause.
En premier lieu, le bois a été considéré au moins jusqu'à une époque récente, comme un matériau marginal et "vulgaire", en raison notamment de son abondance et de

son ancienneté d'emploi. Cette situation fut poussée à la caricature en FRANCE, et c'est bien la crise de 1973 qui a conduit l'ancienne D.G.R.S.T. a promouvoir de nouvelles recherches de base sur ce matériau.
En second lieu, le bois est un matériau difficile, essentiellement en raison de sa nature biologique. Il lui doit des caractéristiques très dispersées et difficiles à maîtriser. Elle explique aussi que la "fabrication bois" soit restée au stade artisanal, redoutable handicap lorsque l'heure est à la robotisation.

Les perspectives de remontée de l'emploi du bois dans la construction sont largement évoquées dans plusieurs textes récents sur lesquels nous ne reviendrons pas ici. Nous mentionnerons seulement les conférences générales faites récemment par MM. J.P. CAUSSE, P.R. GENDRON, J. NANTY, W.A. COTE au Colloque Sciences et industries du Bois tenu à GRENOBLE du 20 au 22 septembre 1982 (Actes du Colloque). Les points de la Mission "Matériaux", remis à M. le Ministre de la Recherche et de la Technologie au début de 1983. Son § I.6., relatif au bois, est reproduit en annexe du présent rapport.

Pour être significative et durable, une telle remontée devra s'appuyer sur un solide réseau de laboratoires de recherche et d'organismes techniques. On ne peut être qu'optimiste aujourd'hui sur ce point, les principales équipes travaillant aujourd'hui sur la rhéologie du bois devant même bientôt constituer un groupement Scientifique du C.N.R.S.
Nous espérons que le travail présenté ici contribuera à susciter de nouvelles vocations en facilitant aux chercheurs l'entrée dans un domaine fort singulier à bien des égards.

ANNEXE

"Extrait du rapport de la Mission MATERIAUX (Janvier 1983) présidée par M. J.P. CAUSSE, Directeur Général Adjoint du Groupe Saint-Gobain".

BOIS ET DERIVES

Le bois est un des plus anciens matériaux utilisés par l'homme. Il mérite pourtant un regain d'intérêt : il est par sa nature même un matériau inépuisable puisque renouvelable, son contenu énergétique est faible, il pourrait être d'origine nationale. On connait le paradoxe de la situation française ; notre pays, qui a plus de forêts que ses voisins européens, est pourtant un énorme importateur de bois et de papier, ce qui fait de la filière bois le second poste (après le pétrole) dans le déficit de notre balance des échanges. De nombreuses études ont été consacrées à ce phénomène. La plus récente, le rapport DUROURE, fait à propos du matériau-bois des réflexions et des recommandations qui rejoignent les nôtres.

La situation de la recherche et du développement, quoique variable d'un bout à l'autre de la filière, est globalement peu satisfaisante. La DGRST a fait depuis quelques années des efforts louables avec malheureusement des moyens sans commune mesure avec l'ampleur du problème. Plus que pour les autres matériaux traditionnels, le manque de recherche fondamentale se fait sentir. La recherche technique, elle-même, souffre de l'éclatement et des difficultés économiques de la plupart des segments de l'industrie du bois. Le Centre Technique du Bois joue un rôle utile mais ses moyens ne sont pas à la hauteur de sa tâche ; qui plus est, comme il est, pour l'essentiel, financé par une taxe parafiscale assise sur les ventes du bois national, ses ressources sont variables et imprévisibles, ce qui exclut toute politique à long terme. Les appels d'offre répétés lancés par la DGRST ont été des échecs partiels : il n'y a guère de répondants dans l'industrie du bois proprement dite. Le Comité a alors entrepris d'intervenir plus directement en prenant en main la constitution d'équipes associant publics et privés pour faire pénétrer progressivement les méthodes de la R et D dans cette industrie. Cette action récente a été bien accueillie par les différents partenaires et mérite d'être poursuivie avec des moyens accrus, faute de quoi on retombera au niveau de sous-développement technique précédent.

La situation est moins mauvaise en ce qui concerne le papier et le carton où des groupes industriels puissants existent et consacrent des sommes non négligeables à la recherche et au développement. Le Centre Technique des Papiers et Celluloses, appuyé sur cette industrie, garde une bonne image par son travail de qualité et a su répercuter sur le monde universitaire ses problèmes de recherche amont. Mais globalement l'ensemble de cet édifice est constamment menacé apr la situation catastrophique de ces industries.

Toute politique de recherche sur le bois doit commencer avec la forêt. On ne voit pas pourquoi la culture des arbres ne bénéficierait pas, au même titre que les céréales, des progrès de la biologie qui sont à l'origine des bouleversements spectacularies quel'on a pu appeler la "révolution verte" : sélection, amélioration génétique, production d'hybrides, techniques de plantation, de culture

et de récolte, emploi d'engrais, de produits phyto-sanitaires. Toute cette approche pourrait augmenter considérablement la production en qualité aussi bien qu'en quantité, en s'appliquant en priorité, bien entendu, aux espèces les plus recherchées. Les résultats déjà acquis sur le pin maritime des Landes invitent à accélérer et à étendre cet effort d'autant plus rapidement que les résultats seront long à venir. Dans notre pays, dont la population ne croît plus, où l'écologie a renouvelé le goût pour la nature et le respect des équilibres naturels, on peut imaginer l'intérêt de forêts conçues pour être exploitées industriellement (plantées peut-être sur des plaines reboisées), qui produiraient un matériau de grande valeur (arbres bien droits, bois sans défauts, etc .) et dont les sous-produits (élagages, branches, racines, écorces, etc .) contribueraient de plus aux besoins énergétiques nationaux. Des équipes de recherche compétentes existent (INRA, CEMAGREF, AFOCEL) qui pourraient s'attaquer à un tel programme.

A plus court terme les recherches sur le bois et les produits qui en sont dérivés doivent viser l'augmentation de la valeur ajoutée de nos productions ; trop souvent nous vendons des grumes à l'étranger pour réimporter des meubles. Il faut faire progresser le sciage, le séchage, le formage, le collage ; comprendre les phénomènes physico-chimiques correspondants, concevoir et expérimenter les machines, produire les produits chimiques jusqu'ici fréquemment importés.

Le C.T.B. est au centre d'un vaste projet d'amélioration du sciage par l'introduction de techniques de robotique et d'automatique fondées sur l'emploi extensif de microprocesseurs. On espère d'ici quelques années reconnaître automatiquement les formes d'une grume, identifier ses défauts, en déduire le plan de sciage optimal et l'exécuter. De nombreux capteurs et dispositifs de mesure non destructif doivent être mis au point pour cela. Mais ces techniques peuvent se mettre progressivement en place.

L'emploi généralisé du bois ur ses marchés demande aussi beaucoup de recherches sur la conservation du bois, la lutte contre les agents destructeurs (insectes, champignons), sujets interdisciplinaires, comme d'habitude difficiles, et pourtant aux conséquences économiques considérables. Il faut pouvoir assurer une fiabilité du matériau bois au même titre que pour ses concurrents inorganiques.

L'emploi du bois dans la construction devrait être fortement encouragé. Ce qui est jugé bon ailleurs pourrait l'être aussi en France. C'est un matériau d'emploi relativement facile, il se prête bien aux techniques modernes d'isolation. Il faudrait pour cela revoir les réglementations de la construction, en général conçues pour d'autres matériaux, mais aussi revaloriser le bois français : assurer une régularité de la qualité et introduire des normes rigoureuses, promouvoir les techniques nouvelles (lamellés-collés, poutrelles), au-delà des problèmes d'image de marque soulignés par le rapport DUROURE. Des programmes d'expérimentation devraient être lancés.

Quant au papier et au carton considérés comme matériaux, leur rôle n'est pas négligeable (emballage, construction). Comme dans les autres industries lourdes un effort important est également entrepris dans l'amélioration des procédés de fabrication, en particulier pour économiser l'énergie ou la matière première (bois ayant la qualité fibreuse requise). L'amélioration de la productivité passe par une compréhension profonde des mécanismes de la transformation.

Les méthodes générales de science et technologie des matériaux trouvent peu à peu leur place dans la mise au point des produits de base de papier ou de carton, que ce soit comme support d'impression écriture, matériau "fluff" des articles d'hygiène, carton destiné à l'emballage, véritable "composite" dont les performances ne cessent de s'améliorer pour lutter contre les matériaux concurrents.

Pour terminer il faut rappeler qu'il n'est pas possible de séparer complètement la recherche sur le "matériau bois" de l'ensemble de la filière ; on sait les relations techniques et économiques très complexes qui régissent cette filière. La valorisation des déchets commesource de produits chimiques ou comme biomasse à destination énergétique peut à la fois valoriser la rentabilité de l'exploitation ou, au contraire, entrer en compétition pour une matière rare. Les études économiques (et même sociologiques) fines déjà entreprises sont, elles aussi, indispensables.

BIBLIOGRAPHIE

REFERENCES GENERALES

(par ordre chronologique)

1 Design of wood aircraft structures - ANC 18 Bulletin
Second edition - Juin 1951

2 LE BOIS par J. CAMPREDON
Collection "Que sais-je" - P.U.F. - 1949 (5e édition 1975)

3 LE BOIS - Matériau de la construction moderne par J. CAMPREDON
Dunod - Paris - 1953

4 Theory of elasticity of an anisotropic elastic body par LEKHNISTSKII
Brand statter edit - San Francisco - 1963

5 Structural sandwich composites - MIL - HDBK - 23 A
Departement of defense - Washington D.C. - 1968

6 Principles of wood science and technology - I. Solid Wood par F.P. KOLLMANN - W.A. COTE
Springer Verlag - New York - 1968

7 Recent progress in the study of the rheology of wood par A.P. SCHNIEWIND
Wood science and technology - Vol. 2 (1968) pp. 188-206

8 Plastics for aerospace vehicle - Reinforced plastics - MIL - HDBK - 17 A
Department of defense - Washington D.C. - 1971

9 Flow in wood par J.F. SIAU
Syracuse university press - 1971

10 Theory and design of wood and fiber composite materials B.A. JAYNE Editor
Syracuse university press - 1972

11 Principles of wood science and technology - II - Wood Based Materials par F.P. KOLLMANN - E.W. KUENZI - A.J. STAMM
Springer verlag - New York - 1975

12 Properties of wood in relation to its structure - Report of a NATO science commettee conference held at Les Arcs - France (17-21 november 1975)
North atlantic treaty organisation - Bruxelles - 1976

13 Wood structure and identification par H.A. CORE - W.A. COTE - A.C. DAY
Syracuse Universtiy Press - 1979

14 Mechanics of wood and wood composites - J.BODIG - B.A. JAYNE
Van Nostrand Reinhold Company - 1982

A1 ADAMS S. F. - MAITI M.
Isotropy of the center of a cylindrical wood pole
Wood Science an Technology - Berlin - Vol. 2 - n°1 - 1968

A2 AIUCHI T. - ISHIDA S.
An observation of the failure process of soft wood under compression perpendicular to the grain in the scanning electron microscope

- 2e partie : morphology of the failure as observed in longitudinal section of tracheid wall
Research Bulletins of the College Experiment Forests - Université d'Hokaïdo - Sapporo - Vol. 36 - n° 3 - 1979

- 3e partie : on the radial compression
même revue - Vol. 38 - n° 1 - 1981

A3 ALBERS K.
Gleitzahlmessungen an Holzwerkstoffen - Vierte Mitteilung : Beige - Schub versuch an Verbundwerkstoffen
Holz als Roh - und Werkstoff - Berlin - Vol. 30 - n° 5 - mai 1972

A4 AMEEN A. - MORLIER P. - VALENTIN G.
Détermination expérimentale de l'intégrale de RICE critique dans le bois de charpente
Cahier du Groupe Français de Rhéologie - Tome V - n° 2 - p. 81 - juin 1979

A5 ANDERSON J.A.
Stress - Strain relationship for defect - free timber beams
Wood Science - Madison - Wise - Vol. 14 - n°1 - Juillet 1981

A6 APLIN E.N. - KEENAN F.J.
Limit States design in wood : a canadian perspective
Forest Products journal, Madison - Wisc - Vol. 27 - n° 7 - juillet 1977

A7 ARIMA T. - GROSSMAN P.V.A.
Recovery of wood after mechano-sorptive deformation
Journal of the Institute of Wood Science - Londres - Vol. 8 - n° 44 - décembre 1978

A8 ATACK D. - MAY W.D. - MORRIS E.L. - SPROULE R.N.
The energy of tensile and cleavage fracture of black Spruce
Pulp and Paper research intitute of Canada - 1961

A9 ATHERTON G.H.
Preliminary study of proportional limit as a predictor of ultimate strength in bending
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 30 - n° 11 - novembre 1980

B1 BACH L.
Reiner - Weisenberg's theory applied to time - dependent fracture of wood subjected to various modes of mechanical loading
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 5 - n°3 - janvier 1973

B2 BACH L. - PENTONEY R.E.
Non linear mechanical behavior of wood
Forest Products Journal - Madison - E.U. - mars 1966

B3 BACH L.
Failure perpendicular to the grain in wood subjected to sustained bending loads
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 7 - n°4 - avril 1975

B4 BARRETT J.D.
Effect of size on tension perpendicular - to - grain strength of Douglas - fir
Wood and fiber - Madison - Wisc - Vol. 6 - n°2 - 1974

B5 BASILICO C. - MOYNE C.
Procédés nouveaux de séchage du bois dans l'optique d'une accélération des transferts
Colloque Sciences et Industries du Bois - Grenoble - Septembre 1982

B6 BECKER H.F.
Messung der Schub moduln von Vollholz mit akustischen Torsionsschwingungen
Holz als Roh - und Werkstoff - Berlin 31e année - n°5 - mai 1973

B7 BECKER H. - NOACK D.
Studies on dynamic torsional viscoelasticity of wood
Wood Science and Technology - Vol. 2 - n°3 - 1968

B8 BECKER H.
Viskoelastische Eigenschaften von Buchenholz bei periodischer Biegebeans pruchung
Hols als Roh - und Werkstoff - Berlin - 3e année - n°8 - août 1980

B9 BECKER H.F. - REITER L.
Uber den Einfluss von Temperatur und Holz - feuchtigkeit auf die Relaxation der Biegespan - nungen in Rotbuchenholz
Holz als Roh - und Werkstoff - Berlin - juillet 1970

B10 BENDTSEN B.A. - GALLIGAN W.L.
Mean and tolerance limit stresses and stress modelling for compression perpendicular to grain in hardwood and sofkwood species
Forest Products Laboratory - Madison - Wisc - Vol. 29 - n°2 - février 1979

B11 BENDTSEN B.A. - GALLIGAN W.L.
Modeling the stress-compression relationships in wood in compression perpendicular to grain
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 29 - n°2 - février 1979

B12 BENDTSEN B.A. - HASKELL J.H. - GALLIGAN W.L.
Characterizing the stress-compression relationship of wood in compression perpendicular to grain
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 10 - n°3 - janvier 1978

B13 BENDTSEN B.A.
Rolling shear characteristics of nine structural soft woods
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 26 - n°11 - novembre 1976

B14 BENDTSEN A. - PORTER S.
Comparison of results from standart 2 inch with 1 - $\frac{1}{2}$ inch shear bloc tests
Forest Products Journal - Vol. 28 - n°7 - pp 54-56 - juillet 1978

B15 BENICAK J.
Nedestruktivne skusanie dreva dynamickymi meto dami
Drevarsky Vyskum - Tchecosl - 1962

B16 BENSOUSSAN A. - LIONS J.L. - PAPANICOLAOU G.
Asymptotic analysis for periodic structures
North Holland Publishing Compagny - Amsterdam - 1978

B17 BHATNAGAR N.S.
Kriechen von Holz bei Zugbeanspruchung in Faserrichtung
Holz als Roh - und Werkstoff - août n°8 - 1964

B18 BIBLIS E.J. - CHIU Y.M.
Flexure strength and stiffness of southern pine plywood
Wood Science and Technology - Berlin - Vol. 4 - n°1 - 1970

B19 BIBLIS E.J.
Shear deflection of two species laminated wood beams
Wood Science and Technology - Berlin - Vol. 1 - n°3 - 1967

B20 BIBLIS E.J.
Shear deflection of wood beams
Forest Products Journal - Madison - E.U. - novembre 1965

B21 BOATRIGHT S.W.J. - GARRETT G.G.
The effect of knots on the fracture strength of wood
Holzforschung - Berlin - Vol. 33 - n°3 - juin 1979

B22 BODIG J.
Effect of anatomy on the initial stress-strain relationship in traverse compression
Forest Products Journal - E.U. - mai 1965

B23 BOHANNAN B.
Flexural Behavior of large glued laminated beams
Us Forest Service Research Paper - n°72 - Madison - E.U. - décembre 1966

B24 BOHANNAN B.
Effect of size on bending strength of wood members
Forest Products Laboratory - Madison - E.U. - mai 1966

B25 BOLLER K.H. - STEHR V.M.
Data acquisition and processing for characterizing wood strength
Forest Products Laboratory - Madison - Wisc - 1973

B26 BORGIN K.
The inherent durability of wood
Record of the 1973 Annual Convention of the British Wood Preserving Association - Londres - 1973

B27 BOYD J.D.
Relationships between fibre morphology, growth strains and physical properties of wood
Australian Forest Research, Melbourne - Vol. 10 - n°4 - décembre 1980

B28 BRAZIER J.D.
The changing pattern of research in wood anatomy
Journal of Microscopy - Oxford - Vol. 104 - n°1 - mai 1975

B29 BREMOND C. - GUITARD D.
Apparition des contraintes internes dans les matériaux à symétrie matérielle orthotrope cylindrique - cas des contraintes internes dans le bois
Colloque Sciences et Industries du Bois - Grenoble - Septembre 1982

B30 BRODEAU A.
Etude théorique de la flexion des poutres prismatiques en bois dans le cas où le fil du bois n'est pas parallèle à l'axe de la poutre
Centre Technique du Bois - Paris - 1966

B31 BRODEAU A.
Compte rendu des essais de cisaillement effectués au C.T.B. en 1962
Centre Technique du Bois - Paris - 1964

B32 BROWN K.M.
Stochastic model simulating the distribution of modulus of elasticity in samples of MSR lumber
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 27 - n°4 - avril 1977

B33 BUCUR V.
Le comportement à la rupture du bois massif étudié par la méthode ultrasonique d'impulsion
Champenoux, Centre National de Recherches Forestières, Station de Recherches sur la qualité des bois - 1979

B34 BUCUR V.
Détermination du module d'Young du bois par une méthode dynamique sur carotte de sondage
Annales des Sciences Forestières - Versailles - Vol. 38 - n°2 - 1981

B35 BURMESTER A. - BECKER G.
Untersüchungen über den Einflus von Holzschutz mitteln auf die Holzfestig Keit
Holz als Roh - und Werkstoff - R.F.A. - n°10 - octobre 1963

B36 BODIG J. - GOODMAN J.R.
Prediction of elastic parameters for wood
Wood science - Vol. 5 - n°4 - avril 1973

C1 CAVE I.D.
Modelling moisture - related mechanical properties of wood
Wood Science and Technology - New-York - Vol. 12 - n°1 et 2 - 1978

C2 CAVE I.D.
Wood substance as a water reactive fiber reinforced composite
Journal of Microscopy - Oxflord - Vol. 104 - n°1 - mai 1975

C3 CAVE I.D.
The anisotropic elasticity of the plant cell wold
Wood Science and Technology - New-York - Vol. 2 - n°4 - 1968

C4 CHARRIERE P.Y.
Etude du comportement et du domaine d'élasticité d'un bois massif
Mémoire D.E.A. - Université PARIS VI - E.N.S.E.T. - juin 1980

C5 CHIU Y.M. - BIBLIS E.J.
Edge wise shear properties of 3-ply, 4-ply and 5-ply $\frac{1}{2}$ inch southern pine plywood
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 23 - n°1 - janvier 1973

C6 CHOW P.
Toughness of selected wood composites
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 23 - n°12

C7 CHRISTENSEN G.N.
The use of small specimens for studying the effect of moisture content changes on the deformation of wood under lead
Tirage à part de l'Australian Journal of Applied Science - Australie - Vol. 13 - n°4 - décembre 1962

C8 COLLET J.P. - MARASCO J. - PFLUG L.
Le moiré d'ombre : une méthode expérimentale et ses possibilités
Ecole Polytechnique Fédérale - Lausanne - 1974

C9 COMBEN A.J.
The effect of low temperatures on the strength and elastic properties of timber
Tiré à part du Journal of the Institut of Wood Science - G.B. - n°13 - 1964

C10 COMPART J.P.
Simulation und optimierung mehrschichtiger, anisotroper platten auf einem rechner, unter berücksichtigung der stabilitätsgrenze
Mitteilungen der Bundes forschungs anstalt für Forst und Holzwirt schaft - Hamburg/Reinbeck - n°114 - octobre 1976

C11 COUSINS W.J.
Effects of strain rate on the transverse strength of Pinus radiata wood
Wood Science and Technology - New York - Vol. 8 - n°4 - 1974

C12 COVINGTON S.A. - FEWELL A.R.
The effect of change in moisture content on the geometrical properties, modulus of elasticity and stiffness of timber
Aylesbury, Bucks - Building Research Establishment - Princes Risborough Laboratory - Current paper 21/75 - 1975

C13 CURRY W.T.
Grade stresses for structural laminated timber
Ministry of Technology - Forest Products Research - Londres - Bulletin n°53 - 1970

C14 CURRY W.T. - TORY J.R.
The relation between the modulus of rupture (ultimate bending stress) and modulus of elasticity of timber
Aylesbury, Bucks - Building Research Establishment - Princes Risborough Laboratory - Current paper n°30 - 1976

C15 CURRY W.T. - FEWELL A.R.
The relations between the ultimate tension and ultimate compression strength of timber and its modulus of elasticity
Aylesbury, Bucks - Building Research Establishment - Princes Risborough Laboratory - Current paper n°22/27 - 1977

C16 CURTY I. - PARASCHIV N. - FLEISCHER H.
Relation entre les dimensions des éprouvettes et les déformations du bois de frêne en compression
Université Laval - Québec - Département d'Exploitation et Utilisation des bois - 1979

D1 DAHAN M.
Poinçons axisymétriques rigides sur un massif élastique semi-infini transversalement isotrope
Journal de Mécanique Appliquée - Vol. 3 - n°3 - 1979

D2 DAHAN M.
Problèmes de contact dans la téorie de l'élasticité transversalement isotrope
Thèse de Doctorat d'Etat - Université PARIS VI - janvier 1980

D3 DAVIES G.W.
Microscopic of wood fracture
Holz forschung - n°6 - décembre 1968

D4 DEBAISE G.R. - PORTER A.W. - PENTONEY R.E.
Morphology and mechanics of wood fracture
Materials Research and Standards (ASTM) - Phyladelphie - E.U. - octobre 1966

D5 DEBONIS A.L. - WOESTE F.E. - Mc LAIN T.E.
Rate of loading influence on southern pine 2 by 4's in bending
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 30 - n°11 - novembre 1980

D6 DINWOODIE J.M.
Timber - a review of the structure mechanical property relationship
Journal of Microscopy - Oxford - Vol. 104 - n°1 - mai 1975

D7 DINWOODIE J.M.
Failure in timber

- part I : Microscopic changes in cell-Wall structure associated with compression failure
Tiré à part du journal of the Institute of Wood Science - n°21 - septembre 1968

- Part II : The angle of shear through the cell wall during longitudinal compression stressing
Wood Science and Technology - New York - Vol. 8 - n°1 - 1974

D8 DINWOODIE J.M.
Recording the initiation and development of failure in timber
Tiré à part de : Nature - G.B. - Vol. 216 - n° 5117 - 25 novembre 1967

D9 DUCHANOIS G. - JUDIN P. - OHTA M. - PLUVINAGE G. - TRIBOULOT P.
Prévision de la rupture dans les pièces en bois massif présentant des entailles ou des noeuds et dans les systèmes bois-colle
Compte rendu de fin d'études d'une recherche financée par la D.G.R.S.T. n° 79-7-0698 - septembre 1981

D10 DUCHANOIS G. - JODIN P. - PLUVINAGE G.
Mesure de la ténacité du couple bois-colle
Colloque Sciences et Industries du bois - Grenoble - septembre 1982

D11 DUNLOP J.I.
Damping loss at mid kilohertz frequencies
Wood Science and Technology - New-York - Vol. 12 - n°1 - 1978

D12 DUVAUT G.
Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus.
Application à l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique. Homogénéisation
Theoretical and Applied Mechanics - W.T. KOITER ed. North Holland Publ. Comp. 1976 - p. 119 - 131 -

D13 ECHENIQUE - MANRIQUE R.
Stress relaxation of wood at several levels of strain
Wood Science and Technology - New-York - n°1 - 1966

D14 ECHOLS R.M. - CURRIER R.A.
Comparative properties of Douglas-fir boards made from parallel-laminated veneers VS. solid wood
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 23 - n°2 - février 1973

D15 ECKELMAN C.A.
Withdrawal strength of dowel joints : effect of shear strength
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 29 - n°1 - janvier 1979

D16 EHLBECK J.
Durchbiegungen von Biegetrügern aus Holz unter Berücksichtigung der Schub verformung
Holz as Roh - und Werkstoff - Berlin - R.F.A. - Juillet 1979

E1 EL-OSTA M.L.M. - BADRAN O.A. - EL-WAKEEL A.O.K.
Prediction of modulus of rupture from modulus of elasticity for some egyptian hard woods
Wood and Fiber - Madison - Wisc - Vol. 11 - n°3 - 1979

E2 ERIKSSON L.
Mechanical properties of delignified wood
Svenska Träforsknings institutet Träcknik - Stockolm - n°155 B - 1967

E3 ERIKSSON L. - NOREN B.
Der einfluss von feuchtingkeits änderungen auf die verformung von holz bei zug in fasevrichtung
Holz als Roh - und Werkstoff - A11 - n°5 - mai 1965

E4 ETHINGTON R.L. - GALLIGAN W.L. - MONTREY H.M.
Evolution of allowable stresses in shear for lumber
Forest Products Laboratory - Madison - Wisc - General Technical Report - FPL 23 - 1979

F1 FERNANDEZ V.A. - POLENSEK A.
Model for predicting strength and stiffness of wood studs
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 12 - n°2 - octobre 1979

F2 FEWELL A.R.
Relations between the moduli of elasticity of structural timber in bending
Aylesbury - Bucks - BRE Princes Risborough Laboratory - Current Paper 9/80 - 1980

F3 FOSCHI R.O.
Deflection of multilayer - sandwich beams with application to plywood panels
Wood and Fiber - Madison - Wisc - Vol. 5 - n°3 - 1973

F4 FOSCHI R.O.
Plane-stress problem in a body with cylindrical anisotropy, with special reference to curved Douglas-fir beams
Forestry branch department publication n°1244 - Ottawa - 1968

F5 FOX S.P.
Strength and deformation of pitched - tapered Douglas - fir glued - laminated beams
Wood and Fiber - Madison - Wisc - Vol. 6 - n°3 - 1974

F6 FUKUYAMA M. - TAKEMURA T.
The effects of temperature on compressive properties perpendicular to grain of wood
Journal of the Japan Wood Research Society - Vol. 8 - n°4 - août 1962

G1 GAUTHERIN M.T.
Critère de contrainte limite du bois massif
Thèse de Doctorat de 3e cycle - Université Paris VI - ENSET - octobre 1980

G2 GALLIGAN W.L. - GREEN D.W.
Development of standardize concepts for assignment and assesment of the mechanical properties of lumber
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 30 - n°9 - septembre 1980

G3 GALLIGAN W.L.
Current development in non destructive testing of wood
Indian Plywood Industries Research Association - Bangalore - Inde - 1967

G4 GALLIGAN W.L.
Non destructive testing in wood
Forest Products Journal - E.U. - mai 1964

G5 GALLIGAN W.L. - ETHINGTON R.L. - GERHARDS C.C.
Evolution of tensile design stresses for lumber
Forest Products Laboratory - Madison - Wisc - General Technical Report F P L 28 - 1979

G6 GANOWICZ R. - GUZENDA R. - PLENZLER R.
Einfluss der temperatur auf den elastizität modul parallel zur faserrichtung des holzes
Holztechnologie - Leipzig - 21e année - n°1 - mars 1980

G7 GANOWICZ R. - KWIATKOWSKI K.
Die untersuchung des kriechens mehrschichtiger platten
Holztechnologie - Leipzig - 15e année - n°2 - juin 1974

G8 GEIER K.
Berücksichtigung der schubverformung beider ermittlung des elastizitätsmoduls von holz im statischen biegeversuch
Holztechnologie - Liepzig - 21e année - n°2 - juin 1980

G9 GERHARDS C.C.
Pair matching and strength prediction of lumber
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 8 - n°3 - janvier 1976

G10 GERHARDS C.C.
Effect of cross grain on stress waves in lumber
Forest Products Laboratory - Madison - Wisc - 1980

G11 GERHARDS C.C.
Stress wave speed and MOE of sweetgum ranging from 150 to 15 percent MC
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 25 - n°4 - avril 1975

G12 GERHARDS C.C.
Effect of duration and rate of loading on strength of wood and wood - based materials
Forest Products Laboratory - Madison - Wisc - Research Paper FPL 283 1977

G13 GERHARDS C.C.
Relation hip of fensile strength of southern pine dimension lumber to inherent characteristics
Forest Products Laboratory - Research Paper FPL 174 - 1972

G14 GERHARDS C.C. - ETHINGTON R.L.
Valuation of models for predicting tensile strength of 2 by 4 inch lumber
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 24 - n°12 - décembre 1974

G15 GILLIS P.P.
Orthotropic elastic constants of wood
Wood Science and Technology - New York - Vol. 6 - n°2 - 1972

G16 GILLWALD W.
Beitrag zur Bestimmung der Formänderung von Holz unter schwingender Beanspruchung
Holz als Roh und Werkstoff - All. - n°3 - mars 1961

G17 GILLWALD W. - LUTHARDT H.
Beitrag zur Dauerstand festigkeit von Vollholz und Holz spanplatten
Holztechnologie - R.D.A. - n°1 - février 1966

G18 GOODMAN J.R. - BODIG J.
Prediction of elastic parameters for wood
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 5 - n°4 - avril 1973

G19 GOODMAN J.R. - BODIG J.
Orthotropic strength of wood in compression
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 4 - n°2 - octobre 1971

G20 GOULET M. - OVELLET E.
Effet de la teneur en humidité du bois sur sa résistance à la traction transversale
Département d'exploitation et d'utilisation des bois - Université Laval - Québec - Note de recherche n°1 - juin 1968

G21 GOULET M. - LAFOREST P.
Etude de l'application de la théorie de l'élasticité aux déformations du bois sous pression
Département d'exploitation et d'utilisation des bois - Université LAVAL - Québec - Note de recherche n°11 - 1974

G22 GOVERS I.A.
Working stresses for a number of wood species
Houtinstituut - Delft - Pays Bas - mai 1966

G23 GOVERS I.A.
The relationship between modulus of rupture and modulus of elasticity in european whitwood (spruce and fin) of structural sizes
Hautinstituut - Delft - Pays Bas - avril 1968

G24 GROSSMAN P.U.A. - WOLD M.B.
Compression fracture of wood parallel to the grain
Wood Science and Technology - New York - Vol. 5 - n°2 - 1971

G25 GROSSMAN P.U.A.
Requirements for a model that exhibits mechano-sorptive behaviour
Wood Science and Technology - New York - Vol. 10 - n°3 - 1976

G26 GUITARD D. - SEICHEPINE J.L.
Analyse du comportement élastique du matériau bois, mise au point d'une méthode de détermination de la matrice de rigidité du hêtre
Rapport final d'un contrat D.G.R.S.T. (matériau bois n° 78.7.3140)
décembre 1980

G27 GUITARD D. - SEICHEPINE J.L. - VAUTRIN A.
Mesure des complaisances effectives du bois massif
VII th International Conférence on Experimental Stress Analysis - Haïfa Israël - août 1982

G28 GUNNERSON R.A. - GOODMAN J.R. - BODIG J.
Plate tests for determination of elastic parameters of wood
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 5 - n°4 - avril 1973

G29 GURTIN M.E. - YATOMI C.
On a model for two phose diffusion in composite materials
Journal of Composite Materials - Vol. 13 - p. 126 - avril 1979

G30 GUITARD D. - SEICHEPINE J.L.
Analyse théorique et expérimentale de l'élasticité linéaire anisotrope du bois
Abstracts du 4e Congrès Erançais de Mécanique - 4 - 7 septembre 1979 - Nancy

G31 GERHARDS
Effect of moisture content and temperature on the mechanical properties of wood
Wood and Fiber - 14 (1) - 1982 - pp. 4 à 36

H1 HAMANO Y.
Studies on the mechanism of energy absorption of wood subjected to impact load

- partie I
Journal of the Japan Wood Research Society - Tokyo - Vol. 25 - n°9 - 1979

- partie II
Journal of the Japan Wood Research Society - Tokyo - Vol. 26 - n°10 - 1980

H2 HANINEC I.
Zariadenia a principy merania prieraznosti
Drevo - Prague - 27e année - n° 2 - février 1972

H3 HAY GREEN J.G. - SAVER D.
Prediction of flexural creep and stress rupture in hardboard by use of a time-temperature relationship
Wood Science - Madison - E.U. - avril 1979

H4 HEARMON R.F.S.
The effect of tension on the torsionnal rigidity of wooden strips
Tiré à part du Institute of Wood Science Journal - G.B. - n°13 - novembre 1964

H5 HEARMON R.F.S. - PATON J.M.
Moisture content changes and creep of wood
Forest Products Journal - E.U. - août 1964

H6 HEIMESHOFF B. - GLOS P.
Zugfestigkeit und Beige - E.- Modul von Fichten - Brettlamellen
Holz als Roh - und Werkstoff - Berlin - 31e année - n°12 - décembre 1973

H7 HENRICI D.
Spannungsoptische Untersuchung rechtwinkelig ausgeklinkter sowie lochbelasteter Biegeträger
Holz als Roh - und Werkstoff - Berlin - 34e année - n°3 - mars 1976

H8 HIRAI T. - SAWADA M.
Stiffness and load canying capacity of square notched wood beams
Research Bulletin of the College Experiment Forests - Hokkaïdo University - Sapporo - Vol. 36 - n° 2 et 3 - 1979

H9 HOADLEY R.D.
Strain analysis in wood by means of moire patterns
Forest Products Journal - Madison - E.U. - mai 1968

H10 HOLZ D.
Uber die Höppler - Härt (Kegelfliesspunkt) des Holzes und ciniger Holzwerkstoffe
Holztechnologie - R.D.A. - n°2 - 1963

H11 HOYLE R.J.
Steel reinforced wood beam design
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 25 - n°4 - avril 1975

H12 HUNT M.O.
Moisture content effect on in-plane shear module of sheatling grade flakeboard and plywood
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 28 - n°12 - décembre 1978

I1 IMAYAMA N.
The temperature - change caused by a static load applied to wood
Journal of Japan Wood Research Society - Tokyo - Vol. 27 - n°7 - 1981

I2 ITO K. - MURUYAMA T. - NIYANO H.
Rigidity and strength of wooden gable frame with glued plywood gussets
Report of the Hokkaido Forest Products Research Institute - Asahikawa Hokkaido - n°65 - juin 1976

I3 IVANOV J.M.
Uber die Abhängigkeit der Festigkeit des Holzes von der Feuchte
Holztechnologie - Leipzig - 22e année - n°1 - mars 1981

I4 IVANOV J.M.
Bestimmung der Dauerfestigkeit von Holzkonstruktionen anhand der Eergebnisse von Kurzzeit prüfungen
Holztechnologie - Leipzig - 14e année - n°4 - décembre 1973

J1 JAMES W.L.
Dynamic strength and elastic properties of wood
Forest Products Journal - U.S.A. - n°6 - juin 1962

J2 JARMUTOWSKA A. - MATEJAK M.
Uber die Eigenschaften von Kiefernholz nach mehrjähriger Einwirkung
Holztechnologie - Leipzig - 19e année - n°4 - décembre 1978

J3 JOHNSON J.W.
Effect of single knots on tensile strength of 2 by 8 inch Douglas fir dimension lumber
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 22 - n°1 - janvier 1972

J4 JOHNSON J.W.
Flexural tests of large glued-laminated beams made from visually graded hem fir lumber
Forest Research Laboratory - Corvallis - Oregon - Oregon State University Research paper n°18 - 1973

J5 JOHNSON J.W.
Design and test of large glued-laminated beams made of non destructively tested lumber
Forest Research Laboratory - Corvallis - Oregon - Oregon State University - Report T 17 - novembre 1971

J6 JOHNSON R.A.
Current statistical methods for estimating lumber properties by proof loading
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 30 - n°1 - janvier 1980

K1 KADITA S. - YAMADA T. - SUZUKI M.
Studies on Rheological properties of wood - 1 : Effect of moisture content on the dynamic Young's modulus of wood
Journal of the Japan Wood Research Society - 7 - n°1 - février 1961

K2 KAISERLIK J.H. - PELLERIN R.F.
Stress wave attenuation as an indicator of lumber strength
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 27 - n°6 - juin 1977

K3 KAISERLIK J.H.
Non destructive testing methods to predict effect of degradation on wood : a critical assessment
Forest Products Laboratory - Madison - Wisc - 1978

K4 KALINA M.
Mertörungsfreie Bestimmung des Dauerfestigkeit von Trägern aus dem rheologischen Verhalten unter Dauerlast
Holztechnologie - Leipzig - Vol. 12 n°4 - décembre 1971

K5 KALLSNER B. - NOREN B.
Creep buckling of wood columns
Svenska Träforskings institutet - Stockolm - Meddelande - Série A n°518 - 1978

K6 KASS A.J.
Middle ordinate method measures stiffness variation within pieces of lumber
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 25 - n°3 - mars 1975

K7 KASS A.J.
Effect of incising on bending properties of redwood dimension lumber
Forest Products Laboratory - Madison - Wisc - Research paper FPL 259 - 1975

K8 KEDADI R. - RICHARD E. - SILVY J.
Etude de la structure poreuse des bois par porosimétrie au mercure
Colloque Sciences et Industries du Bois - Grenoble - septembre 1982

K9 KEENAN F.J.
Shear strength of wood beams
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 24 - n°9 - septembre 1974

K10 KEITH C.T.
Longitudinal compressive creep and failure development in white spruce compression wood
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 7 - n°1 - juillet 1974

K11 KEITH C.T.
The mechanical behavior of wood in longitudinal compression
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 4 - n°4 - avril 1972

K12 KEITH C.T.
The anatomy of compression faifure in relation to creep - inducing stresses
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 4 - n°2 - octobre 1971

K13 KELLER R. - THIERCELIN F.
Influence des gros rayons ligneux sur quelques propriétés du bois de hêtre
Annales des Sciences Forestières - Versailles - Vol. 32 - n°2 - 1975

K14 KELLOG R.M.
Influence of specific gravity and certain other factors on the tensile properties of wood
Forest Products Journal - U.S.A. - Vol. 12 - n°10 - 1962

K15 KENNEDY R.W.
Wood in transverse compression - influence of some anatomical variables and density on behavior
Forest Products Journal - Madison - E.U. - mars 1968

K16 KERSAVAGE P.C.
Moisture content effect on tensile properties of individual Douglas fir late wood Tracheids
Wood and Fiber - Madison - Wisc - Vol. 5 - n°2 - 1973

K17 KIRBACH E. - BACH L. - WELLWOOD R.W.
On the fractional stress relaxation of coniferous wood tissues
Wood and Fiber - Madison - Wisc - Vol. 8 - n°2 - 1976

K18 KISSER J. - SCHUSTER R.
Makro und mikroskopische Untersüchungen an querdrukbelastetem Holz
Holzforschung und Holzverwertung - Vienne - 29e année - n°3 - juin 1977

K19 KITAHARA R. - TSUTSUMI J. - MATSUMOTO T.
Observations on cel wall response and mechanical behaviour in wood subjected to repeated bending static load
Journal of the Japan Wood Research Society - Tokyo - Vol. 27 - n°1 1981

K20 KITAHARA K. - YUKAWA K.
The influence of the change of temperature on creep in bending
Journal of Japan Wood Research Society - Japon - octobre 1964

K21 KLOOT N.H. - SCHUSTER K.B.
A stress - grade for "Pith-in" radiata Pine scantlings
The Australian Timber Journal - Sydney - Australie - Vol. 38 - n°4 mai 1972

K22 KO H. Y. - STURE S.
Three-dimensional mechanical characterisation of anisotropic composites
Journal of Composite Materials - Vol. 8 - p. 178 - avril 1974

K23 KOBETZ R.W. - KRUEGER G.P.
Ultimate strength design of reinforced timber - biaxial stress failure criteria
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 8 - n°4 - avril 1976

K24 KOLB H. - FRECH P.
Untersuchungen an deuchbrochenen Bidem aus Brett schichtholz
Holz als Roh - und Werkstoff - Berlin - 35e année - n°4 - avril 1975

K25 KOLLMAN F.
Verformung und Bruchgescheben bei Hoz als einem anisotropen, inhomogene, porigen Fest Körper
V.D.I. - Düsseldorf - R.F.A. - Forschungsheft 520 - 1967

K26 KOLLMAN F.
Kriechen von holz und Holzwerkstoffen
Holztechnologie - Leipzig - 13e année - n°2 - juin 1972

K27 KOLLMANN F.
Rheologie und Strukturfestigkeit von Holz
Holz als Roh - und Werkstoff - All - mars n°3 - 1961

K28 KOLLMANN F.
Die Problematik des Abnutzungswiderstand von Holz
Holz - Zentralblatt - Stuttgart - 107e année - n°75 - juin 1981

K29 KOMATSU K. - SASAKI H. - MAKU T.
Estimating fracture toughness from non linear load - deflection relation
Bulletin of the Wood Research Institute - Uji - Kyoto - n°62 - octobre 1976

K30 KORAN Z.
Tensile properties of spruce under different conditions
Wood and Fiber - Madison - Wisc - Vol. 11 - n°1 - 1979

K31 KUCERA B.
Holzfehler und ihr Ein fluss auf die mechanischen Eigenschaften der Fichte und Kiefer
Holztechnologie - Leipzig - 14e année - n°1 - mars 1973

K32 KUCERA B.
Ein fluss einiger Fehler auf die Biegefestigkeit von Fichtenholz
Holztechnologie - Leipzig - n°4 - décembre 1970

K33 KUENZI E.W. - ZAHN J.J.
Stressed - skin panel deflections and stresses
Forest Products Laboratory - Forest Service - U.S.D.A. - Madison - Wisc - Research paper FPL 251 - 1975

K34 KUFNER M.
Elastizitätsmodul und Zugfestigkeit von Holz verschiedener Rohdichte in Abhängigkeit vom Feuchtigkeitsgehalt
Holz als Roh - und Werkstoff - Berlin - 36e année - n°11 - novembre 1978

K35 KUFNER M.
Anderung der Festigkeit und des Elastizität - moduls von Kiefernholz infolge Dauer beanspruchung
Holz als Roh - und Werkstoff - Berlin - R.F.A. - juillet 1969

K36 KUNESH R.H.
Strength and elastic properties of wood in transverse compression
Forest Products Journal - Madison - E.U. - janvier 1968

L1 LABLOKOFF A.KH.
L'Epicea ; Influence des facteurs écologiques sur les propriétés mécaniques du bois
Sté d'Edition d'Enseignement Supérieur - Paris 1963

L2 LAW K.N. - KORAN Z.
Microtensile strength of white spruce wood - a new approach
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 11 - n°4 - avril 1979

L3 LAW K.N. - KORAN Z.
Torsional - shear stress of wood at various temperature
Wood Science and Technology - New - York - Vol. 15 - n°3 - 1981

L4 LECLERQ A.
Relationships between beechwood anatomy and its physico-mechanical properties
IAWA Bulletin - Leyde - Vol. 1 - n°1/2 - 1980

L5 LEE I.D.G. - LORD A.D. - WEDDELL E.
Static bending tests on greeheart in structural sizes
The Timber Development Assoc. - G.B. - février 1961

L6 LEE W.C. - BIBLIS E.J.
New approach for determination of elastic constants of orthotropic wood-base plates by strip bending and plate twisting
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 9 - n°4 - avril 1977

L7 LEE W.C. - BIBLIS E.J.
Predicting rolling shear modulus of plywood
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 29 - n°4 - avril 1979

L8 LENEY L. - MOIR R.H.
Veneer characteristics as related to failure in plywood tension - shear specimens
Forest Products Journal - Madison - E.U. - avril 1968

L9 LIU J.Y. - CHENG S.
Analysis of orthotropic beams
Forest Products Laboratory - Madison - Wisc - 1979

L10 LONG J. - MARICHEZ J.
Détermination du domaine d'élasticité du bois massif
Mémoire de D.E.A. - Université PARIS VI - ENSET - juin 1979

L11 LONGWORTH J.
Longitudinal shear strength of timber beams
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 27 - n°8 - août 1977

L12 LONGWORTH J.
Behavior of shear plate connections in sloping grain surfaces
Forest Products Journal - Madison - Wisc - mars 1967

L13 LYON D.E. - SCHNIEWIND A.P.
Prediction of creep in plywood - part 1 : prediction models for creep in plywood
Wood and Fiber - Madison - Wisc - Vol. 10 - n°1 - 1978

M1 Mc ALISTER R.H.
Modulus of elasticity distribution of lablobly pine vencer as related to location within the stem and specific gravity
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 26 - n°10 - octobre 1976

M2 Mc MILLIN C.W. - BILLINGSLEY F. - FRAZER R.E.
Fast - scan E.M. with digital image processing for dynamic experiments
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 6 - n°3 - janvier 1974

M3 MADSEN B. - JANZEN W. - ZWAAGSTRA J.
Moisture effects in lumber
The University of British Columbia - Vancouver - 1980 - Structural research series - report n°27

M4 MADSEN B. - NIELSEN P.C.
In grade testing, accuracy and confidence - computer simulation
The University of British Columbia - Vancouver - Structural research series - report n°21 - 1978

M5 MADSEN B.
Duration of load test for wet lumber in bending
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 25 - n°5 - mai 1975

M6 MADSEN B.
Duration of load tests for dry lumber in bending
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 23 - n°2 - février 1973

M7 MADSEN B.
Duration of load tests for dry lumber subjected to shear
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 25 - n°10 - octobre 1975

M8 MAKI A.C. - KUENZI E.W.
Deflection and stresses of tapered wood beams
Forest Products Laboratory - Madison - E.U. - septembre 1965

M9 MALHOTRA S.K. - BAZAN I.M.M.
Ultimate bending strength theory for timber beams
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 13 - n°1 - juillet 1980

M10 MARRA G.G. - PELLERIN R.F. - GALLIGAN W.L.
Non destructive determination of wood strength and elasticity by vibration
Holz als Roh - Und Werkstoff - R.F.A. - octobre 1966

M11 MARTIN J.W.
The analysis of life data for wood in the bending mode
Wood Science and Technology - New York - Vol. 14 - n°3 - 1980

M12 MARTIN P. - COLLET R.
Détection des défauts internes du matériau bois par micro-ondes
Colloque Sciences et Industries du Bois - Grenoble - Septembre 1982

M13 MARX C.M. - MODDY R.C.
Bending strength of shallow glued - laminated beams of a uniform grade
Forest Products Laboratory - Research paper FPL 380 - 1981

M14 MATSUO H. - SAWADA M.
Lateral resistance of wood-based sheet material joint with nails
Research Bulletins of the College Experiment Forests - Hokkaido University - Sapporo - Vol. 38 - n°1 - 1981

M15 MILLER D.G.
Non destructive testing of jaists by a vibrationnnal technique
Forest Products Journal - Madison - E.U. - Février 1968

M16 MILLER D.G. - GEORGE P.
A method of measuring creep and recorvery due to flexural loads of short duration
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 7 - n°2 - octobre 1974

M17 MILLER D.G. - GEROGE P.
Effect of stress level on the creep of eastern white spruce in bending
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 7 - n°1 - juillet 1974

M18 MILLER D.G. - BENICAK J.
Relation of creep to the vibrationnal properties of wood
Forest Products Journal - Madison - E.U. - Décembre 1967

M19 MINDESS S. - NADEAU J.S. - BARRET J.D.
Effect of constant deformation rate on the strength perpendicular to the grain of Douglas fir
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 8 - n°4 - avril 1976

M20 MIYAJIMA H.
Comparison between ball and cylinder methods for testing hardness of wood
Journal of Japan Wood Research Society - Jap 7 - n°1 - février 1961

M21 MIYAKAWA H. - MORI M.
Impact properties of wood and wood-based materials
7 parties - Journal of the Japan Wood Research Society - 1977 à 1981

M22 MOHLER K. - MAIER G.
Kriech und Relaxations - Verhalter von lufttrockenem und nassem Fichtenholz bei Querdruckbeanspruchung
Holz als Roh - und Werkstoff - Berlin - R.F.A. - janvier 1970

M23 MOHLER K. - HEMMER K.
Verformungs - und Festigkeitsverhdlten von Nadell voll - und Brett schichtholz beir Torsion beanspruchung
Holz als Roh - und Werkstoff - Berlin - n°12 - décembre 1977

M24 MOHLER K. - MAIER G.
Der Reibbeiwert bei Fichtenholz in Hinblick auf die Wirksamkeitreib shlüssiger Holzerbindungen
Holz als Roh - und Werkstoff - Berlin - R.F.A. - août 1969

M25 MONTREY H.M.
Bending of circular sandwich plate by load applied through an insert
Forest Products Laboratory - Research Paper FPL 201 - Madison - Wisc - 1973

M26 MONTREY H.M. - KUENZI E.W.
Design parameters for torsion of sandwich strips having trapezoidal, rectangular an triangular cross sections
Forest Products Laboratory - Research Paper FPL 156 - Madison - Wisc - 1973

M27 MOODY R.C.
Compressive strength of one - and two - ply laminated timbers
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 31 - n°5 - mai 1981

M28 MOODY R.C.
Design criteria for large structural glued - laminated timber beams using mixed species of visually graded lumber
Forest Products Laboratory - Research Paper FPL 236 - Madison - Wisc - 1974

M29 MOODY R.C.
Flexural strength of glued - laminated timber beams containing coarse - grain southern pine lumber
Forest Products Laboratory - Research Paper FPL 222 - Madison - Wisc - 1974

M30 MORGNER W. - NIEMZ P. - THEIS K.
Anwendung der Schallemissionanalyse zur Untersuchung von Bruch - und Kriechvorgängen in Werkstoffen aus Holz
Holztechnologie - Leipzig - 21e année - n°2 - juin 1980

M31 MORI M. - FUSHITANI M. - SATOH M.
Analysis of bending - creep fracture of wood in the radial section loading by the theory of the stochastic process
Journal of the Japan Wood Research Society - Tokyo - Vol. 27 - n°5 - 1981

M32 MOUSSLI D.
Approche théorique et expérimentale de la flexion quatre points de poutres bois
Mémoire de D.E.A. - Mécanique - Institut National Polytechnique de Lorraine - Novembre 1980

M33 MORLIER P. - VALENTIN G.
Rupture du bois en mode mixte
Cahiers du Groupe Français de Rhéologie - Tome V - n°6 - p. 367 - février 1982

M34 MORZE Z. - OLSZEWSKI J. - PAPRZYCKI O.
Untersuchungen der Elemente des dynamischen Schubmoduls des Holzes
Holztechnologie - Leipzig - 20e année - n°3 - septembre 1979

M35 MUDRY M. - LAUNAY J. - PREZIOSA C. - GILLETTA F.
Mesure des constantes élastiques du bois par ultrasons
Colloque EUROMECH 154 - Bordeaux - avril 1982

M36 MUDRY M. - LAUNAY J. - PREZIOSA C. - GILLETTA F.
Méthode ultrasonore de détermination des constantes élastiques du bois
Colloque Sciences et Industries du Bois - Grenoble - Septembre 1982

M37 MUDRY M. - KLINKA J.M.
Sur l'optimisation de l'emploi du bois dans la construction aéronautique légère
Colloque Sciences et Industries du Bois - Grenoble - Septembre 1982

M38 MUDRY M. - LAUNAY J. - PREZIOSA C. - GILLETTA F.
La mesure des constantes élastiques des matériaux par goniométrie ultrasonore
17e Colloque Annuel du Groupe Français de Rhéologie - E.N.P.C. - Paris - décembre 1982

M39 MULLIN J.V. - KNOELL A.C.
Basic concepts in composite beam testing
Materials Research and Standards - Philadelphie - E.U. - Vol. 10 - décembre 1970

M40 MURASE Y.
Frictionnal properties of wood at high sliding speed
Journal of the Japan Wood Research Society - Tokyo - Vol. 26 - n°2 - 1980

M41 MUSIAL M.
Mathematische Beschreibung bestimmter Feuchteeigenschaften des Holzes
Holztechnologie - Leipzig - 22e année - n°1 - mars 1981

N1 NARAYANAMURTI D. - ASWATHNARAYANA B.S.
Uber des Kriechsverhalten von Werkstoffen aus Techholz
Holztechnologie - Leipzig - n°2 - juin 1970

N2 NARAYANAMURTI D. - JAIN N.C. - PANT H.C. - DUN D.
Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls und der Biegefestigkeit vom Faserwinkel bei Holz und Furnier platten
Holztechnologie - R.D.A. - n°2 - 1963

N3 NIEMZ P.
Uber einige Erkenntnisse zum Kriechenverhalten von Vollholz
Holztechnologie - Leipzig
21e année - n°4 - décembre 1980

N4 NIEHZ P. - REGENSBURGER K.
Anwendung photogrammetischer Messverfahren für Deformations und Dehungsmessungen an Vollholz und Spanplattenaus Holz
Holztechnologie - Leipzig - 21e année - n°1 - mars 1980

N5 NOACK D. - ROTH W.
On the theory of elasticity of the orthotropic material wood
Wood Science and Technology - New York - Vol. 10 - n°2 - 1976

N6 NORRIS C.B.
Strength of orthotropic materials subjected to combined stresses
U.S. Forest Prod. Lab. - Report n°1816 - 1962

N7 NORRIS C.B.
Short-column compressive strength of sandwich constructions as affected by size of cells of honeycomb core materials
Forest Products Laboratory - rapport n°026 - E.U. - janvier 1964

O1 O'HALLORAN M.R. - BODIG J. - BOWDEN D.C.
Nondestructive parameters of lodgepole pine dimension lumber in bending
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 22 - n°2 - février 1972

O2 OHTA M. - JODIN P. - PLUVINAGE G.
Application de la mécanique de la rupture aux défaut du bois - noeuds non adhérents en traction longitudinale

O3 OKUYAMA T. - SUZUKI S. - TERAZAWA S.
Effect of temperature on orthotropic properties of wood - 1 : on the transverse anisotropy in bending
Journal of the Japan Wood Research Society - Tokyo - Vol. 23 - n°12 1977

O4 ONO T.
The dynamic rigidity modulus and internal friction of several woods in torsionnal vibration
Journal of the Japan Wood Research Society - Tokyo - Vol. 26 - n°3 - 1980

O5 OROSZ I.
Relationships between apparent modulus of elasticity, gage length, and tensile strength of lumber
Wood Science and Technology - New York - Vol. 10 - n°4 - 1976

O6 OROSZ I.
Relationships between trasverse free vibration and other properties as affected by knots
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 27 - n°1 - janvier 1977

O7 OUELLET E.
Etude de l'effet d'entaille dans les bois massifs
Thèse de D. Sc. - Université Laval - Québec - Note de Recherche n°6 - avril 1969

P1 PALKA L.C.
Predicting the effect of specific gravity, moisture content, temperature and strain rate on the elastic properties of softwood
Wood Science and Technology - New York - Vol. 7 - n°2 - 1973

P2 PALKA L.C. - HOLMES B.
Tangential failure of small wood cantilevered beams with square notches
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 5 - n°3 - janvier 1973

P3 PALKA L.C. - HEJJAS J.
Effect of moisture content on the mechanical properties of Douglas - fir plywood in rolling shear
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 27 - n°4 - avril 1977

P4 PALKA L.C.
Effect of moisture content on shear through thickness strength of Douglas-fir plywood
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 27 - n°2 - février 1977

P5 PALKA L.C.
Influence of loading methods on rolling shear
Forest Products Journal - Madison - E.U. - mars 1967

P6 PASCHALIS P.
Bestimmung der Korrelation zwischen ausgewählten Festigkeiteigenschaften und strukturmerkmalen von Holz mit Anwendung des Resonanz und Ultraschall verfahrens
Holztechnologie - Leipzig - 19e année - n°1 - mars 1978

P7 PEARSON R.G.
Application of fracture mechanics to the study of tensile strength
Holz forschung - 28, 11 - 19, 1974

P8 PEARSON R.G.
Potential of the S b and S bb distributions for describing mechanical properties of wood
Wood and Fiber - Madison - Wisc - Vol. 12 - n°4 - décembre 1980

P9 PEDROTTI P.
Portal lamellare di abete rosso, a tre cerniere, sottoposto a carico prolungato
Instituto del Legno : Contributi Scientifico - Pratici - Florence - Vol. 25 - n°64 - 1979

P10 PEDROTTI P.
Indaginc sul comportamento meccanico del larice lamellare sollecitato a flexione pura
Instituto del Legno : Contributi Scientifico - Pratici - Florence - Vol. 25 - n°65 - 1979

P11 PELLERIN R.F.
A bibrationnal approach to nondestructive testing of structural lumber
Forest Products Journal - E.U. - mars 1965

P12 PENTONEY R.E. - DAVIDSON R.W.
Rheology and the study of wood
Forest Products Journal - E.U. - mai 1962

P13 PERKINS R.W.
Fondamental concepts concerning the mechanics of wood deformations : geometrical models
Forest Products Journal - Madison - E.U. - mai 1967

P14 PERKITNY T. - HOFFMAN Z.
Zur Relaxation von Holz nach verschieden langer, konstanter Durchbiegung
Holz als Roh - und Werkstoff - Berlin - 34e année - n°5 - mai 1976

P15 PERKITNY T. - STELLER S.
Vergleichende Untersuchungen über die Verformungen von Spen-und Schichtholz bei konstanter und variabler Dauerbiegebelasting
Holztechnologie - Leipzig - Vol. 13 - n°1 - mars 1972

P16 PETERSON J. - MADSON G. - POODY R.C.
Tensile strength of on, two, and three ply glulam members of 2 by 6 Douglas-fir
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 31 - n°1 - janvier 1981

P17 PETERSON J. - NOZISKA D.
The tensile strength of laminated beams
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 23 - n°11 - novembre 1973

P18 PORTER A.W.
On the mechanics of fracture of wood
Forest Products Journal - E.U. - avril 1964

P19 PORTER A.W. - EL-OSTA M.L. - KUSEC D.J.
Prediction of failure of finger joints using acoustic emissions
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 22 - n°9 - septembre 1972

P20 PREZIOSA C. - MUDRY M. - LAUNAY J. - GILLETTA F.
Détermination des constantes élastiques du bois par une méthode acousitique goniométrique
Note aux comptes-rendus de l'Académie des Sciences - t 291 - série D - p. 91 - septembre 1981

P21 PREZIOSA C. - LAUNAY J. - MUDRY M. - GILLETTA F.
Recent progress in wood elasticity investigation
A paraître dans Wood Science and Technology

R1 RACZKOWSKI J.
The transversal anisotropy in early wood and late wood with reference to mechanical properties
Publié à l'occasion de l'inauguration des laboratoires de l'Indian Plywood Industries Research Association - Bengalore - Inde - 1967

R2 RADU A. - BRENNDORFER D.
Zur zerstörungsfreien Prüfung des Holzes durch Schwingungsversuche
Holz als Roh - und Werkstoff - Berlin - 34e année - n°6 - juin 1976

R3 RAJPUT S.S. - SHUKA N.K. - SHARMA R.R.
Mechanical tests for wood, comparison of test results on large and small size specimens
Holzforschungund Holzverwertung - Vienne - 32e année - n°5 - octobre 1980

R4 RANTA-MAUNUS A.
The viscoelasticity of wood at variyng moisture content
Wood Science and Technology - New York - Vol. 9 - n°3 - 1975

R5 RANTA-MAUNUS A.
Viscoelasticity of plywood under constant climatic conditions
Valtion Teknillinen Tutkimuskeokus (Serie : Building technology and community development n°3) Helsinki - 1972

R6 RASSAM H.Y. - GOODMAN J.R.
Design of layered wood columns with interlayer slip
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 3 - n°3 - janvier 1971

R7 RASSAM H.Y. - GOODMAN J.R.
Buckling behavior of layered wood columns
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 2 - avril 1970

R8 REINHARDT H.W.
Zur Beschreibung des rheologischen Verkaltens von Holz
Holz als Roh - Und Verkstoff - Berlin - 31e année - n°9 - septembre 1973

R9 RICHARDS D.B.
Strength of wood beams with shallow cruved notches
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 7 - n°1 - juillet 1974

R10 RONAI F.
Untersuchungen zum Deformations verhalten von Holzkonstruktionen bei Dauerbelastung
Holztechnologie - Leipzig - 20e année - n°2 - juin 1979

R11 RUFFINO M.
Determinazione del modulo de elasticita a flessione di quattro travi in legno lamellare di abete rosso
Edizione CLUT - Turin - 1981

S1 SALES C.
Application de la méthode du moiré à la mesure des déformations sur le matériau bois - 2 parties
Bois et Forêts des Tropiques - Nogent-sur-Marne - n°173 et 174 - 1977

S2 SANCHEZ - PALENCIA E.
Non homogenous media ans vibration theory
Springer verlag - Berlin - 1980

S3 SANO E.
Effects of temperature on the mechanical properties of wood - compression parallel to grain
Journal of the Japan Wood Research Society - Vol. 7 - n°4 - août 1961

S4 SAWADA M. - URDA K.
Studies on the woodenplates - 1 - Deflection of rectangular plates under a concentrated load on the centre, edges simply supported
Research Bulletin of the College Experiment Forests - Hokkaido University Sapporo - Japon - Vol. 25 - n°1 - 1967

S5 SCHMIDT T.
Sambandet mellan hallfasthet och böystyvhet för svensk för furu - och granvirke Hallfasthet vid böjning pa lagkant och tryckhallfasthet i feber-riktningen . Maskinhallfasthets - Sortering
Svenska Träforskningsinstitutet - Stockolm

S6 SCHNEEWEIS G.
Druckfestigkeit und Stempelhärte
Holz als Roh - Und Werkstoff - R.F.A. - n°7 - juillet 1964

S7 SCHNEIDER A.
Untersuchungen über den Einfluss von Wärmebehandlung im Temperaturberich von 100 bis 200° auf Elastizitätsmodul, Druckfestigkeit und Bruchschlagarbeit von Kiefern - Slint - un Buchenholz
Holz als Roh - und Werkstoff - Berlin - Vol. 29 - n°11 - novembre 1971

S8 SCHNEIDER H.
Untersuchungen über des Verhalten von Holzwerkstoff - Platten bei Stos-sbeanspruchungen sowic über ihren dynamischen Elastizitäts - und Schub modul
Holz als Roh - und Werkstoff - R.F.A. - n°2 - février 1966

S9 SCHNIEWIND A.P. - CENTENO J.C.
Fracture toughness and duration of load factor
Wood and Fiber - Madison - Wisc - Vol. 5 - n°2 - 1973

S10 SCHNIEWIND A.
Fracture thoughness and duration of load factor II. Duration factor for cracks propagating perpendicular to the grain
Wood Fiber - Vol. 9 - n°3 - pp. 216 - 226 - 1977

S11 SCHNIEWIND A.P. - BARRET J.D.
Wood as a linear orthotropic viscoelastic material
Wood Science and Technologie - New York - Vol. 6 - n°1 - 1972

S12 SCHNIEWIND A.P.
Recent progress in the study of the rheology of wood
Wood Science and Technology - Vol. 2 - n°3 - 1968

S13 SCHNIEWIND A.P. - POZNIAK R.A.
On the fracture toughness of Douglas-fir wood
Pargamon Press - Londres - 1971

S14 SCHWAB E. - POLACZEK P.
Bestimmung der Schubmoduln von Holz durch statische Torsionsversuche
Beitray zur Neufassing DIN 52 190
Holz als Roh - und Werkstoff - Berlin - 35e année - n°1 - janvier 1977

S15 SEICHEPINE J.L.
Mise au point d'une méthode expérimentale destinée à l'identification de la matrice des complaisances élastiques de solide anisotropes : application au matériau bois
Thèse de Docteur-Ingénieur - Institut National Polytechnique de Lorraine - octobre 1980

S16 SEKHAR A.C.
The deflections of square wood plates with clamped edges under different grain angles
Materialprüfung - Düsseldorf - R.F.A. - n°5 - 1968

S17 SEKHAR A.C. - RAJPUT S.S.
On the estimation of total work and work to maximun load in static bending tests on small clear specimens of timber
Materialprüfung - Düsseldorf - R.F.A. - décembre 1966

S18 SELL J.
Eigenschaften und Kenngrössen von Holzarten
LIGNUM - Zürich - (1980)

S19 SELLEVOLD E.J. - RADJY F. - HOFFMEYER P.
Low temperature internal friction and dynamic modulus for beach wood
Wood and Fiber - Madison - Wisc - Vol. 7 - n°3 - 1975

S20 SENFT J.F.
Further studies in combined bending and tension strength of structural 2 by 4 lumber
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 23 - n°10 - octobre 1973

S21 SENFT J.F. - SUDDARTH S.K.
Strength of structural lumber under combined bending an tension loading
Forest Products Journal - Madison - E.U. - juillet 1970

S22 SIMPSON W.T. - SKAAR C.
Effect of transverse compressive stress on loss of wood moisture
Forest Products Laboratory - Research Paper - 197 - juillet 1968

S23 SHUKLA N.K. - RAJPUT S.S.
A note on the relationship between different mechanicla properties of timber
Holzforschung und Holzverwertung - Vienne - 31e année - n°5 - octobre 1979

S24 SHULER C.E. - GRANT D.A. - MOODY R.C.
Evaluation of glued laminated beams of eastern spruce and eastern hemlock
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 29 - n°7 - juillet 1979

S25 SLIKER A.
Strain as a function of stress, stress rate, and time at 90° to the grain in sugar pine
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 10 - n°4 - avril 1978

D26 SLIKER A.
Young's modulus of woos as affected by strain rate, grain angle, and stress level
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 7 - n°3 - janvier 1975

S27 SLIKER A.
Joist deflections dimulated by a computer program
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 22 - n°9 - septembre 1972

S28 SMETANA J.A. - KELSO P.W.
Piezoelectric charge density measurements on the surface of Douglas-fir
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 3 - n°3 - janvier 1971

S29 SMITH W.E. - BYRD L.
Fiber bonding and tensile stress-strain properties of earlywood and late wood handsheets
Forest Products Laboratory - Research Paper FPL 193 - 1972

S30 SOBUE N. - IWASAKI Y.
Effect of veneer construction on anisotropy of dynamic viscoelasticity of plywood
Journal of Japan Wood Research Society - Tokyo - Vol. 27 - n°6 - 1981

S31 SONO P. - VIDHAYBHORN C.
The effects of cross-grain on mechanical properties of teck (Tectona grandis)
Ministry of Agriculture - Forest Department n°47 - Bangkok - Thaïlande - 1963

S32 STELLER S.
Niektoré nové poznatky o reologickych vlastnostiach drevnych materialov
Drevo - Prague - Vol. 32 - n°7 - juillet 1977

S33 STRICKLER M.D. - PELLERIN R.F. - MARTIN J.W.
Duration of load characteristics of structural members in bending and tension
Washington State university - College of Engineering - Bull. 340 - Engineering extension service - Washington - 1976

S34 STRICKLER M.D. - PELLERIN R.F.
Rate of loading effect on tensile strength of wood parallel to grain
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 23 - n°10 - octobre 1973

S35 STUPNICKI J.
Analysis of the behavior of wood under external load based on a study of the cell structure
Acta Polytechnica Scandinavica - Trondheim - Norvège - Engineering and Building construction - n°53 - 1968

S36 SUDDARTH S.K. - WOESTE F.E. - GALLIGAN W.L.
Differential reliability : probabilistic engineering applied to wood members in bending/tension
Forest Products Laboratory - Research Paper FPL 302 - Madison - Wisc - 1978

S37 SUDDARTH S.K. - WOESTE F.E. - YAO J.T.P.
Effect of E. Varaibility on the deflection behavior of a structure
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 25 - n°1 - janvier 1975

S38 SUGIYAMA H.
On the effect of the loading time on the strength properties of wood - A review of Japonese research
Wood Science and Technology - Berlin - 1967

S39 SUMIYA K. - SUGIHARA H.
On the fluctuation of bending strength and delay of fracture in bending of wood
Journal of the Japan Wood Research Society - Vol. 7 - n°4 - août 1961

S40 SUNLEY J.G.
Grade stresses for structural timbers
Forest Research Laboratory - Princes Risborough - Bucks - 1968 - (Bulletin n°47)

S41 SUPERFESKY M.J. - RAMAKER T.J.
Hard board - webbed I-beams subjected to short - term loading
Forest Products Laboratory - Research Paper FPL 264 - Madison - Wisc - 1975

S42 SUZUKI M.
Internal friction in wood in relation to wooden structure
Journal of Japan Research Society - Tokyo - Vol. 25 - n°10 - 1979

T1 TAKAHASHI A. - NAKATO K.
Strain determination of wood by using photoelastic coating technique. III : on the relation between elastic modulus and the strain distributions of photoelastic coating
Journal of the Japan Wood Research Society - Japon - octobre 1964

T2 TAKAHASHI A. - SCHNIEWIND A.P. - MURAKAMI Y.
Relationship between specific gravity and absorbed energy in impact bending

T3 TAKAHASHI A. - LYON D.E. - SCHNIE W.A.P.
Shear tests of wood using V - notch beam and square plate specimens
Wood and Fiber - Madison - Wisc - Vol. 5 - n°3 - 1973

T4 TAKAMI I.
Strength of circular - curved laminated wood
Journal of the Japan Wood Research Society - Tokyo - Vol. 24 - n°8 - 1978

T5 TAKEMURA T.
Plastic properties of wood in relation to the non-equilibrium states of moisture content
Journal of the Japan Wood Research Society - Tokyo - décembre 1968

T6 TANG R.C. - HSO N.N.
Dynamic young's moduli of wood related to moisture content
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 5 - n°1 - juillet 1972

T7 TANG R.C.
The effect of shear and Poisson's ratio in the static bending of wood beams
Wood Science and Technology - New York - Vol. 26 - n°4 - 1972

T8 TAUCHERT T.R. - HSU N.N.
Shrinkage stresses in wood logs considered as layered, cylindrically orthotropic materials
Wood Science and Technology - New York - Vol. 11 - n°1 - 1977

T9 THUNEL B.
Methods to determine the effect of knots on the strength of timber by timber by visual inspection
Swenska Träforskningsinstitutet - Stockolm - 1979

T10 THUNEL B.
Flexural Strength stiffness relationship for structural swedish softwoods
Paperi Ja Prur - Papper och Tra - Helsinki - Vol. 52 - mai 1970

T11 TICHY R.J. - BODIG J.
Flexural properties of glued - laminated ladgepole pine dimension lumber
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 28 - n°3 - mars 1978

T12 TOMIN M.
Zur Rissausbreitung im Holz bei Schwingbeanspruchung
Holztechnologie - Leipzig - 18e année - n°1 - mars 1977

T13 TOMIN M.
Fracture of wood induced by sharp inclusions
Drevarsky vyskum - Bratislava - Vol. 18 - n°3

T14 TOMIN M.
Influence of wood orthotropy on basic equations of linear fracture mechanics
Drevarsky vyskum - Bratislava - Vol. 16 - n°4 - 1971

T15 TOMOMATSU A. - FUSHITANI M. - KABURAGI J.
Impact bending fracture of wood
Journal of the Japan Wood Research Society - Tokyo - Vol. 26 - n°10 - 1980

T16 TREMBLAY G.A. - GOODMAN J.R. - CRISNELL M.E.
Non linear analysis of layered T - beams with interlayer slip
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 9 - n°1 - juillet 1976

T17 TRENARD Y.
Etude de la compressibilité isostatique de quelques bois
Holzforshung - Berlin - Vol. 31 - n°5 - octobre 1977

T18 TRIBOULOT P. - JODIN P. - PLUVINAGE G.
Mesure des facteurs d'intensité de contrainte critique et des taux de restitution d'énergie dans le bois sur éprouvettes entaillées

Anales des Sciences Forestières - 39 (1) p. 63 - 76 - 1982

T19 TRYON E.H. - LITWIN P.J. - HAMILTON J.R.
Three methods of determining hardness of increment core segments
Wood and Fiber - Madison - Wisc - Vol. 7 - n°4 - 1976

T20 TSAI S.W. - WU E.M.
A general theory of strength for anisotropic materials
Journal of Composites Materials - Vol. 5 - janvier 1971 - pp 58 à 80

U1 UGOLEV B.N.
Reologiceskie svaistva drevesiny i vnutrennie naprjojenija
Perspektivy Zakladneho vyskuma dreva - Tchécoslovaquie - 1965

V1 VAFAI A.
Shear moduli in three planes of chenar and red jangali
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 11 - n°2 - octobre 1978

V2 VILLIERE A.
Moyens pratiques pour obtenir quelques caractéristiques des bois métropolitains
Bulletin d'Informations Techniques - Centre Tecnique du Bois - Paris - n°74 - novembre 1975

V3 VINH T.
Mesures ultrasonores de constantes élastiques des matériaux composites
Bulletin des Sciences et Techniques de l'Armement - 54 - 2e FASC. - 1981

W1 WAGENFUHR R.
Einfluss der anatomischen Struktur auf die technologischen Eigenschaften des Holzes
Holztechnologie - Leipzig - 20e année - n°4 - décembre 1979

W2 WALSH P.F.
Cleavage fracture in timber
Commonwealth Scientific and Industrial Research Organisation - Melbourne - Austr. - 1971

W3 WALTERS C.S. - REISS W.L.
Predicting modulus of rupture from modulus of clasticity for small, clear specimens of oak and cottonwood
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 27 - n°6 - juin 1977

W4 WARREN W.G. - MADSEN B.
Computer assisted experimental design in forest products research : a case study based on testing the duration - of - load effect
Forest Products Journal - Madison - Wisc - Vol. 27 - n°3 - mars 1977

W5 WARREN W.G.
Notes on the estimation of the extreme values as relevant to the determination of allowable stress
Western Forest Products Laboratory - Vancouver - 1972

W6 WARREN W.G.
Sampling strategies for destructive tests
Wood and Fiber - Madison - Wisc - Vol. 7 - n°3 - 1975

W7 WILKINSON T.L. - ROWLANDS R.E.
Influence of elastic properties on the stresses in bolted joints in wood
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 14 - n°1 - juillet 1981

W8 WILKINSON T.L.
Effect of deformed shanks, prebored lead holes, and grain orientation on the elastic bearing constant for laterally loaded nail joints
Forest Products Laboratory - Research Paper FPL 191 - Madison - Wisc 1972

W9 WILKINSON T.L.
Vibrational loading of mechanically fastened wood joints
Forest Products Laboratory - Research Paper FPL 274 - Madison - Wisc 1976

W10 WILKINSON T.L.
Bearing strength of wood under embedment loading of fasteners
Forest Products Laboratory - Research Paper FPL 163 - Madison - Wisc - 1971

W11 WILLIAMS R.S. - REIFSNIDER K.I.
Investigation of acoustic emission during fatigue loading of composite specimens
Journal of composite materials - Vol. 8 - p. 340 - octobre 1974

W12 WOESTE F.E. - SUDDARTH S.K. - GALLIGAN W.L.
Simulation of correlated lumber properties data - A regression approach
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 12 - n°2 - octobre 1979

W13 WOLFE R.W. - MOODY R.C.
Bending strength of water - soaked glued laminated beams
Forest Products Laboratory - Research Paper FPL 307 - Madison - Wisc - 1978

W14 WOLFE R.W. - MOODY R.C.
Bending strength of vertically glued laminated beams with one to five plies
Forest Products Laboratory - Research Paper FPL 333 - Madison - Wisc - 1979

W15 WOODWARD C.
Fractured surfaces as indicators of cell wall behavior at elevated temperatures
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 13 - n°2 - octobre 1980

W16 WU-CHUNG LEE - BIBLIS E.J.
New Approach for determination of elastic constants of orthotropic Wood Base Plates by Strip Bending and Plate Twisting
Wood Science - Madison - Wisc - Vol. 9 - n°4 - avril 1977

Y1 YLINEN A.
Vergleichende Untersuchung über den Einfluss der Belastungs - und der Verformungsgeschwin dig keit auf die Bruchfestigkeit des Holzes
Holz als Roh - und Werkstoff - n°5 - Allemagne - mai 1963

Y2 YLINEN A.
Uber die Bestimmung der zeitbedingten elastischen und Festigkeitseigenschafften des Holzes mit Hilfe eines allgemeinen nicht linear visko-elastischen rheologischen Modelles
Holz als Roh - und Werkstoff - n°5 - mai 1965

Z1 ZENKER R. - MULLER-STOLL W.
Einfluss der Zugholzfasem auf die Festigkeitseigenschaften des Pappels - holzes in nassem un trockenem Zustand
Holztechnologie - R.D.A. - n°1 - février 1966

2.2 Communications

2.2 Contributed Papers

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 413-426

Symétries matérielles du matériau bois : données morphologiques et conséquences physiques

Material symetries in wood : morphological data and physical consequences

C. LE GOVIC, Y. TRENARD, C. HUET

Centre Technique du Bois et de l'Ameublement
10, avenue de Saint-Mandé, 75012 Paris
et Groupement Scientifique Rhéologie du Bois
G.S. CNRS n° 81

RESUME

Le comportement élastique du bois est le plus souvent décrit à l'aide des modèles orthotrope cartésien ou orthotrope cylindrique.

De nombreux résultats expérimentaux font alors apparaître de façon significative une dissymétrie du tenseur des coefficients élastiques, ceci sans qu'une explication fondamentale puisse être fournie dans ce cadre.

A partir de l'étude des opérations de symétrie ponctuelle compatibles (ou incompatibles) avec la microstructure du bois et de l'existence de propriétés physiques telle que la piézoélectricité, nous envisageons un autre type de modèle comportant un degré de symétrie inférieur à celui du cas orthotrope.

ABSTRACT

The elastic behaviour of wood is mostly described using cartesian orthotropic or cylindrical orthotropic schemes.

Many experimental results show off clearly a dissymetry of the elasticity coefficient tensor, a fundamental explanation of which cannot be given in this framework.

From the study of punctual symmetry operations compatible (or incompatible) with the wood microstructure and from the existence of physical properties such as piezoelectricity, we consider an other kind of scheme involving a degree of symmetry inferior to the degree of the orthotropic case.

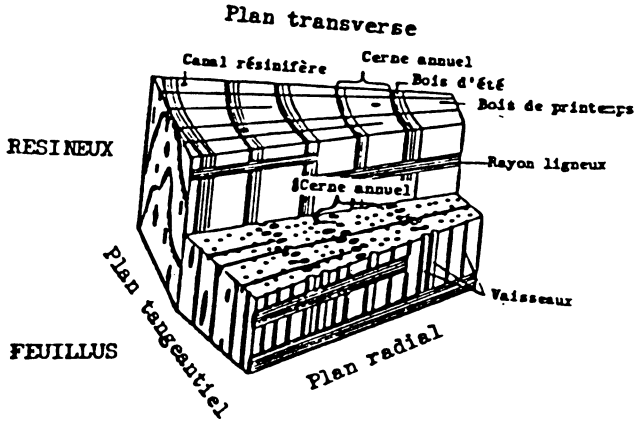
1 - INTRODUCTION

De nombreux résultats expérimentaux font apparaître de façon significative une dissymétrie du tenseur des constantes élastiques (19), ainsi les premiers résultats d'une récente étude sur la détermination expérimentale des constantes rhéologiques du hêtre (18). Deux thèmes doivent être abordés pour comprendre et supprimer cette dissymétrie : le premier concerne les erreurs induites par les essais mécaniques en relation avec l'anisotropie de ce matériau, les intervalles de confiance des mesures, etc ... Le second que nous aborderons ici est l'étude du schéma d'interprétation communément admis qu'est le schéma orthotrope, ceci en liaison avec les différents niveaux de la structure du bois responsable de l'anisotropie et en utilisant une propriété physique du bois qu'est la piézoélectricité.

2 - INTRODUCTION : LE MATERIAU BOIS

Dans l'arbre, le tronc et les branches sont formés de cellules issues d'une zone génératrice périphérique, le CAMBIUM produisant le bois (1). Dans nos climats l'assise génératrice fonctionne de façon saisonnière : au printemps elle élabore un type de bois aux caractéristiques anatomiques et aux propriétés mécaniques différentes de celui élaboré en été (2). De plus elle cesse toute activité à l'automne produisant ainsi des zones concentriques visibles, les cernes annuels. La largeur des cernes, les proportions de bois de printemps et de bois d'été sont variables. A l'intérieur d'un cerne le passage du bois de printemps au bois d'été se fait d'une manière assez continue. Les cellules de bois de printemps ont un diamètre relativement grand et une épaisseur de paroi assez faible (2 µm) donnant un lumen assez large. Les cellules de bois d'été ont un petit diamètre, une épaisseur de paroi importante (10 µm) et par suite un lumen très étroit (3).

Le type des cellules, leur taille, leur organisation varient entre les essences feuillues et résineuses et selon l'espèce. Ces caractéristiques définissent le plan ligneux (figure 1).



Le bois a pour constante d'être composé dans sa plus grande part de cellules allongées (trachéides chez les résineux, fibres chez les feuillus) disposées à 90 % - 95 % suivant l'axe du tronc (longitudinalement), et formant le fil du bois.

On voit apparaître là une première anisotropie, à l'échelle macroscopique.

Les cellules constitutives du bois (fibres ou trachéides) sont liées par un ciment, la lamelle moyenne (M). Leur membrane est constituée de deux parois, primaire (P), et secondaire (S). Cette dernière est elle-même formée de 3 couches concentriques appelées S_1, S_2, S_3.

La couche S_2 de la paroi secondaire est la plus importante en épaisseur (85 % de l'épaisseur de la paroi cellulaire pour Picea Abies). Elle serait elle-même composée de lamelles (2, 20) ou d'un treillis (21), constitués par l'enroulement dextre de microfibrilles sur l'axe de la cellule ligneuse suivant un angle qui varie entre 10 et 30 degrés. Ces microfibrilles sont constituées de faisceaux de fibrilles de cellulose (sous forme cristalline et amorphe) entourées par une matrice amorphe de lignine et d'hémicellulose (figure 2).

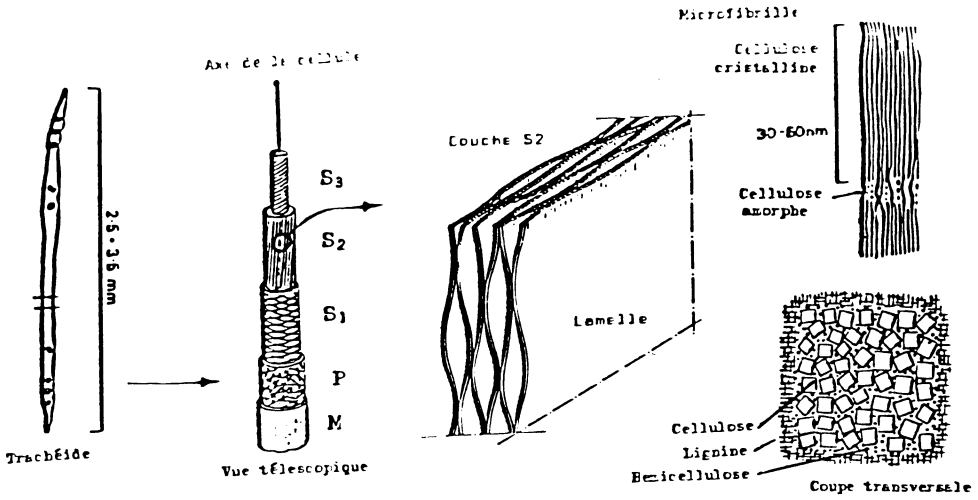


Figure 2 : structure et ultrastructure du bois. Réf. (2, 21) et (4)

Le degré de cristallinité de la cellulose varie autour de 60 %.
La taille des cristallites est de 3 x 5 x 60 nanomètres.
Le bois de printemps a un taux de cristallinité plus faible que le bois d'été (12) et un angle des microfibrilles (moyenne des angles des lamelles) généralement plus grand (14).
L'organisation spatiale des cristallites de cellulose (zones cristallines) dans la couche S_2, étudiée par diffraction d'électrons (4, 5), montre qu'elles sont alignées dans la direction principale des microfibrilles alors que, perpendiculairement, leur disposition spatiale est aléatoire.
La cellulose cristallise dans le système monoclinique ayant comme groupe d'espace $P2_1$, l'axe binaire étant suivant la direction c, direction de la microfibrille. Le motif cristallin est constitué de molécules de cellobiose (molécule polaire). Les dimensions de la maille et le nombre de molécules de cellobiose par motif varie entre auteurs (6, 16). La référence (6) donne :
$a = 13{,}4$ Å ; $b = 15{,}72$ Å ; $c = 10{,}38$ Å ; $\beta = 97°$; le motif comporte huit molécules de cellobiose orientées parallèlement.

3 - OPERATIONS DE SYMETRIE : COMPORTEMENT ELASTIQUE ET PIEZOELECTRICITE

3.1. - Opérations de symétrie élémentaires

Une opération de symétrie ponctuelle est une transformation qui fait coïncider un motif original avec d'autres motifs équivalents dans l'espace. L'ordre de l'opération de symétrie est le nombre de points équivalents par cette opération de symétrie. Les opérations de symétrie que nous utiliserons (11) sont :

a) Rotation autour d'un axe :
Cette opération de symétrie, notée A_n, donne les points équivalents par rotation autour d'un axe d'un angle $2\pi/n$; n est l'ordre de l'axe de symétrie.
b) Symétrie par rapport à un plan ou miroir
Cette opération de symétrie notée m, d'ordre 2, transforme un point en son image à travers un miroir.
c) Centre de symétrie
Cette opération de symétrie notée c, d'ordre 2, est une opération de symétrie par rapport à un point c.

3.2. - Produit des opérations de symétrie élémentaires

Par application successive, ces opérations de symétrie se combinent ; on peut générer ainsi d'autres opérations de symétrie.
Ainsi on forme des groupes dont les éléments sont des opérations de symétrie que l'on note par leurs éléments générateurs (notation cristallographique). Il existe 32 groupes cristallographiques qui forment aussi un groupe dont il existe une partition en 7 classes disjointes (7 systèmes cristallins).

Les groupes considérés par la suite sont les groupes :
222 (3 axes de rotation d'ordre 2 perpendiculaires)
422 (1 axe de rotation d'ordre 4 avec perpendiculairement 4 axes de rotation d'ordre 2)
622 (1 axe de rotation d'ordre 6 avec perpendiculairement 6 axes de rotation d'ordre 2)
A∞ (1 axe de rotation d'ordre infini)

Le groupe mmm, (holoédrie énantiomorphe du système orthorhombique) possède trois miroirs perpendiculaires, trois axes binaires et un centre de symétrie (figure 3). Le degré de symétrie du groupe mmm est de 8. La présence de deux miroirs perpendiculaires n'implique pas celle d'un troisième miroir mais celle d'un axe binaire, intersection des deux miroirs.

3.3. - Comportement élastique orthotrope

Un corps possède un plan de symétrie élastique si en chaque point de ce corps il y a identité des propriétés élastiques pour deux directions symétriques données par ce plan : il est dit orthotrope si, en tout point, il possède trois plans de symétrie élastiques orthogonaux. Il s'agit d'une propriété locale. Le groupe de symétrie correspondant est le groupe mmm décrit précédemment. Son action est de réduire à neuf le nombre des composantes indépendantes de la matrice des constantes élastiques ($a_{\alpha\beta}$) (tableau 1).

$$A_{\alpha\beta}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{44} & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & & a_{55} & 0 \\ & & & & & a_{66} \end{bmatrix}$$

Tableau 1 : Coefficients élastiques d'un matériau orthotrope

Pour passer continûment d'un point à un autre où siègent localement les propriétés de symétrie, deux cas sont à envisager pour le bois suivant un repère cartésien (orthotropie cartésienne) ou suivant un repère cylindrique (orthotropie cylindrique).

La géométrie cylindrique nécessite l'existence supplémentaire d'un axe, l'axe d'anisotropie (figure 3), tel que :
- toutes les directions parallèles à cet axe sont équivalentes (direction longitudinale) ;
- toutes les directions orthogonales passant par l'axe d'anisotropie sont équivalentes (direction radiale) ;
- toutes les directions orthogonales aux deux précédentes sont équivalentes (direction tangentielle).

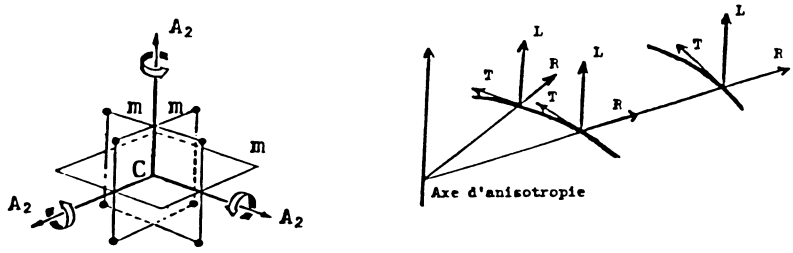


Figure 3 : groupe orthotrope - repère cylindrique

3.4. - Matériau bois

Localement en tout point on peut définir un repère lié aux directions d'anisotropie : direction radiale (R), tangentielle (T), longitudinale (L) et il est communément admis que le bois est orthotrope, possédant trois plans de symétrie orthogonaux RT, RL, LT.

A l'échelle de la grume, en assimilant les cernes à des cercles parfaits, la grume est un corps orthotrope à symétrie cylindrique. A l'échelle d'une éprouvette de faibles dimensions par rapport à la grume dont elle est issue, celle-ci peut être considérée comme constituant un milieu orthotrope cartésien si on néglige la courbure des cernes. Le fait d'utiliser un repère cartésien est commode car il permet l'existence d'un repère commun à l'ensemble des points de l'éprouvette. La justification macroscopique de cette hypothèse est liée à la localisation de l'éprouvette dans l'arbre, à ses dimensions, ainsi qu'à l'âge de l'arbre dont elle est issue.

Le bois est donné comme un milieu orthotrope sans que sa microstructure fibreuse orientée soit prise en compte.

C'est pourquoi à partir de données microstructurales précédentes et de la piézoélectricité, nous allons associer des groupes de symétrie aux différents niveaux de structure du bois.

La piézoélectricité est exclusivement due aux cristallites de cellulose. Au contraire, celles-ci n'interviennent que partiellement dans les propriétés d'élasticité du bois (13, 21, 22) : les propriétés élastiques du bois sont dues à la cellulose qui est un haut polymère cristallin mais aussi aux autres constituants ainsi qu'à leurs proportions et arrangement mutuels (25, 26, 27).

Pour notre propos nous ne considérons que les cristallites de la paroi S_2 de très loin la plus importante en volume.

4 - LE BOIS MATERIAU PIEZOELECTRIQUE

La piézoélectricité est la propriété que possèdent certains corps de se polariser électriquement sous l'action d'une tension mécanique (effet direct) et de se déformer sous l'effet d'un champ électrique (effet inverse).

L'effet piézoélectrique a été découvert en 1880 par Pierre et Jacques CURIE et la piézoélectricité du bois, en 1940, par SHUBNIKOV (10).

4.1. - L'effet piézoélectrique

Cet effet physique s'écrit, en notation d'Einstein (8), par deux relations (1) et (2) :

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j + e_{imn} S_{mn} \qquad (1)$$

$$T_{kl} = - e_{jkl} E_j + C_{klmn} S_{mn} \qquad (2)$$

Ces deux relations ne sont pas réciproques et sont nécessaires pour la définition de ce comportement.
Avec :

Grandeurs physiques

E_j : composantes du vecteur champ électrique
D_i^j : composantes du vecteur induction électrique
S_{mn}^i T_{kl} : composantes des tenseurs des déformations et des contraintes, tenseurs symétriques d'ordre 2.

Propriétés physiques

e_{imn} : composantes du tenseur des modules piézoélectriques, tenseur d'ordre 3, ayant 18 composantes indépendantes (on notera entre (1) et (2) la transposition sur le premier et le couple des deux derniers indices)
ε_{ij} : composantes du tenseur diélectrique - tenseur d'ordre 2
C_{klmn} : composantes du tenseur des rigidités élastiques - tenseur d'ordre 4.

En utilisant la notation matricielle les modules piézoélectriques se rangent sous un tableau de la forme :

$$\left[e_{i\alpha} \right] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix}$$

La symétrie matérielle a pour effet de réduire le nombre de composantes indépendantes.
Nous reportons l'action des groupes ponctuels utilisés :

Groupe 222

$$\left[e_{i\alpha} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{36} \end{bmatrix}$$

Groupes 422, 622 (les axes 4 et 6 étant suivant L)

$$\left[e_{i\alpha}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tous les groupes possédant dans leurs éléments un centre de symétrie (groupe centrosymétrique) annulent la totalité des modules piézoélectriques. On notera que les groupes 422 et 622 sont indiscernables à partir des seules propriétés piézoélectriques. Nous noterons 622 - 422 la réunion de ces deux groupes.

4.2. - Piézoélectricité du bois

Deux méthodes différentes ont été utilisées dans la littérature pour établir expérimentalement le tenseur des modules piézoélectriques :

- une méthode dynamique sur des échantillons très fins, constitués par un seul type de bois parmi les deux présents à l'intérieur d'un cerne (FUKADA) (9) et une méthode statique sur des éprouvettes de bois massif comportant plusieurs cernes (BAZHENOV) (10).

Les formes des tenseurs piézoélectriques observées sur les deux types d'échantillons (fin et massif) sont différentes et correspondent à deux groupes de symétrie différents : groupe de symétrie 222 pour le bois massif, groupe 622 - 422 pour les deux bois constitutifs du cerne (données expérimentales).

Un paramètre important est l'angle microfibrillaire : quand sa valeur diminue, les modules piézoélectriques augmentent en valeur absolue, ce qui correspond à un meilleur alignement des cristallites de cellulose suivant l'axe longitudinal.

La conséquence la plus importante de l'existence de la piézoélectricité du bois est qu'elle exclut la présence d'un centre de symétrie : on ne peut considérer comme valable un schéma qui considère localement la présence de 3 plans de symétrie orthogonaux car ceux-ci imposent la présence d'un centre de symétrie.

On va reconsidérer ce schéma en associant des opérations de symétrie à la distribution spatiale des cristallites en partant du niveau de structure le plus simple, l'hélice microfibrillaire, pour remonter au niveau macroscopique du bois massif.

5 - NIVEAU DE STRUCTURE ET SYMETRIE ASSOCIEE

L'opération de symétrie correspondant à la distribution d'un motif dans une hélice est un axe de rotation avec translation suivant l'axe de cette hélice.

L'opération de symétrie correspondant à la distribution des cristallites dans une microfibrille est de cette nature ; dans les

parois S_2 l'opération de symétrie est un axe de rotation d'ordre infini : pour une cristallite, il en existe un très grand nombre équivalentes par cette opération (figure 4).

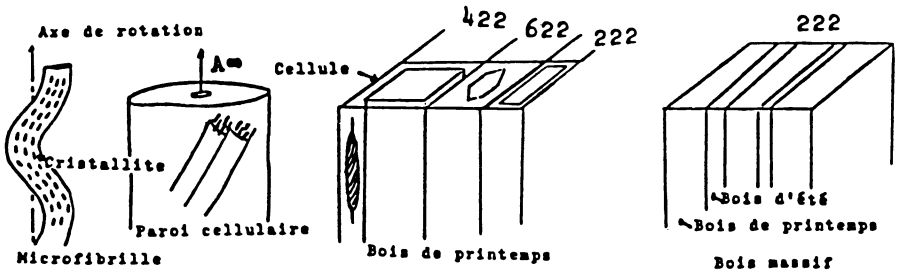


Figure 4 : niveau de structure et opérations de symétrie associée

Dans la paroi la présence de miroirs est exclue par l'enroulement en spirale dextre des microfibrilles (figure 5), car l'action d'un plan de symétrie est de transformer une hélice dextre en une hélice senestre, ce qui est contraire aux données ultrastructurales du bois (15).

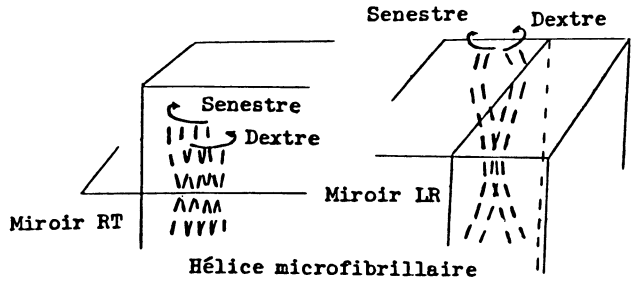


Figure 5 : action des plans de symétrie sur l'hélice microfibrillaire

Ces parois constituent les cellules, volumes allongés de section variable : hexagonale, carrée ou rectangulaire. L'ordre de base A_∞ doit être réduit en relation avec la forme de la cellule ligneuse.

Comme on l'a vu plus haut, les travaux de FUKADA ont fait apparaître un groupe de symétrie 622-422 pour chacun des deux bois constituant le cerne annuel. Ceux de BAZHENOV concernant le bois massif ont fait apparaître le groupe 222. Or si les cellules d'une zone de bois homogène composée de cellules identiques sont à section carrée, le groupe de symétrie fourni par une telle microstructure est 422 et 622 si

la section des cellules est hexagonale. Par contre pour le bois massif intégrant un grand nombre de cernes, le groupe de symétrie est 222, qui est l'intersection des groupes 422 et 622 et qui correspond aussi à une section rectangulaire. Il est à noter que dans un modèle pour expliquer l'anisotropie élastique (23), il a été envisagé une organisation avec des cellules de bois de printemps ayant une section hexagonale et carrée pour celles du bois d'été. Les observations expérimentales de FUKADA d'une part et de BAZHENOV d'autre part sont donc cohérentes avec les données fournies par l'analyse de la microstructure du bois.

La présence d'axes binaires perpendiculairement aux axes de rotation axiaux d'ordre 2, 4 et 6 n'est pas a priori exclue par l'existence de la piézoélectricité et par l'enroulement des microfibrilles en spirale dextre dans la paroi S_2.

Pour le bois massif, le groupe de symétrie 222, au degré de symétrie égal à deux, lié à la disposition des cristallites de cellulose des parois S_2 a pour action de réduire à neuf le nombre des constantes élastiques indépendantes avec le même tableau des coefficients (donné au 3.3), que pour le groupe mmm. Tous les groupes du système orthorhombique ont la même action sur le tableau des coefficients élastiques (8).

L'action des deux groupes 422 et 622 sur le tableau des coefficients élastiques est donnée ci-dessous (tableaux 2 et 3) :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\ & a_{11} & a_{13} & & & \\ & & a_{33} & & 0 & \\ & & & a_{44} & & \\ & & & & a_{44} & \\ \text{sym} & & & & & a_{66} \end{bmatrix}$$

Tableau 2 : Coefficients élastiques d'un matériau du groupe 422 (6 composantes indépendantes)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\ & a_{11} & a_{13} & & 0 & \\ & & a_{33} & & & \\ & & & a_{44} & & \\ & & & & a_{44} & \\ \text{sym} & & & & & 2(a_{11}-a_{12}) \end{bmatrix}$$

Tableau 3 : Coefficients élastiques d'un matériau du groupe 622 (5 composantes indépendantes)

Nous ne disposons pour le moment d'aucune donnée expérimentale pour trancher entre les deux groupes 422 et 622.

6 - CONCLUSION

A partir de deux faits convergents nous avons pu exclure pour le bois le schéma orthotrope qui considère localement la présence de trois plans de symétrie.

Ces deux faits sont :
- la piézoélectricité qui exclut la centrosymétrie ;
- l'action d'un plan de symétrie qui transforme une hélice dextre de S_2 en une hélice senestre non existante.

La piézoélectricité nous fait considérer le groupe 222 comme lié à la disposition des cristallites de cellulose dans le bois massif (constitué d'un grand nombre de cernes), aussi responsable de la forme du tenseur des constantes élastiques. Cependant l'action du groupe222 sur le tableau des coefficients élastiques est la même que celle du groupe orthotrope mmm. On peut donc dire que le bois a bien un comportement élastique du type orthotrope bien que le bois ne soit pas orthotrope au sens des opérations de symétrie. La non symétrie apparente de la matrice des constantes élastiques ne peut donc être attribuée à la prise en compte d'un schéma de symétrie matérielle inadapté. L'origine de cette anomalie est donc à rechercher ailleurs, par exemple dans les conditions de réalisation des essais mécaniques eux-mêmes. Il serait intéressant d'étudier par ailleurs, la forme d'autres tenseurs en relation avec la microstructure : par exemple le tenseur diélectrique (17).

Enfin on peut mentionner une autre conséquence de la piézoélectricité du bois.

Dans un matériau piézoélectrique, l'interdépendance entre grandeurs électriques et mécaniques implique un couplage entre ondes élastiques et ondes électromagnétiques. L'équation (2) introduit dans les équations de la dynamique des termes contenant le champ électrique. Les ondes élastiques sont accompagnées d'un champ électrique (qui crée un champ magnétique) ce qui a pour effet, dans certaines directions de propagation, de modifier les vitesses de propagation de ces ondes planes élastiques et donc de modifier (durcir) les constantes élastiques déterminées à partir des mesures de célérité, par exemple dans la méthode ultrasonore (8).

Compte tenu du fait que le bois a des valeurs de constantes piézoélectriques faibles (plus de dix fois inférieures à celle du quartz) il serait intéressant de voir si cet effet est décelable.

Enfin, on notera que l'existence pour le bois de la piézoélectricité, qui se traduit par une loi de comportement de la forme (2) reliant la contrainte T et la déformation S, ne conduit pas à modifier les symétries du tenseur C des rigidités élastiques dues à l'existence d'un potentiel thermodynamique à l'équilibre dont la variation s'écrit dans ce cas de l'énergie libre volumique :

$$dF = - \eta d\tau + T_{ij}\, dS_{ij} + E_k . dD_k$$

Le premier terme est celui de température, notée τ, (η étant l'entropie massique), le second est celui du travail mécanique et le troisième est le terme diélectrique.

Ceci tient au fait que C apparaît comme bloc diagonal dans la relation (3) ci-dessous, écriture matricielle des relations (1) et (2), alors que les blocs non diagonaux comme le tenseur des modules piézoélectriques e, se correspondent par antisymétrie, la transposition se faisant entre le premier indice d'une part, les deux derniers d'autre part :

$$\left[\frac{D_i}{T_{kl}}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \varepsilon_{ij} & e_{imn} \\ \hline -e_{jkl} & C_{klmn} \end{array}\right] \left[\frac{E_j}{S_{mn}}\right] \qquad (3)$$

L'antisymétrie des blocs non diagonaux dans la relation (3) provient du fait qu'à champ électrique constant, une déformation crée une induction électrique

$$\left[\frac{\partial D_i}{\partial S_{jk}}_{T,E}\right] = e_{ijk}$$

alors que l'application d'un champ électrique fait apparaître une contrainte dans le matériau

$$\left[\frac{\partial T_{jk}}{\partial E_i}_{T,S}\right] = - e_{ijk} \qquad \text{(à déformation constante).}$$

Ceci se démontre aisément en écrivant l'égalité des dérivées secondes du potentiel thermodynamique $J = F - E_i D_i$, F étant l'énergie libre, le changement de signe provenant de l'effet de la transformation de Legendre faisant passer de $F(\tau, S, D)$ à $J(\tau, S, E)$ avec :

$$dJ = - \eta \, d\tau + T_{ij} \, dS_{ij} - D_k \, dE_k$$

La symétrie de la matrice totale est rétablie si dans la relation (3) on prend (- D) comme variable dépendante. De plus dans la relation (3) on a pris $d\tau = 0$, en ne considérant que les transformations isothermes. Ceci revient à ne pas prendre en compte la quasi adiabacité des phénomènes qui peuvent se produire aux hautes fréquences mises en jeu dans les mesures par ultrasons.

REFERENCES

(1) H. CAMEFORT, Morphologie des végétaux vasculaires, DOIN (1972), Paris.

(2) J.M. DINWOODIE, Timber its nature and behaviour, VAN NOSTRAND REINHOLD (1979).

(3) Wood, its structure and properties, V11, WANGAARD (1981).

(4) J.F. REVOL, C. GANCET and D.A.I. GORING, Orientation of cellulose crystallites in the S_2 layer of spruce and birch wood cell walls, Wood Sci. 14, n° 3, 120 (1982).

(5) F. TANAKA, and T. KOSHIJIMA, Orientation distributions of cellulose crystallites in pinus denuflora woods, Wood Sci. Technol. 18, 1975 (1974).

(6) K.H. GARDNER and J. BLACKWELL, The structure of native cellulose, Biopolymers 13, 1975 (1974).

(7) LEKHNITSKII, Theory of elasticity of an anisotropic body, HOLDEN DAY (1963), San Francisco.

(8) E. DIEULESAINT et D. ROYER, Ondes élastiques dans les solides, MASSON, (1974), Paris.

(9) E. FUKADA, Piezoelectricity as a fundamental property of wood, Wood Sci. Technol. 2, 299 (1968).

(10) V.A. BAZHENOV, The piezoelectric effect in wood, 5th World Foresty Congress, 1323 (1960).

(11) D.S. SCHONLAND, La symétrie moléculaire, GAUTHIER VILLARS, (1971), Paris.

(12) G. IFJU, Tensile strenght behaviour as a function of cellulose in wood, Forest Product Journal, 366 (Août 1964).

(13) W.G. KAUMAN, Ecole d'hiver d'ARBOLOR (Janvier 1983).

(14) G. IFJU and R.W. KENNEDY, Some variables affecting microtensile strength of Douglas Fir, Forest Product Journal, 213 (May 1962).

(15) D. FENGEL and G. WEGENER, Wood : chemistry, ultrastructure, reactions, DE GRUYTER, (1984), Berlin.

(16) K.H. MEYER and I. MISCH, Helv. Chim. Acta, 20, 232 (1937).

(17) M. NORIMOTO, Dielectric properties of wood, Wood research n° 59-60, 106, (1976).

(18) G. PLUVINAGE, Rapport scientifique (partiel) sur l'étude critique de la détermination expérimentale des constantes rhéologiques du bois. COntrat DGRST n° 81.G.1058 (1984).

(19) J.L. SEICHEPINE, Mise au point d'une méthode expérimentale destinée à l'identification de la matrice des complaisances élastiques des solides anisotropes. Thèse INPL (1980).

(20) KELLER, Ecole d'hiver d'ARBOLOR (Janvier 1983).

(21) J.D. BOYD, New perspectives in wood anatomy, Foresty Science, P. BAAS, (1982), La Haye.

(22) B. MONTIES, Les polymères végétaux, GAUTHIER VILLARS, (1980), Paris.

(23) T. OHGAMA, T. MORCOKA, and T. YAMADA, Elastic modulus of wood as a porous material, Mokuzai Gakkaishi 56, n° 7, 703 (1980).

(24) C. HUET et A. ZAOUI, Comportements rhéologiques et structure des matériaux - Comptes rendus du 15è colloque annuel du Groupe Français de Rhéologie (décembre 1980), Presses de l'ENPC (1981).

(25) E. KRONER, Linear properties of random media : the systematic theory. In C. HUET and A. ZAOUI (1884), infra, 15-40.

(26) C. HUET, Eléments de thermomécanique des matériaux hétérogènes. Cours de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris (1985).

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 427-442

Influence de l'orthotropie locale sur le comportement de poutres curvilignes massives

Influence of local orthotropy on the behaviour of curvilinear solid beams

J.-L. NIETO, M. MUDRY

Laboratoire de Mécanique et d'Energétique
E.S.E.M., Université d'Orléans
Domaine Universitaire, 45046 Orléans Cedex

RESUME

Cette courte étude théorique fait partie d'un programme de développement de méthodes de calcul relatives à des structures lamellées - collées. Nous présentons une famille de solutions analytiques correspondant à des poutres massives curvilignes en élasticité plane, avec introduction d'un critère de TSAI de contrainte admissible. Certaines pouvant être utilisées pour améliorer un calcul en milieu curviligne. Elles servent aussi de test à un programme par éléments finis.

ABSTRACT

This short theoretical work take place in the development of methods of glued -laminated wood based structures. We present here a class of analytical solutions relative to massive curvilinear beams in two dimensional elasticity, with addition of TSAI elasto-plastic criterion. Some of them may be used to improve engeneering estimations, but also to test finite elements computer program.

1 - INTRODUCTION

Une poutre lamellée - collée peut-être décrite de façon naturelle selon un système de coordonnées curvilignes orthogonales résultant très directement du procédé de fabrication (figure 1).

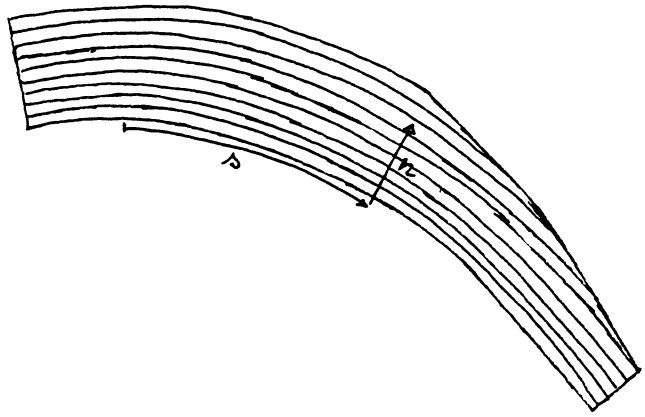


FIGURE 20

Les professionnels envisagent toujours ce type de poutre comme un milieu curviligne (arc élastique) caractérisé par le module d'YOUNG longitudinal du bois. Les charges admissibles sont ensuite évaluées par rapport à la contrainte normale ainsi obtenue dans chaque section.
Ce modèle très simple, qui relève de la résistance des matériaux élémentaire, ne rend compte ni de la massivité de la poutre et du caractère orthotrope du matériau, ni du comportement seuil d'un matériau tel que le bois.

Afin de mieux évaluer ces phénomènes nous considérons ici le cas d'une "poutre" en portion de couronne circulaire telle que ci-dessous, le matériau étant orthotrope et en directions naturelles dirigées selon l'orientation de la base locale des coordonnées polaires associées.

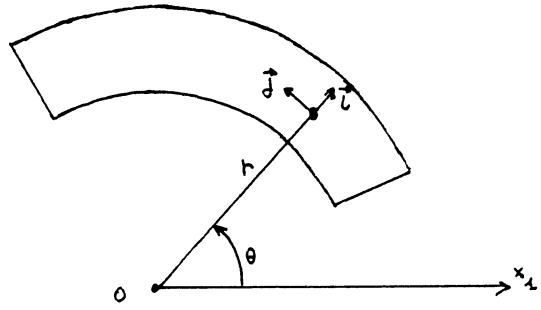


FIGURE 21

Nous recherchons alors, dans l'esprit du cas isotrope, des familles de solutions analytiques, leschamps de contraintes associés étant ensuite comparés à l'application d'un critère de TSAI, envisageable pour un matériau tel que le bois.

2 - EQUATIONS GENERALES

En négligeant la densité d'effets volumiques et en se plaçant en élasticité plane (ici : contraintes planes) en coordonnées polaires, on sait que les composantes du tenseur des contraintes doivent, pour être en équilibre, dériver de la fonction d'AIRY F selon :

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}$$

La détermination de cette fonction, propre au problème considéré, se fait en intégrant l'équation de comptabilité, où on a remplacé les composantes du tenseur des déformations par celles du tenseur des contraintes en fonction de $F(r, \theta)$,

On introduit les constantes élastiques du matériau au niveau de la loi de comportement orthotrope :

$$e_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_{\theta\theta}$$

$$e_{\theta\theta} = -\frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_{rr} + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E_2}$$

$$e_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{2G_{12}}$$

L'équation de compatibilité :

$$\frac{\partial^2 e_{\theta\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial e_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 e_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial e_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}\frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} = 0$$

donne en fonction de F :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial^3 F}{\partial r^3}\right) + 2\alpha\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}\right) + \beta\left(\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} + \frac{2}{r^4}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\right) = 0$$

où :

$$\alpha = \left(\frac{1}{2G_{12}} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\right)E_2 \qquad \beta = \frac{E_2}{E_1}$$

Cette dernière équation remplace la condition de bi-harmonicité vérifiée par la fonction d'Airy dans le cas des matériaux isotropes. Son intégration ne pourra se faire, analytiquement, que dans des cas bien particuliers.

La détermination finale de F s'obtient, après intégration, en introduisant les conditions aux limites du problème.

3 - RECHERCHE DE SOLUTIONS ANALYTIQUES

3 . 1 - Solution de la forme $F(r,\theta) = f(r)$

En portant dans (1), on obtient dans ce cas l'équation différentielle :

$$f^{(4)} + \frac{2}{r} f''' - \beta \frac{f''}{r} + \beta \frac{f'}{r^3} = 0$$

Nous cherchons alors classiquement des solutions de la forme :

$$f(r) = r^p$$

d'où, de manière évidente, en valeurs possibles de P :

$$p=0 \quad , \quad p=2 \quad , \quad p = 1+\sqrt{\beta} \quad , \quad p = 1-\sqrt{\beta}$$

Il vient donc :

$$f(r) = K_1 r^2 + K_2 r^{(1+\sqrt{\beta})} + K_3 r^{(1-\sqrt{\beta})} + K_4$$

Nous en déduisons le tenseur des contraintes lié à cette forme particulière de la fonction d'Airy :

$$\sigma_{rr} = 2K_1 + K_2(1+\sqrt{\beta}) r^{\sqrt{\beta}-1} + K_3(1-\sqrt{\beta}) r^{-\sqrt{\beta}-1}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2K_1 + K_2\sqrt{\beta}(1+\sqrt{\beta}) r^{\sqrt{\beta}-1} - K_3\sqrt{\beta}(1-\sqrt{\beta}) r^{-\sqrt{\beta}-1}$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

3 . 2 - Solution de la forme $F(r,\theta) = f(r) \sin n\theta$.

Ici l'équation (1) donne :

$$\left(f^{(4)} + \frac{2}{r} f''' - \frac{(2\alpha n^2+\beta)}{r^2} f'' + \frac{2\alpha n^2+\beta}{r^3} f' + \frac{(\beta n^4 - 2(\alpha+\beta)n^2}{r^4} f \right) \sin n\theta = 0$$

Limitons nous ici au cas n = 1, il vient :

$$f^{(4)} + \frac{1}{r} f''' - (2\alpha+\beta)\left(\frac{f''}{r^2} - \frac{f'}{r^3} + \frac{f}{r^4} \right) = 0$$

Encore une fois nous cherchons des solutions de la forme $f(r) = r^p$, ce qui entraîne :

$$p = 1 \quad \text{(racine double)}, \quad p = 1+\sqrt{1+\gamma}, \quad p = 1-\sqrt{1+\gamma} \quad \text{où} \quad \gamma = 2\alpha+\beta$$

D'où

$$F(r,\theta) = \left(K_1 r + K_2 r \log r + K_3 r^{1+\sqrt{1+\gamma}} + K_4 r^{1-\sqrt{1+\gamma}} \right) \sin\theta$$

avec $$\gamma = \left(1 - \ell \nu_{12} + \frac{E_1}{\mu_{12}} \right) \frac{E_2}{E_1}$$

Il s'en déduit le tenseur des contraintes suivant :

$$\sigma_{rr} = \left(\frac{K_2}{r} + \sqrt{1+\gamma}\, K_3 r^{\sqrt{1+\gamma}-1} - \sqrt{1+\gamma}\, K_4 r^{-\sqrt{1+\gamma}-1} \right) \sin\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \left(\frac{K_2}{r} + \sqrt{1+\gamma}\,(1+\sqrt{1+\gamma})\, K_3 r^{\sqrt{1+\gamma}-1} - \sqrt{1+\gamma}\,(1-\sqrt{1+\gamma})\, K_4 r^{-\sqrt{1+\gamma}-1} \right) \sin\theta$$

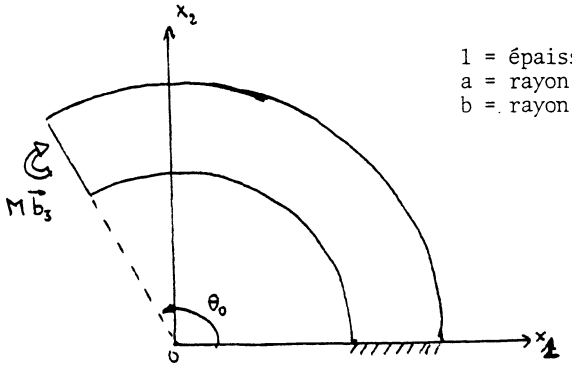
$$\sigma_{r\theta} = -\left(\frac{K_2}{r} + \sqrt{1+\gamma}\, K_3 r^{\sqrt{1+\gamma}-1} - \sqrt{1+\gamma}\, K_4 r^{-\sqrt{1+\gamma}-1} \right) \cos\theta$$

On remarque que si l'on recherche une solution de la forme $F(r, \theta) = f(r) \cos\theta$ on arrive à la même équation vérifiée par $f(r)$, et par conséquent la fonction d'Airy est la même que précédemment en remplaçant le sinus par le cosinus.

4 - POUTRE SOUMISE A UN MOMENT TERMINAL

4 . 1 - Détermination du tenseur des contraintes

Nous allons supposer la poutre encastrée en $\theta = 0$, les seuls efforts appliqués constituant un couple, en $\theta = \theta_0$, de la forme $M \vec{b}_3$, comme l'indique la figure ci-dessous :



1 = épaisseur
a = rayon intérieur
b = rayon extérieur

FIGURE 22

Pour des raisons de symétrie évidentes, nous pouvons considérer les contraintes indépendantes de θ , ce qui nous entraîne à choisir comme solution la fonction d'Airy déterminée en 3.1.

Les trois constantes intervenant dans cette solution sont déterminées à l'aide des conditions aux limites appliquées en :

- $r = b$: $\sigma_{rr}(b)=0 \quad \Rightarrow \quad 2K_1 + K_2(1+\sqrt{\beta})\, b^{\sqrt{\beta}-1} + K_3(1-\sqrt{\beta})\, b^{-\sqrt{\beta}-1} = 0$

- $r = a$: $\sigma_{rr}(a)=0 \quad \Rightarrow \quad 2K_1 + K_2(1+\sqrt{\beta})\, a^{\sqrt{\beta}-1} + K_3(1-\sqrt{\beta})\, a^{-\sqrt{\beta}-1} = 0$

- $\vartheta = \vartheta_0$:

En appliquant le principe de Saint Venant à cette partie de la frontière, on aboutit à une résultante du torseur qui est nulle et à un moment que l'on identifie à M, d'où :

$$\int_\Delta r\, \sigma_{\theta\theta}\, dS = M$$

ce qui entraîne :

$$K_1(b^2-a^2) + K_2\sqrt{\beta}\,(b^{1+\sqrt{\beta}} - a^{1+\sqrt{\beta}}) - K_3\sqrt{\beta}\,(b^{1-\sqrt{\beta}} - a^{1-\sqrt{\beta}}) = \frac{M}{e}$$

Pour rendre toutes ces quantités adimensionnelles, nous posons :

$$\xi = b/a$$

$$\bar{r} = r/a$$

$$C_1 = K_1 e a^2/M$$

$$C_2 = K_2 e a^{1+\sqrt{\beta}}/M$$

$$C_3 = K_3 e a^{1-\sqrt{\beta}}/M$$

Les constantes C_i s'obtiennent en résolvant le système linéaire suivant :

$$2C_1 + (1+\sqrt{\beta})\,C_2 + (1-\sqrt{\beta})\,C_3 = 0$$

$$2C_1 + (1+\sqrt{\beta})\,\xi^{-1+\sqrt{\beta}}C_2 + (1-\sqrt{\beta})\,\xi^{-1-\sqrt{\beta}}C_3 = 0$$

$$(\xi^2-1)C_1 + \sqrt{\beta}\,(\xi^{1+\sqrt{\beta}}-1)C_2 - \sqrt{\beta}\,(\xi^{1-\sqrt{\beta}}-1)C_3 = 0$$

On en déduit les contraintes :

$$\sigma_{rr} = \frac{M}{ea^2}\left(2C_1 + (1+\sqrt{\beta})C_2\,\bar{r}^{\sqrt{\beta}-1} + (1-\sqrt{\beta})C_3\,\bar{r}^{-1-\sqrt{\beta}}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{M}{ea^2}\left(2C_1 + \sqrt{\beta}(1+\sqrt{\beta})C_2\,\bar{r}^{\sqrt{\beta}-1} - \sqrt{\beta}(1-\sqrt{\beta})C_3\,\bar{r}^{-1-\sqrt{\beta}}\right)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

Il nous a paru intéressant de comparer ces contraintes avec celles que l'on obtient pour le même problème avec un matériau isotrope. Le tenseur des contraintes, dans ce cas, avec les mêmes notations, est donné par :

$$\sigma_{rr} = \frac{M}{ea^2}\left(\frac{4\xi^2 \log \xi}{D}\left(1-\bar{r}^{-2}\right) + \frac{4(1-\xi^2)}{D}\log \bar{r}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{M}{ea^2}\left(\frac{4\xi^2 \log \xi}{D}\left(1+\bar{r}^{-2}\right) + \frac{4(1-\xi^2)}{D}\left(1+\log \bar{r}\right)\right)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \qquad \left(\text{avec } D = -\left(\xi^2-1\right)^2 + 4\xi^2 \log^2 \xi\right)$$

On remarque que pour ce type de matériau, les contraintes sont indépendantes de E et ν , c'est-à-dire les mêmes quelque soit le matériau utilisé (ce qui n'est pas le cas en orthotropie).

4 . 2 - Interprétation des résultats

Nous avons placé la direction de la fibre du bois suivant l'axe j. Nous allons interpréter les résultats avec le chêne (E_2/E_1 = 7,13) et avec le dodomissinga (E_2/E_1 = 22). Dans ces deux cas nous supposerons le rapport des rayons b/a = 1,1 et b/a = 2.

On remarque que l'influence de l'orthotropie est extrêmement faible (notamment dans le cas du chêne), la différence relative la plus importante entre le cas isotrope et le cas orthotrope, se situant dans le cas du dodomissinga (rapport E_2/E_1 plus important) pour b/a = 2. Cette différence relative pour $\sigma_{\theta\theta}$ atteint 21 % en r = b, alors que pour le chêne elle se situe autour de 6,5 %.

Dans le cas où b/a = 1,1, la différence est pratiquement inexistante, aussi bien pour le chêne que pour le dodomissinga.

La deuxième remarque, d'intêret moins évident, est que les contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ ne s'annulent pas exactement au même endroit dans les cas isotrope et orthotrope, ce qui donne une différence relative plus importante près des points où les contraintes sont faibles en valeur absolue.

Nous pouvons résumer ces résultats en affirmant que l'influence de l'orthotropie se fait d'autant plus sentir que b/a est grand, ainsi que le rapport des modules d'Young du matériau, mais que cette influence est néanmoins de très faible importance dans le type de problème que nous avons considéré ici.

Nous avons tracé ci-après : $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}\, e a^2 / M$, dans les cas isotrope, orthotrope (dodomissinga). Il nous a également paru intéressant de tracer la solution obtenue en milieux curvilignes, qui s'écrit :

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = 12\left(\bar{r} - \frac{1+\bar{r}}{2}\right)$$

Cette courbe concerne le cas b/a = 2.

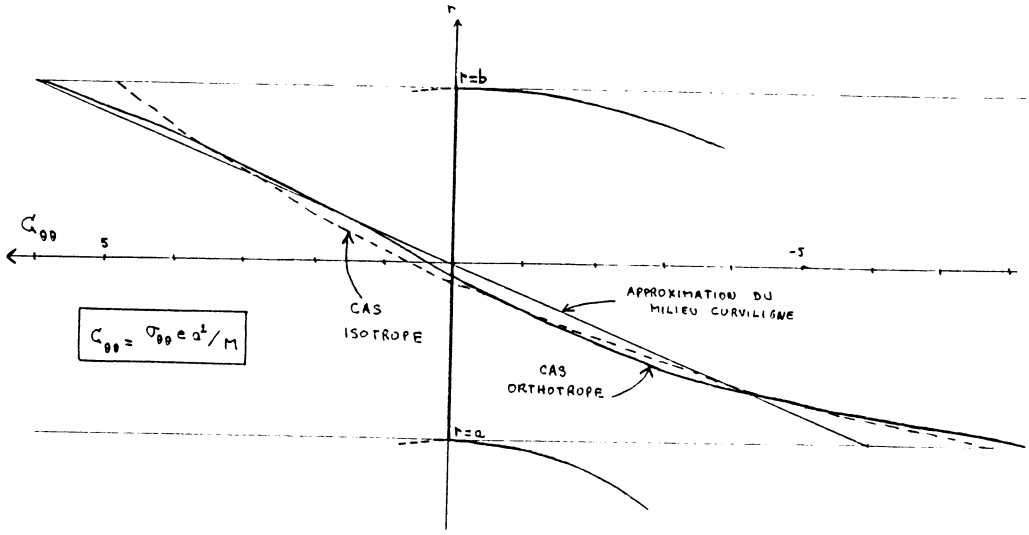
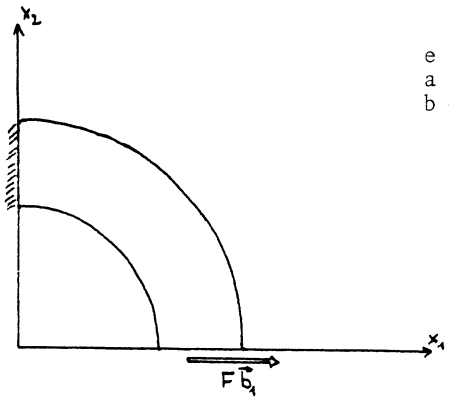


FIGURE 23

5 - POUTRE SOUMISE A UNE FORCE RADIALE TERMINALE

5 . 1 - Détermination du tenseur des contraintes

Nous considérons cette fois $\theta \in [0, \pi/2]$, la poutre étant encastrée en $\theta = \pi/2$. Elle subit un glisseur de la forme $\vec{F} = F\vec{i}$ en $\theta = 0$. La fonction d'Airy correspondant à ce type de problème est de la forme $F(r,o) = f(r) \sin \theta$, dont nous avons défini la forme de $f(r)$ dans 3.2.



e = épaisseur
a = rayon intérieur
b = rayon extérieur

FIGURE 24

Nous allons appliquer les conditions aux limites en :

- $\underline{r = b}$: $\sigma_{rr}(b)=\sigma_{r\theta}(b)=0 \Rightarrow K_2/b + \sqrt{1+\gamma}\, K_3\, b^{\sqrt{1+\gamma}-1} - \sqrt{1+\gamma}\, K_4\, b^{-\sqrt{1+\gamma}-1} = 0$

- $\underline{r = a}$: $\sigma_{rr}(a)=\sigma_{r\theta}(a)=0 \Rightarrow K_2/a + \sqrt{1+\gamma}\, K_3\, a^{\sqrt{1+\gamma}-1} - \sqrt{1+\gamma}\, K_4\, b^{-\sqrt{1+\gamma}-1} = 0$

- $\underline{\theta = 0}$ (au sens de Saint-Venant)

La seule équation non triviale est :

$$\int_{\Delta} \sigma_{r\theta}\, dS = 0 \quad \Rightarrow \quad K_2 \operatorname{Log}\frac{b}{a} + K_3\left(b^{\sqrt{1+\gamma}} - a^{\sqrt{1+\gamma}}\right) + K_4\left(b^{-\sqrt{1+\gamma}} - a^{-\sqrt{1+\gamma}}\right) = \frac{F}{e}$$

En écriture adimensionnelle, on pose :

$$\xi = \frac{b}{a} \Rightarrow \xi > 1 \qquad C_2 = K_2 e / F$$

$$\bar{r} = \frac{r}{a} \Rightarrow \bar{r} \in [1+\xi] \qquad C_3 = K_3 e\, a^{\sqrt{1+\gamma}} / F$$

$$C_4 = K_4 e\, a^{-\sqrt{1+\gamma}} / F$$

Et nous en déduisons les constantes en résolvant le système :

$$C_2 + \sqrt{1+\gamma}\, C_3 - \sqrt{1+\gamma}\, C_4 = 0$$

$$C_2/\xi + \sqrt{1+\gamma}\, \xi^{\sqrt{1+\gamma}-1} C_3 - \sqrt{1+\gamma}\, \xi^{-\sqrt{1+\gamma}-1} C_4 = 0$$

$$C_2 \operatorname{Log}\xi + \left(\xi^{\sqrt{1+\gamma}} - 1\right) C_3 + \left(\xi^{-\sqrt{1+\gamma}} - 1\right) C_4 = 0$$

Quant aux contraintes, elles sont égales à :

$$\sigma_{rr} = F/ea\left(\frac{C_2}{\bar{r}} + \sqrt{1+\gamma}\, C_3\, \bar{r}^{(\sqrt{1+\gamma}-1)} - \sqrt{1+\gamma}\, C_4\, \bar{r}^{-\sqrt{1+\gamma}-1}\right)\sin\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = F/ea\left(\frac{C_2}{\bar{r}} + \sqrt{1+\gamma}\left(\sqrt{1+\gamma}+1\right)C_3\, \bar{r}^{\sqrt{1+\gamma}-1} - \sqrt{1+\gamma}\left(1-\sqrt{1+\gamma}\right)C_4\, \bar{r}^{-\sqrt{1+\gamma}-1}\right)\sin\theta$$

$$\sigma_{r\theta} = -F/ea\left(\frac{C_2}{\bar{r}} + \sqrt{1+\gamma}\, C_3\, \bar{r}^{\sqrt{1+\gamma}-1} - \sqrt{1+\gamma}\, C_4\, \bar{r}^{-\sqrt{1+\gamma}-1}\right)\cos\theta$$

Le tenseur des contraintes du même problème pour des matériaux isotropes est égal à :

$$\sigma_{rr} = \frac{F}{ea}\left(\frac{\bar{r}}{D} - \frac{(1+\xi^2)}{D\bar{r}} + \frac{\xi^2}{D\bar{r}^3}\right)\sin\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{F}{ea}\left(\frac{3\bar{r}}{D} - \frac{(1+\xi^2)}{D\bar{r}} - \frac{\xi^2}{D\bar{r}^3}\right)\sin\theta$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{F}{ea}\left(\frac{\bar{r}}{D} - \frac{(1+\xi^2)}{D\bar{r}} + \frac{\xi^2}{D\bar{r}^3}\right)\cos\theta$$

Nous allons comparer ces deux tenseurs dans les mêmes conditions que dans le paragraphe précédent.

5 . 2 - Application numérique

Dans les tenseurs des contraintes qui apparaissent ci-dessus on remarque que σ_{rr} et $\sigma_{r\theta}$ sont décrits par la même fonction de r, modulée par les fonctions sinus ou cosinus. Nous avons donc seulement examiné la fonction de r qui apparaît dans σ_{rr} et dans $\sigma_{r\theta}$, divisées par F/ea.

Le premier cas que nous avons examiné est celui où b/a = 1,1. La différence relative pour les cas isotrope et orthotrope, aussi bien pour le chêne que pour le dodomissinga est inférieure à 0,5 %, bien que légèrement plus grande dans le cas du dodomissinga (sauf pour les points où les contraintes sont très faibles en valeur absolue, ce qui est dû au fait qu'elles ne s'annulent pas exactement aux même endroit en isotrope qu'en orthotrope).

Si b/a = 2, pour le chêne cette différence relative atteint au maximum 5 % pour $\sigma_{\theta\theta}$ aux bords, r = a et r = b. Ailleurs, elle est également négligeable. En ce qui concerne le dodomissinga, si on écarte les cas où les contraintes tendent à s'annuler, on remarque une différence relative un peu plus importante (de l'ordre de 17 %) aux mêmes points, et ce pour la même contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ pour σ_{rr} et $\sigma_{r\theta}$ on ne dépasse pas 4 % sauf lorsqu'elles sont faibles.

6 - APPLICATION DU CRITERE DE TSAI

6 . 1 - Rappel du critère de TSAI

Le critère de Tsai, couramment utilisé dans le domaine des composites pour déterminer la limite élasto-plastique, remplace pour les matériaux orthotropes les critères classiques (Tresca, Von Misès ...) employés avec les matériaux isotropes.

Ce critère se présente comme une fonction de la forme $f(\sigma ij) - 1 \leq 0$, l'inégalité stricte indiquant que l'on se trouve dans le domaine élastique et l'égalité précisant la limite même du début théorique des déformations plastiques.

Le critère de Tsai, sous sa forme générale, prend l'allure suivante :

$$\mathcal{F}(\sigma) = H_\alpha \sigma_\alpha + F_{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta - 1 \qquad (\alpha,\beta = 1,\ldots,6)$$

On remarque qu'il fait intervenir 12 coefficients indépendants, directement associés au matériau considéré. Il peut se mettre sous une forme réduite en faisant intervenir l'hypothèse selon laquelle une contrainte hydrostatique n'influence pas la limite élastique. Sous sa forme réduite (que nous citons ci-dessous) il ne fait intervenir plus que 9 coefficients dont les 3 derniers sont liés par la relation P + Q + R = 0.

$$\mathcal{F}(\sigma) = H_1 \sigma_1 + H_2 \sigma_2 + H_3 \sigma_3 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{33} \sigma_3^2 + 2 F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2 F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2 F_{31} \sigma_3 \sigma_1 + F_{44} \sigma_4^2 + F_{55} \sigma_5^2 + F_{66} \sigma_6^2$$

6 . 2 - Cas particulier des contraintes planes

Le tenseur des contraintes ne comportant dans ce cas que 3 composantes différentes de zéro, le critère se présente alors sous la forme simplifiée suivante :

$$F_{11} \sigma_{rr}^2 + F_{33} \sigma_{\theta\theta}^2 + 2 F_{31} \sigma_{rr} \sigma_{\theta\theta} + F_1 \sigma_{rr} + F_3 \sigma_{\theta\theta} + F_{55} \sigma_{r\theta}^2 - 1 \leq 0$$

6 . 3 - Application du critère au cas de la poutre soumise à un moment

Nous allons appliquer ce critère au problème de la poutre encastrée soumise à un moment terminal que nous avons étudié au paragraphe 4. Pour ce faire nous disposons des coefficients intervenant dans le critère pour le pin sylvestre (déterminés par Mme GAUTHERIN). Pour faire l'étude des contraintes nous avons vu que nous avions besoin du rapport des 2 modules d'YOUNG E_2 / E_1, qui est égal à 15,8 pour cette variété de bois.

Le comportement du matériau n'étant pas exactement le même suivant le signe du moment, nous devons faire deux études différentes selon que M est positif ou négatif.

Nous noterons : $\bar{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr} e a^2 / M$ $\qquad$ $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} e a^2 / M$

Le critère prend, dans ce cas particulier, la forme suivante :

$$\left(F_{11} \bar{\sigma}_{rr}^2 + F_{33} \bar{\sigma}_{\theta\theta}^2 + 2 F_{31} \bar{\sigma}_{rr} \bar{\sigma}_{\theta\theta} \right) \left(\frac{M}{e a^2} \right)^2 + \left(H_1 \bar{\sigma}_{rr} + H_3 \bar{\sigma}_{\theta\theta} \right) \frac{M}{e a^2} - 1 \leq 0$$

avec les valeurs des coefficients suivants :

$F_{11} = 3,95$ $\qquad$ $H_1 = 0,17$

$F_{33} = 0,0225$ $\qquad$ $H_3 = -0,06$

$F_{31} = -1$

Nous obtenons une fonction de M et de r que nous devons optimiser de façon à déterminer la plus petite valeur de M qui crée en un (ou plusieurs) point de la pièce un début de déformation plastique. On remarque que cette fonction est une forme quadratique en fonction de M.

La fonction à optimiser étant continue, la méthode la plus simple consiste à faire un balayage sur la pièce en incrémentant la valeur du moment jusqu'à atteindre la limite : $\Phi(M, r) - 1 = 0$.

Avant de faire cette étude pour un matériau orthotrope, nous allons appliquer le critère de TRESCA dans le cas d'un matériau isotrope quelque soit la largeur de la poutre, on obtient toujours le début de plastification en r = a. L'allure de la courbe est figurée ci-dessous, la valeur du minimum dépendant du matériau utilisé et de la largeur de la poutre.

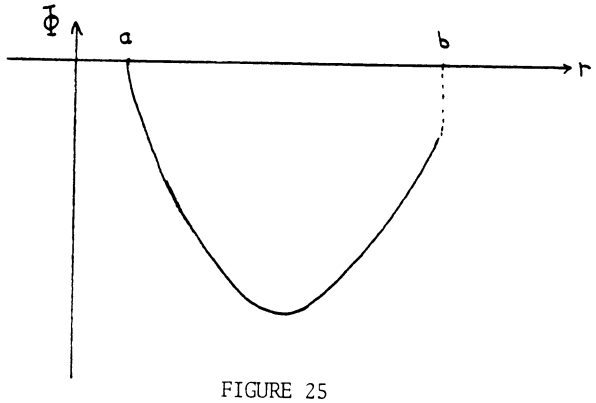


FIGURE 25

Matériau orthotrope :

1° cas : b/a = 1,1

- M > 0

La limite élasto-plastique est atteinte en r = a pour la valeur de $M/ea^2 = 0{,}0088$. Nous avons représenté ci-dessous l'allure de cette fonction, pour la valeur de M déterminée auparavant, en fonction de r.

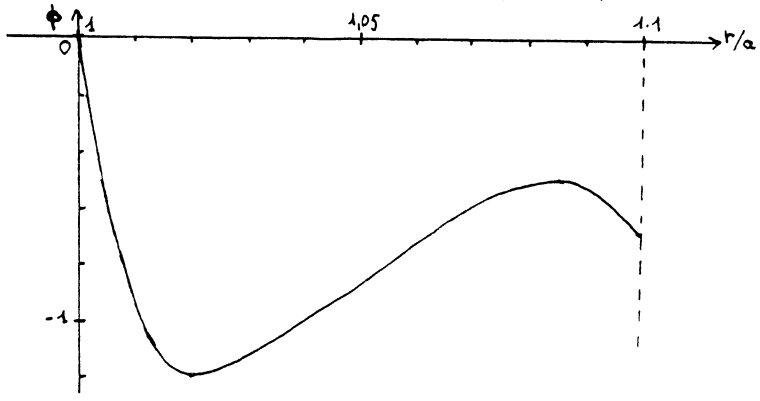


FIGURE 26

- M < 0

La limite est atteinte cette fois, non plus au bord de la poutre, mais en r = 1.00a, pour la valeur de M/ea = - 0,00879

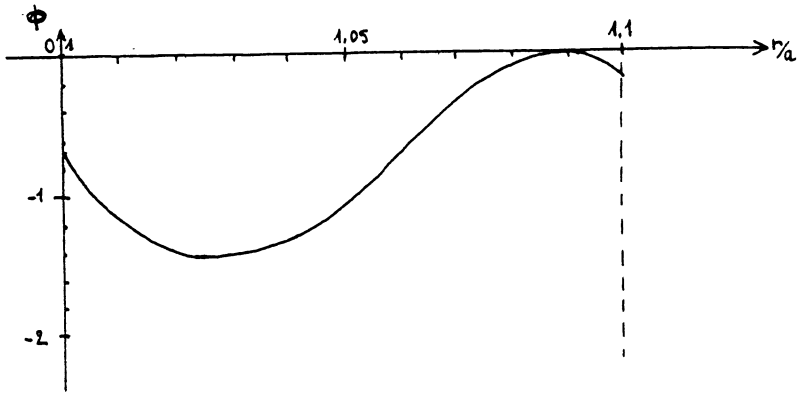


FIGURE 27

2° cas : b/a = 2

- M > 0

La valeur limite de M/ea^2 est égal à 0.4562, la limite étant atteinte en r = 1,65a

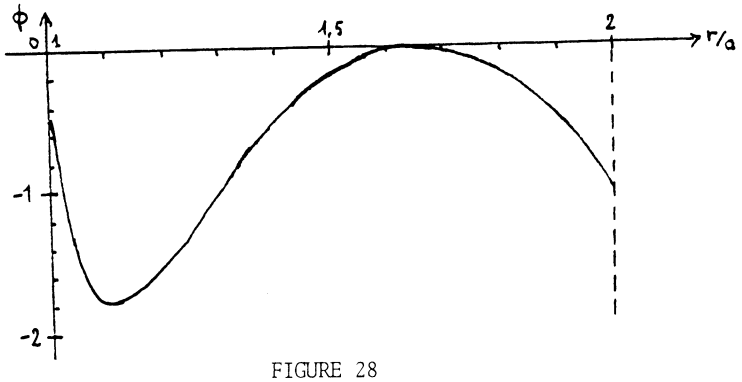


FIGURE 28

- M < 0

Pour M/ea = - 0,4107 on obtient le début de plastification au même point que dans le cas précédent, c'est-à-dire pour r = 1,65a.

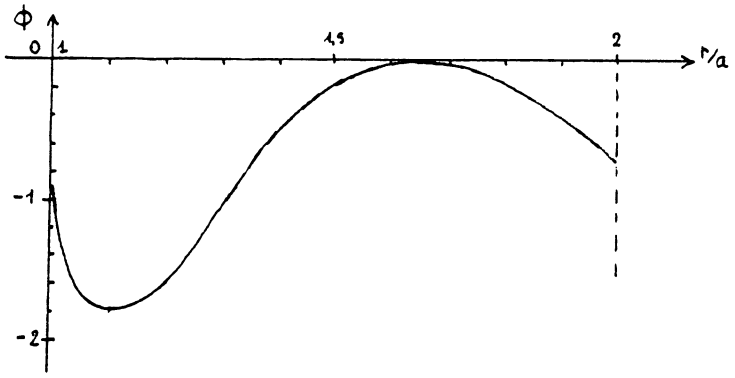


FIGURE 29

7 - CONCLUSION

Ces exemples de problèmes aux limites de détermination du champ de contrainte dans le domaine élastique n'ont montré que des différences assez limitées avec le cas du matériau isotrope. Celles-ci existent cependant et la solution donnée pour un moment fléchissant terminal, pourrait, du point de vue de l'ingénieur, être appliquée dans chaque section d'un lamellé-collé quelconque, ce qui améliorerait sensiblement la précision des calculs habituels.

Beaucoup plus nette est l'influence d'un critère seuil élastoplastique tel que celui de TSAI, d'emploi usuel pour les matériaux composites. Les exemples traités montrent un comportement seuil très différent du cas isotrope, puisque les points critiques apparaissent souvent à l'intérieur du domaine, et non pas à la frontière, comme c'est le cas pour un critère de type TRESCA.

BIBLIOGRAPHIE

1 . LEKHNISTSKI — Theory of elasticity of an anisotropic elastic body
Brand statter Edit - San Francisco - 1963

2 . B.A. JAYNE — Theory and design of wood and fiber composite materials
Syracuse University Press - 1972

3 . S. SCHNEIDER — Cours de calcul des pièces en bois
Cours E.S.T.A. - 1972

4 . A.P. BORESI
P.P. LYNN — Elasticity in engineering mechancics
Prentice Hall Edit - 1974

5 . D. NOACK
W. VON ROTH — On the Theory of Elasticity of the orthotropic Material wood
Wood Science and Technology
Vol. 10 (1976) p. 97 - 110

6 . M.T. GAUTHERIN — Critère de contrainte limite du bois massif
Thèse de Doctorat de 3e cycle - Université de Paris 6 - ENSET - 1980

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 443-452

Etude expérimentale de l'influence du taux d'humidité sur l'élasticité du bois

Experimental study of the effect of moisture on the elasticity of wood

J. LAUNAY, M. MUDRY, G. GILETTA

Laboratoire de Mécanique et d'Energétique
E.S.E.M., Université d'Orléans
Domaine Universitaire, 45046 Orléans Cedex

RESUME.

Les rares résultats concernant l'évolution de l'ensemble des constantes élastiques d'un bois avec l'humidité, sont ceux de CARRINGTON (1922). L'étude présentée ici, a été faite par goniométrie ultrasonore. Elle a été rendue possible grâce à l'utilisation d'une fine membrane poreuse. Elle concerne le chêne et le hêtre.

ABSTRACT.

The scarce results concerning the effect of moisture content on the elastic constants of wood are those of CARRINGTON (1922). The present study was made with a goniometric method.It was possible with the aid of a thin porous membrane. It concerns oak and beech.

1. INTRODUCTION

1.1. L'élasticité du bois.

Dans le domaine de l'élasticité linéaire, on considère généralement le bois comme un matériau localement orthotrope. Ce phénomène s'identifie par rapport aux trois directions naturelles :

(L) Longitudinale : suivant l'axe du tronc
(R) Radiale : perpendiculaire aux couches annuelles
(T) Tangentielle aux couches annuelles

La loi de comportement s'écrit alors :

$$\sigma_{ij} = C_{ij\,kl}\ e_{kl} \quad \text{ou} \quad \sigma_{\alpha} = C_{\alpha\beta}\ e_{\beta}$$
$$(\alpha\ \beta = 1,2....6)$$

Ceci nous donne la matrice de rigidité suivante :

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{vmatrix}$$

Cette matrice est symétrique. Elle fait intervenir neuf constantes caractérisant le matériau.
La loi inverse

$$e_{kl} = S_{klij}\,\sigma_{ij} \quad \text{ou} \quad e_{\beta} = S_{\beta\alpha}\sigma_{\alpha}$$

donne la matrice de complaisance $S_{\beta\alpha}$, inverse de $C_{\alpha\beta}$, qui peut s'exprimer en fonction de douze constantes techniques regroupées en trois modules d'YOUNG E_i, trois modules de cisaillement G_{ij} $(i \neq j)$ et six coefficients de POISSON ν_{ij} $(i \neq j)$ définis par $\nu_{ji} = -\dfrac{S_{ij}}{S_{jj}}$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{E_L} & \frac{-\nu_{RL}}{E_R} & \frac{-\nu_{TL}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LR}}{E_L} & \frac{1}{E_R} & \frac{-\nu_{TR}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{-\nu_{RT}}{E_R} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{RT}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \frac{1}{G_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \frac{1}{G_{LR}} \end{vmatrix}$$

Les notations indicées corrrespondent respectivement à
1 ⟶ L
2 ⟶ R
3 ⟶ T

1.2. Résultats concernant l'influence du taux d'humidité sur les constantes élastiques du bois.

La décroissance de la rigidité du bois, lorsque le taux d'humidité augmente est un phénomène connu depuis longtemps. Pourtant peu de résultats ont été donnés pour l'ensemble des constantes élastiques tenant compte de l'orthotropie de ce matériau. CARRINGTON (1) en 1922 a donné les résultats suivants concernant le Spruce.

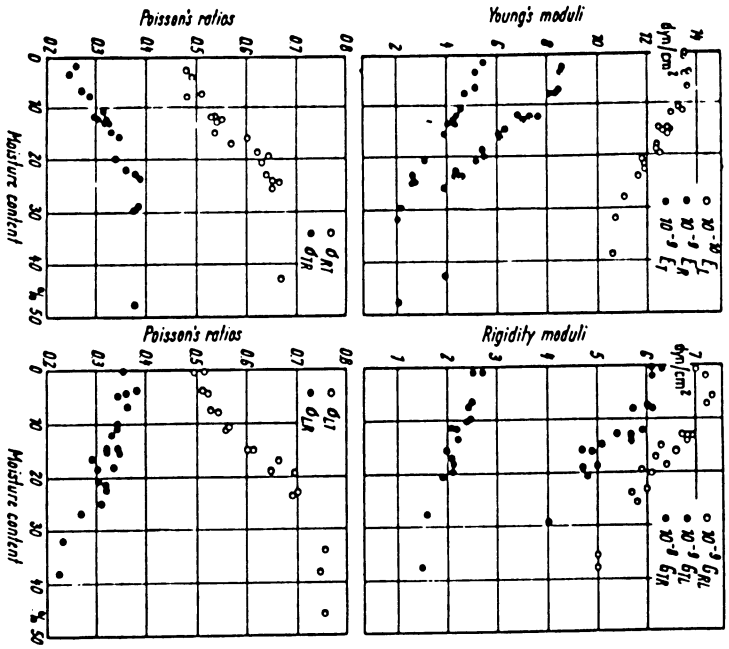


FIG.1. Effet de l'humidité sur les constantes élastiques du Spruce Sitka d'après CARRINGTON (1922)

Les résultats que nous présentons concernent le chêne et le hêtre; ils ont été obtenus par goniométrie ultrasonore.

2. LA GONIOMETRIE ULTRASONORE.

Cette méthode (2) (3) nécessite trois éprouvettes de 5 X 5 cm de côté et d'environ 1 cm d'épaisseur. Elles sont taillées dans les trois plans naturels LR, LT et RT. Leur protection est obtenue grâce à une membrane adhésive très fine (*), laissant passer la vapeur d'eau mais non les liquides.
Cette propriété est mise à profit pour faire varier le taux d'humidité du bois.

Les éprouvettes sont placées dans une cuve emplie d'huile silicone dont la célérité du son est de 940 m/s environ. De chaque côté de la cuve se trouvent les sondes émettrice et réceptrice.

Dans chaque plan naturel de l'échantillon de bois, émergent deux ondes de polarisation quasi longitudinale (Q.L.) ou quasi transversale (Q.T.) par rapport à leur direction de propagation. Elles sont caractérisées par leur lenteur $\vec{L} = \frac{\vec{n}}{V}$ (inverse des vitesses V variant selon la nature de l'onde et son incidence par rapport à la normale $\vec{n}$ au plan de l'échantillon.

Les lenteurs sont déduites de la mesure du retard subit par l'onde lors du passage dans le matériau. Leur valeur est une fonction des coefficients de la matrice de rigidité du bois étudié. Ces coefficients sont obtenus par l'optimisation de tous les points expérimentaux au sens des moindres carrés.

(*) Pansements OPSITE. Laboratoires R.BELLON.

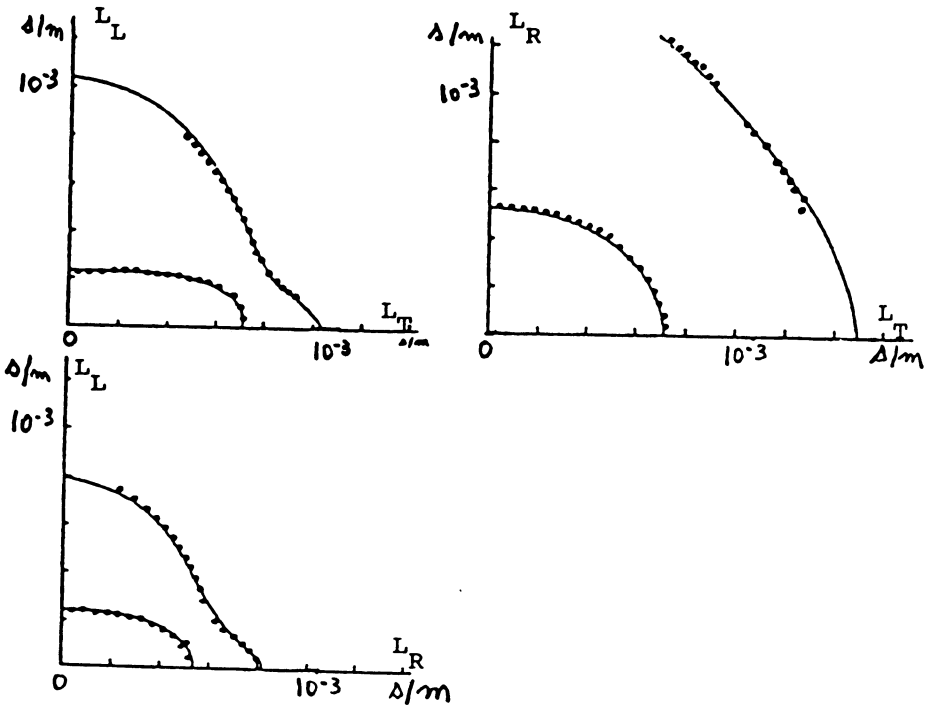


FIG.2. Lenteurs mesurées et restituées cas du hêtre.

3. LA VARIATION DU TAUX D'HUMIDITE.

Les essais ont porté sur des échantillons de bois déjà secs,dont on a fait varier le taux d'humidité en les plaçant dans une étuve à hygrométrie variable. La température y était fixée à 30°C. Les mesures ont été effectuées pour six taux d'humidité décroissants. La prise d'humidité des éprouvettes dans l'étuve se faisait en dix jours, puis elles étaient ramenées à 20°C, isolées dans un sachet de plastique, pendant un jour. La déshydratation finale a été effectuée dans une étuve sèche à 100°C. Le taux d'humidité H a été obtenu par pesée des échantillons.

$$H = \frac{m\ (H) - m\ (O)}{m\ (O)}$$

Le bon fonctionnement de la membrane protectrice, peut-être mis en évidence par l'augmentation de la masse volumique du bois. C'est également le cas pour la variation d'épaisseur des éprouvettes, que nous représentons ci-dessous dans le cas du chêne.

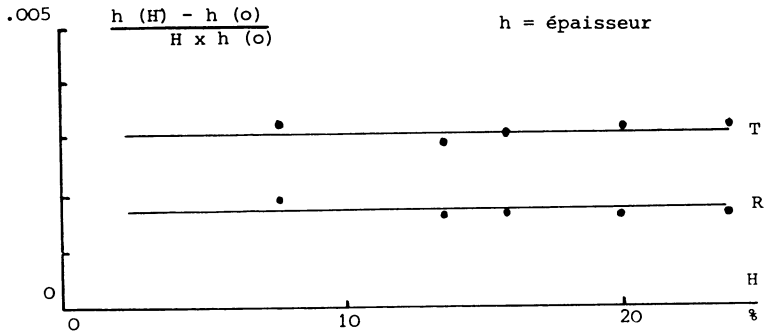


FIG.3. Variation de l'épaisseur des éprouvettes de chêne selon les directions R et T avec le taux d'humidité.

4. EVOLUTION DES CONSTANTES ELASTIQUES DU CHENE

4.1. Les coefficients de la matrice de rigidité.

Les résultats des mesures, après optimisation, nous donne les rigidités spécifiques

$$\overline{C}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta} / \rho$$

ρ =masse volumique.

Ces valeurs sont représentées sur les trois réseaux de courbes suivants :

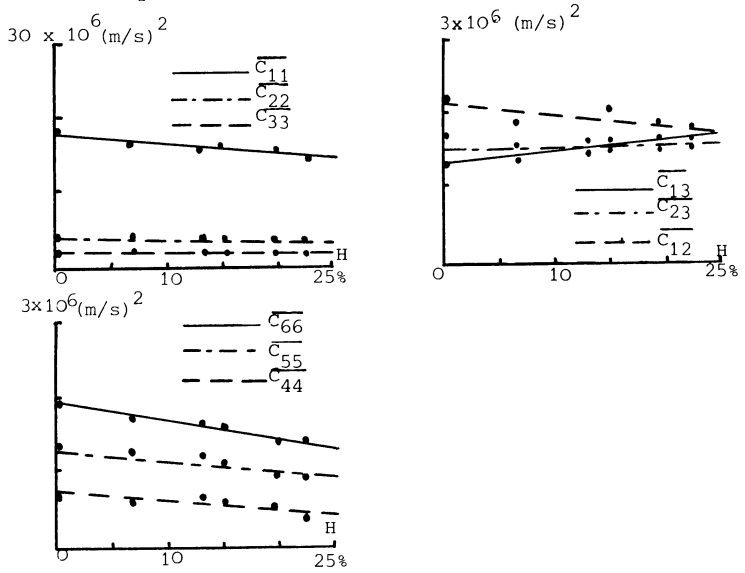


FIG.4. Variation des rigidités spécifiques du chêne avec le taux d'humidité.

On constate une diminution des coefficients lorsque H augmente, excepté pour C_{31}

D'une manière générale la dispersion des résultats est plus importante pour C_{31}, C_{32}, C_{12} que pour les autres coefficients ; l'incertitude dans ces cas pouvant atteindre 15 %.

Du fait de l'alignement apparent des points expérimentaux, nous avons effectué une régression linéaire pour l'évolution des Cij. Par inversion on obtient alors l'évolution moyenne des constantes techniques en fonction de H.

4.2. Les constantes techniques.

Nous avons représenté ci-dessous, l'évolution des trois modules d'YOUNG, des trois modules de cisaillement et des quatre coefficients de POISSON les plus importants avec H.

On constate alors que, comme dans le cas du Spruce ν_{RT}, ν_{TR}, ν_{LT} augmentent alors que ν_{LR} diminue.
E_L, E_R, E_T, G_{RL}, G_{TR} et G_{TL} décroissent.

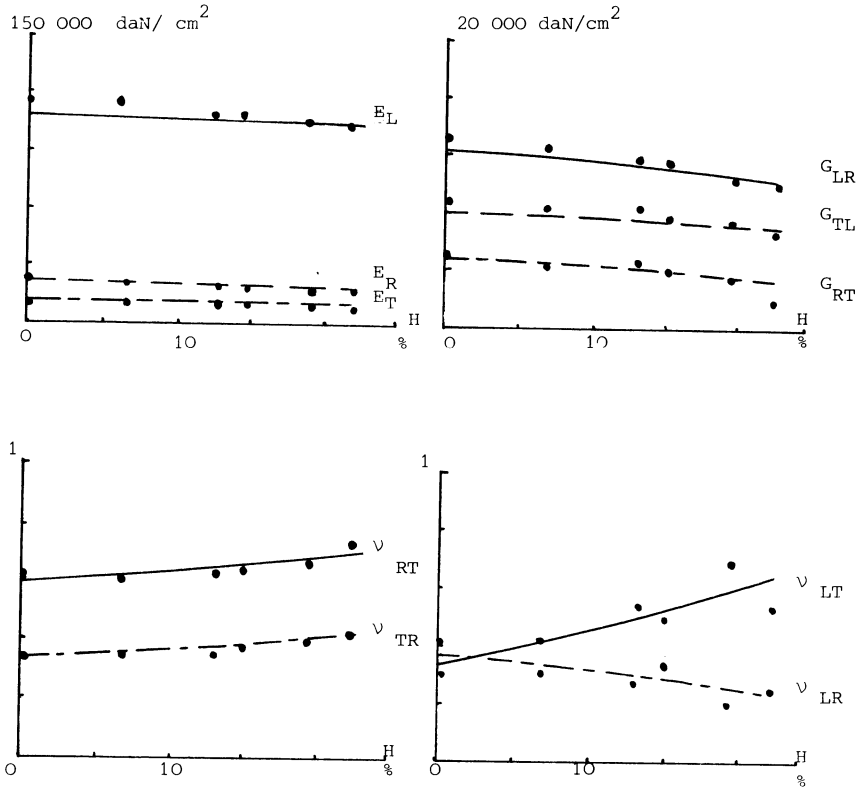


FIG. 5. Variation des constantes techniques du chêne avec le taux d'humidité.

5. EVOLUTION DES CONSTANTES ELASTIQUES DU HETRE.

5.1. Les coefficients de la matrice de rigidité.

Les échantillons de hêtre utilisés, provenaient d'un lot, distribué dans le cadre d'un contrat D.G.R.S.T., à dix laboratoires pour la détermination des constantes élastiques. Les essais ont eu lieu sur trois triplets. Nous donnons les résultats concernant l'un d'entre eux, les autres étant semblables.

Contrairement au chêne, tous les coefficients diminuent. Dans le cas de $\overline{C}_{31}$ et $\overline{C}_{21}$ l'évolution n'est que faiblement décroissante avec une dispersion plus importante que pour les autres coefficients.

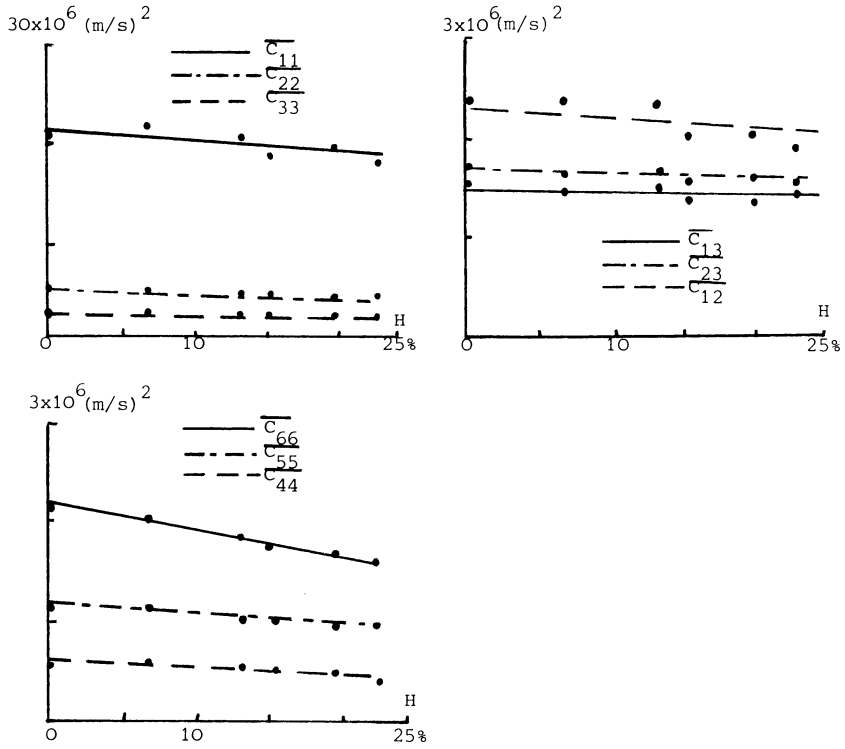


FIG.6. Variation des rigidités spécifiques du hêtre avec le taux d'humidité.

5.2. Les constantes techniques.

Nous avons procédé comme pour le chêne pour obtenir l'évolution moyenne des constantes techniques que nous avons représentées avec celles des points expérimentaux sur les diagrammes suivants :

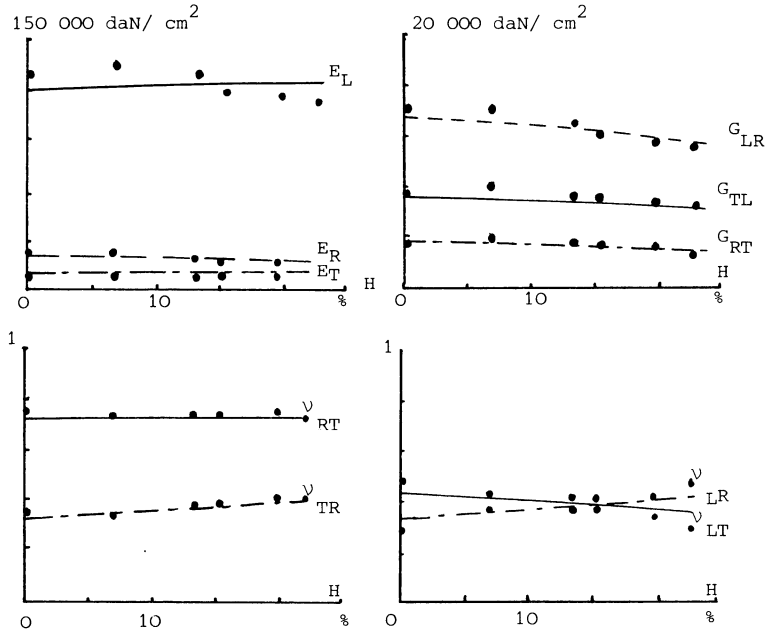


FIG.7. Variation des constantes techniques du hêtre avec le taux d'humidité.

On note une inversion par rapport au cas précédent entre ν_{LT} qui diminue ici légèrement alors que ν_{LR} augmente peu également. Ceci est aussi le cas pour les deux autres triplets de hêtre sur lesquels les mêmes mesures ont été effectuées.

6. CONCLUSION.

L'étude de l'évolution des constantes élastiques d'un bois avec son taux d'humidité, est donc possible par goniométrie ultrasonore. L'utilisation d'une membrane poreuse permet de sécher ou d'humidifier le bois à volonté plus lentement qu'en l'absence de celle-ci.

Les résultats obtenus sont semblables à ceux de CARRINGTON pour le Spruce Sitka en ce qui concerne le chêne mais sensiblement différents pour le hêtre. Les légères différences dans ce dernier cas, apparaissent sur les coefficients de POISSON ν_{LT} et ν_{LR} mesurés avec des éprouvettes pour lesquels l'effet d'anisotropie est important. Or si l'on fait une légère erreur d'orientation lors de la découpe des échantillons, cela peut entraîner des écarts assez importants sur ces coefficients (4). Il faut donc être prudent quant aux résultats concernant l'évolution de ces grandeurs avec le taux d'humidité.

7. BIBLIOGRAPHIE.

(1) CARRINGTON. The elastics constants of spruce as affected by moisture content Aeron.J, 26 : 462. 1922

(2) MUDRY M. - LAUNAY J. - PREZIOSA C - GILLETTA F. La mesure des constantes élastiques des matériaux par goniométrie ultrasonore - Actes du 17ème colloque annuel du Groupe Français de Rhéologie Paris - ENPC - Décembre 1982.

(3) T.VINH. Mesures ultrasonores de constantes élastiques des matériaux composites.
Sciences et Techniques de l'armement 2, 1981.

(4) B.CASTAGNEDE. Mesures des constantes élastiques de solides anisotropes par une méthode ultrasonore. Th. Doct.
Université de Bordeaux 1. 1984.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials*
CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 453-460

Anisotropy of dynamic wood viscoelasticity
Anisotropie de la viscoélasticité dynamique du bois

S. POLISZKO

Department of Physics, Agricultural University
Poznań, Poland

ABSTRACT

Temperature dependences of components of complex modulus of wood deformed in the directions parallel and perpendicular to the grains were studied in various moisture contents.Relaxation times spectra were determined for main directions of anisotropy of the wood. With the spectra evolution under humidity an area limited by the spectra as well as relaxation processes concentration remained constant. A number of relaxation processes initiated by the wood deformation in parallel to the grains was found to be three times greater than in the case of deformation in perpendicular to the grains.The effect was ascribed to the processes of many-side action of crystalline celulose fibrils on the interfibrillar amorphous substance.

RESUME

L'influence de la température sur les parties réelle et imaginaire du module complexe du bois déformé dans le sens du fil ainsi que dans le sens perpendiculaire a été étudiée pour diverses valeurs de la teneur en eau. Les spectres des temps de relaxation ont été déterminés pour les directions principales d'anisotropie. L'évolution du spectre sous l'effet de l'humidité conserve la valeur de l'aire sous-tendue par le spectre ainsi que, par conséquent, le nombre par unité de volume des unités cinétiques responsables des processus de relaxation. Ce nombre a été trouvé trois fois plus grand dans le cas d'une déformation dans le sens du fil que dans le cas du sens perpendiculaire au fil. Cet effet a été attribué à des mécanismes d'entraînement entre les micro-fibrilles de cellulose cristalline et la substance amorphe interfibrillaire.

1 - INTRODUCTION

Rheologic properties of wood under quasistatic conditions have been extesively described in a lot of articles and reviewing papers (1,2,3).The studies of wood properties under dynamic conditions performed so far (4,5,6,7)have not included the question of wood anisotropy. With regard to that the studies were undertaken to obtain temperature dependences of the components of complex elasticity modulus of wood deformed in parallel and perpendicular to the direction of wood grains, under various moisture contents of the material studied.

2 - EXPERIMENTAL

Measurements were performed according to the system of Brüel and Kjaer (8) with a mechanical spectrometer constructed in our laboratory (9), which provided a direct reading of the results. Dynamic moduli of elasticity and loss moduli were determined at two lowest resonance frequencies of vibrations of the samples firmly fixed at one end. The samples cut out of beech wood were of 0.3 cm in thick and 1.5 cm in width. Close frequencies of vibrations for both anisotropy directions were obtained by adjusting properly the lengths of the samples. Finally their length was 25 cm for the direction along the grains and 15 cm for the direction perpendicular to them. The wood humidity changes were limited to the range from 0% to 11% because within this range the structurally bound water affected the wood properties without revealing its own relaxation process or phase transitions.

3 - RESULTS AND DISCUSSION

Fig.1 presents some exemplifying results of measurements of the real part of the complex elasticity modulus of wood obtained for both deformation directions at the fundamental frequency of the samples vibration, falling between 40 and 60Hz.

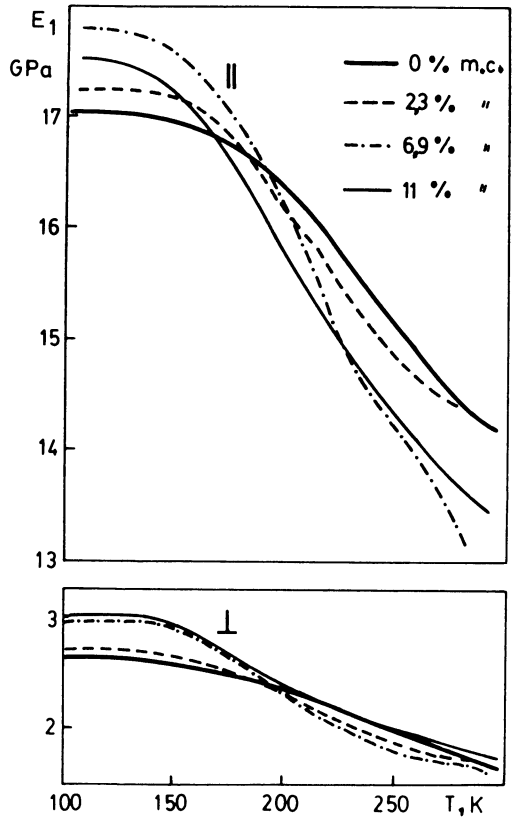


Fig.1. Temperature dependences of dynamic elastic moduli of wood deformed in parallel and perpendicular to the direction of grains at various moisture contents.

Temperature dependences of dynamical modulus of elasticity taken between 100 and 300 K have the shape charakteristic for the dispersion region of the modulus. Humidity changes cause only slight changes in the course of these dependences while the change in the direction of deformation from the one parallel to the grains to that perpendicular to them involves a seven times decrease in the values of the moduli.

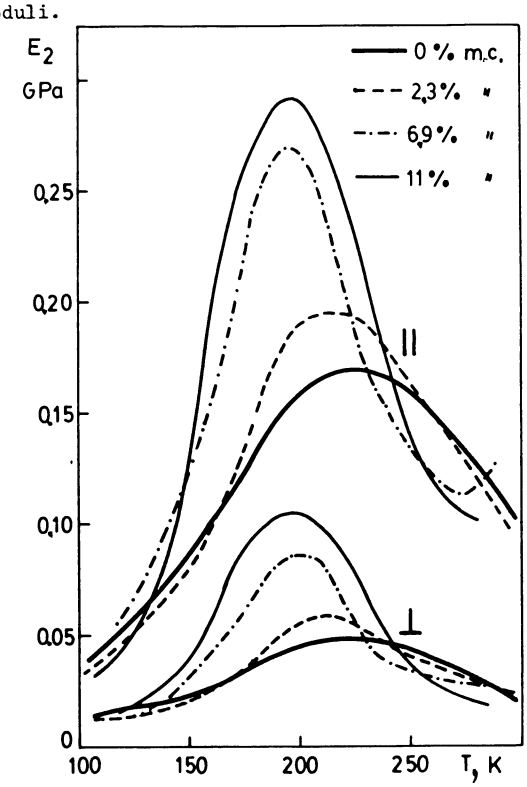


Fig.2. Temperature dependences of loss moduli of wood deformed in parallel and perpendicular to the direction of grains at various moisture contents.

The results of loss moduli measurements are presented in Fig.2. To the revealed regions of dispersion of the real parts of complex elasticity moduli correspond to the maxima in their imaginary parts. Increase in moisture content of the wood implies an increase in intesity of these maxima and their shift towards lower temperature. The only difference between results presented above and the results obtained at the frequency 6.27 higher is a shift of the latter curves by several degrees towards higher temperatures.

From the above described shift of the curves and on the grounds of the condition for occurrence of the maximum in the loss modulus for polymers in glassy state: (10)

$$\frac{h\omega}{kT_m} \cdot \exp\left(-\frac{S^*}{R}\right) \cdot \exp\left(\frac{H^*}{RT_m}\right) = 1 \qquad 1$$

we calculated the enthalpy H^* and entropy S^* of activation of the most probable relaxation processes revealing at various humidities. Within the accuracy of measurements the values of enthalpy and entropy of activation were the same for both directions of the wood (Table 1).

Table 1
Enthalpy H^* and entropy S^* of activation of mechanical relaxation in wood

Moisture content,%	Direction of deform.	H^*, kJ/mol	S^*, kJ/mol·K
0	parallel	73	0.14
	perpendic.	68	0.12
2.3	parallel	74	0.17
	perpendic.	73	0.17
6.9	parallel	68	0.17
	perpendic.	63	0.15
11	parallel	44	0.06
	perpendic.	49	0.07

The data from Table 1 were used to calculate theoretical temperature dependences of the loss modulus under assumption that only one relaxation process takes place in the wood.The widths of the maxima in the loss modulus obtained under this assumtion were by about 10 times less than their widths obtained experimentally. This proves that the spectrum of the distribution of mechanical relaxation times for wood is continuos.

The spectra of relaxation and retardation times are of fundamental importance to the materials rheology because the shape of these spectra determines the mathematical form of kernel functions of integral equations appearing in the theory of viscoelasticity. Short-time branches of the spectra were so far determined from the frequency dependences of components of the complex elasticity modulus or compex compliance (11). However in practice these method were applied rather rarely regarding experimental difficulties in performing these measurements over wide frequency ranges. Because of that, short-time branches of mechanical relaxation spectra are for most of the materials unknown.

In the following we present a method of analysis of temperature dependence of components of the complex elasticity modulus, providing possibility to determine the shape of the relaxation spectra.At the first stage of this method we have to determine the distribution function of termodynamical potential of activation of mechanical relaxation: $H(G^*)$ where $G^* = H^* - T \cdot S^*$.In order to do this the results of measurements of E_1 and E_2 should be expressed not as a function of temperature but as a function of activation potential determined for each value $E_1(\omega,T)$ or $E_2(\omega,T)$ from the relation:

$$G^* = - R \cdot T \cdot \ln \frac{h\omega}{kT} \qquad 2$$

Approximation of the dependences obtained by integrable analytical functions allows to determine the distribution $H(G^*)$ by the method of Fuoss and Kirkwood (12) from one of the following relations:

$$H(G^*) = - \frac{i}{\pi} \cdot \left[E_1 \left(X + i \frac{\pi}{2} \right) - E_1 \left(X - i \frac{\pi}{2} \right) \right]_{X = - G^*} \qquad 3$$

$$H(G^*) = \frac{1}{\pi} \cdot \left[E_2 \left(X + i \frac{\pi}{2} \right) + E_2 \left(X - i \frac{\pi}{2} \right) \right]_{X = - G^*} \qquad 4$$

Applying the procedure described to the results obtained for wood we have found that the course of the dependences $E_2(G^*)$ is the best described by the following equation:

$$E_2(G^*) = 2 \cdot E_m \cdot \left[R_1 \cdot \exp k_1 \cdot (G^* - G_m^*) + R_2 \cdot \exp k_2 \cdot (G^* - G_m^*) \right]^{-1} \qquad 5$$

Simultaneously, it can be proved that the complicated form of the distribution function $H(G^*)$ following from equations 4 and 5 can be replaced by a much simpler one:

$$H(G^*) = \frac{2 \cdot E_m}{\pi} \cdot \operatorname{sech}\left[Z(G^* - G_m^*)\right] \qquad 6$$

The error introduced by this approximation is less than the accuracy of fit of the curves $E_2(G^*)$, so we decided to take the relation 6 as describing the distribution function of termodynamic potentials of activation of mechanical relaxation in wood. The parameters of the function Z and G_m^*, determined for both directions of wood deformation at the same moisture content, take the same values within the limits of statistical distribution (Table 2).

Table 2
Parameters of distribution function $H(G^*)$ for beech wood

Moisture content,%	Direction of deform.	E_m, GPa	Z, mol/kJ	G_m^*, kJ/mol
0	parallel	0.165	0.075	41
	perpendic.	0.048	0.085	43
2.3	parallel	0.190	0.100	39
	perpendic.	0.054	0.110	38
6.9	parallel	0.260	0.140	35
	perpendic.	0.086	0.160	33
11	parallel	0.300	0.160	33
	perpendic.	0.110	0.180	35

The above approximation of the function of termodynamic potentials of activation leads to the following spectrum of relaxation times in wood:

$$H(\ln r) = \frac{2 \cdot E_m}{\pi} \cdot \operatorname{sech}\left(S \cdot \ln \frac{r}{r_m}\right) \qquad 7$$

where $$r_m = \frac{h}{k\,T} \cdot \exp \frac{G_m^*}{RT} \qquad 8$$

$$S = Z \cdot R \cdot T \qquad 9$$

Presently, studies of dynamic mechanical properties of materials can be realized only within narrow frequency ranges, so experimental verification of the spectral function accepted is limited to comparison with the spectra of dielectric relaxation determined experimentally over wide frequency ranges.

A comparison of the normalized spectra of oven dried wood is presented in Fig.3 where the solid line represents the spectrum of mechanical relaxation calculated from Eq.7 while the points illustrate the course of dielectric relaxation spectrum obtained by Norimoto and Yamada (12). Both spectra determined at 215 K are similar in shape and bandwidth.

According to the theoretically obtained dependence $S = Z \cdot R \cdot T$ a change in temperature should cause the evolution of the spectra. This effect was confirmed by the results of dielectric measurements performed by Tsutsumi (13). His results were used to obtain the points in Fig.4. The solid line in the same figure represents the dependence $S(T)$ obtained from Eq.9.

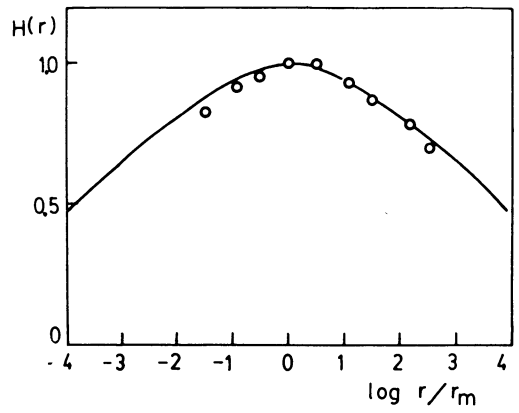


Fig.3. Spectrum of mechanic relaxation times (solid line) and dielectric relaxation times (points, data of Norimoto and Yamada (12)) .

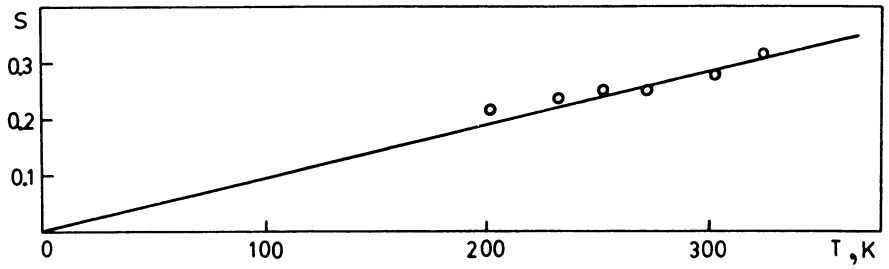


Fig.4. Temperature dependence of S parameter of spectral function (points, data of Tsutsumi (13) obtained in dielectric measurements) .

The result of this comparison can prove the correctness of the assumption taken in the method of determination of the relaxation spectra from temperature dependences of the components of complex elasticity modulus. This result suggests as well possibility that molecular processes of mechanical and dielectric relaxation are not distinguished. Unfortunately, the enthalpy of activation of mechanic relaxation (14,15) is two times higher than that of dielectric relaxation (16,17) so the identification of these two processes cannot be complete. Hypothetically we can assume (15) that in the processes of mechanical relaxation the associates of side groups are involved which link neinghborouring chains via hydrogen bonds and form a crankshaft type system. The energy of reorientation of such an associate in the stress field would be two times higher than the energy of reorientation of a single polar side group in the electric field. The mechanism of relaxation described above is illustrated for cellulose in Fig.5.

The number of mechanical dipoles set in motion in a unit volume of the material is proportional to the area limited by the curves of the relaxation spectra (18) . In the case of spectral functions determined for wood these areas can be found from the dependence $F = 2 \cdot E_m \cdot S^{-1}$. In case of wood deformation along the grains the obtained value, independent of moisture content, was $F_{\parallel} = 2.24 \pm 0.17$ while for the deformation perpendicular to the grains $F_{\perp} = 0.71 \pm 0.06$. Thus the number of single relaxation processes set in motion under the deformation along the grains is three times higher than for the deformation perpendicular to them.

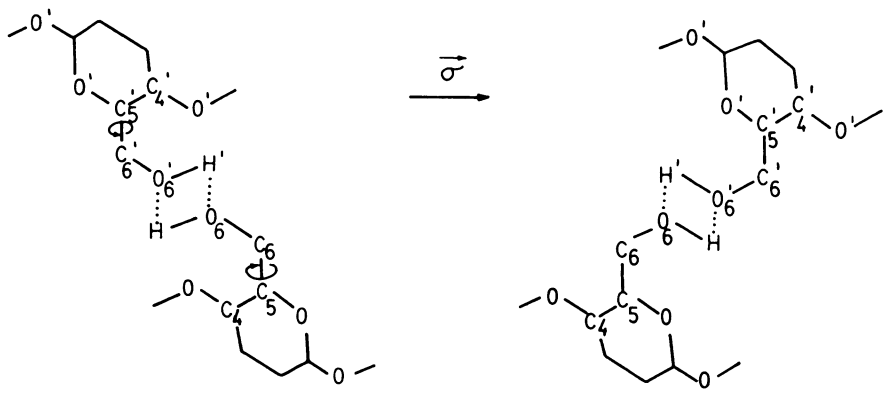


Fig.5. A mode of motion of the associated methylol groups of cellulose in stress field.

This can result from many-side deformation of interfibrillar amorphous substance of wood grains deformed in longitudinal direction (19).

Under this assumption and takig into account the wood porosity, inhomogeneity of grain walls and their texture determined by the helical arrangement of cellulose fibrils we have obtained (15) the following relation between the elasticity moduli found along the grains and in perpendicular to them:

$$E_1^{II} = A + B \cdot E_1^{\perp} \qquad 10$$

where $A = (1-P) \cdot C \cdot E_c^{II} \cdot \overline{\cos^2 Q}$

$$B = \frac{(1-P)(1-m^2)(1-C^2)}{1-\sqrt{P}} + \frac{(1-P)(1-m^2)(1-2 \cdot \overline{ctg^2 Q})^2}{3(1-\sqrt{P})(1-2 \cdot m)}$$

Of course this relation was derived on the grounds of Hearle theory (19) but assuming the additivity of the moduli. In our calculations we took the wood porosity of $P = 0.5$, the contribution of volume of incompressible crystalline phase in grain walls as $C = 0.25$, the elasticity modulus of totally straight cellulose fibrils deformed along the chains as $E_c^{II} = 137$ GPa (20) and winding angle of helicalfibrils:

$$\overline{Q} = \arccos\left(\overline{\cos^2 Q}\right)^{1/2} = 45^{\circ}$$

where $\overline{\cos^2 Q} = \sum_i V_i \cdot \cos^2 Q_i = 0.5$

The contribution of volumes of individual layers V_i in grain walls and the corresponding angles Q_i were taken after Mark (20). From these values $A = 8.6$ GPa. Literature does not give precise information on Poisson coefficient m of the amorphous matrix in the grain wall. Taking, for example, the most probable value $m = 1/3$ we obtain $B = 2.4$.

The theoretically derived linear relation between the moduli and values of its parameters are in a good agreement with the experimentalresults presented in Fig.6.

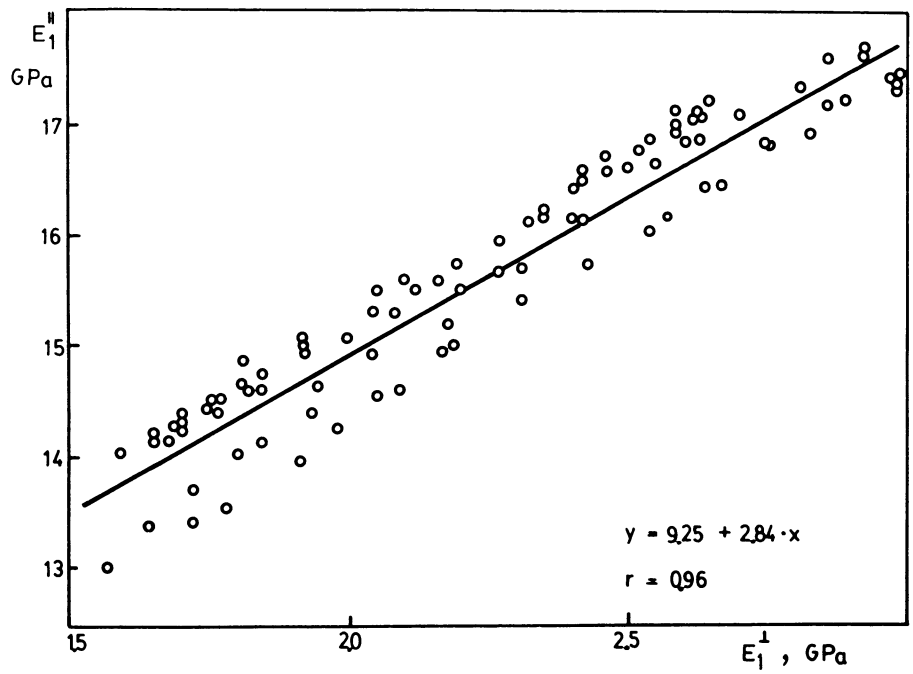


Fig.6. Dependence between dynamic elastic moduli of wood deformed in parallel and perpendicular to the direction of grains.

The relations obtained between spectral functions for anisotropy directions considered and elasticity coefficients lead to mathematically simple dependences between the corresponding rheological functions for the same anisotropy directions. This makes grounds for significant simplifications and generalizations in the theory of anisotropy of viscoelasticity of wood.

REFERENCES

1 A.P. Schniewind, Wood Sci.Techn. V2 (1968), N3, p.188
2 P.U.A. Grossman, Wood Sci.Techn. V10 (1976), N3, p.163
3 J.D. Barrett, In: Structural use of wood in adverse environments. Van Nostrand Reinhold Comp.New York - Melbourne 1982
4 P.R. Blankenhorn, D.E.Kline, F.C.Beall, Wood a.Fiber V4 (1973), N4, p.298
5 E.J. Sellevold, F.Radjy, P.Hoffmayer, L.Bach, Wood a.Fiber V7 (1975), N3, p.162
6 T. Handa, S.Yoshizawa, M.Suzuki, T.Kanamoto, Kobunshi Ronb. V35 (1978), N2, p.117
7 H.F. Becker, Holz als Roh-u.Werkstoff V38 (1980), p.301
8 Brüel a. Kjaer Instr., Complex Modulus Apparatus type 3930, Copenhagen 1974
9 S. Poliszko, Annals Agr.Univ. Poznań 1976, N XC, p.119
10 R.F. Boyer (ed.), Transitions and relaxations in polymers. J.Polym.Sci. C, 1966
11 F. Schwarzl, A.J.Staverman, J.Appl.Sci.Res. A, V4 (1953), N11, p.53
12 M. Norimoto, T.Yamada, Wood Research, 1971, N51, p.12
13 J. Tsutsumi, Bull.Kyushu Univ.Forest.Japan, 1967, N41, p.109
14 R. Kitahara, T.Matsumoto, J.Jap.Wood Res.Soc., V20 (1974), N8, p.349
15 S. Poliszko, Strukturalno-relaksacyjne uwarunkowania lepkosprężystych właściwości drewna. Agr.Univ.Publish., Poznań 1974
16 M. Norimoto, Wood Research, 1976, N69/70, p.106
17 S. Poliszko, G.Hoffmann, J.Appl.Polym.Sci., V29 (1984) (in print)
18 H.A. Stuart (ed.), Die Physik der Hochpolymeren, V4 (1956), Springer V. Berlin
19 J.W.S. Hearle, In: Fracture processes in polymeric solids. Wiley, London 1964
20 R.E. Mark, Cell wall mechanics of tracheids. Yale Univ.Press, New Haven 1967

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 461-468

Creep of wood forced by pulsating stress

Le fluage du bois sous chargement pulsatoire

W. KOKOCINSKI

Department of Wood Science, Agricultural University
Poznań, Poland

S. POLISZKO

Department of Physics, Agricultural University
Poznań, Poland

J. RACZKOWSKI

Department of Wood Science, Agricultural University
Poznań, Poland

ABSTRACT

Creep of pine wood at 0, 10, 20 and 30 % moisture content has been determined under conditions of static and dynamic loadings.Three magnitudes of loading viz. 20, 40 and 60% of maximum load, and three ranges of frequency of dynamic loadings: 3, 30 and 300 cycles per minute were applied during performed tests. It was found that at constant moisture content, dynamic forcing increases the rate of creep in comparison with static forcing. Strains statically and dynamically enforced are subject to the same creep function determined by Duffing's kernels in investigated frequency of actions at stress amplitudes not exceeding 40 % of the value of failure stress.

RESUME

Le fluage du bois à des teneurs en eau de 0, 10, 20 et 30% a été déterminé sous des programmes de chargements d'une part en palier, d'autre part en pulsation ondulée. Trois valeurs du chargement, représentant respectivement 20, 40 et 60% de la charge maximale, ont été utilisées, ainsi que trois fréquences de la charge pulsatoire, soit 3.30 et 300 cycles par minute. On a constaté que, à teneur en eau fixée, le chargement pulsatoire ondulé provoque un fluage plus élevé que le chargement en palier de même amplitude maximale. Pour les amplitudes de chargement n'excédant pas 40% de la charge de rupture, et pour la gamme de fréquences étudiée, les déformations résultant des deux types de chargement se prêtent à représentation par une même forme de fonction fluage correspondant à un noyau de type Duffing.

1 - INTRODUCTION

It can be gathered from published up to the present investigations that creep in wood under conditions of dynamic loadings is recognized in highly unsatisfactory degree when compared with creep in wood under the action of static loadings, which is comparatively well recognized and described in numerous pub-

lications (1, 2, 3, 4, 5). On the other hand, other construction materials such as metals, plastics and concrete had been the subject of comprehensive investigations as regards vibrational creep and trials of analytical description (6, 7, 8, 9). This lack in the field of the behaviour of wood under the action of variable loadings is even more distinct when one considers that members of wooden construction and wood products are frequently exposed to long-term action of variable in time loadings (10, 11). In published up to the present publications concerning creep in wood under the action of variable loadings, the attention is paid mainly to the comparison of the behaviour of wood and some wood base products subjected to variable loadings at relatively low and constant number of load changing cycles (12, 13, 14). Also the effect of previous action of variable loadings on selected mechanical properties of wood was investigated (15, 16, 17, 12). The problem of vibro-creep of wood was, however, the subject of limited investigations (18) results of which do not allow for forecasting the behaviour of wood under conditions of dynamic actions. It was only stated that variable in time loadings are intensifying the process of creep in wood in comparison with statically forced creep. Forecasting the nonelastic behaviour of wood under conditions of static actions can be realizes on the basis of linear viscoelastic theory developed by Boltzmann-Volterry. Acceleration of the creep rate under the action of vibrations is probably connected with changes in the structure of materials induced by dynamic component of stress. This effect is not taken into account in the linear viscoelastic theory. Observed therefore acceleration of creep under conditions of dynamic forcing cannot be described on the basis of obtained data from statically forced creep.

Having in mind these observations and aiming at the creation of the basis of forecasting wood behaviour under the action of vibrational loadings, it was decided to undertake investigations on dynamic creep with the idea of establishing the relationship of creep function parameters in bending of wood at different moisture content and the frequency of stress changes and amplitudes of these stresses.

2 - EXPERIMENTAL

Investigations were performed on Scots pine (Pinus silvestris L.) wood. Samples of 5 mm (T) x 20 mm (R) x 150 mm (L) dimensions and 0, 10, 20 and 30% moisture content maintained on the constant level throughout the measurements were used in reported investigations. Results obtained in tests of sample bending on two roll supports loaded at the centre with roll loading head with the application of two stressing programs are presented in the paper. The first one presented in the scheme a) Fig. 1 is characteristic by the constant value of

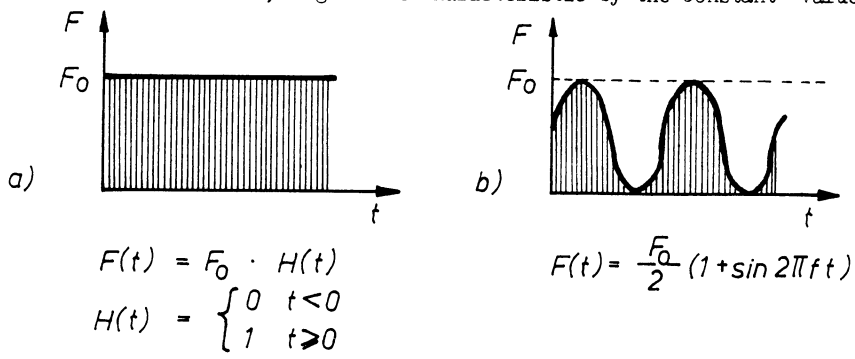


Fig. 1. Schematic reprezentation of stressing programs.

force in time, while the second one presented in the scheme b) features pulsating changes in the force value of the amplitude equal to the value of force used in loading in accordance the values 3, 30 and 300 cycles per minute. Amplitudes of applied stresses amounted to 20, 40 and 60% failure stress determined on samples of 10% moisture content. Investigation were performed on

prototype vibro-creep machine (18).

3 - RESULTS AND DISCUSSION

Fig. 2 presents exemplary curves of creep obtained at different amplitudes of stresses and equal moisture content of wood 10 %. As can be deduced from these curves, dynamic enforcement, particulorly at 30 and 300 cycles per minute pulsation frequency, clearty intensifies the process of creep in comparison with statically forced creep. At low vibration frequency the rate of dynamic creep is comparable and even lower than the rate of statically forced creep.

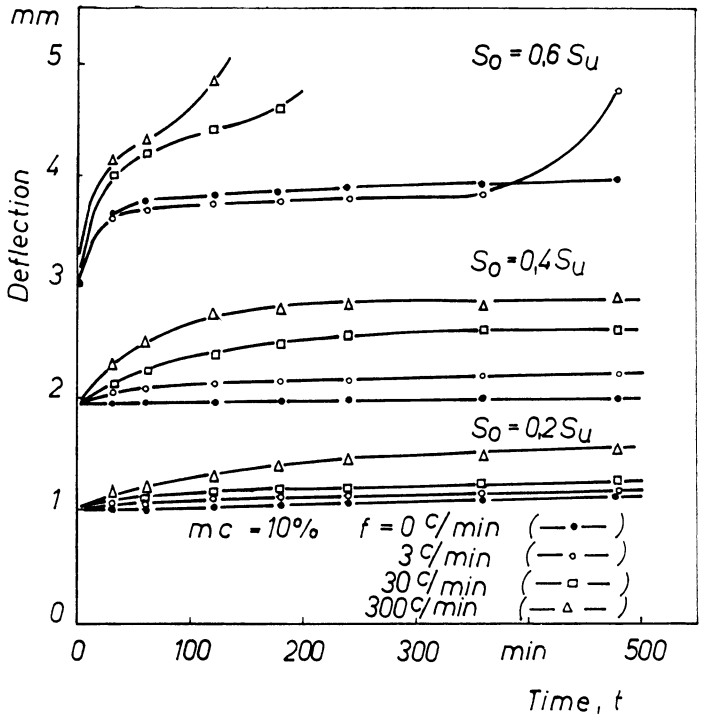


Fig. 2. Effect of the amount and frequency of applied stress on creep curves for pin wood at 10 % moisture content.

Increased amplitudes of applied loadings are accompanied by the increased amplitudes of strain in samples which finally leads to failure at high frequences and stress amounting to 60 % of ultimate strength. On the next Fig. 3 curves of statically and dynamically forced creep at various moisture content of wood are presented. The necessary data were obtained at the stress level amounting to 20 % of ultimate strength determined at 10 % moisture content of wood. Static and dynamic curves of creep obtained at 0 % and 10 % moisture content of wood are characteristic by approximate values of initial strain, increased moisture content up to 20 % and 30 % results in the distinet increase of initial strains and increase of the creep rate particularly at high frequencies of stress changes.

When discussing the quantitative characteristics of creep in pine wood under conditions of dynamic enforcement it is necessary to begin with the description of wood behaviour when static stresses are acting. In case of short - time experiments we have performed, static enforcement of creep can be described by Boltzmann-Volterry equation supplied with nuclear function of Duffing's type. Under conditions of haevisid loading the creep function can be presented by the

equation:

$$u(t) = u_o + k \cdot t^n$$

By means of computerized calculations it was ascertained that all obtained creep curves were subordinated to that equation. At the same time, very high correlation factors of r = 0,99 order were obtained not only for curves of static creep but also dynamic one. Determined in the course of fitting values of n indicate to a lack of this parameter dependence on the frequency (f), moisture content (h) and stress enforcing the creep (s). Assuming therefore that n = inv (h, f, s), this creep function parameter constant value was accepted as n = = 0,43 ± 0.15 that is the mean value of those obtained during performed experiments. In extreme cases, this simplification lowers the precision of fitting experimental and theoretically calculated curves for not more then 4 %.

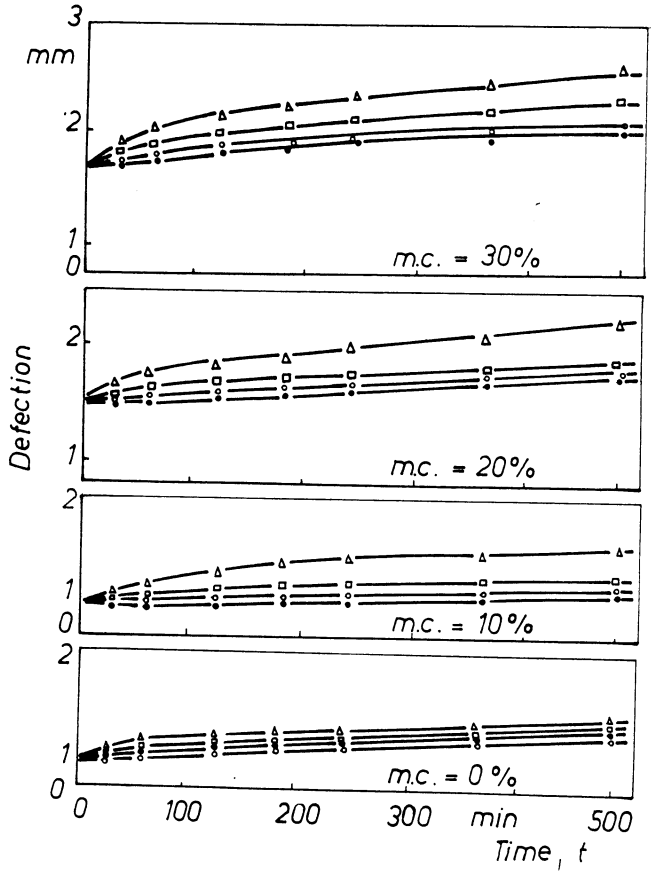


Fig. 3. Effect of wood moisture content and frequency of applied stress on the creep of pine wood forced by loading at 20 % of failing load at 10 % moisture content of wood.

In the further course of the experimental data analysis, the creep function was presented in the standard from relating to initial strain:

$$\frac{u(t)}{u_o} = 1 + \frac{k}{u_o} \cdot t^n$$

It appears, that the directional factor k/u_o of anamorphoses linearizing experi-

mental creep curves obtained under conditions of stationary actions, is not shoving a distinct dependence on the stress or moisture content of investigated wood. If such dependence exists then it is confined inside limits of experimental error.

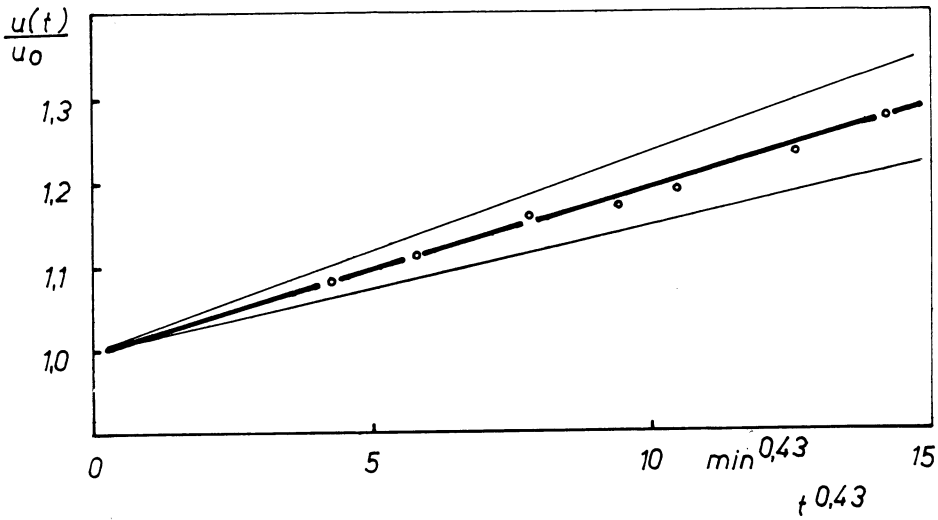


Fig. 4. Anamorphosis linearizing curves of creep in pine wood caused by the action of static stress.

On the Fig. 4, the creep curve obtained under conditions of static actions is presented. Marked in the figure division of directional factor variableness was determined by computing the standard deviation from the mean value. Standardization of creep curves obtained under conditions of dynamic forcing at $s_o = 0.4\ s_u$, leads also to results according to which it can be assumed that in limits of experimental errors $k/u_o = inv\,(h, s)$. However, on the Fig. 5, a distinct dependence of inclination angle of anamorphoses on the frequency of stress changes is observed. In the next figure Fig.6 , the mean value of directional coefficients is presented in the function f^n. Obtained in such coordinates system, the linearization leads to the equation:

$$\frac{k}{u_o} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{u_o}\right)_{st} + B \cdot f^n$$

Standardization of function of creep in wood dynamically forced can be, therefore, presented by the following equation:

$$\frac{k}{u_o}(t) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{u_o}\right)_{st} \cdot t^n + B_d \cdot f^n \cdot t^n$$

Assuming that the component of this function $0.5\,(k/u_o)_{st}$ denotes the amount of creep forced by static component $(0.5\ s_o)$ of pulsating stress, the component $B_d (f \cdot t)^n$ can be ascribed to dynamic component $(0.5\ s_o \sin 2\pi f \cdot t)$ of this stress. The second mentioned component of the creep function can be also presented in the form: $B_d \cdot N_t^n$, where N_t is the number of cycles in stress changes in time t. Obtained increase of creep degree under conditions of dynamic enforcement can be explained by the generation of fatique defects in the structure of wood. Such interpretation suggests itself when the equation $(u/u_o)_{dyn} = B_d \cdot N_t^{0.43}$ is compared with semienpiric Gittus dependence concerning the fatique strength of materials. According to this dependece, the root of the number of cycles N_u resulting in sample failure in fatique tests is proportional to the strain u_{kr} at which the failure occurs in tension test $(N_u^{0.5},\ u_{kr})$.

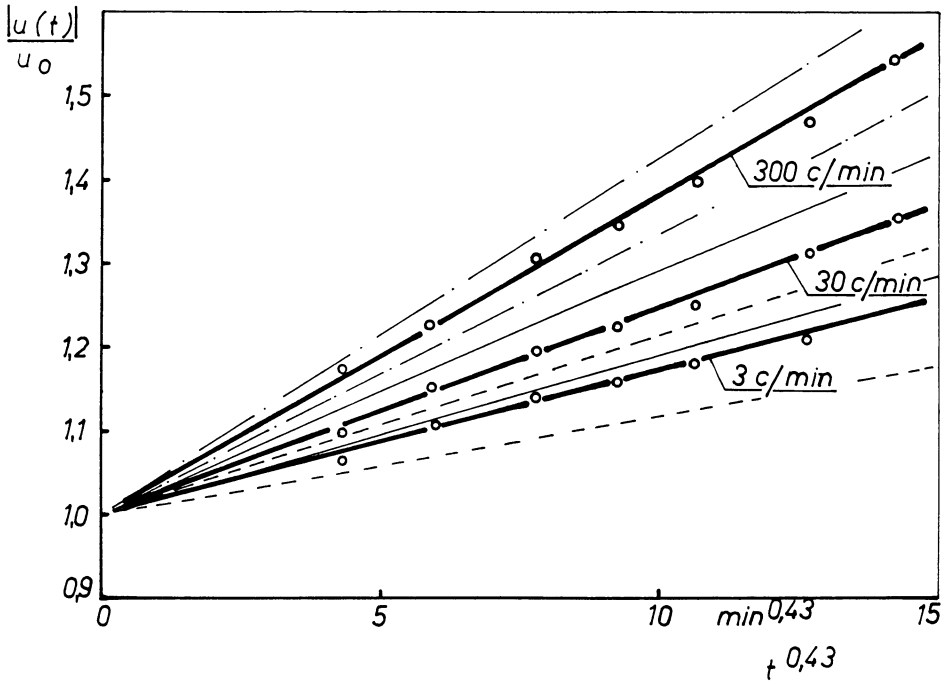


Fig. 5. Anamorphosis linearizing curves of creep in pine wood at different frequencies of stress changes.

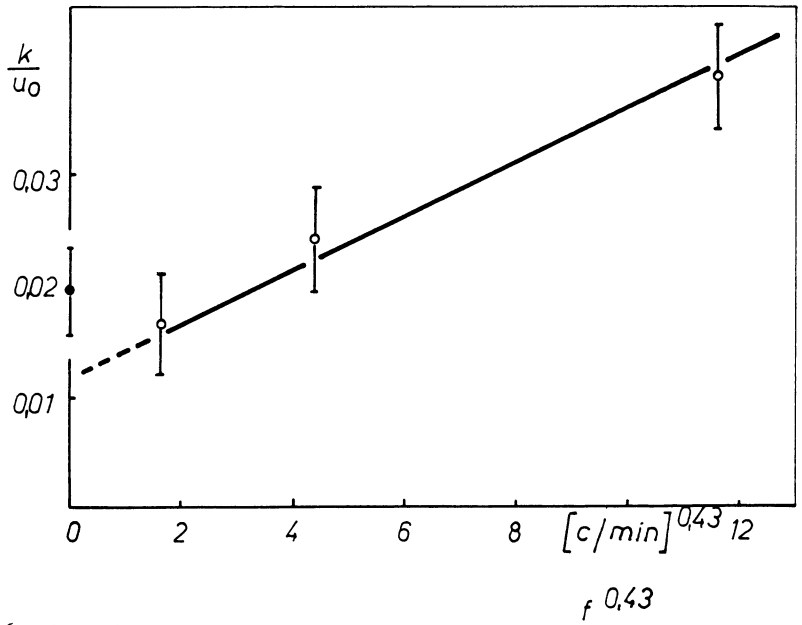


Fig. 6. Dependence of the value of directional coefficient of anamorphosis linearizing creep curves on the frequency of stress changes.

4 - CONCLUSION

At constant moisture content, dynamic forcing increases the rate of creep in comparison with static forcing. Strains statically and dynamically enforced are subject to the same creep function determined by Duffing's kernels in the investigated frequency of actions at stress amplitudes not exceeding 40% of the value of failure stress.

REFERENCES

1 A.P. Schniewind, Wood Sci.Techn. V1(1967), N4,p.278
2 A.P. Schniewind, Wood Sci.Techn. V2(1968), N3,p.188
3 H. Marciniak, J. Raczkowski, Prace ITD,Poznań, V18(1971),N1,p.25
4 J.M. Martin, Wood Sci.Techn. V14(1980), N3,p.187
5 Ju.M. Ivanov, Les.Żurnał, V25(1982), N5,p.73
6 B.S. Bobrov, O.S. Vinogradov, Mech.Polim. V11(1976), N2,p.230
7 A.J. Kennedy, Połzucest' i ustalost' w metallach. Moskva(1965)
8 A.K. Malmejster, Uprugost' i nieuprugost' betona. Riga(1957)
9 Ju.S. Urżumcev, Mech.Polim. V4(1968), N1,p.34
10 W. Roth, Holz als Roh- u.Werkstoff, N7(1978),p.261
11 J.D. Barrett,In: Structural use of wood in adverse environments. Van Nostrand Reinhold Comp., New York - Melbourne (1982)
12 G. Rose, Holz als Roh- u.Werkstoff, V23(1965), N7,p.271
13 T. Perkitny, R. Garczyński, Holztechnologie V10(1969), N4,p.236
14 T. Perkitny, S. Steller, Holztechnologie V13(1972), N1,p.43
15 W. Gillwald, Holz als Roh- u.Werkstoff, V19(1961), N3,p.86
16 W. Gillwald, H. Luthardt, Holztechnologie V7(1966), N1,p.25
17 H. Götze, W. Melle, Holzindustrie V22(1969), N7,p.200
18 W. Kokociński, S. Poliszko, J. Raczkowski, Zesz.Probl.Post.Nauk Roln. (1984)(in print)
19 J.H. Gittus, Nature V202(1964), N4934,p.788

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 469-484

La vitesse des ultrasons et la qualité du bois
Ultrasonic velocity and wood quality

V. BUCUR

Chercheur Contractuel (Chargé de Recherches)
Station de Recherches sur la Qualité des Bois
C.N.R.F. Nancy-Amance (I.N.R.A.)

RESUME

La méthode de la vitesse de propagation des ultrasons est employée pour étudier la qualité du bois sur des échantillons du type carottes de sondage prélevées sur des arbres.

Les valeurs de la vitesse des ondes longitudinales et transversales montrent qu'on peut différencier la qualité du bois en fonction de facteurs liés, d'une part aux particularités du plan ligneux, comme le caractère ondé, la présence de la veine verte, le bois de tension, la longueur des fibres, et d'autre part à la sylviculture, comme par exemple l'élagage de branches vivantes.

Les résultats obtenus par la méthode de la vitesse de propagation des ultrasons ont été comparés avec les résultats de la méthode densitométrique aux rayons X sur carottes et avec la méthode de dureté par impact au pilodyn sur arbres. La bonne concordance des résultats montre que la méthode ultrasonore est appropriée pour l'étude de la qualité du bois.

Essences étudiées : le Douglas, le Merisier et l'Erable.

ABSTRACT

Ultrasonic velocity method was used to study the wood quality on increment cores specimens bored from living trees.

Longitudinal and transverse velocities show that the wood quality can be differenciate by factors connected with gross structure as wavy figures, green veine, tension wood, fibers length and on the other hand by factors connected wity sylvicultural treatment i.e. pruning.

The results from ultrasonic velocity method were compared with the results from X-ray densitometric method on cores and with the results from hardness method-pilodyn test on trees. The corroboration of results from different methods shows that the ultrasonic velocity method is an useful tool for wood quality studies.

Species : douglas, cherry tree, maple.

1 - INTRODUCTION

Le but de cette note est de montrer les différents champs d'application de la méthode de la vitesse de propagation des ultrasons pour apprécier la qualité du bois des arbres sur pied, selon une méthodologie non destructive.

.../...

Pour aborder ce sujet, nous posons les hypothèses suivantes :
- la carotte de sondage est représentative pour la qualité de la totalité de l'arbre,
- la mesure de la vitesse de propagation des ultrasons sur une éprouvette de type carotte de sondage est un élément de comparaison entre différents arbres pour apprécier leur qualité.

2 - CONSIDERATIONS THEORIQUES

Depuis un siècle (1), le bois est considéré par tous les auteurs qui l'ont étudié comme un solide orthotrope ayant trois axes de symétrie qui correspondent aux trois axes de l'arbre : L - longitudinal, par rapport à la direction de croissance, R - radial, et T - tangentiel par rapport aux cernes.

Il est bien connu que dans un solide orthotrope, il est possible de mesurer trois vitesses correspondant aux ondes longitudinales et trois vitesses correspondant aux ondes transversales (2). Ces vitesses sont liées aux composantes du tenseur des rigidités C_{ijkl} par l'équation suivante :

$$\left| C_{ijkl} \cdot n_j n_k - V^2 \rho \cdot \delta_{il} \right| = 0$$

où n_j et n_k sont les composantes du vecteur de propagation $\vec{n}$, ρ la masse volumétrique, V la vitesse, et δ_{il} le tenseur de KRONECKER.

Dans ce qui suit, nous nous servirons de valeurs de la vitesse de propagation des ultrasons pour étudier la qualité du bois des arbres vivants. Par la suite, nous étudierons la qualité du bois en fonction, d'une part de facteurs liés aux particularités du plan ligneux (le caractère ondé, la présence de la veine verte, la longueur des fibres, le bois de tension), et d'autre part à la sylviculture (élagage de branches vivantes).

Finalement, les résultats obtenus par la méthode de la vitesse de propagation des ultrasons ont été comparés avec les résultats des autres méthodes non destructives développées tout d'abord sur carottes de sondage, notamment la méthode de l'analyse densitométrique aux rayons X, et ensuite avec les résultats de la méthode du pilodyn, méthode qui fait appel à un essai de dureté par impact sur le tronc de l'arbre.

3 - MATERIEL

Pour la mesure de la vitesse de propagation des ultrasons, nous avons employé le matériel expérimental suivant :

- sur carottes : la vitesse de propagation des ultrasons a été mesurée avec la chaîne composée de l'analyseur AU 5052 Panametrics, d'un osciloscope Schlumberger 5220 et de transducteurs Panametrics de 1 MHz.

La partie émetteur de l'analyseur génère des impulsions de caractéristiques suivantes : temps de montée inférieur à 10 ns, largeur minimum de l'impulsion 300 ns, fréquence de récurrence de 0,1 à 5 kHz, énergie disponible règlable en 4 positions (14, 36, 58 et 94 x 10^{-6} joules), atténuation de 0 à 68dB par pas de 2 dB, puissance d'entrée du récepteur 40 mW. L'oscilloscope Schlumberger 5220 est caractérisé par une bande passante atteignant 100 MHz et une double base de temps. L'affichage numérique permet de mesurer le temps séparant deux points quelconques du phénomène observé sur l'écran à 0,001 µs près.

- sur billons : la vitesse de propagation des ondes longitudinales se propageant à la surface a été mesurée avec l'ausculteur AU 80 Sattec.

L'analyse densitométrique a été effectuée sur carottes à partir de radiographies obtenues avec l'appareil Baltographe 5-50 kV/20 mA (distance de la source au film : 2,50 m ; tension : 13,5 kV, intensité : 5 mA, temps d'exposition : 10 minutes). L'analyse des radiographies a été faite sur un microdensitomètre Joyce avec une fente de 0,026 mm de largeur et de 0,334 mm de hau-

.../...

teur. L'interprétation des résultats a été faite en concordance avec la méthode de routine (3) (4) employée par la Station de Recherches sur la Qualité des Bois.

4 - RESULTATS

4.1 - Facteurs liés aux particularités du plan ligneux

4.11 - Zone aubier - zone coeur (adulte) du douglas

Le tableau 1 montre les vitesses des ondes transversales mesurées sur la zone d'aubier et de coeur du bois de douglas sur des carottes de 5 mm de diamètre prélevées du premier billon de 4 m d'un arbre élagué (50 % de sa hauteur) et d'un arbre témoin sur toute la hauteur et sur quatre génératrices. 32 observations ont été faites. Nous signalons que les différences les plus importantes entre l'aubier et le coeur sont montrées pour les vitesses V_{TR} et V_{LR}.

4.12 - Caractère ondé de l'érable

Ce caractère a été étudié sur carottes de 10 mm de diamètre, découpées en 16 zones radiales d'environ 1 cm du coeur vers l'écorce. La figure 1 montre que les vitesses V_{RR} ET V_{RL} différencient bien le bois ondé d'un témoin normal. La vitesse V_{LL} du témoin est supérieure à celui ondé, tandis que les vitesses liées à la direction radiale du bois ondé V_{RR}, V_{RL} et V_{RT} sont toutes supérieures au bois normal.

4.13 - Veine verte du merisier

Ce défaut du bois de merisier est visible en bandes de couleur verdâtre. Il est fort probable que la veine verte soit liée au bois de tension, et donc aux cellules à couche gélatineuse ayant une forte proportion de substances cellulosiques.

POLGE (5) a mis en relation ce défaut du merisier avec la vitesse de propagation des ultrasons, avec le bois de tension, avec la mase volumique et avec les caractéristiques des fibres (longeur et rendement). Son étude portait sur 48 échantillons se répartissant en trois catégories : veine verte (V), à proximité de la veine verte (P) et témoin (T). Les résultats sont montrés dans le tableau 2. Nous retiendrons que la vitesse des ultrasons dans le bois à veine verte est nettement supérieure à celle des témoins. La liaison la plus étroite est celle entre la vitesse des ultrasons et la longueur des fibres (tableau 3). Le coefficient de corrélation peut atteindre 0,90 pour les valeurs moyennes des planchettes étudiées (figure 2).

On peut penser que les membranes des fibres interviennent comme des guides d'ondes pour les ultrasons dont la vitesse se trouverait réduite à chaque passage d'une fibre à la suivante dans le sens longitudinal, malgré l'efficacité apparente de la liaison assurée par les membranes mitoyennes : à des fibres plus longues correspondraient moins de points de ralentissement par unité de longueur, donc une vitesse plus élevée ; de la même façon se trouverait expliquée la plus grande vitesse des ultrasons dans le bois à veine verte à fibres plus allongées que celles du bois normal. On peut noter accessoirement qu'un coefficient aussi élevé confirme la validité des méthodologies originales utilisées pour évaluer les deux paramètres en cause (5), notamment la mesure de longueur des fibres en suspension aqueuse très diluée (6), les microcuissons papetières (7) et la mesure des vitesses de propagation des ultrasons sur des échantillons de type carottes de sondage ou barrettes de 5 mm (8). Si l'une ou l'autre donnait des indications plus ou moins aléatoires ou encore entachées d'une forte erreur expérimentale, on ne saurait trouver entre eux qu'indépendance statistique ou, au mieux, que relation faiblement significative. Ce n'est pas notre cas car les liaisons trouvées sont très fortes.

Le tableau 4 montre que la qualité du bois de merisier avec et sans veine verte peut être différenciée à un seuil de 1‰ pour les caractéristiques sui-

.../...

TABLEAU 1 : Vitesses des ondes transversales sur le bois d'aubier et de coeur de douglas

		Vitesse des ondes transversales (m/s)					
		V_{LR} moyenne	c.v.	V_{LT} moyenne	c.v.	V_{TR} moyenne	c.v.
Douglas arbre élagué	aubier	1405	0,1103	1342	0,0920	519	0,1769
	coeur	1620	0,1083	1448	0,1009	615	0,1860
	différence (%)	13,27	-	7,32	-	15,60	
Douglas arbre témoin	aubier	1471	0,1026	1430	0,0843	508	0,1379
	coeur	1623	0,0886	1524	0,0761	580	0,2144
	différence (%)	9,36	-	6,17	-	12,41	-

c.v. = coefficient de variation

TABLEAU 2 : Vitesse des ultrasons et caractéristiques anatomiques du bois de merisier - valeurs moyennes (d'après POLGE, 1984)

Caractéristiques		Bois de merisier V (veine verte)	P (proximité de V)	T (témoin)	Seuils de signification et comparaison de moyennes
Vitesse des ultrasons	m/s	4925	4921	4560	1 %
Bois de tension	%	38,37	18,62	3,62	1 % 1 ‰
Rendement en fibres	%	48,54	47,57	46,31	5 % 1 %
Longueur de fibres	mm	0,588	0,588	0,522	1 ‰

N.B. = Les valeurs soulignées par un même trait ne diffèrent pas significativement aux seuils de probabilité indiqués dans la dernière colonne.

TABLEAU 3 : Coefficients de corrélation entre la vitesse de propagation des ultrasons et les caractéristiques anatomiques du bois de merisier (d'après POLGE, 1984)

	Bois de tension	Masse volumique	Longueur de fibres	Rendement en fibres
Vitesse des ultrasons	0,41 **	NS	0,77 ***	0,53 ***

N.B. = Calcul pour l'ensemble des 48 échantillons

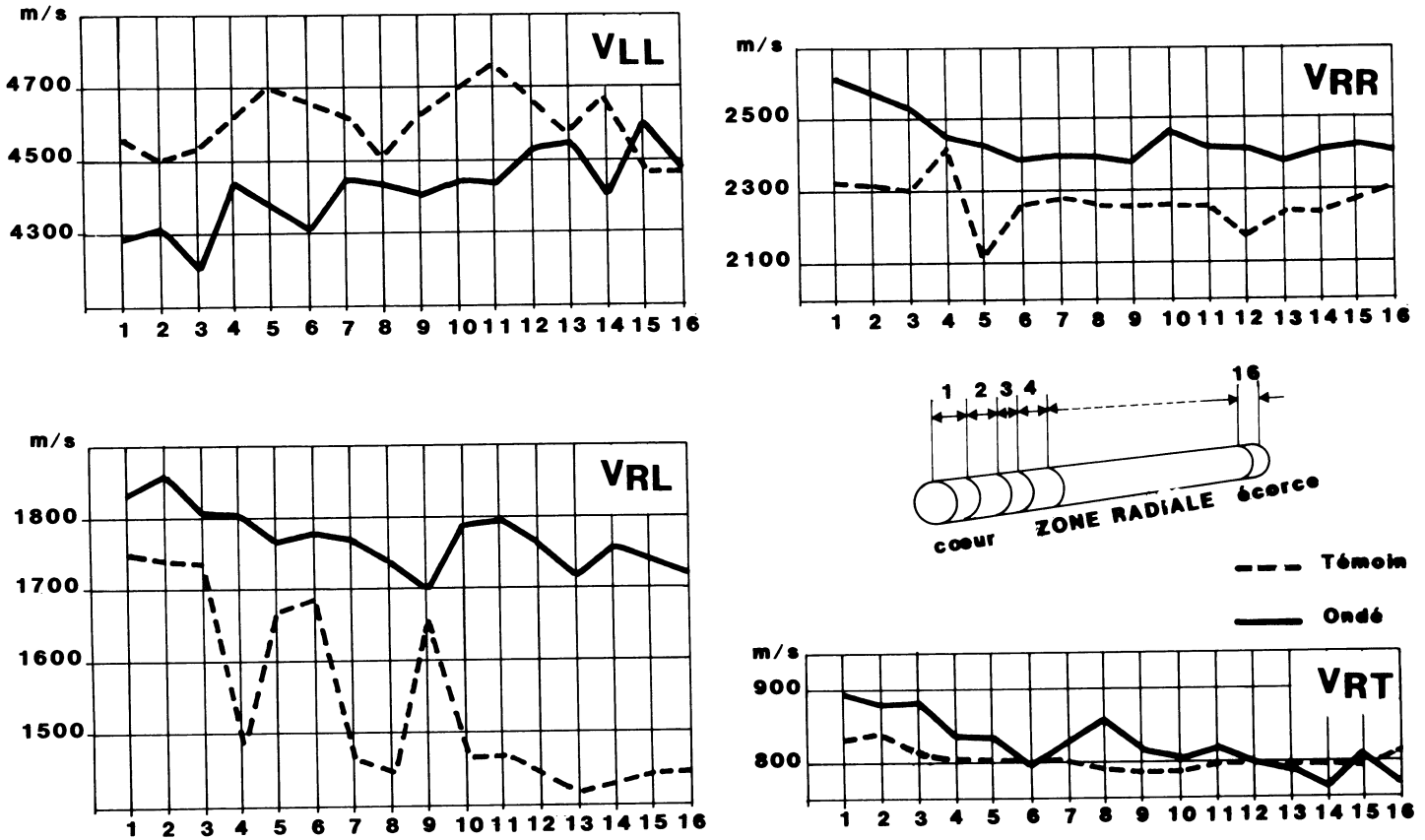


FIGURE 1 : Vitesses des ultrasons du coeur vers l'écorce mesurées sur le bois d'Erable

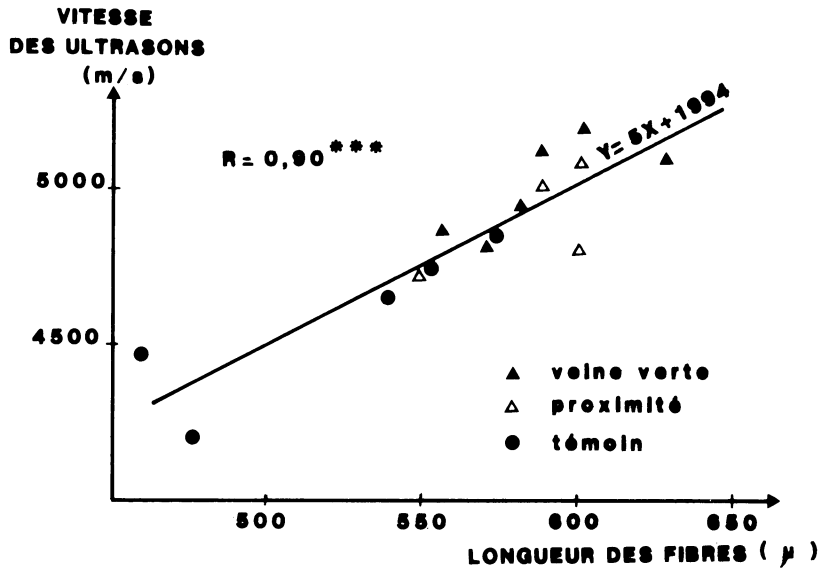


FIGURE 2 : Vitesse longitudinale V_{LL} et longueur de fibres

(d'après POLGE, 1984)

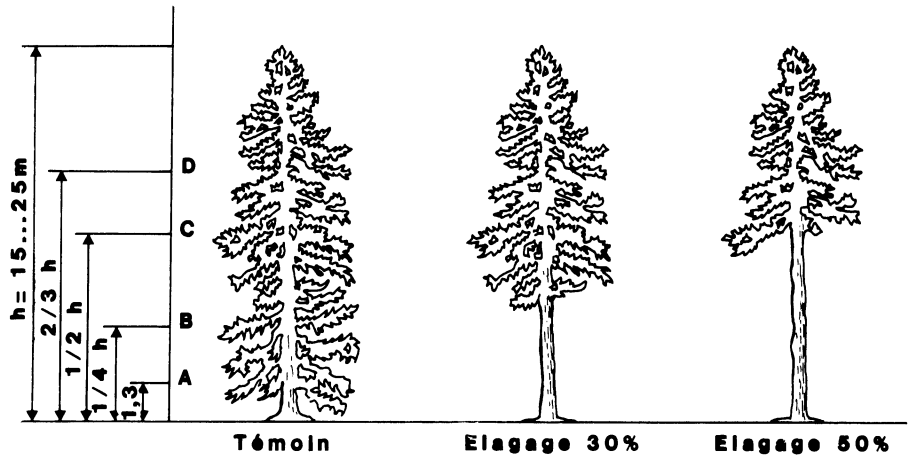


FIGURE 3 : Prélèvement des carottes à quatre niveaux sur arbres élagués

vantes : vitesse des ultrasons V_{LL}, pourcentage de bois de tension et longueur des fibres. La masse volumique ne le différencie pas.

4.2 - Influence du traitement sylvicole

Pour montrer l'influence de la sylviculture sur la qualité du bois, une étude a été entreprise sur des douglas de la forêt communale d'Epinal (Vosges) qui ont subi des traitements sylvicoles différents (élagage à 50 % et 30 % de leur hauteur) et sur des arbres témoins. 10 arbres ont été choisis par traitement. Chaque arbre a été sondé en hauteur à quatre niveaux : A, B, C, D, correspondant respectivement à 1,30 m, au quart, à la moitié et aux trois quarts de la hauteur. Pour chaque niveau, deux carottes diamétralement opposées ont été prélevées. Au niveau 1,30 m, à côté des carottes, une planchette de 40 mm d'épaisseur dans le sens radial a été prélevée, dans laquelle des éprouvettes normalisées de 20 x 20 x 300 mm et des cubes de 15 x 15 x 15 mm ont été débités. L'étude a donc été portée sur 240 carotes (3 traitements x 10 arbres x 4 niveaux x 2 côtés) et 60 éprouvettes (figure 3).

Les analyses ont porté sur les constantes élastiques suivantes :

- vitesses longitudinales, selon les trois axes d'anisotropie du bois : V_{LL}, V_{RR}, V_{TT} sur carottes et sur éprouvettes normalisées,
- modules d'Young statiques, ainsi que contrainte de rupture par flexion sur éprouvettes normalisées.

Les résultats font l'objet du tableau 5.

Il est à noter que les valeurs des constantes élastiques sur carottes sont différentes de celles sur cubes et éprouvettes. Le traitement sylvicole a une forte influence sur la vitesse longitudinale V_{LL}^2, sur le module d'Young statique, sur la contrainte de rupture et sur la masse volumique du bois. La différence de 20 % entre les arbres témoins et élagués à mi-hauteur peut s'expliquer par l'augmentation de la longueur des trachéides. Une structure anatomique bâtie avec des trachéides longues est beaucoup plus favorable à la propagation des ultrasons, et donc on peut s'attendre à l'augmentation de la vitesse longitudinale. L'effet du traitement sylvicole est marqué aussi sur la masse volumique du bois. La différence entre le traitement le plus sévère et le témoin est d'environ 7 %.

L'étude de la variation de la vitesse de propagation des ultrasons et de la masse volumique aux différents niveaux (par la comparaison des moyennes - test t Student) a montré que seule la vitesse longitudinale est capable de distinguer le bois élagué jusqu'à 7 m de hauteur (figure 4). Ce test illustre la capacité de la vitesse des ultrasons de rendre compte de la structure anatomique du bois.

Puisqu'il n'y a pas identité de valeurs des constantes élastiques déterminées sur différents types d'échantillons (parallélépipèdes ou carottes), il s'est avéré intéressant de juger la valeur relative des mesures effectuées par la méthode de la vitesse de propagation des ultrasons pour le classement des individus. Dans ce but, nous invoquons la figure 5 qui montre que :

- pour un individu d'une certaine masse volumique, la vitesse V_{LL} est supérieure sur une éprouvette normalisée à celle mesurée sur une carotte,
- le classement des individus est toujours respecté, quelle que soit la valeur de la masse volumique du bois.

Donc, du point de vue de la mesure de la vitesse de propagation des ultrasons, le classement des individus reste le même, indépendamment du type d'échantillon utilisé. De cette constatation ressort l'intérêt de cette méthode pour la connaissance du bois de façon non destructive.

4.3 - Comparaison des méthodes

L'estimation de la qualité du bois par plusieurs méthodes non destructives sur carottes et sur billons nous oblige à les comparer entre elles. Ainsi, tout d'abord, nous examinons les résultats obtenus sur billons par la méthode de la vitesse des ultrasons (ondes longitudinales se propageant à la surface)

TABLEAU 4 : Qualité du bois de merisier (avec et sans veine verte) observée par différentes caractéristiques (d'après POLGE, 1984)

	Vitesse des ultrasons	Masse volumique	Bois de tension	Longueur de fibres	Rendement en fibres
Test F	***	NS	***	***	*

N.B. = Le nombre de degrés de liberté est de 2 pour le traitement et de 45 pour l'erreur

TABLEAU 5 : Le traitement d'élagage et la vitesse de propagation des ultrasons dans le bois de douglas à 12 % d'humidité

Traitement	CAROTTES DE SONDAGE						EPROUVETTES NORMALISEES				
	V_{LL} (m/s)	V_{RR} (m/s)	V_{TT}	V_{LL}^2 (x 10^8 m^2/s^2)	V_{TT}^2	masse volumique (kg/m3)	V_{LL} (m/s)	V_{LL}^2 (x10^8 m^2/s^2)	masse volumique (kg/m3)	E_L ($10^8 N/m^2$)	Contrainte de rupture
Elagué 50 %	4574	1997	1766	0,2092	0,0311	460	5773	0,3332	492	117,653	827
Elagué 30 %	4537	1978	1722	0,2058	0,0296	441	5652	0,3195	470	109,035	786
Témoin	4183	2057	1717	0,1749	0,0294	423	5375	0,2889	458	94,353	724
Elagué 50 % / témoin	-	-	-	1,195	1,057	1,087	-	1,153	1,074	1,246	1,142

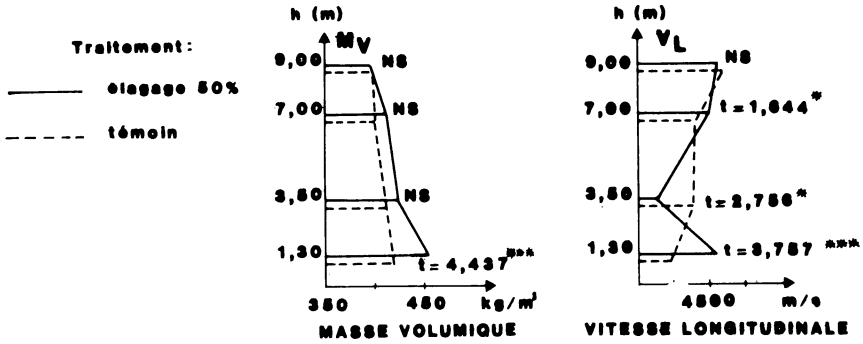


FIGURE 4 : Vitesse V_{LL} et masse volumique du Douglas en fonction de la hauteur de l'arbre

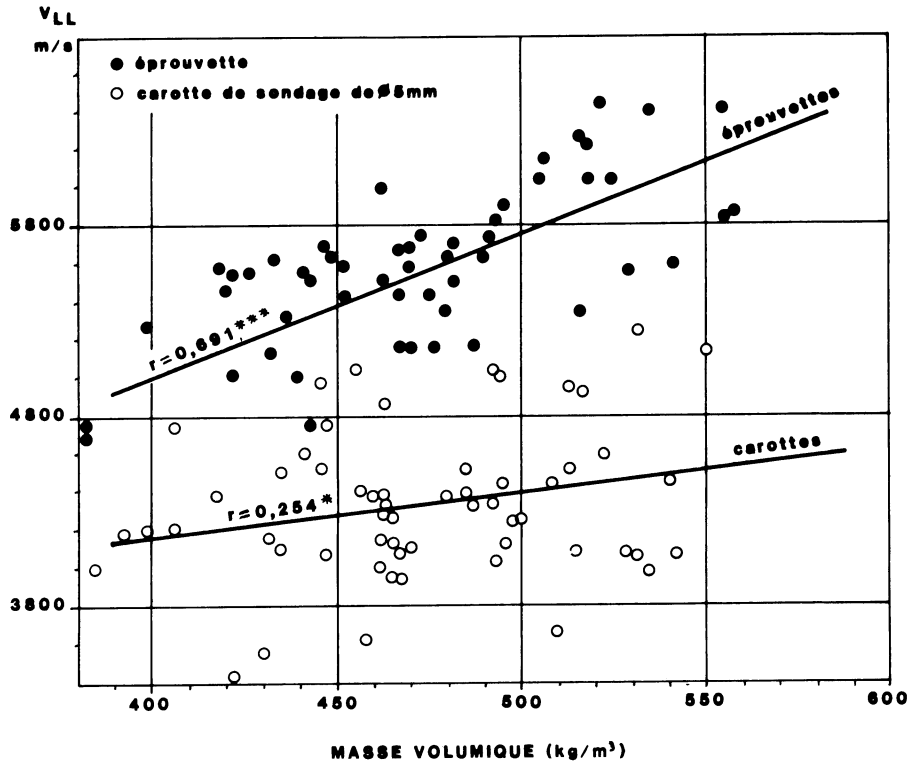


FIGURE 5 : Vitesse V_{LL} en fonction de la masse volumique sur éprouvetes et carottes de sondage de Douglas

et par la méthode du pilodyn. Ensuite, nous comparons les résultats sur carottes de sondage obtenus par la méthode de la vitesse des ultrasons (ondes longidutinales et transversales) avec les résultats de la méthode densitométrique (rayons X). Toutes les mesures concernent la zone d'aubier.

Pour la comparaison des méthodes, nous avons retenu 2 douglas de 20 cm de diamètre (échantillons prélevés à 1,30 m). Le premier a été élagué jusqu'à la moitié de sa hauteur ; le deuxième a été un témoin. Sur chaque arbre, 18 zones ont été délimitées entre 0,20 m et 8,50 m sur les 4 génératrices. De chaque zone, une carotte de sondage de 5 mm de diamètre et 10 cm de longueur a été prélevée. Finalement, 144 carottes ont été mesurées. Pour faciliter les mesures, les arbres ont été découpés en billons.

Sur billons :

La figure 6 montre les valeurs de la pénétration du pilodyn et de la vitesse des ondes de surface en fonction de la hauteur des arbres étudiés. La dispersion des valeurs est plus grande dans l'arbre témoin que dans l'arbre élagué. Cela signifie que la variabilité de la qualité du bois élagué est plus faible que celle du témoin. Les relations expérimentales entre la hauteur de l'arbre et les valeurs de la pénétration du pilodyn ou les valeurs des ondes de surface sont les suivantes :

. arbre élagué (nombre d'observations : 64)

$P = 13,7069 + 224 \times 10^{5} h$; $r = 0,837$ ***

$V_{RR} = 1639,656 - 0,3495\ h$; $r = -0,660$***

$V_S = f(h)$; r. = NS

. arbre témoin (nombre d'observations : 60)

$P = 13,7647 + 495 \times 10^{-5}\ h$; $r = 0,936$ ***

$V_{RR} = 1559,672 - 0,1806\ h$; $r = -0,383$*

$V_S = 4979 + 1,104\ h$; $r = 0,339$ **

L'uniformité de la qualité du bois élagué à la périphérie du tronc de l'arbre est montrée par la relation non significative entre la vitesse des ondes de surface et la hauteur de l'arbre.

Sur carottes :

Le tableau 6 présente les valeurs des vitesses et des composantes de la densité pour les arbres étudiés. Il est à remarquer que les deux arbres ont une densité moyenne à peu près identique.

D'après les données du tableau 6, il nous semble que l'influence du traitement sylvicole est marquée sur les valeurs des composantes de la densité et sur la vitesse V_{LL}.

La bonne concordance entre les mesures sur billons et sur carottes est illustrée par la vitesse V_{RR} (figure 7). Par conséquent, nous pouvons déduire que quelques-unes des informations apportées par les carottes de sondage peuvent être obtenues par une simple mesure de vitesse radiale directement sur l'arbre sans prélèvement d'échantillons.

Par ailleurs, il est bien connu que plusieurs méthodes non destructives employées pour caractériser le même matériau donnent des informations complémentaires sur les caractéristiques du matériau étudié. Dans ce sens, nous avons tenté de calculer les corrélations entre la pénétration du pilodyn, la vitesse des ultrasons et les composantes de la densité (tableau 7). Toutes les variables mesurées sur l'arbre témoin sont en corrélation très étroite avec le test du pilodyn.

.../...

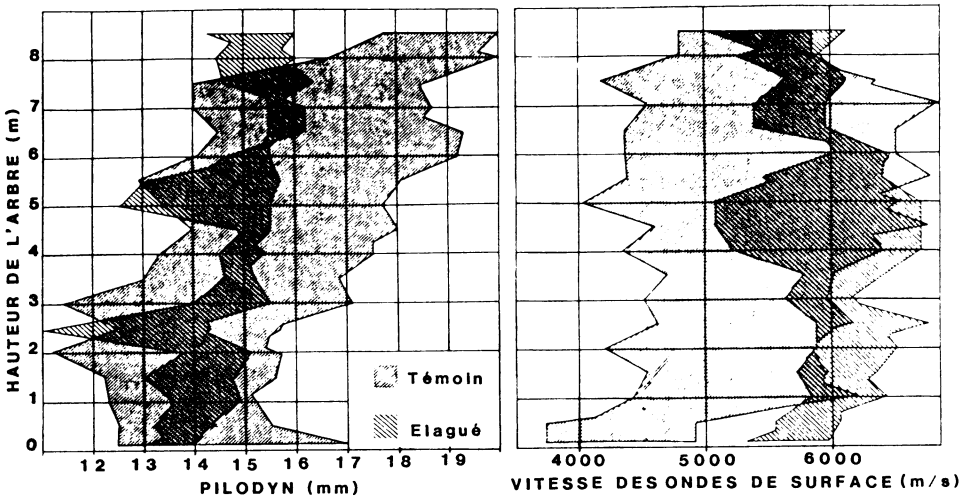


FIGURE 6 : La pénétration du pilodyn, la vitesse des ondes de surface et la hauteur de l'arbre

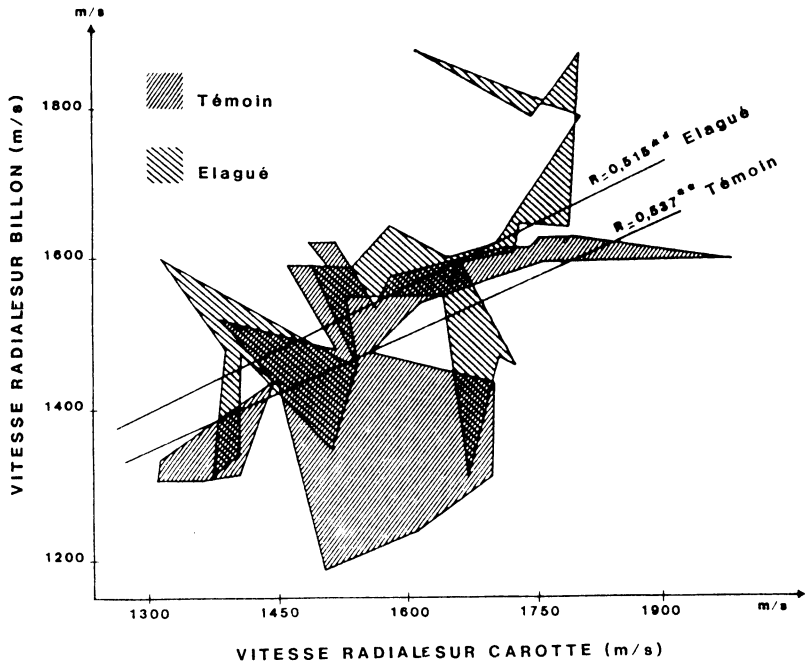


FIGURE 7 : Vitesse radiale sur billons et carottes

TABLEAU 6 : Vitesses des ultrasons et composantes de la densité du bois de douglas mesurées sur carottes de sondage à 12 % d'humidité

Caractéristiques	Unités	Arbre élagué			Arbre témoin		
		Moyenne	Coefficient de variation	Valeurs minimum maximum	Moyenne	Coefficient de variation	Valeurs minimum maximum
		VITESSES DES ULTRASONS à 1 MHz					
V_{LL}	m/s	4500	0,2063	2387 7152	4400	0,2055	2160 7102
V_{TT}	"	1631	0,0860	874 2000	1719	0,0850	1275 2144
V_{LR}	"	1405	0,0963	923 1705	1486	0,1010	1142 1816
V_{LT}	"	1343	0,0826	1058 1575	1407	0,092	1147 1692
V_{TR}	"	500	0,1870	328 875	485	0,1497	377 715
		COMPOSANTES DE LA DENSITE RADIOGRAPHIQUE					
D moyenne	kg/m3	547,79	0,0976	466 736	548,62	0,0938	457 642
D minimum	"	291	0,1405	201 500	273	0,1052	223 359
D maximum	"	936	0,0854	859 992	877	0,0451	769 980
D maximum - D minimum	"	647	0,0861	485 742	603	0,0680	502 693

TABLEAU 7 : Corrélations entre différentes méthodes non destructives ($\times 10^{-3}$) (pilodyn, vitesse des ultrasons, composantes de la densité)

	Observations	COEFFICIENTS DE CORRELATION ENTRE LE TEST DU PILODYN ET LA VITESSE DES ULTRASONS					LES COMPOSANTES DE LA DENSITE						
		V_S	V_{TT}	V_{LT}	V_{LR}	V_{LL}	Dmin	Dmoyenne	Dmax	P_{300}	P_{500}	P_{700}	P_{900}
Témoin	60	667***	-419***	-596***	-318*	NS	-395*	-558***	-337**	-362**	-623***	-586***	-287*
Elagué	64	NS	NS	-256*	NS	NS	-344**	-364**	-285*	-445***	-480***	-350**	NS

TABLEAU 8 : Analyse de régression progressive sur les arbres témoin et élagué

Variables	ARBRE TEMOIN				Variables	ARBRE ELAGUE			
	Coefficient de corrélation simple r	Coefficient de corrélation multiple R	Coefficient détermination R^2 (%)	Coefficient aliénation $(1 - R^2)$ (%)		Coefficient de corrélation simple r	Coefficient de corrélation multiple R	Coefficient détermination R^2 (%)	Coefficient aliénation $(1 - R^2)$ (%)
PILODYN	METHODE ULTRASONORE - VITESSES DES ULTRASONS ET CONSTANTES ELASTIQUES								
G_{LT}	- 0,75	-	-	-	G_{LT}	- 0,38	-	-	-
V_{LR} V_{LT} V_{TR} V_{LL} V_{TT} G_{LR} G_{LT} G_{TR} C_{LL}	-	0,85	72,7	27,2	V_{LR} V_{LT} V_{TR} V_{LL} V_{TT} G_{LR} G_{LT} G_{TR} C_{LL}	-	0,60	36,30	63,70
	METHODE DENSITOMETRIQUE ET COMPOSANTES DE LA DENSITE								
Dmoyenne	- 0,55	-	-	-	P_{500}	- 0,48			
toutes les composantes	-	0,73	52,9	47,0	toutes les composantes	-	0,68	46,65	53,35
ONDES DE SURFACE	METHODE ULTRASONORE - VITESSES DES ULTRASONS ET CONSTANTES ELASTIQUES								
G_{LR}	- 0,62	-	-	-	V_{LT}	0,13 NS	-	-	-
V_{LR} V_{LT} V_{TR} G_{LR} G_{LT} G_{TR} C_{LL} C_{TT}	-	0,77	60,37	39,62	V_{LR} V_{LT} V_{TR} G_{LR} G_{LT} G_{TR} C_{LL} C_{TT}	-	0,306	9,36	90,64
	METHODE DENSITOMETRIQUE ET COMPOSANTES DE LA DENSITE								
Dminimum	- 0,39	-	-	-	-	-	-	-	-
toutes les composantes	-	0,72	51,98	48,01	toutes les composantes	-	NS	NS	NS

La comparaison des méthodes a été faite par analyse de régression progressive (tableau 8) en prenant comme référence, d'une part le test du pilodyn (puisque, ces dernières années, il a démontré ses mérites (9), (10), et d'autre part la méthode des ondes de surface.

Dans le cas de l'arbre témoin, le test du pilodyn est expliqué par la méthode de la vitesse de propagation des ultrasons dans la proportion de 72,7 %. Par ailleurs, la méthode densitométrique explique ce test dans la proportion de 52,9 % seulement.

Dans le cas de l'arbre élagué, il est intéressant de noter que la méthode densitométrique est la plus liée au test du pilodyn (R^2 = 46,6 %). Il est fort probable que l'apport d'autres variables comme la longueur des fibres ou les dimensions du plan ligneux pourraient améliorer significativement le pouvoir de prédiction du test du pilodyn. La même remarque concernant les éléments anatomiques est valable pour l'augmentation du pouvoir de prédiction de la méthode des ondes de surface, expliquée à 51,9 % par la méthode densitométrique.

CONCLUSION

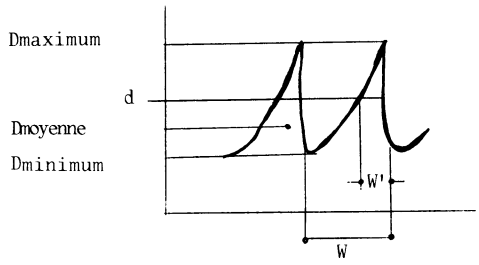
Les résultats présentés montrent bien que la technique non destructive du prélèvement d'une carotte de sondage, combinée avec plusieurs méthodes d'essais comme la méthode de dureté (test du pilodyn), la méthode de la vitesse de propagation des ultrasons et la méthode densitométrique (rayons X), est un instrument utile pour l'étude de la qualité du bois.

NOTATIONS

L, R, T	:	directions principales dans le bois correspondant aux directions de croissance de l'arbre : longitudinal, radial, tangnetiel, par rapport aux cernes
C_{ijkl}	:	rigidités
V	:	vitesse de phase
ρ	:	masse volumique du matériau
n_j	:	composante du vecteur unitaire n
δ_{il}	:	tenseurs de KRONECKER
V_{LL}, V_{RR}, V_{TR}	:	vitesses des ondes longitudinales mesurées selon les axes L, R, T
V_{LR}, V_{LT}, V_{TR}	:	vitesses des ondes transversales dans les plans de symétrie du bois
V_S	:	vitesse des ondes longitudinales se propageant à la surface du tronc d'arbre
P	:	profondeur de pénétration du pilodyn dans le bois
W	:	largeur du cerne

.../...

Les composantes de la densité radiographique sont données dans la figure ci-dessous :



$P_d = \frac{W'}{W}$ = proportion de la largeur du cerne ayant une densité supérieure à la valeur d (300, 500, 700, 900 kg/m3)

B I B L I O G R A P H I E

(1) SAVART F., 1829 - Sur l'élasticité des corps qui cristallisent régulièrement. Mémoires de l'Académie Française, tome 9, 405-453.

(2) DIEULESAINT E., ROYER D., 1974 - Ondes élastiques dans les solides. Masson, Paris.

(3) POLGE H., 1966 - Etablissement des courbes de variation de la densité du bois par exploration densitométrique de radiographies d'échantillons prélevés à la tarière sur des arbres vivants. Applications dans les domaines technologique et physiologique. Thèse de Docteur ès-Sciences Appliquées, Université de NANCY I, 27 Juin.

(5) POLGE H., 1984 - Essai de caractérisation de la veine verte du merisier. Ann. Sci. forest., 41 (1), 45-58.

(6) JANIN G., 1983 - Microtests papetiers. Microcuisson, microclassage, microraffinage, mesure automatique de la longueur des fibres. Thèse de Docteur d'Etat ès-sciences. I.N.P. Grenoble, 5 Mai.

(7) JANIN G., 1972 - Microcuissons papetières. Méthode adaptée aux recherches forestières portant sur la détermination des caractéristiques papetières individuelles sur arbres vivants à l'aide d'échantillons de bois dont le mode de prélèvement, l'aspect et le poids ne sont pas usuels. La Papeterie, n° 3, Mars, p. 13.

(8) BUCUR V., 1983 - An ultrasonic method for measuring the elastic constants of wood increment cores bored from living trees. Ultrasonics, May, 116-126.

(9) HOFFMEYER P., 1978 - The pilodyn instrument as a nondestructive tester of the shock resistance of wood. Proc. of the Nondestructive testing Meeting in Vancouver.

(10) NEPVEU G., VELLING P., 1983 - Variabilité génétique individuelle de la qualité du bois chez Betula pendula Roth. Silvae genetica, 32 (1-2), 37-49.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 485-500

Détermination de la matrice élastique du bois dans la modélisation orthorhombique par une méthode statique de compression sur cylindres

Determination of the elastic matrix of wood in orthorhombic modelization by a static compression method on cylinders

A. HADJ HAMOU, P. BEGE, B. FELIX, M. AVALE

Centre Technique du Bois et de l'Ameublement
10, avenue de Saint-Mandé, 75012 Paris

RESUME

Les caractéristiques élastiques du bois sont d'une grande importance pratique dans le calcul des ouvrages . Etant donné sa structure, le bois peut être considéré, en première approximation, comme un matériau anisotrope possédant localement les symétries de l'une des classes du système orthorhombique.

Une étude, développée au CTB (Centre Technique du Bois et de l'Ameublement), consiste à effectuer des essais de compression sur des éprouvettes cylindriques, au cours desquels un module d'Young et deux coefficients de Poisson apparents sont mesurés. Les neuf paramètres élastiques sont ainsi déterminés de manière redondante en utilisant six éprouvettes dont l'axe est parallèle, soit à l'une des trois directions principales soit à l'une des trois bissectrices de l'angle droit que forment deux à deux ces directions.

Les résultats présentés concernent une campagne interlaboratoires sur le hêtre (Fagus sylvatica) patronnée par la DGRST, dans le but de comparer plusieurs méthodes de mesure des constantes élastiques.

ABSTRACT

The elastic parameters of wood are of great practical importance for wood construction design. Because of its structure, wood can be considered, in first approximation, as an anisotropic material possessing locally the symmetries of one classe of the orthorhombic system.

A method developped by the Centre Technique du Bois et de l'Ameublement consists in an uniaxial compression of cylindrical specimens on which the apparent Young's modulus and two apparent Poisson's ratio are measured.

The nine elastic constants are thus determined from a set of redundant data, obtained from three specimens axially oriented in the three principal axes of anisotropy, and from three others bissecting the principal axes of anisotropy taken two by two.

These results are part of an interlaboratory research programm on beech (Fagus sylvatica) elastic properties sponsored by DGRST (Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique). As a whole, the programm intend to compare various methods of elastic characteristics measurements.

1 - INTRODUCTION

Le bois est un matériau anisotrope naturel. Pour résister à son propre poids et aux sollicitations naturelles, l'arbre développe au cours de sa croissance une structure orientée complexe (figure n° 1). C'est ainsi que la résistance dans le sens longitudinal (figure n° 2) de l'arbre est beaucoup plus élevée que dans les autres directions.

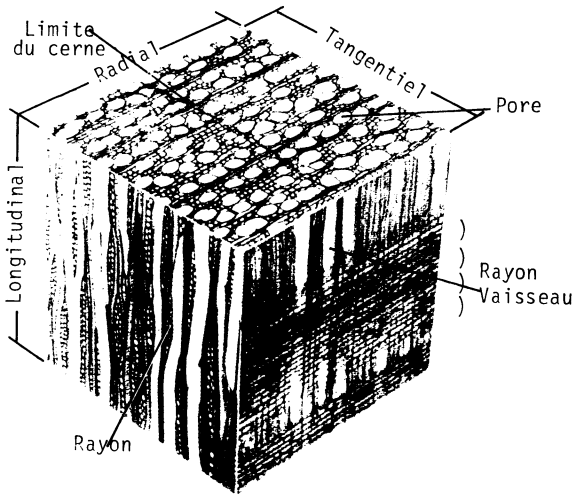


Figure n° 2 : Structure schématisée d'un feuillu (d'après KOLLMANN & COTE (7))

Les hypothèses couramment admises sont les suivantes (7) (3) :

- il existe localement 2 ou 3 plans de symétrie pour la structure ce qui permet de réduire à 9 le nombre de constantes élastiques (le comportement est dit orthotrope),

- pour un arbre, dont la forme peut être considérée, en première approximation comme cylindrique (conicité faible), on admet qu'en tout point les plans de symétrie sont les plans LR et RT (l'orthotropie est dite cylindrique figure n° 2).

Ces deux hypothèses, qui se basent sur une idéalisation de la croissance de l'arbre sont toutes deux discutables.

La première repose implicitement sur une hypothèse "d'homogénéité locale" du cerne. Or si cette hypothèse est nécessaire, elle n'implique pas l'existence des deux plans de symétrie LR et RT. En effet, la symétrie macroscopique constatée résulte aussi bien de la symétrie de distribution de la matière que de la symétrie des constituants élémentaires ; les fibres, qui sont les plus importants d'entre eux pour l'élasticité, se composent essentiellement de cellulose. L'observation microscopique de la structure des fibres ainsi que leur organisation spatiale et la mise en évidence de phénomènes physiques tels que la piézoélectricité semblent exclure l'existence de plans de symétrie (6). En revanche, l'hypothèse de l'existence de 3 axes de symétrie, perpendiculaires deux à deux, n'est pas repoussée. Cette classe de symétrie, qui appartient au système orthorhombique (au même titre que les classes comprenant 3 plans perpendiculaires ou 2 plans perpendiculaires), a le même effet sur la matrice d'élasticité (4). En tout état de cause, cette hypothèse, retenue dans la suite, constitue une première approximation qui ne remet pas en cause la forme de la matrice d'élasticité. Il serait intéressant, cependant, de vérifier son degré de validité au cours d'essais mécaniques relativement "fins" *.

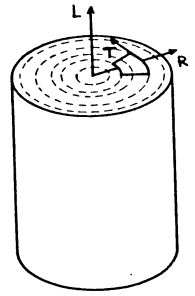


Figure n° 2 : Repère d'anisotropie "global"
(au niveau de l'arbre)

* Etant donné la dissymétrie constatée entre les 3 axes L, R, T, seuls les systèmes monocliniques (avec un axe de symétrie) et triclinique (sans centre de symétrie) peuvent convenir. Il est à noter que dans ces cas les axes principaux des tenseurs de contraintes et de déformation ne sont pas toujours parallèles deux à deux même pour des essais dans les axes principaux d'anisotropie.

La seconde hypothèse repose sur l'idée que les cernes se forment de manière parfaitement cylindrique, ce qui est assez restrictif. En effet, il semble logique que les axes principaux d'anisotropie soient constitués localement par l'axe des fibres, la normale et la tangente aux cernes. L'existence de ces axes principaux d'inertie, qui ne coïncident que rarement avec les axes L, R, T, déterminés au niveau de l'arbre, est suffisante pour l'étude du comportement du bois (sur petites éprouvettes). Les écarts entre systèmes de références peuvent avoir une influence relativement importante pour un matériau aussi anisotrope que le bois, comme les essais le montrent plus loin.

2 - MESURE DES CONSTANTES ELASTIQUES

2.1 - Forme de la matrice d'élasticité

L'hypothèse d'appartenance du matériau bois au système orthorhombique permet d'écrire la matrice de souplesse, dans les axes locaux d'anisotropie, sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu 21}{E_2} & \frac{-\nu 31}{E_3} & & & \\ \frac{-\nu 12}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu 32}{E_3} & & & \\ \frac{-\nu 13}{E_1} & \frac{-\nu 23}{E_2} & \frac{1}{E_3} & & & \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & & \\ & & & & \frac{1}{G_{31}} & \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

avec les relations

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}$$

L'écriture sous forme matricielle de la matrice de souplesse est obtenue à partir de l'écriture tensorielle par la relation

$$U = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} \Sigma_\alpha \Sigma_\beta = \frac{1}{2} s_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \qquad \begin{matrix} 1 \leq \alpha,\beta \leq 6 \\ 1 \leq i,j;k;l \leq 2 \end{matrix} \qquad (2.1)$$

(1) Conçue et mise au point par P. BEGE (1).

où U est l'énergie potentielle de déformation et Σ la matrice colonne obtenue à partir de σ_{ij} en renumérotant i, j de 1 à 6 (représentation de VOIGT) (3). On prendra garde aux indices des coefficients de Poisson, parfois inversés dans la littérature.

2.2 - Principe de la mesure

Le principe de la mesure (1) consiste à effectuer des essais de compression sur des cylindres en bois de 25 mm de diamètre et 80 mm de hauteur (figure n° 3). Le rayon de courbure des cernes sera considéré comme assez grand par rapport aux dimensions des éprouvettes pour justifier l'utilisation d'un repère cartésien.

Les mesures effectuées comprennent :
- 1 mesure de rigidité axiale,
- 2 mesures de variations de diamètre à 90° l'une de l'autre.

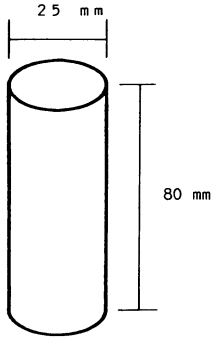


Figure n° 3 : Eprouvette d'essais de compression

2.3 - Orientation des éprouvettes

Le bloc supérieur de la matrice de souplesse est déterminé à partir de 3 essais dans les directions principales d'anisotropie.

En revanche, les 3 modules de cisaillement ne sont accessibles (en compression) qu'à partir d'essai hors axes principaux.

Considérons l'effet d'une rotation d'angle, par rapport à l'axe 1, dans le plan 1-2 (figure n° 4).

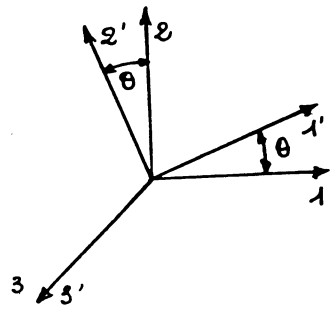


Figure n° 4 : Changement de repère

La matrice de changement de base A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

Dans ce cas, l'invariance tensorielle du tenseur de souplesse permet d'écrire :

$$s'_{ijkl} = s_{mnop}\, a_{im}\, a_{jn}\, a_{ko}\, a_{lp} \qquad (2.3)$$

où les éléments a_{ij} sont les composantes de la matrice A.

En combinant les relations (2.2) et (2.3.) et la règle de passage (2.1) du tenseur à la matrice de souplesse, les éléments de la matrice transformée s' intervenant lors d'un essai de compression dont l'axe fait un angle θ avec la direction 1, s'écrivent

$$S'_{11} = \frac{1}{E_1} \cos^4\theta + \frac{1}{E_2} \sin^4\theta + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1}\right) \sin^2\theta \cos^2\theta \qquad (2.4)$$

$$S'_{12} = \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}}\right) \sin^2\theta \cos^2\theta - \frac{\nu_{12}}{E_1} (\cos^4\theta + \sin^4\theta) \qquad (2.5)$$

$$S'_{13} = -\left(\frac{\nu_{13}}{E_1} \cos^2\theta + \frac{\nu_{23}}{E_2} \sin^2\theta\right)$$

On constate que les relations (2.4) (rigidité axiale) et (2.5) (variation du diamètre dans le plan 1-2) font intervenir le module de cisaillement G_{12}.

Les essais complémentaires de compression qui ont été choisis pour accéder aux 3 modules de cisaillement ont un axe parallèle à l'une des 3 bissectrices des angles droits formés deux à deux par les axes principaux.

Dans le plan 1-2 les relations (2.4) à (2.6) deviennent dans ce cas ($\theta = 45°$)

$$S'_{11} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{G_{12}}\right) \qquad (2.7)$$

$$S'_{12} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}}\right) \qquad (2.8)$$

$$S'_{13} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\nu_{13}}{E_1} + \frac{\nu_{23}}{E_2}\right) \qquad (2.9)$$

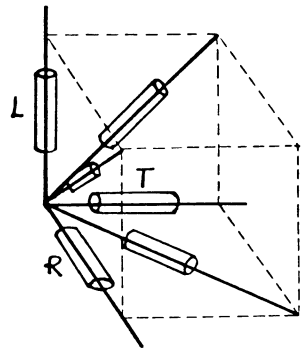


Figure n° 5 : Orientation des éprouvettes d'essais

Les relations dans les autres directions sont obtenues par permutation circulaire.

3 - DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Le schéma de principe est représenté sur la figure n° 6.

3.1 - Mise en charge

Le positionnement de l'échantillon et l'application de la charge se font par l'intermédiaire d'un montage spécial conçu à cet effet.

Il est constitué essentiellement de deux plateaux, l'un servant de base, l'autre de transmetteur de la charge. Le plateau supérieur n'a qu'une possibilité de translation verticale, le guidage étant assuré par 3 roulements axiaux, noyés dans le plateau supérieur, qui coulissent sur 3 colonnes rectifiées solidaires du plateau inférieur.

L'éprouvette est placée dans deux coupelles de centrage, qui viennent se positionner sur les plateaux (à chaque extrémité).

La cellule de force est vissée sur le plateau supérieur.

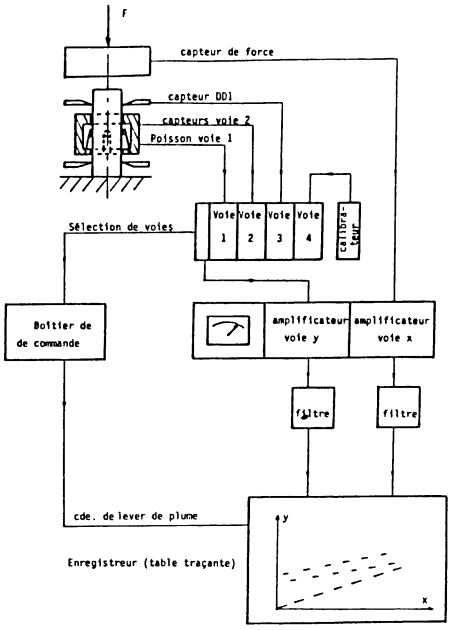


Figure n° 6 : Schéma de principe du dispositif expérimental

3.2 - Capteurs de mesure

Lors de chaque essai, quatre mesures sont effectuées :

1 - force axiale : capteur résistif de 10 kN
2 - déplacement axial : capteurs à lame de type résistif.

Pour éliminer tout effet de flexion, deux capteurs identiques sont associés de part et d'autre de l'échantillon.
Le montage électrique est en parallèle de manière à obtenir un seul signal représentatif de la moyenne des déplacements des deux capteurs.

3 - Déplacements latéraux : capteur à 4 lames de type résistif, spécialement développé au CTB, dit capteur Poisson (1).

La mesure de variation du diamètre est effectuée par 4 lames associées par deux et disposées à 90° les unes par rapport aux autres.

3.3 - Enregistrement

Les 3 signaux de déplacement sont acheminés vers une voie de la table traçante, via une boîte de commutation qui est commandée elle-même par un multiplexeur. L'autre voie de la table traçante est reliée au signal du capteur de force. On dispose ainsi sur le même graphique des 3 courbes de déformation, (en pointillé) au cours d'une seule montée en charge.

Le chargement est appliqué à vitesse uniforme (sans asservissement) jusqu'à une déformation de l'éprouvette de 10^{-3} qui se situe toujours dans le domaine élastique.

La partie la plus délicate des essais est le repérage des axes principaux d'anisotropie sur les éprouvettes et le montage autour de ces derniers des différents capteurs.

4 - INTERPRETATION DES ESSAIS

Le cas idéal consiste à appliquer à l'éprouvette un état de contrainte et de déformation homogène dans tout le volume. Cependant, les conditions expérimentales conduisent à des écarts par rapport à ce schéma idéal :

- frettage latéral dû au frottement, et à l'utilisation des coupelles de positionnement aux deux extrémités,
- blocage des déplacements axiaux, autres qu'une translation d'ensemble, au niveau des têtes de l'éprouvette.

Des simulations numériques par éléments finis (tridimensionnels, en élasticité à symétrie orthorhombique) ont été effectués pour étudier l'importance des écarts (1). Les résultats montrent que l'effet du frettage latéral aux extrémités devient négligeable quand on s'éloigne de 15 mm de ces derniers (zone de mesure). Le dispositif expérimental sera, néanmoins, amélioré de ce point de vue.

Les conditions aux limites imposées en déplacement axial ont deux effets.

Le premier est une flexion de l'éprouvette dans le cas d'un défaut de parallélisme ou d'axialité de la charge. Cet effet est corrigé partiellement, grâce à un bon usinage des éprouvettes ainsi qu'au principe de mesure de la déformation axiale qui fait appel à la moyenne des déplacements obtenus grâce à 2 capteurs diamétralement opposés ;

Le deuxième effet ne se manifeste que lors des essais hors axes principaux d'anisotropie. Il provient du fait que dans ce cas, les axes principaux du tenseur des contraintes et des déformations ne sont pas confondus. Les conditions aux limites appliquées (translation axiale imposée) conduisent à une déformation en S de l'éprouvette (2). Les simulations numériques effectuées au CTB montrent la dissymétrie des déplacements axiaux due à cet effet. La correction apportée grâce au principe de mesure de la déformation axiale n'est que partielle.

Les études seront poursuivies pour déterminer l'amplitude des écarts à envisager ainsi que pour améliorer le mode de chargement.

D'autres sources d'erreurs d'interprétation peuvent provenir des systèmes de mesure utilisés. Ainsi les mesures de variation du diamètre peuvent être perturbés par des déformations locales dues à l'hétérogénéité du bois (succession des cernes d'accroissement).

5 - RESULTATS EXPERIMENTAUX

5.1. - Prélèvement des éprouvettes

Les essais ont été effectués sur du hêtre dans le cadre d'une étude qui regroupait 10 laboratoires et patronnée par la DGRST (sous la responsabilité de M. PLUVINAGE de l'Université de Metz). Afin d'assurer à ces laboratoires un matériel expérimental homogène, le C.N.R.F. (Centre National de Recherche Forestière) a effectué le prélèvement d'un arbre dans le massif vosgien. L'étude avait pour objet la comparaison de 5 méthodes, statiques et dynamiques, de mesure des constantes élastiques. Une procédure rigoureuse de prélèvement et de répartition entre les différents laboratoires a été adoptée. Son principe a été de débiter dans l'arbre 5 billons de 0,35 m de hauteur. Chaque billon est ensuite divisé en 4 quartiers orientés suivant les 4 directions cardinales. Dans chaque quartier les échantillons servant à tous les laboratoires ont été prélevés (6 pour le CTB).

5.2. - Résultats obtenus

Les résultats globaux concernant les différentes constantes élastiques sont représentés sur les tableaux n° 1 et 2. Il n'a pas été constaté d'effet significatif suivant la hauteur de l'arbre, ni l'orientation.

5.2.1. - Modules d'Young - Modules de cisaillement

Le tableau n° 1 représente la valeur de la moyenne, l'écart type ainsi que le coefficient de variation des mesures effectuées sur l'ensemble des éprouvettes (120 au total).

	E_L	E_R	E_T	G_{RT}	G_{TL}	G_{LR}
MOY. MPa	14 449	1 637	765	290	1 084	1 401
σ MPa	737	113	39	14	383	119
C.V%	5,1	6,9	5,1	4,8	35,3	8,5
I.C$_{95}$ MPa	330	51	17	6	171	53

Tableau n° 1

On constate que malgré la variabilité du matériau, la dispersion des valeurs des modules d'Young est raisonnable (5 à 7 %). La dispersion plus importante des modules de cisaillement G_{RL} et G_{TL} (8,5 à 35 %) provient de la forte anisotropie du bois entre la direction L et les directions R ou T.

Sur la figure n° 7 est représenté, en coordonnées polaires, le module axial apparent en fonction de l'angle que fait l'éprouvette avec l'axe T dans le plan LT. On constate qu'une légère variation de l'angle autour de 45° induit des variations non négligeables du module de rigidité et par conséquent une dispersion plus élevée sur G_{TL}.

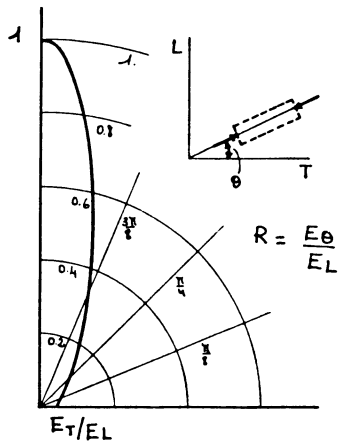


Figure n° 7 : Module "apparent" dans le plan LT en coordonnées polaires.

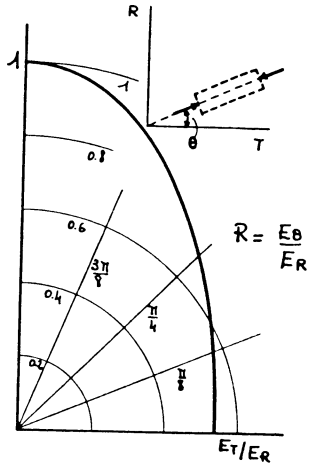


Figure n° 8 : Module apparent dans le plan RT en coordonnées polaires.

L'anisotropie dans le plan R, T est beaucoup plus réduite comme le montre la figure n° 8. Cela explique la faible dispersion obtenue sur G_{RT}.

La quatrième ligne du tableau n° 1 donne l'intervalle de confiance sur la moyenne des différentes constantes, avec une probabilité de 95 %. C'est, en somme, une évaluation de "l'erreur" commise dans la détermination de l'espérance du lot. Cette interprétation doit être tempérée par le fait que le calcul effectué

fait appel à l'hypothèse de normalité de la distribution des résultats. Or si certains écarts peuvent être considérés comme variant suivant une loi normale (variabilité du matériau, erreur expérimentale, ...) d'autres sont systématiques. Ainsi toute déviation d'angle par rapport à la direction L a pour effet d'abaisser la valeur du module axial mesuré.

5.2.2. - Coefficients de Poisson

Sur le tableau n° 2, nous avons reporté les résultats bruts concernant les coefficients de Poisson sans tenir compte des relations de symétrie de la matrice de souplesse.

	ν_{LR}	ν_{RT}	ν_{TL}	ν_{RL}	ν_{TR}	ν_{LT}
MOY.	0,45	0,83	0,004	-0,03	0,37	0,47
σ	0,07	0,12	0,04	0,09	0,06	0,09
C.V%	15,6	14,5	1 000	300	16,2	19,1
$I.C_{95}$	0,03	0,05	0,02	0,04	0,03	0,04

Tableau n° 2

On constate que pour les coefficients ν_{LR}, ν_{RT}, ν_{LT}, le coefficient de variation varie entre 14,5 et 19,1 %. Ces valeurs s'expliquent par la variabilité du bois ainsi que par le principe de mesure du capteur transversal dit "Poisson" (le contact est ponctuel par l'intermédiaire d'une bille, la mesure globale de la variation du diamètre est par conséquent perturbée par des variations locales dues à l'hétérogénéité du bois).

Pour les coefficients ν_{TL}, ν_{RL} dont la valeur est très faible, les coefficients de variation sont très élevés car l'écart type est du même ordre de grandeur que pour les autres coefficients.

Deux questions se posent :

1) est-il possible d'avoir des valeurs de coefficients de Poisson négatifs ?

2) la matrice de complaisance est-elle symétrique ?

- Coefficients de Poisson négatifs

Pour répondre à la première question, faisons d'abord remarquer que des valeurs de coefficient de Poisson négatifs ne sont pas incompatibles avec la thermodynamique, même en élasticité. En effet, la forme quadratique définie positive du potentiel de déformation a pour

conséquence que la matrice de souplesse est définie positive. Cela implique un certain nombre d'inégalités (5) qui n'excluent pas des valeurs négatives des coefficients de Poisson (pour un matériau élastique isotrope, la condition sur le coefficient de Poisson s'écrit $-1 < \nu < 0{,}5$).

Sur la figure n° 9 est représenté, en coordonnées polaires, le coefficient de Poisson apparent d'une éprouvette dont l'axe fait un angle θ avec la direction T dans le plan TL.

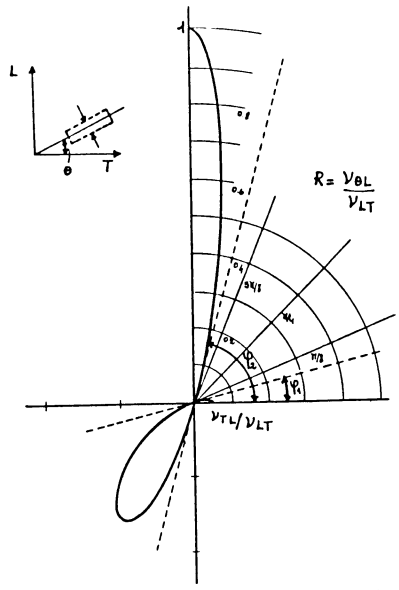


Figure n° 9 : Coefficient de Poisson apparent dans le plan LT en coordonnées polaires.

Les valeurs numériques utilisées sont très proches de celles trouvées expérimentalement. On constate que dans un fuseau compris entre ϕ_1 et ϕ_2, les coefficients de Poisson apparents sont négatifs. Cela n'implique pas, bien sûr, que les coefficients de Poisson dans les axes principaux sont négatifs, mais peut expliquer l'obtention expérimentale de valeurs négatives du coefficient de Poisson apparent ($\frac{\nu LT}{\nu TL} = \frac{EL}{ET} = 20$). En effet, on constate sur la figure n° 9 que la moindre déviation d'angle par rapport à l'axe T dans la

direction L a tendance à diminuer la valeur du coefficient de Poisson mesuré (déjà faible), voire à la rendre négative. Cela peut expliquer le signe de la moyenne des mesures ν_{RL}.

- Symétrie de la matrice de souplesse

En examinant les valeurs brutes obtenues pour la moyenne des différents coefficients de Poisson et en utilisant les valeurs trouvées pour le module d'Young dans les 3 directions d'anisotropie, on constate que les relations de symétrie de la matrice de souplesse ne sont pas vérifiées. En fait, l'examen des chiffres bruts n' a aucune signification en soi, si on ne précise pas l'incertitude qui les entache.

La notion d'intervalle de confiance sur les moyennes avec une probabilité de 95 % va nous permettre d'étudier ce problème ; avec les mêmes réserves que nous avons déjà formulées à propos des modules d'Young et de cisaillement.

Sur le tableau n° 3 sont représentées les valeurs brutes des moyennes obtenues à partir des essais ainsi que leur intervalle de confiance avec une probabilité de 95 %.

Le croisement des intervalles de confiance pour

ν_{TR}, $\nu_{RT}\frac{ET}{ER}$ d'une part et ν_{TL}, $\nu_{LT}\frac{ET}{EL}$ d'autre part, montre qu'il est possible d'accepter l'hypothèse de leur égalité avec une probabilité d'erreur de 5 %. En revanche, les intervalles de confiance avec une probabilité de 95 %, sont disjoints pour ν_{RL} et $\nu_{LR}\frac{ER}{EL}$.

Coefficient de poisson	Intervalle de confiance à 95 %
ν_{TR}	0,34 0,37 0,4
$\nu_{RT}\frac{ET}{ER}$	0,397
ν_{TL}	0,016 0,004 0,024
$\nu_{LT}\frac{ET}{EL}$	0,025
ν_{RL}	- 0,07 - 0,03 0,01
$\nu_{LR}\frac{ER}{EL}$	0,06

Tableau n° 3

Cela n'implique pas que ces deux termes ne soient pas égaux mais que la probabilité pour qu'ils le soient est inférieure à 5 %.

En fait l'hypothèse de normalité limite la portée de cette analyse statistique. Ainsi le fait que certaines erreurs soient systématiquement minorantes (voir plus haut) accentue l'écart entre les intervalles de confiance.

CONCLUSION

Cette étude avait pour objet de mettre en évidence la difficulté et aussi l'intérêt présentés par l'étude du comportement anisotrope du bois, même lorsqu'on se limite au seul point de vue élastique. Les possibilités d'utilisation du dispositif expérimental mis au point dépassent ce cadre de l'élasticité. Ce dispositif, qui a permis de fournir des renseignements intéressants sur le comportement élastique du bois, peut être amélioré. Les améliorations devraient concerner les conditions aux limites du chargement ainsi que le système de mesure des déformations radiales.

C'est à ce prix que les problèmes qui n'ont pas manqué de se poser au cours de ce travail, ainsi que l'étude du comportement viscoélastique anisotrope du bois, peuvent être abordés.

REMERCIEMENTS

Cette étude a été partiellement supportée par la DGRST dans le cadre du contrat n° 81-G-1058 coordonnant les travaux de dix laboratoires sur les méthodes de mesure des constantes élastiques du hêtre. Les auteurs expriment au Ministère de la Recherche et de la Technologie leurs plus vifs remerciements.

BIBLIOGRAPHIE

(1) P. BEGE, Détermination des constantes élastiques du hêtre, Rapport interne CTB (1984).

(2) JP. BOEHLER, L. EL AOUFI (Institut de Mécanique de Grenoble), Hétérogénéité des champs de contraintes et de déformation dans les matériaux anisotropes, Communication au 19è Colloque du Groupe Francais de Rhéologie, Paris (1984).

(3) J. BODIG, B. JAYNE, Mechanics of wood and wood composites. VAN NOSTRAND RHEINOLD Company, New-York (1982).

(4) E. DIEULESAINT, D. ROYER, Ondes élastiques dans les solides, MASSON, Paris (1974).

(5) M.T. GAUTHERIN, Critère de contrainte limite du bois massif, Thèse de doctorat 3è cycle présentée à l'Université Pierre et Marie Curie (1980).

(6) C. LEGOVIC, Y. TRENARD, C. HUET, Symétries matérielles du matériau bois : données morphologiques et conséquences physiques, Communication au 19è Colloque du Groupe Français de Rhéologie, Paris (1984).

(7) F.F.P. KOLLMANN, W.A. COTE, Principles of wood science and technology, vol. I, SPRINGER VERLAG, Berlin (1968).

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 501-514

Conception d'une éprouvette pour la détermination de la résistance à la traction longitudinale du bois

Design of a specimen for the determination of tensile strength of wood parallel to grain

B. FELIX, A. HADJ HAMOU, C. HUET

Centre Technique du Bois et de l'Ameublement
Département de Mécanique Physique
10, avenue de Saint-Mandé, 75012 Paris
et Groupement Scientifique Rhéologie du Bois
G.S. CNRS n° 81

RESUME

Le bois, matériau fortement anisotrope, possède une résistance à la traction nettement plus grande dans la direction longitudinale que dans les autres directions. Pour la détermination de cette caractéristique très utile pour les calculs de structure ou pour les travaux de recherche, il importe de disposer d'un mode opératoire d'essai bien conçu.

La structure fibreuse et stratifiée du bois crée des difficultés pour amarrer une éprouvette de bois sans écraser les têtes et pour assurer à chaque fois une rupture dans la partie centrale. Quelques exemples de ruptures anormales sur des prototypes d'éprouvette sont présentés.

Les normes de l'essai de traction longitudinale existant dans trois pays sont résumées, elles diffèrent beaucoup par les formes de l'éprouvette, les conditions de chargement et d'amarrage. Sur la base d'essais comparatifs sur 6 à 8 éprouvettes de chaque type fabriquées dans 3 essences différentes, les caractéristiques essentielles d'un bon essai de traction longitudinale sont déduites.

ABSTRACT

Wood, a highly anisotropic material, has a tensile strength which is much greater in the direction parallel to grain than in the other

directions. To determine this very useful caracteristic for structure calculation or research investigation, a well established operating process is needed.

Due to fibrous and stratified structure of wood, some difficulties arise to grip a wood specimen without crushing its heads, or to insure a rupture in the central part every time. Some examples of abnormal rupture of prototypes specimens are presented.

Standard tests for tensile strength parallel to grain from 3 countries are summerized. They differ greatly by the specimen shape, the loading and gripping conditions. On the basis of comparative tests conducted on 6 to 8 specimen of each types manufactured in three different species, the basic caracteristics of a good test for tensile strength to grain are deduced.

1 - GENERALITES

La morphologie du bois en fait un matériau hautement anisotrope. La structure fibreuse adaptée aux fonctions mécaniques qu'il assure dans l'arbre explique sa faible déformabilité et sa grande résistance dans le sens longitudinal.

En structure, le bois travaille souvent en traction suivant cette orientation privilégiée. Par conséquence étudier son comportement sous ce type de sollicitation est d'un intérêt pratique certain, en particulier pour déterminer sa résistance ultime à la rupture.

L'échelle à laquelle le bois est étudié dans cette étude est celle des éprouvettes normalisées habituelles c'est-à-dire que le volume de bois sollicité est à la fois suffisamment grand pour intégrer un nombre important de cernes (de façon à pouvoir négliger l'hétérogénéité entre bois d'été et bois de printemps) et suffisamment petit pour qu'il soit toujours possible d'écarter les singularités du matériau bois c'est-à-dire les noeuds, fentes, roulures, poches de résine, etc...

L'éprouvette de traction et la procédure d'essai que nous nous proposons d'élaborer a un double but. Le premier est d'établir pour le bois sans singularité provenant d'essences aux caractéristiques très variées les conditions d'essais qui assurent un véritable état de traction simple dans une partie bien définie de l'éprouvette et ceci de façon à assurer sur des bases mécaniquement correctes l'étude expérimentale de la rhéologie du bois. Le deuxième est de fournir les éléments nécessaires à la rédaction d'une norme française de l'essai de traction longitudinale qui à l'heure actuelle n'existe pas.

La présente communication ne marque qu'un premier pas dans cette direction. Les principales difficultés posées par la structure du bois sont tout d'abord illustrées par les modes de rupture observés sur différentes formes d'éprouvettes élaborées au CTB. Les solutions adoptées par 3 normes existant à l'étranger sont ensuite exposées et une étude comparative des résultats obtenus pour 3 essences : le chêne, le hêtre et l'épicéa est présentée. L'ensemble de ces résultats permet de tirer quelques conclusions qui seront utiles pour l'élaboration d'un mode opératoire.

2 - INFLUENCE DE LA STRUCTURE DU BOIS ET DE LA FORME DE L'EPROUVETTE SUR LA RESISTANCE ET LE MODE DE RUPTURE DE L'EPICEA

La figure 1 présente la forme d'une éprouvette de section utile 20 x 3 mm (20 mm dans le sens radial et 3 mm dans le sens tangentiel) et le mode de rupture caractéristique obtenu. Sur 6 éprouvettes testées, 3 présentent une rupture dans la partie élargie. Dans tous les cas la fracture concerne le bois de printemps du cerne qui passe par l'amorce de l'arrondi à l'une ou l'autre extrémité de l'éprouvette. La contrainte moyenne à la rupture obtenue est de 53 MPa. Nous verrons que, pour le lot d'épicéa choisi, cette valeur est particulièrement basse.

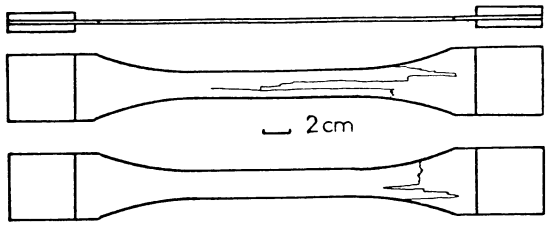


Figure 1 : Eprouvette plate et l'aspect de sa rupture.

L'augmentation du rayon des arrondis ne change pas significativement le mode de rupture ni la contrainte moyenne à la rupture.

Pour montrer que la stratification bois d'été-bois de printemps crée des concentrations particulièrement néfastes de contraintes à l'amorce des arrondis 5 éprouvettes de formes identiques aux précédentes ont été taillées dans le sens tangentiel. La rupture des éprouvettes n'est plus marquée par une délamination aussi importante du bois puisque l'éprouvette très plate est composée sur toute sa surface par plusieurs strates de bois d'été et de bois de printemps. La contrainte moyenne à la rupture sur les 5 éprouvettes est de 94 MPa, valeur nettement plus importante que les précédentes.

Cette solution ne peut toutefois être retenue car pour intégrer un nombre suffisant de cernes (5 dans le cas des cernes les plus larges) l'épaisseur devrait être considérablement augmentée et les renforts en hêtre collés dans la partie élargie crée une concentration de contraintes à son bord intérieur qui apparaît très bien à l'observation de certains modes de rupture.

La deuxième solution qui a été étudiée est représentée sur la figure 2. La section utile est carrée 6 x 6 mm. Les têtes sont elles-mêmes carrées de section 20 x 20 mm et raccordées à la partie centrale par des arrondis de 120 mm de rayon.

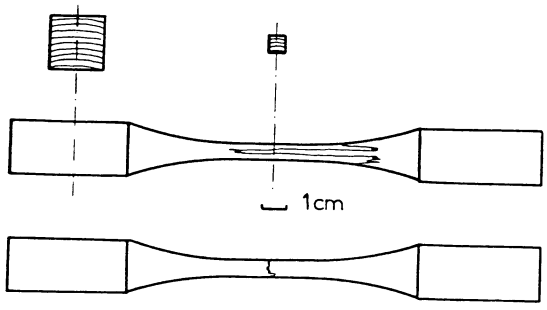


Figure 2 : Eprouvette à section carrée et aspect de sa rupture.

Les éprouvettes essayées sont au nombre de 22. Elles ont été soumises à un chargement en traction jusqu'à la rupture. Deux modes de rupture très différents sont observés. Le premier qui concerne un tiers environ des éprouvettes, se caractérise par une rupture nette dans la partie centrale. La contrainte moyenne de rupture est de 85 MPa avec un coefficient de variation de 11 %. Le deuxième mode de rupture pour deux tiers environ des éprouvettes se traduit par une délamination plus ou moins importante des strates de bois d'été et de bois de printemps. Dans deux cas extrêmes (voir figure 3), correspondant à des forces à la rupture particulièrement élevées, on a obtenu l'arrachement en bloc d'un cylindre à base irrégulière situé dans le prolongement de la section utile de l'éprouvette et qui traverse entièrement l'une des têtes. Ce cylindre qui englobe 6 cernes a une section de 30 mm² environ, comparable aux 36 mm² de la section utile.

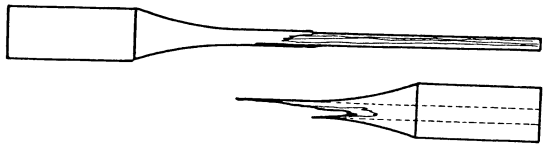


Figure 3 : Délamination d'une éprouvette à résistance particulièrement élevée.

Ce mécanisme montre l'importance des contraintes de cisaillement développées entre cernes et donc l'hétérogénéité des états de contraintes dans la zone soumise à la traction maximale. Les contraintes moyennes de rupture correspondant à ces échantillons rompus par délamination plus ou moins importante, est de 115 MPa avec un coefficient de variation de 15 %.

Les têtes des éprouvettes sont fixées dans les mors de la machine par l'intermédiaire de coins autoserrants. Un écrasement sensible, dépassant 0,5 mm pour plus de la moitié des éprouvettes, est observé, avec parfois glissement des cernes les uns sur les autres malgré une disposition de ceux-ci quasi perpendiculairement à l'effort de serrage. La longueur des éprouvettes est insuffisante pour éviter que la plastification du bois, qui s'opère au niveau des têtes par serrage, ne s'étende vers la partie centrale.

Pour remédier à ces défauts, tout en conservant les faibles dimensions des éprouvettes, des têtes formées de parallélépipèdes de bois dur (hêtre dans le cas de l'épicéa) de 20 X 20 mm de section et d'une longueur de 30 mm, ont été fabriquées séparément et munies d'entures permettant l'établissement par aboutage collé d'une liaison avec l'éprouvette proprement dite, elle-même enturée. La figure 4 représente ce type d'éprouvette et son mode de rupture. On constate que, contrairement au cas précédent, les ruptures sont généralement très nettes et concernent uniquement la partie centrale de l'éprouvette. La contrainte moyenne de rupture sur 11 éprouvettes est de 93 MPa avec un coefficient de variation de 14 %.

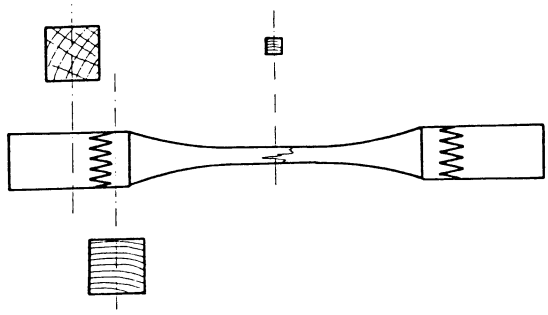


Figure 4 : Eprouvette à têtes rapportées et l'aspect de sa rupture.

La diminution de résistance, parfaitement sensible par rapport aux éprouvettes du type précédent, est paradoxale puisque aucun écrasement n'est observé au niveau des têtes ni aucune délamination se propageant sur la longueur d'une tête. L'aboutage des têtes a rompu la continuité du fil du bois et renforcé la résistance à la compression dans les mors. On peut supposer que la rigidité plus grande des têtes apporte plus d'inconvénients que d'avantages. En particulier, les écarts angulaires entre les directions de serrage des deux mors, dus à un éventuel défaut de la machine d'essai, se traduisent par une flexion plus grande de la partie centrale de l'éprouvette, les écarts n'étant plus compensés par une plastification des têtes, laquelle autorise une certaine réorientation.

Après les tentatives faites sur les diverses formes d'éprouvettes précédentes, il apparaît clairement que la nature fibreuse et stratifiée du bois complique singulièrement l'essai de traction longitudinale.

Pour obtenir une rupture dans la partie centrale d'une éprouvette fabriquée sans apport par enture de têtes en bois plus dur, il est souhaitable que le rapport entre la section soumise à serrage et la section utile de l'éprouvette soit supérieure à 12. Une augmentation de la longueur des têtes peut également contribuer à ce résultat. Il apparaît également que l'élancement de l'éprouvette (le rapport de sa largeur maximale sur sa longueur) doit être supérieur à celui choisi et que la variation de section induite par les arrondis de raccordement doit être très graduelle.

D'autres facteurs influençant le résultat de l'essai de traction longitudinale n'ont pas encore été abordés : les conditions de chargement (la vitesse de montée en charge par exemple), les degrés de liberté laissés aux extrémités de l'éprouvette, etc ...

A ce stade il est particulièrement intéressant d'étudier les solutions retenues par les normes étrangères existantes et de comparer les résultats obtenus sur plusieurs essences.

3 - ETUDE COMPARATIVE DE 3 MODES OPERATOIRES NORMALISES DE L'ESSAI DE RUPTURE A LA TRACTION LONGITUDINALE

L'étude comparative concerne trois normes : la norme ASTM utilisée aux USA, la norme GOST d'origine soviétique et la norme JIS, japonaise.

Trois lots de chêne, de hêtre et d'épicéa composés de 2 plateaux ou de 2 bastaings ont été utilisés pour fabriquer 8 éprouvettes de chaque essence, conformes à chacune des 3 normes précédentes et à 5 autres qui seront étudiées ultérieurement.

La répartition des prélèvements des différentes éprouvettes dans les lots de bois est la plus uniforme possible afin d'éliminer l'influence du facteur position dans l'arbre sur la valeur de la contrainte à la rupture moyenne.

3.1. - La norme ASTM D143.52

L'éprouvette représentée sur la figure 5a, dont les caractéristiques dimensionnelles sont rappelées sur le tableau 1, se caractérise par une longueur importante et une dimension importante des têtes. Le volume de bois échantillonné est donc relativement important. La section utile et le volume utile sont par contre réduits et le nombre de cernes inclus dans la largeur de cette section peut, dans le cas d'arbres à fort accroissement, tomber à 2 ou 3.

L'arrimage de l'éprouvette sur la machine d'essai est réalisé par l'intermédiaire de deux étriers qui agrippent les têtes par appuis sur les épaulements. Les étriers sont rotulés.

La vitesse maximale d'allongement de l'éprouvette est fixée par la norme à 1 millimètre par minute.

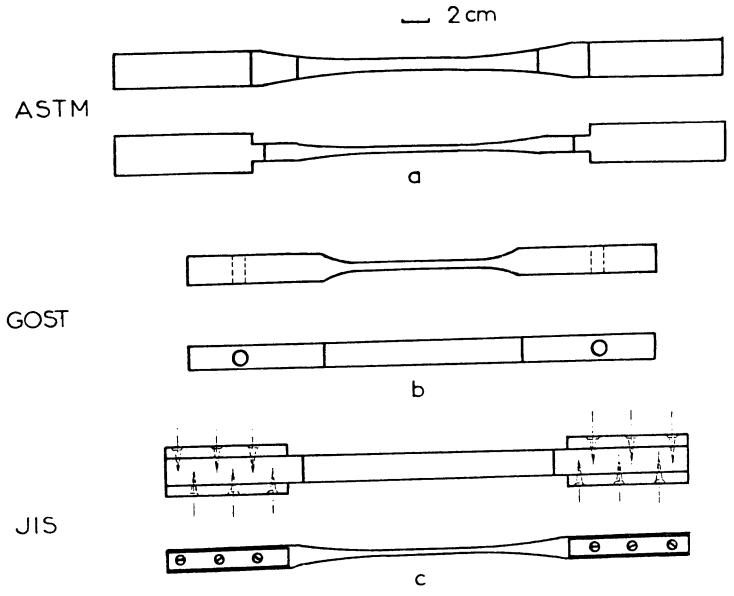


Figure 5 : Formes des éprouvettes définies par les normes ASTM, GOST, et JIS.

3.2. - La norme GOST 16 483.23-73

L'éprouvette est représentée sur la figure 5b et ses paramètres dimensionnels sur le tableau 1. Elle se caractérise par des dimensions extérieures (longueur totale, section des têtes) relativement réduites et par contre par un volume utile important obtenu aux dépens des têtes d'arrimage.

Les têtes étant serrées dans des mors autoserrants dont la force de serrage croît avec l'effort axial, la norme a prévu de loger dans les deux trous de diamètre 10 mm, des petits cylindres d'acier de même diamètre et de 18 mm de long. Les cylindres ne reçoivent donc pas directement l'effort de serrage. C'est le bois comprimé qui, par effet Poisson, vient serrer le cylindre métallique et lui transmet les efforts. Lorsque l'épaisseur de la tête est ramenée à 18 mm par écrasement, nous avons d'ailleurs observé, sur une éprouvette d'épicéa, que la tête se rompt par cisaillement suivant les plans longitudinaux tangents aux cylindres.

La vitesse de chargement est fixée à 15 kN par minute avec une tolérance de $\pm$ 4 kN.

Tableau 1 : Comparaison des caractéristiques dimensionnelles des éprouvettes ASTM, GOST, JIS et de celle présentée à la fin du chapitre précédent

Éprouvettes		ASTM	GOST	JIS	CTB
Longueur totale	mm	457	350	390	200
Section tête	mm^2	645	400	524 (2)	400
Rapport sect. tête/sect. utile		14,2	5	5,24	11,1
Section utile	mm^2	45,3	80	100	36
Rapport dimensions sec. utile		2	5	4	1
Volume utile	mm^3	2880	7200	5000	720
Sommes courbures (1)	m^{-1}	4,5	16,7	2,35	16,7

(1) Ce paramètre est égal à la somme des inverses du ou des rayons des arrondis de raccordement des têtes à la partie centrale. Il caractérise avec le rapport de la section des têtes sur la section utile la progressivité de la variation de la section des éprouvettes.

(2) Cette section inclut les renforts d'une essence dure accolés au corps de l'éprouvette au niveau des têtes.

3.3. - La norme JIS Z 2112.1963

L'éprouvette est représentée sur la figure 5c et ses paramètres dimensionnels sur le tableau 1. Elle se caractérise par une section utile importante et par un raccordement à grand rayon de courbure.

Le volume, hors tout, de bois à échantillonner pour fabriquer l'éprouvette est relativement réduit car son renforcement est obtenu par vissage de parallélépipèdes de bois dur de part et d'autre de la tête proprement dite. L'épaisseur de celle-ci étant supérieure de 1 mm à celle des renforts, la force de serrage, tant qu'elle reste limitée, s'applique uniquement sur le bois constitutif de l'éprouvette. Toutefois lorsque le bois est particulièrement compressible dans le sens radial, ce qui est le cas pour l'épicéa, le serrage finit par ne plus s'exercer que sur les renforts durs et l'éprouvette casse systématiquement au niveau des têtes par cisaillement des vis de fixation. La norme JIS prévoit de substituer au vissage un collage qui a permis d'obtenir la rupture correcte des éprouvettes d'épicéa.

La vitesse de chargement doit rester inférieure à 2 kN par minute.

4 - RESULTATS COMPARES DES ESSAIS DE TRACTION LONGITUDINALE A LA RUPTURE EFFECTUES SUIVANT LES DIVERS MODES OPERATOIRES

4.1. - Les modes de rupture

La délamination d'une partie importante des éprouvettes d'épicéa est observée quelle que soit la norme utilisée. Par contre pour les bois durs (chêne et hêtre) un tel mode de rupture n'a pas été observé.

Il apparaît donc que l'épicéa est une essence particulièrement délicate à étudier en traction longitudinale. A la stratification due aux alternances bois d'été - bois de printemps de caractéristiques mécaniques très différentes, s'ajoute la grande compressibilité dans le sens radial.

Les essais sur l'épicéa ont d'ailleurs mis en évidence, comme nous l'avons expliqué précédemment, un défaut de la norme JIS puisque le vissage des renforts qui est préconisé, entraîne une ruine de l'éprouvette par cisaillement des vis.

Une partie des éprouvettes a présenté une rupture hors de la zone prévue. Le tableau 2 en fait la récapitulation. Dans le cas de la norme GOST, qui définit des raccordements têtes-parties centrales à faible rayon, il s'agit de rupture dans les têtes, parfois par cisaillement du bois autour des cylindres métalliques. Dans le cas des normes JIS et ASTM les ruptures indues s'observent dans les raccordements.

Dans l'ensemble, le pourcentage des éprouvettes présentant une rupture prévue par la norme est de l'ordre de 80 %.

Tableau 2 :
Nombre d'éprouvettes ayant rompu dans la partie de section constante

	CHÊNE	HÊTRE	EPICÉA	TOTAL NORME
A S T M	5/7	6/8	6/8	17/23
G O S T	7/8	6/8	7/8	20/24
J I S	6/7	7/8	7/7	20/22
TOTAL ESSENCE	18/22	19/24	20/23	57/69

4.2. - Les résistances à la rupture mesurées

Le tableau 3 Montre les résistances à la rupture moyennes calculées, pour chaque essence et chaque norme, en divisant la force ultime atteinte par la section mesurée de l'éprouvette.

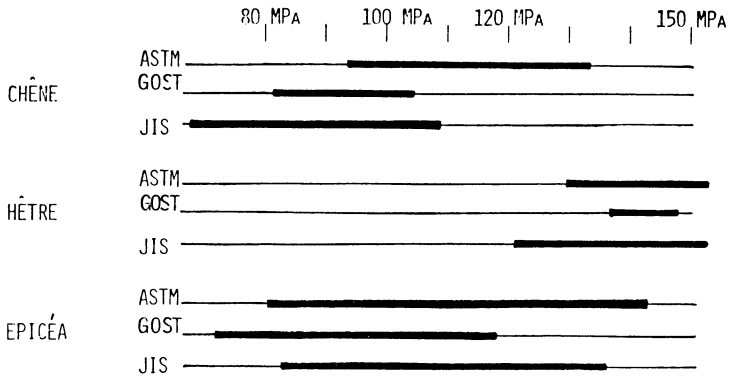
Un examen rapide semble montrer que le mode d'essai et la forme d'éprouvette de la norme ASTM aboutissent à des résistances à la rupture plus élevées et la dernière colonne du tableau suggère qu'une corrélation pourrait exister entre le volume de la zone de concentration de contrainte et la résistance à la rupture. Il y aurait donc un effet de volume analogue à celui connu par ailleurs sur d'autres matériaux.

Les tableaux 4 et 5 montrent cependant qu'une telle conclusion ne peut être posée avec certitude, compte tenu du nombre réduit d'essais effectués. Les intervalles de confiance à 95 % dans lesquels se situent les différentes moyennes de résistances à la rupture supposées distribuées suivant une loi normale, se chevauchent en effet largement.

Tableau 3 :
Résistance à la rupture moyenne en MPa

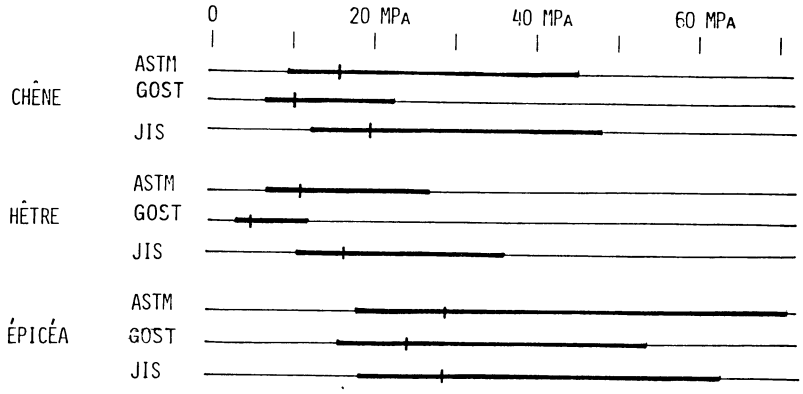
	CHÊNE	HÊTRE	EPICÉA	MOY.NORME	VOL.TESTÉ EN CM^3
ASTM	114	141	112	122	2,88
GOST	95	142	95	111	7,20
JIS	88	137	110	112	6,00
MOY. ESSENCE	99	140	105	115	

Tableau 4 :
Intervalle de confiance de la moyenne des résistances à la rupture à 95 %



Le tableau 5 représente par un petit trait vertical, les écarts types estimés de ces distributions supposées normales et les intervalles de confiance à 95 % dans lesquels ils peuvent se situer. Le tableau indique une dispersion sensiblement moins grande des résultats obtenus avec la norme GOST.

Tableau 5 :
Ecarts types estimés des distributions supposées normales des résistances à la rupture des différentes éprouvettes et intervalle de confiance à 95 % de ces écarts types.



Les écarts observés entre les résultats obtenus à partir des différentes normes changent d'amplitude et même de sens suivant l'essence étudiée : il y a interaction entre la variable norme et la variable essence. Le tableau 6 représente les termes d'interaction définis de la manière suivante pour chaque détermination relative à une norme et une essence donnée :

$$I_{ij} = \overline{x}_{ij.} - \overline{x}_{i..} - \overline{x}_{.j.} + \overline{x}_{...}$$

où I_{ij} est le terme d'interaction relatif à la norme i utilisée pour l'essence j.

Les termes $\overline{x}_{ij.}$, $\overline{x}_{i..}$, $\overline{x}_{.j.}$, $\overline{x}_{...}$ sont des valeurs moyennes des résistances à la rupture correspondant :

pour $\overline{x}_{ij.}$ à la norme i et à l'essence j

pour $\overline{x}_{i..}$ à la norme i et à l'ensemble des 3 essences

pour $\overline{x}_{.j.}$ à l'essence j et à l'ensemble des 3 normes

pour $\overline{x}_{...}$ à l'ensemble des 3 normes et des 3 essences.

Les termes d'interaction apportent à la variance une contribution équivalente aux écarts entre normes. Ceci signifie qu'une hiérarchie absolue des résistances moyennes obtenues par les différentes normes a peu de chance d'être obtenue pour l'ensemble des essences. En d'autres termes, une certaine norme donne des résultats les plus élevés sur une essence donnée, une autre norme sur une autre essence.

L'étude sur les différentes normes demande donc à être complétée, ce qui sera fait avec cinq autre normes. Il sera alors peut-être possible de mettre en évidence, parmi les paramètres dimensionnels du tableau 1, ou parmi les paramètres d'arrimage et de vitesse de chargement, ceux qui exercent une influence sensible.

Tableau 6 :
INTERACTION ESSENCE - NORME en MPa
Résistance - Moy. Résis. Norme - Moy. Résis. Essence + Moy. totale

	CHÊNE	HÊTRE	EPICÉA
ASTM	7,42	- 6,36	- 1,05
GOST	0,14	6,20	- 6,34
JIS	- 7,55	0,16	7,39

$SCE_T = SCE_{NORME} + SCE_{ESSENCE} + SCE_{INTER} + SCE_{RÉSIDUEL}$

38750 = 1490 + 17690 + 1720 + 18750 MPa^2

100 % = 3,8 % + 45,6 % + 4,4 % + 46,1 %

4 - CONCLUSION

Les essais effectués sur des éprouvettes d'épicéa aux caractéristiques dimensionnelles très différentes de celles retenues par les normes étrangères, ont mis en évidence les difficultés que soulèvent la stratification et la nature fibreuse du bois. Si on souhaite, même pour des arbres à croissance rapide, inclure dans la partie utile de l'éprouvette un nombre raisonnable de cernes annuels, une section utile de 70 à 120 mm^2 est intéressante. Dans ces conditions la section élargie

des têtes peut atteindre 500 à 700 mm² et la longueur hors tout 400 mm. Les paramètres sensibles qui restent à étudier pour établir un mode opératoire satisfaisant sont les courbures de raccordement entre tête et partie utile ; la longueur et donc le volume de cette dernière et le rapport entre sa largeur et son épaisseur. Un effet d'échelle affecte probablement, comme l'indique la littérature, la résistance à la rupture. La propagation de la rupture s'amorçant à partir de microdéfauts, il s'agit vraisemblablement d'un effet de volume.

D'autres paramètres tels que mode d'arrimage, présence ou absence de rotule, vitesse de chargement, etc ... resteront à préciser. Comme pour les paramètres précédents, des corrélations devront être recherchées à partir de l'étude comparative sur l'ensemble des 8 normes. On cherchera à les confirmer par des études systématiques et par des études numériques par éléments finis tenant compte de l'anisotropie du matériau et de stratification.

REMERCIEMENTS

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un contrat de recherche partiellement financé par la Communauté Economique Européenne.

Les auteurs remercient MM. QUEHE et PIERRARD pour le minutieux travail d'usinage des éprouvettes et pour les nombreux essais de traction réalisés. Ils remercient également Mlle BILLAC pour le travail de coordination et de mise en forme des résultats.

REFERENCES

ANNUAL BOOK OF ASTM STANDARDS (1983)
Volume 04-09 Wood, Section 4 Construction, standard methods of testing small clear specimens of timber : D 143-52 p. 47-104.

GOSUDARSTEVENNYJ STANDART SOYUZA SSR (1978)
Drevesina (le bois)
GOST 1643, 0-78 Metody ispytani, obshchie trebovaniya (méthode d'essai, recommandations générales)
GOST 1643, 23-73 Metody opredeleniya predela prochnosti pri rastyajenii vdol' volokon (méthode de détermination de la résistance limite en traction parallèle aux fibres).

JAPONESE INDUSTRIAL STANDARD (1977)
Règles générales pour les essais sur le bois Z 2101-1977
Méthode d'essai en traction du bois Z 2112-1963

RECUEIL DE NORMES FRANCAISES (1983)
Bois et liège
Méthodes d'essais du bois NF B 51001 à NF B 51013

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 515-526

Durée de vie en fissuration du pin maritime

Crack propagation and life time of wood

A.G. D'ALMEIDA, P. MORLIER

Laboratoire de Génie Civil, (U A 867 du CNRS)
IUT A de Bordeaux, 33405 Talence Cedex

RESUME

L'étude de la durée de vie en fissuration du pin maritime est menée en considérant ce matériau comme viscoélastique linéaire, orthotrope et homogène.

Ce travail qui utilise un critère de progression de fissure proposé par SCHAPERY dans une théorie générale sur les matériaux relevant d'un tel modèle mécanique, comporte deux groupes d'essais :

- une détermination de quelques complaisances viscoélastiques du matériau en statique ;
- des mesures de l'énergie de fissuration par le taux de restitution d'énergie en mode I, pour différentes vitesses de sollicitation et pour diverses teneurs en eau du matériau, sur des éprouvettes DCB.

La réunion des résultats de ces manipulations associée au critère de progression de fissure permet, par des hypothèses simplificatrices, d'établir une relation entre la vitesse de fissuration et le facteur d'intensité de contrainte puis d'intégrer cette relation pour obtenir les courbes de durée de vie du pin maritime pour des fissures se situant dans les plans LT et LR.

ABSTRACT

In this study the wood is considered as a linear orthotropic viscoelastic material for which a criterion of slow crack propagation proposed by SCHAPERY may be used.

Two series of tests were performed :

- a statical determination of some viscoelastic compliances of pine-wood,
- measurements of fracture toughness for different conditions of loading rate and humidity on DCB samples.

A relation between stress intensity factor and crack propagation rate is then proposed and life time curves for cracks in LT and LR planes are obtained and discussed.

INTRODUCTION

L'approche traditionnelle de la rupture du bois consiste à déterminer la durée de vie ou la contrainte limite uniaxiale sans rechercher le mécanisme de la rupture. Cette démarche a permis d'établir une classification des différentes espèces de bois suivant leurs résistances mécaniques. Elle a également donné naissance à des outils de prévision comme la courbe de durée de vie de WOOD [19] figurant dans la norme ASTM [1].

Face aux ouvrages de plus en plus audacieux dans lesquels intervient ce matériau, devant l'urgence d'affiner les coefficients de sécurité pour que le bois confirme sa vocation de matériau économiquement performant, une étude approfondie s'impose ; des progrès sensibles ont été faits dans ce sens ces dernières années aux USA, en Australie, au Canada et depuis peu en France : la mise en évidence, par une étude d'émission acoustique, du développement de défauts intrinsèques du bois sous contrainte, permet d'attribuer la rupture aux interactions de ces défauts [7]. Parallèlement, une connaissance plus grande des propriétés physiques du bois [10] amène à le considérer comme un composite naturel de polymères se présentant sous la forme de cellulose et d'hémicelluloses ; le mécanisme de rupture peut alors s'expliquer par un processus moléculaire (rupture des liaisons entre les chaînes de molécules sous l'action d'une contrainte). Ces différents aspects de la rupture du bois révèlent une liaison intime entre la rupture macroscopique et la microstructure du matériau.

Dans cette étude, le pin maritime est considéré comme un matériau viscoélastique linéaire homogène et orthotrope. En appliquant la mécanique de la rupture à ce bois, nous cherchons à déterminer les conditions d'évolution d'un défaut préexistant et ceci en corrélation avec la structure anatomique du matériau.

I - MODELISATION MECANIQUE DU BOIS

Un échantillon prélevé dans un tronc d'arbre se présente macroscopiquement comme une superposition de couches annuelles constituées de bois initial (bois de printemps) et de bois final (bois d'été). Il y apparaît des directions caractéristiques $\vec{l}$, $\vec{r}$, $\vec{t}$: $\vec{l}$ est la direction longitudinale ; $\vec{r}$ et $\vec{t}$ sont respectivement les directions normale et tangentielle aux cernes de croissance. Observé à l'échelle microscopique, un échantillon de pin maritime offre une structure plus complexe. Outre les canaux résinifères, perpendiculairement aux trachéïdes qui forment les tissus de soutien et de conduction, se trouvent des lames minces qui sont les rayons du bois.

Malgré cette apparente complexité, le pin maritime peut être modélisé comme un matériau viscoélastique linéaire homogène et orthotrope dans les conditions précisées ci-dessous.

L'hypothèse d'orthotropie (existence de trois plans de symétrie droite orthogonaux entre eux) sera considérée comme vérifiée sur des échantillons issus de grumes dont les cernes de croissance ont un rayon suffisamment grand de sorte que le repère de symétrie ($\vec{l}$, $\vec{r}$, $\vec{t}$) garde la même orientation en tous les points de l'échantillon.

L'hypothèse d'homogénéité est sans doute la plus discutable pour le pin maritime. En général, un bois est considéré comme homogène s'il ne comporte pas de noeuds ni d'autres défauts apparents et s'il existe peu de contraste entre le bois de printemps et le bois d'été (c'est essentiellement le cas pour les bois tropicaux). Un échantillon de pin maritime est pourtant pris comme globalement homogène tant que la largeur des couches annuelles reste petite devant les autres dimensions de l'échantillon.

Le bois anhydre est à peu près élastique à la température ambiante. Cependant, même avec une faible teneur en eau correspondant par exemple à l'équilibre atteint lorsqu'il est abrité (10 à 15 %), ce matériau devient viscoélastique, ce qui explique sa tendance au fluage dans les différentes constructions.

La linéarité peut être définie comme l'indépendance des complaisances en fluage (ou des modules de relaxation) par rapport aux charges appliquées. De nombreux travaux rapportés par SCHNIEWIND |16| affirment un comportement linéaire du bois pour des valeurs faibles et moyennes de charge, d'humidité et de température.

II - THEORIE DE LA PROPAGATION DE FISSURE DANS UN MATERIAU VISCOELASTIQUE LINEAIRE, HOMOGENE ET ORTHOTROPE

On rappelle ici les principaux résultats d'une théorie due à SCHAPERY |13| |14||15| qui s'appuie sur les travaux de BIOT |3| et de GRAHAM |9| : le modèle de fissure adopté est celui de BARENBLATT et α désigne la longueur de la zone dégradée en fond de fissure (Figure 1).

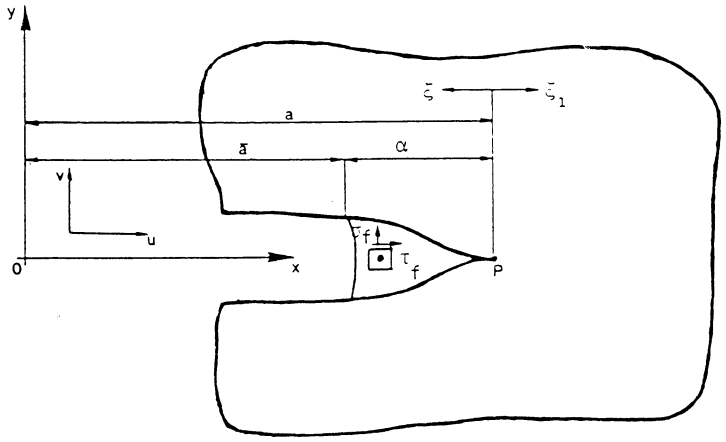


Figure 1

Dans un matériau tel que les contraintes de cohésion σf et τf sont nulles, la distribution des contraintes et déplacements en mode I au voisinage de la fissure et dans le plan y = 0 s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_y^o &= |K_1/(2\pi\xi_1)^{1/2}|\ H(\xi_1) \\ \sigma_{xy}^o &= 0 \\ V^o &= Ce\ |K_1/(2\pi)^{1/2}|\ \xi^{1/2}\ H(\xi) \end{aligned} \qquad (1)$$

où K_1 est le facteur d'intensité de contrainte
et Ce est une fonction des contantes élastiques du matériau,

$Ce = \frac{4(1-\nu^2)}{E}$ pour un matériau isotrope en déformation plane ;

Ce peut être exprimé pour un matériau anisotrope dont les axes de symétrie correspondent avec les axes des coordonnées de la Figure 1.

Contraintes et déplacements peuvent être exprimées en mode I, au voisinage de la fissure et dans le plan y = 0, pour une fissure de BARENBLATT évolutive ($\dot{a} \neq 0$) au sein d'un matériau viscoélastique linéaire et orthotrope |6| ; on peut alors calculer l'énergie spécifique de fissuration.

$$G = 2 \int_0^{\alpha} \sigma f^o\ \frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi}\ d\xi \qquad (2)$$

Lorsque $C_v(t)$ -complaisance viscoélastique réduite, analogue à C_e, du matériau - obéit à une loi puissance :

$$C_v(t) = C_v^o \, t^n \qquad n \ll 1 \,,$$

l'énergie spécifique de fissuration est donnée par SCHAPERY sous la forme (méthode d'approximation quasi-statique) :

$$G = \frac{1}{4} \, C_v \left(\frac{\lambda_n}{\dot{a}} \right)^{1/n} K_I^{\alpha+2} \qquad (3),$$

où λ_n est une fonction précise de n |6|.

L'application de cette théorie au pin maritime pour des fissurations dans les plans TL et RL (la première lettre désigne la direction perpendiculaire au plan de fissure et la seconde la direction de propagation de la fissure) nécessite l'identification des paramètres intervenant dans cette dernière relation définissant l'énergie spécifique de fissuration.

III - DETERMINATION DES COMPLAISANCES VISCOELASTIQUES ORTHOTROPES

La matrice de complaisances du bois considéré comme un matériau orthotrope s'écrit dans un problème plan, lorsque les axes d'orthotropie $(\vec{l}, \vec{r}, \vec{t})$ coincident avec les axes de référence $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{13} & 0 \\ S_{13} & S_{33} & 0 \\ 0 & 0 & S_{55} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}$$

plan LT plan LR

Les différents coefficients intervenant dans ces matrices sont déterminés |6| comme suit :

- S_{11}, S_{22} et S_{33} par des essais de traction à charge constante sur un système comportant un vérin à vis permettant la mise en charge manuelle des éprouvettes ;
- S_{55} et S_{66} par des essais de cisaillement montés sur le même système ; la méthode de cisaillement utilisée est celle de la plaque sollicitée par un cadre articulé en ses sommets ;
- S_{13} et S_{12} par la relation $S_{ij} = - \nu_{ij} S_{ii}$: les coefficients de Poisson ν_{ij}, supposés constants, ont été mesurés en compression sur le pin maritime |11|.

Les matrices de complaisances ainsi obtenues en contrainte plane sont transformées en déformation plane par les relations :

$$T_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3} \, S_{j3}}{S_{33}} \qquad i,j = 1,2 \qquad \text{plan LR}$$

$$T_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i2} \, S_{j2}}{S_{22}} \qquad i,j = 1,3 \qquad \text{plan LT}$$

L'inversion de ces nouvelles matrices donne les matrices de rigidité en déformation plane dans les plans LT et LR.

Les mesures de déformation sont faites à partir de jauges collées sur les échantillons. Les plaques de cisaillement ont été reconstituées dans les directions d'orthotropie par collage afin de respecter les hypothèses d'orthotropie.

Le lissage des points expérimentaux obtenus dans nos essais, d'une durée de quelques heures, est fait par des fonctions de la forme :

$$S_{ij}(t) = A_{ij}\ t^{m_{ij}}$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs des coefficients pour le pin maritime (12 % H) ; les faibles valeurs de m_{ij} permettent de calculer la complaisance viscoélastique réduite $C_v(t)$ par la méthode quasi-élastique |6| ; il est ensuite procédé à un lissage des points résultants par une fonction de la forme :

$$C_v(t) = C_v^n\ t^n \qquad \text{(Figure 2) ;}$$

la petite valeur de n conforte l'hypothèse de SCHAPERY.

S_{ij}	A_{ij}	m_{ij}
S_{11}	$5{,}77 \times 10^{-5}(MPa)^{-1}$	$7{,}01 \times 10^{-3}$
S_{22}	$1{,}83 \times 10^{-3}(MPA)^{-1}$	0,027
S_{33}	$1{,}12 \times 10^{-3}(MPa)^{-1}$	0,020
S_{55}	$0{,}746 \times 10^{-3}(MPa)^{-1}$	0,018
S_{66}	$0{,}665 \times 10^{-3}(MPa)^{-1}$	0,023

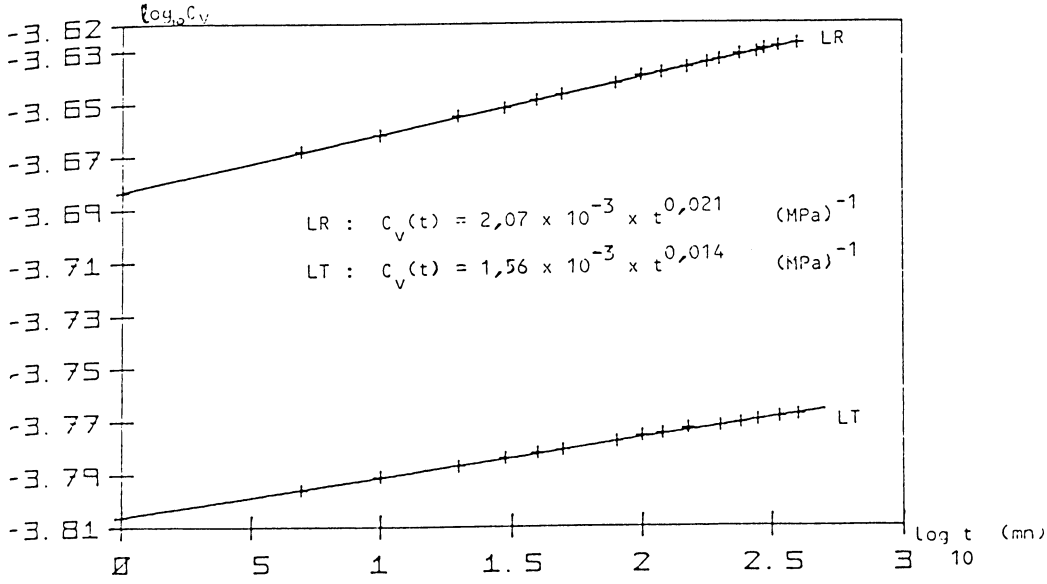


FIGURE 2 - Allures des complaisances viscoélastiques réduites C_v

IV - ESSAIS DE FISSURATION

Ils sont effectués sur une machine électromécanique WYKEHAM - FARRANCE dont la principale caractéristique est la gamme de faibles vitesses de déplacement de la traverse s'étendant entre 0,0006 mm/mn et 1,5 mm/mn. Les éprouvettes DCB utilisées lors de ces essais sont sollicitées à vitesse constante en mode I. Elles sont choisies avec un fil droit et des dimensions telles que le plan de la fissure soit en déformation plane [12].

Les éprouvettes sont conditionnées en humidité au-dessus des solutions saturées de sels et les essais sont effectués dans un caisson étanche où le même état hygrométrique est imposé. Cette technique a donné des teneurs en eau du matériau comprises entre 5 % et 23 %.

Le calcul de l'énergie de fissuration est fait à partir des courbes force-déplacement. Ces courbes présentent généralement trois zones distinctes (Figure 3) :
- une zone linéaire où la longueur a_o de l'entaille mécanique initiale reste constante et où la force F croît,
- une zone instable correspondant au début d'apparition d'une fissure visible où la longueur de fissure croît et où F continue de croître,
- une zone de fissuration contrôlée formée d'une succession de paliers.

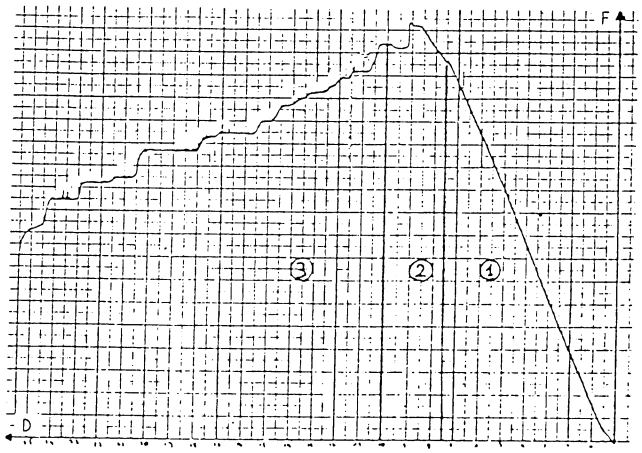


Figure 3

L'allure linéaire de la courbe F-D dans la zone permet de calculer l'énergie de fissuration par le taux de restitution d'énergie :

$$G = \frac{F^2}{2B} \frac{\partial S}{\partial a} \qquad (4)$$

où B désigne l'épaisseur de l'éprouvette.

La force F, le déplacement D et la longueur de fissure "a" servant au calcul de la souplesse S de l'éprouvette et de G sont mesurées à la fin de chaque palier où G atteint la valeur critique. Un lissage polynomial de degré deux ou trois des points expérimentaux ainsi obtenus permet de déterminer :

$$\frac{\partial S}{\partial a} \text{ puis G.}$$

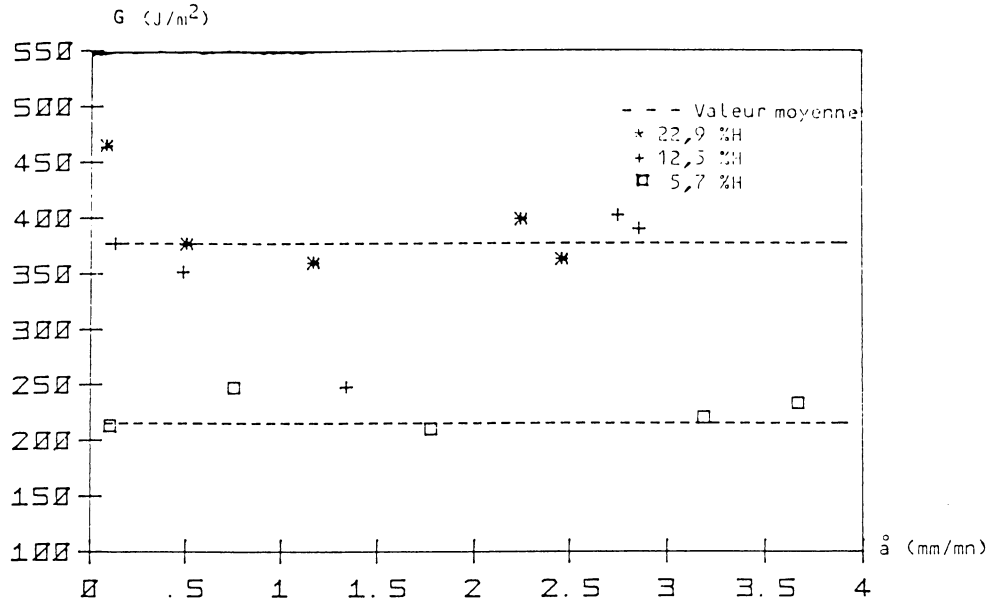


FIGURE 4 - Variations de l'énergie de fissuration en fonction de la vitesse de propagation de fissure (RL)

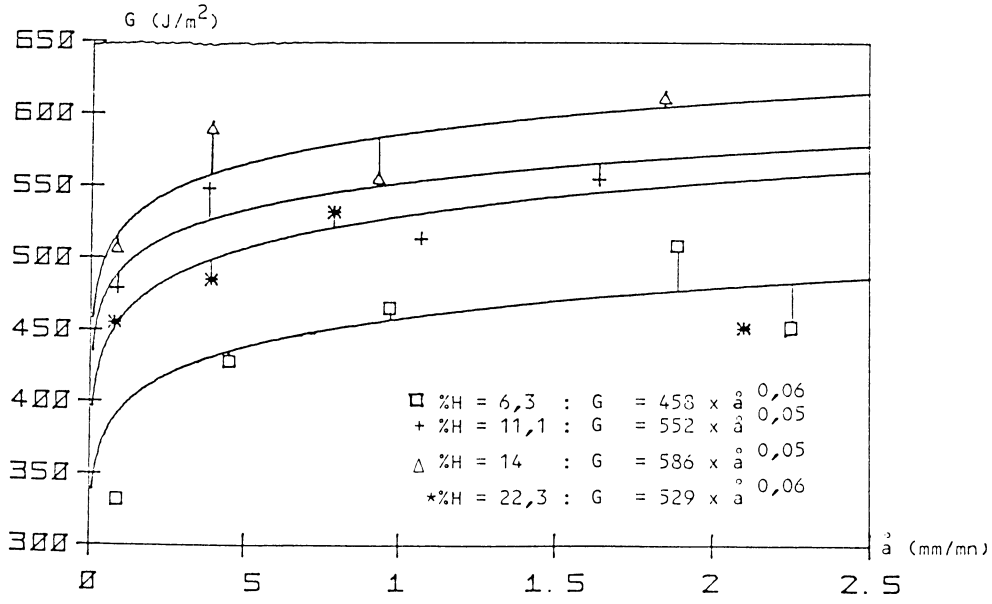


FIGURE 5 - Variations de l'énergie de fissuration en fonction de la vitesse de propagation de fissure (TL)

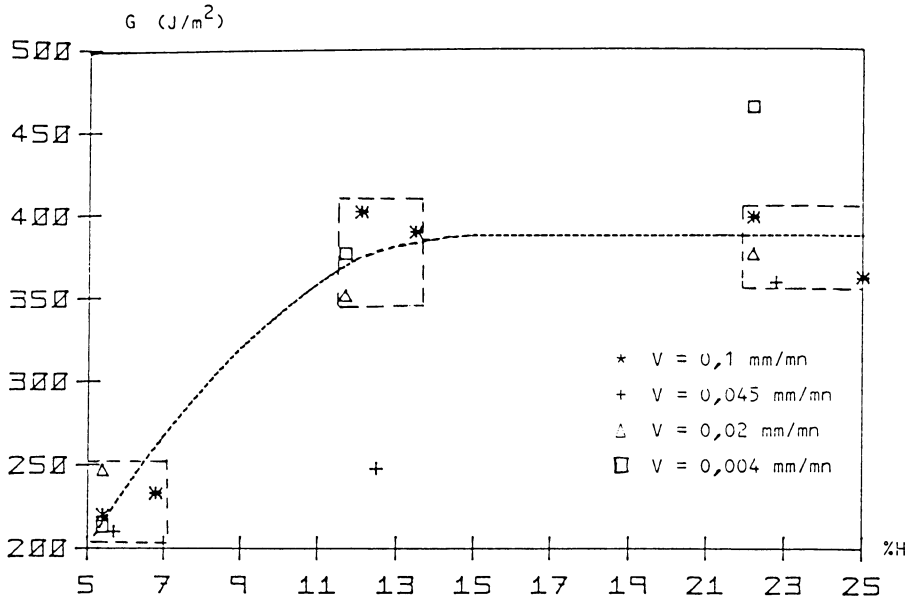


FIGURE 6 - Variations de l'énergie de fissuration en fonction de la teneur en eau (RL)

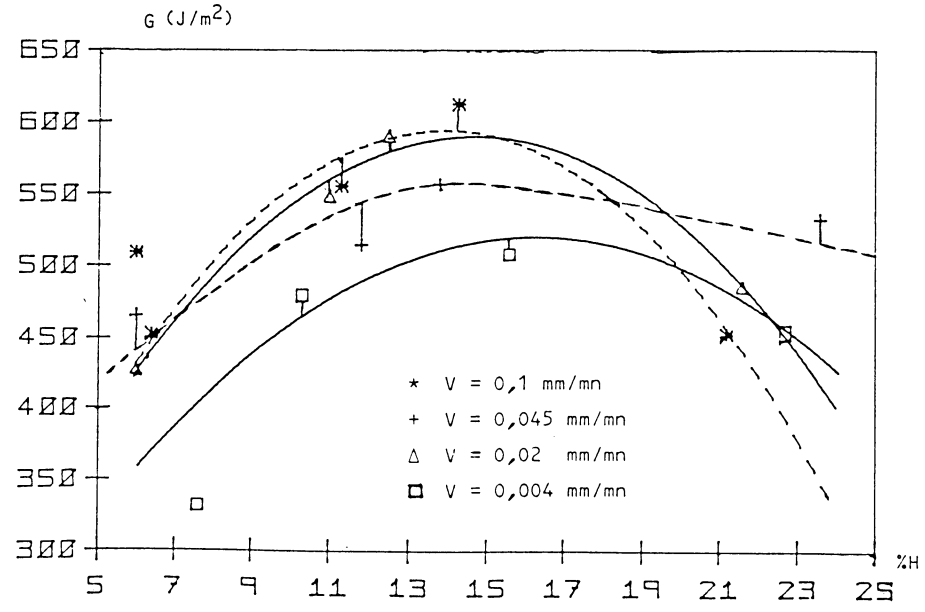


FIGURE 7 - Variations de l'énergie de fissuration en fonction de la teneur en eau (TL)

Les résultats des essais de fissuration sont regroupés sur les figures 4,5,6 et 7. Il y apparaît une différence de comportement entre les éprouvettes TL et RL. Dans la configuration RL, l'énergie de fissuration est indépendante de la vitesse moyenne de fissuration dans la gamme de vitesses où les essais ont été effectués. Par contre, elle dépend de la teneur en eau du matériau. Dans la configuration TL l'énergie de fissuration dépend à la fois de la teneur en eau et de la vitesse de fissuration ; de plus, les valeurs de G obtenues en TL sont plus élevées qu'en RL pour une humidité donnée. Cette différence de comportement peut être expliquée à partir de l'observation des faciès de rupture des éprouvettes : les faciès obtenus en RL sont macroscopiquement lisses et présentent en microscopie électronique à balayage (MEB) une structure parallèle. Lors de la propagation de fissure dans cette configuration la rupture intervient au niveau des rayons du bois (lames minces opposant peu de résistance à la progression de fissure) et des tissus de liaison entre les fibres. Dans la configuration TL le faciès observé a une structure tressée ; macroscopiquement, il est plus accidenté qu'en RL. La fissure a tendance à changer de plan de propagation en passant d'un rayon du bois à un autre ; ces changements de plans sont accompagnés de rupture de trachéides, ce qui entraîne une dissipation supplémentaire d'énergie pour créer une unité d'aire de surface. Cette instabilité du plan de fissuration croît avec la vitesse de fissuration sur les éprouvettes TL [6].

Les variations de l'énergie de fissuration en fonction de la teneur en eau réflètent la même différence de comportement : sur les éprouvettes RL, G croît jusqu'à 13 % H puis semble se stabiliser au-delà ; en TL il apparaît un maximum de G au voisinage de 14 % H. L'existence d'un maximum en fonction de l'humidité a été observée dans les variations de la contrainte moyenne de rupture du Douglas [4] au voisinage de 12 % H.

V - ESTIMATION DE LA DUREE DE VIE EN FISSURATION

Depuis 1840 de nombreux travaux [8] ont souligné l'importance de la prise en compte de la durée d'application d'une charge au bois. Ils ont abouti au choix du facteur 9/16 appliqué à la charge de rupture mesurée lors d'un essai en statique pour déterminer la charge maximale que peut supporter une structure à long terme.

La tendance dans les travaux les plus récents [18] [2] consiste à appliquer la mécanique de la rupture au bois et à considérer que la durée de vie correspond au temps d'évolution d'un défaut préexistant dans le matériau jusqu'à sa taille critique. La procédure classique est d'établir une relation entre la vitesse de fissuration et le facteur d'intensité de contrainte lors d'une propagation lente de fissure puis d'intégrer cette relation pour obtenir la durée de vie en fissuration. Dans ce travail la première partie de cette démarche est réalisée en utilisant la relation (3) après l'identification de paramètres qui y figurent à partir des essais précédemment exposés.

En mode I, le critère de progression de fissure dans un matériau viscoélastique linéaire orthotrope et homogène s'écrit :

$$C_v \left(\frac{\lambda_n^{1/n}\ \alpha}{\overset{\circ}{a}}\right) K_I^2 = 4\,G \qquad (3)$$

En considérant nos résultats expérimentaux où

$$C_v \left(\frac{\lambda_n^{1/n}\ \alpha}{\overset{\circ}{a}}\right) = C_v^{\circ}\ \frac{\lambda_n\ \alpha^n}{\overset{\circ}{a}^n}$$

et

$$G = G^{\circ}\ \overset{\circ}{a}^{q} \text{ où } G^{\circ} \text{ et } q \text{ sont constants (Figure 5),}$$

il résulte que $\overset{\circ}{a} = A\ K_I^N$ (5)

avec $N = \frac{2}{n+q}$ et $A = \left|\frac{C_v^{\circ}\ \lambda_n\ \alpha^n}{4G^{\circ}}\right|^{\frac{1}{n+q}}$

où A est une constante pour une teneur en eau donnée du matériau si la zone où les forces de cohésion restent significatives est supposée de longueur α invariable en fonction de la vitesse.

En admettant de plus qu'il existe, entre le facteur d'intensité de contrainte K_I et la contrainte σ appliquée, la relation classique

$$K_I = \sigma\sqrt{a}\ Y$$

où Y est un facteur de calibration dépendant de la géométrie de l'éprouvette utilisée et du système de chargement, l'intégration de la relation liant $\dot{a}$ et K_I donne :

$$T = 2\ K_{IC}^{2-N}\ (\frac{\sigma}{\sigma_R})^{2-N}/(N-2)\ \sigma^2 Y^2 A \quad \text{pour } T >> T_R$$

K_{IC} : tenacité du matériau,

T : durée de vie sous la charge constante σ,

σ_R : charge de rupture déterminée lors d'un essai standard en statique,

T_R : durée de vie sous la charge σ_R.

Par extrapolation :

$$T_R = 2\ K_{IC}^{2-N} / (N-2)\ \sigma_R^2\ Y^2 A \quad , \text{ d'où}$$

$$\frac{T}{T_R} = (\frac{\sigma}{\sigma_R})^{-N} \qquad (6)$$

N étant connu à partir des essais précédents, la détermination de la durée de vie sous une charge σ, connaissant l'orientation de la fissure et la teneur en eau du bois pour un système de charge donné, se ramène alors à la mesure de T_R et σ_R à partir d'un essai de courte durée. Les résultats de nos essais et ceux obtenus par d'autres auteurs sont regroupés dans le tableau ci-dessous, les courbes de durée de vie correspondantes (calculées) sont représentées sur la figure 8.

WOOD Eprouvette de flexion (Douglas) σ/σ_R en %	SCHNIEWIND Eprouvette SEN (TL) (Douglas) σ/σ_R en %	BARRETT Eprouvette DT (RL) (Douglas)	Résultats obtenus Eprouvette DCB + fluage + critère (pin maritime)
$\frac{\sigma}{\sigma_R} = \frac{108,4}{T^{0,04636}} + 18,03$	$\frac{\sigma}{\sigma_R} = 89 - 7,3 \log_{10} T$	$(\frac{\sigma}{\sigma_R})^{-N} = \frac{T}{T_R}$	$(\frac{\sigma}{\sigma_R})^{-N} = \frac{T}{T_R}$
T en secondes	T en minutes	N = 61,9	TL : N = 31,25 RL : N = 95,23
-	12 %H	10,5 %H	12 %H

Dans la configuration RL, il existe peu de valeurs de T_R. BARRETT [2] donne 5×10^{-3} seconde pour le douglas ; valeur très faible qui confirme que la rupture dans cette configuration peut être considérée comme pratiquement élastique fragile. Dans la configuration TL, nos résultats sont cohérents avec les courbes de WOOD [19] et SCHNIEWIND [18]. Pour la valeur de 1,8 mn donnée pour T_R par ces auteurs, nous trouvons une durée de vie de 220 ans pour un niveau de charge de 9/16.

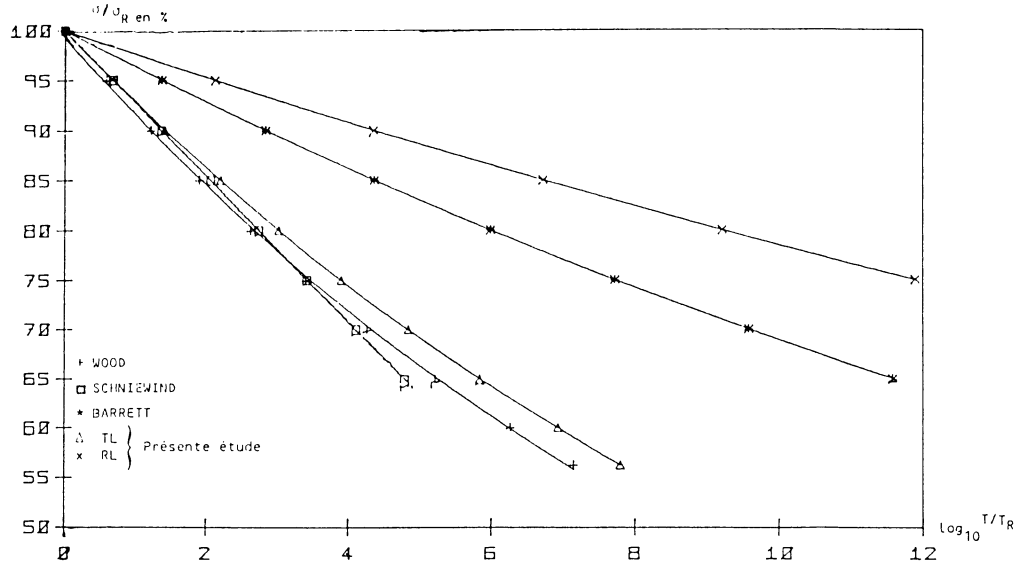


Figure 8 : Courbes de durée de vie.

CONCLUSION

La démarche proposée dans ce travail pour établir la relation $\dot{a} - K_I$ et en déduire une estimation de la durée de vie en fissuration présente le double avantage de permettre :

- d'une part une connaissance des orientations des défauts qui sont les plus dangereuses, ce qui présente un intérêt évident lors de la classification des pièces de bois ;
- d'autre part une extension de notre étude à des matériaux relevant du même modèle mécanique, en particulier les composites synthétiques.

BIBLIOGRAPHIE

|1| - ASTM
Annual book of ASTM - Vol.04-09 - 1983.

|2| - BARRETT J.D. - MINDESS S. - NADEAU J.S. -
"Slow crack growth in douglas-fir"
Wood science, 8(1), PP.389-396 - 1975.

|3| BIOT M.A.
"Non linear effect of initial stress on crack propagation between similar and dissimilar orthotropic media"
Q. Appl. Math. XXX, PP.379-406 - 1972.

|4| BLICBAU A.S. - COOK D.J. -
"Effect of strain rate on the fracture of wood"
South Wales Univ. Report, Australia, 1975.

|5| BODIG J. - JAYNE A.B. -
"Mechanics of wood and wood composites"
Van Nostrand Reinhold Company - 1982.

|6| - D'ALMEIDA A. -
Durée de vie en fissuration d'un matériau viscoélastique linéaire orthotrope : le bois -
Thèse de Docteur-Ingénieur, Bordeaux 1984 -

|7| - DEBAISE R. - PORTER A.W. - PENTONEY R.E. -
"Morphology and mechanics of wood fracture"
Materials Research and Standards, 6(10), PP.493-499, 1966.

|8| - GERHARDS C.C. -
"Effect of duration and rate of loading on strength of Wood and Wood-based materials" -
USDA forest product, PP.1-24, 1977.

|9| - GRAHAM G.A.C. -
"The correspondance principle of linear viscoelasticity for problems involving time-dependent boundary regions"
Q. Appl. Math., 26, PP. 167-174, 1968.

|10| - KOLLMANN F.F.P. - COTE W.A.-
"Principles of wood science and technology"
Tome I, Solid Wood, Ed. Springer Verlag, New York, 1968.

|11| - LAHNA F. -
"Mécanique de la rupture des matériaux orthotropes. Application au bois" -
Thèse de 3ème cycle, Bordeaux, 1983.

|12| - PORTER A.W. -
"On the mechanics of fracture in wood"
Forest Product Journal, Vol.13, 1964.

|13| - SCHAPERY R.A. -
"A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media - I"
Theoretical development"
Int. J. fracture, 11, PP.141-159, 1975.

|14| - SCHAPERY R.A. -
"A theory of crack initiation and growth media - II, Approximate methods of analysis"
Int. J. fracture, 11, PP.549-562, 1975.

|15| - SCHAPERY R.A. - BROCKWAY G.S.
"Some viscoelastic crack growth relations for orthotropic and prestrained media"
Engineering Fracture Mechanics, Vol.10, PP.453-468, 1978.

|16| - SCHNIEWIND, A.P. -
"Recent progress in the study of the rheology of wood"
Wood Science and Tech., Vol.2, PP.188-206, 1968.

|17| - SCHNIEWIND A.P. - BARRETT J.D. -
"Wood as linear orthotropic viscoelastic material"
Wood Science and Tech., Vol.6, PP.43-57, 1972.

|18| - SCHNIEWIND A.P. - CENTENO J.C. -
"Fracture toughness and duration of load factor"
Wood and Fiber, 5(2), PP. 152-159, 1973.

|19| - WOOD L.W.
"Relation of strengh of wood to duration of load"
U.S. For. Prod. Lab. Rep. Madison, 1951.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 527-542

Propagation dynamique d'une fissure dans un matériau orthotrope : le bois

Dynamic crack propagation in an orthotropic material : the wood

A. ALLAILI, P. JODIN, G. PLUVINAGE

Laboratoire de Fiabilité Mécanique
Université de Metz
F 57000 Metz

RESUME

La ténacité en dynamique K_{1d} et le facteur d'intensité de contrainte K_{1a} ont été mesurés expérimentalement sur du bois de hêtre.
Les résultats ont été interprétés à partir d'une théorie de FREUND, modifiée pour tenir compte de l'orthotropie.
La ténacité en dynamique est une fonction de la vitesse de propagation de la fissure à selon une relation

$$K_{1d} = K_{1c}\left[1 - \left(\frac{\dot{a}}{c_2}\right)^2\right]^{1/2}$$

c_2 est la célérité des ondes de cisaillement
Le facteur d'intensité de contrainte à l'arrêt est pratiquement égal à la ténacité K_{1c}

ABSTRACT

Dynamic fracture toughness and crack arrest K_{1a} have been experimentally measured on an European hardwood (Beech).
Results have been interpreted using FREUND's theory modified to take into account the material's orthotropy.
Dynamic fracture toughness is time dependant according to the relationship

$$K_{1d} = K_{1c}\left[1 - \left(\frac{\dot{a}}{c_2}\right)^2\right]^{1/2}$$

c_2 is the shear wave velocity.
Dynamic stress intensity factor at crack arrest is equivalent to fracture toughness K_{1c}.

1 - INTRODUCTION

Les méthodes utilisées pour la transformation des billons de bois en planches sont principalement le sciage, le fendage et la découpe par vibration.

Le fendage est une opération intéressante sur le plan des économies de matières car il n'y a pas de production de sciure.

Le fendage et le tranchage sont des opérations utilisées aussi pour la découpe d'éléments ou la production de petites plaquettes de bois utilisables comme matière première pour la fabrication de pâte à papier ou de panneaux de particules.

L'opération de fendage peut être considérée comme l'avancement d'un outil de forme conique, précédé de la progession lente et progressive, ou rapide et par bonds successifs, d'une fissure. Cette progression de fissure est habituellement générée selon la direction longitudinale de sorte que le fendage est une opération effectuée selon le plan RL ; on peut selon cette terminologie définir le fendage selon le plan TL comme le déroulage du bois.

Dans cette étude, nous nous intéresserons particulièrement à la progression rapide d'une fissure au cours de l'opération de fendage dans le plan RL.

Ces phénomènes sont habituellement étudiés pour les matériaux métalliques dans le cadre de la mécanique de la rupture et plus particulièrement dans celui de la ténacité en dynamique.

Cette approche sert à quantifier 2 phénomènes :

- la propagation de la fissure et notamment l'évolution de la vitesse au cours du temps et l'état des contraintes et des déformations à la pointe de fissure
- les conditions d'arrêt

Dans ce qui suit, nous utiliserons les théories développées pour les matériaux métalliques homogènes élastiques isotropes en les adaptant au bois qui sera considéré comme un matériau orthotrope homogène.

Cette étude a porté essentiellement sur le fendage du hêtre.

2 - EQUILIBRE ENERGETIQUE D'UNE FISSURE QUI SE PROPAGE

On considère dans un solide de volume V une fissure dont le plan est normal à la direction y et qui se propage dans la direction x avec une vitesse $\dot{a}$ (figure 1). Le solide possède une fissure de longueur initiale a_o et est soumis à des forces extérieures. A chaque accroissement élémentaire de fissure, on peut établir les conditions d'équilibre énergétique qui s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathcal{C}ext}{\partial a} = \frac{\partial T}{\partial a} + \frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial D}{\partial a} \qquad (1)$$

Dans cette formule, $\mathcal{C}ext$ représente le travail des forces extérieures, T l'énergie cinétique, U l'énergie de déformation stockée, D l'énergie dissipée.

Il est coutumier de séparer les termes énergétiques réversibles du terme dissipatif non réversible sous la forme

$$\left(\frac{\partial \mathcal{C}ext}{\partial a} - \frac{\partial T}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a}\right) = G \qquad (2)$$

G est appelé le taux d'énergie disponible

et

$$\frac{\partial D}{\partial a} = \Gamma(\dot{a}) \qquad (3)$$

$\Gamma(\dot{a})$ est l'énergie surfacique de rupture qui dépend de la vitesse de progression de la fissure.

Ainsi, à tout instant de la progression de la fissure, la condition suivante est établie :

$$G = \Gamma(\dot{a}) \qquad (4)$$

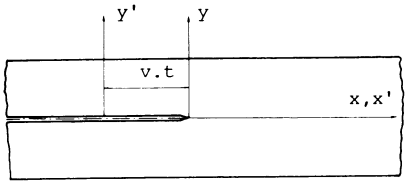


Figure 1. Systèmes d'axes liés à la fissure

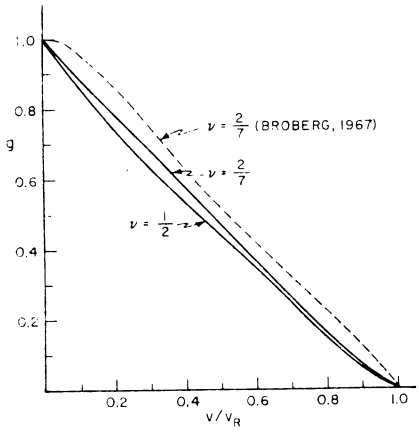


Figure 2. Courbes g(a) d'après FREUND et BROBERG.

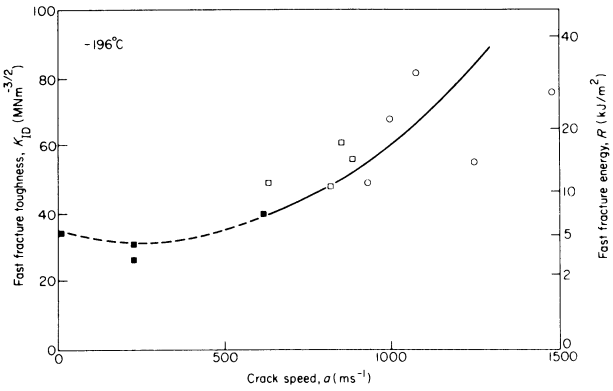


Figure 3. Evolution de la ténacité en fonction de la vitesse de la fissure pour un acier.

Le taux d'énergie disponible est lui aussi une fonction du paramètre $\dot{a}$. Par définition $G(\dot{a} = 0)$ est appelé G_{stat} et on considère le facteur $g(\dot{a})$ tel que :

$$G(\dot{a}) = G_{stat} \cdot g(\dot{a}) \tag{5}$$

La fonction $g(\dot{a})$ dépend de la géométrie du système considéré et elle a été déterminée dans quelques cas simples notamment pour des poutres DCB [1], panneaux à entaille centrale [2], ruban infini bridé [3]. Trois types de fonctions $g(\dot{a})$ sont représentées dans la figure 2.

La fonction $g(\dot{a})$ est exprimée en fonction des paramètres $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ eux-mêmes fonction des célérités des ondes longitudinales c_1 et des ondes de cisaillement c_2

$$\mathcal{S}_1^2 = 1 - \left(\frac{\dot{a}}{c_1}\right)^2$$
$$\mathcal{S}_2^2 = 1 - \left(\frac{\dot{a}}{c_2}\right)^2 \tag{6}$$

L'énergie surfacique de rupture $(\dot{a})$ a été déterminée à partir d'expériences. D'une façon générale, cette grandeur augmente très rapidement avec la vitesse de propagation de la fissure et devient théoriquement infinie lorsque $\dot{a}$ tend vers la vitesse des ondes de Rayleigh c_2. Dans certains cas, un minimum a pu être observé ; il n'a pas pu être clairement défini si ce minimum correspondait à des effets transitoires ou à un effet de la vitesse de déformation (figure 3).

Lorsque l'on examine la relation (4), il est clair que l'arrêt se produira lorsque le taux d'énergie apporté pour la progression de la fissure est inférieur au taux d'énergie dissipée de sorte que :

$$G(\dot{a}) \leq (\dot{a}) \tag{7}$$

est la condition d'arrêt.
Deux cas peuvent se produire :

* le minimum du travail surfacique est celui des conditions statiques

$$\Gamma(\text{arrêt}) = G_{stat} \tag{8a}$$

* le minimum du travail surfacique se produit à la vitesse $\dot{a}_{min}$

$$\Gamma(\text{arrêt}) = \frac{G_{stat}}{g(\dot{a}_{min})} \tag{8b}$$

Deux hypothèses contradictoires sont ajoutées généralement à cette condition :

* dans une structure de dimensions finies, l'amortissement sur les bords de la structure affaiblit les réflections des ondes et donc diminue le taux d'énergie disponible

* on peut considérer que l'énergie cinétique est stockée pendant une première phase de propagation puis ensuite disponible pour entraîner plus loin la fissure et que, dans ce cas, l'amortissement ne joue pratiquement pas de rôle.

Des résultats expérimentaux de KALTHOFF, BEINERT et WINKLER [4] sont très démonstratifs à ce sujet. Ils montrent que l'arrêt de propagation se produit pour une valeur plus élevée du facteur d'intensité de contrainte dynamique que la valeur statique correspondante. Le retour aux conditions de repos se faisant par une série d'oscillations rapidement amorties.

Il semble toutefois que la valeur relative du facteur d'intensité de contrainte à l'arrêt par rapport à la ténacité statique K_{Ic} devrait être fonction de la géométrie de l'éprouvette et de la nature du matériau.

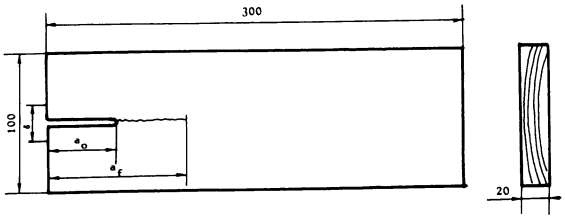


Figure 4. Dimensions de l'éprouvette.

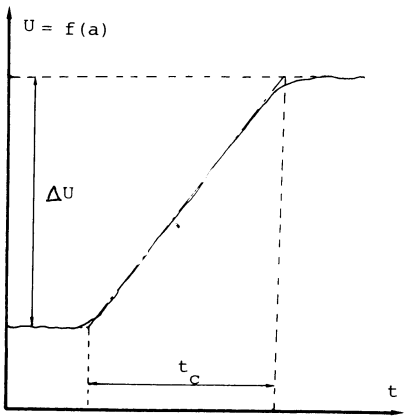


Figure 5. Variation de la tension aux bornes de la jauge de longueur de fissure en fonction du temps.

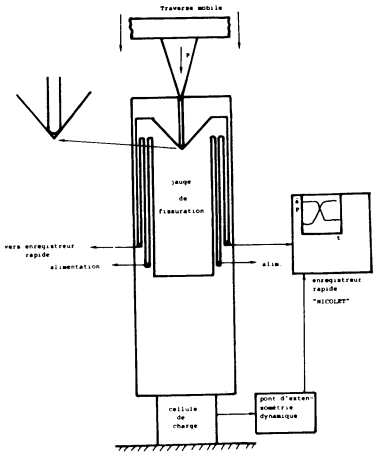


Figure 6. Dispositif expérimental. Détail de la pointe de la fissure.

3 - CALCUL DU FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE DYNAMIQUE DANS LE CAS D'UN MATERIAU ORTHOTROPE

Le calcul du facteur d'intensité de contrainte dynamique dans le cas d'un matériau orthotrope a été réalisé à partir des travaux de FREUND [5] adaptés par WILLIAMS [6] dans le cas des matériaux composites.

En partant de l'équation bidimensionnelle de propagation dans le plan x,y

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \frac{\rho \partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \frac{\rho \partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (9)$$

σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} sont les composantes des contraintes, u et v respectivement les déplacements dans les directions x et y, ρ la densité du matériau et t le temps. En contraintes planes, la théorie de l'élasticité conduit à :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_{xx}} (\sigma_{xx} - \nu_{xy} \sigma_{yy})$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E_{yy}} (\sigma_{yy} - \nu_{yx} \sigma_{xx}) \qquad (10)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G_{xy}} \sigma_{xy}$$

ε_{xx}, ε_{yy} et γ_{xy} sont les composantes des déformations

E_{xx}, E_{yy} et G_{xy} sont les modules d'élasticité longitudinale dans les directions x et y et le module de Coulomb dans le plan xy.

Pour le bois de hêtre, dans le plan TL, on a :

$$\frac{E_{xx}}{E_{yy}} \approx 10 \quad \text{et} \quad \frac{E_{yy}}{G_{xy}} \approx 1{,}8$$

De sorte que l'on peut prendre comme hypothèse que la déformation ε_{xx} est faible et peut être négligée, ce qui conduit à :

$$\nu_{xy} \sigma_{yy} = \sigma_{xx} \qquad (11)$$

et

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1 - \nu_{yx} \nu_{xy}}{E_{yy}} \sigma_{yy}$$

L'équation de propagation (9) peut s'écrire

$$G_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{E_{yy}}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\rho \partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (12)$$

En négligeant $\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{xx}$

on obtient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{E_{yy}}{G_{xy} (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\rho}{G_{xy}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (13)$$

Un changement de variable ($x \to x' - \dot{a}t$; $y \to y$) et une transformation de type Galilée de (13) conduit à

$$\beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (14)$$

avec $\beta^2 = 1 - \frac{\dot{a}^2}{c_2^2}$; $\alpha^2 = \frac{E_{yy}}{G_{xy}(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})}$ et $c_2^2 = \frac{G_{xy}}{\rho}$

La solution de cette équation différentielle a été proposée par NILSSON [3].

La distribution de contrainte dans la direction de la fissure est fonction de la contrainte globale appliquée σ_g et s'exprime par :

$$\sigma(x) = \sigma_g \left(\frac{h\beta}{\pi\alpha} \right) x^{-1/2} \qquad (15)$$

Elle présente une singularité en $x^{-1/2}$
h est la demi-hauteur de la poutre DCB

Le facteur d'intensité de contrainte peut être calculé à partir de la relation (16) :

$$K_1(\dot{a}) = \lim_{x \to o} (x)\,(2\pi x)^{-1/2} \qquad (16)$$

La contrainte globale dans le cas de la poutre DCB peut être calculée à partir du déplacement w_o des lèvres de l'entaille :

$$\sigma_g = \frac{w_o E_{yy}}{h(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \qquad (17)$$

Le facteur d'intensité de contrainte dynamique s'exprime alors par :

$$K_1(\dot{a}) = \sqrt{2}\, \frac{w_o E_{yy}}{h^{1/2}(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})^{1/4}} \left(\frac{G_{xy}}{E_{yy}} \right)^{1/4} \left(1 - \frac{\dot{a}^2}{c_2^2}\right)^{1/4} \qquad (18)$$

Cette expression peut se mettre sous la forme :

$$K_1(\dot{a}) = K_1^{stat} \cdot k_1(\dot{a}) \qquad (19)$$

avec

$$K_1^{stat} = \sqrt{2}\, \frac{w_o E_{yy}}{h^{1/2}(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})^{1/2}} \cdot \left(\frac{G_{xy}}{E_{yy}} \right)^{1/4} \qquad (20a)$$

en approximant la quantité $1/(1 - \nu_{yx}\nu_{xy})^{1/4}$ à l'unité

et

$$k_1(\dot{a}) = \left(1 - \frac{\dot{a}^2}{c_2^2}\right)^{1/4} \qquad (20b)$$

Cette relation sera utilisée ultérieurement dans l'analyse des résultats utilisés.

4 - CARACTERISTIQUES RHEOLOGIQUES ET MECANIQUES DU HETRE

Le hêtre est un arbre très répandu en France notamment dans les régions de l'Est. C'est un feuillu à pore diffus donc homogène ; il se fend relativement bien. Le bois de hêtre est un matériau dont les propriétés mécaniques possèdent une symétrie orthotrope.

En première approximation, il peut être considéré comme ayant une loi de comportement linéaire élastique.

La loi de Hooke généralisée peut s'écrire :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijk\ell} \cdot \sigma_{k\ell} \qquad (21)$$

où ε_{ij} représente le tenseur des déformations, σ_{ij} le tenseur des contraintes et $S_{ijk\ell}$ la matrice des complaisances.

Il est coutumier de représenter la matrice des complaisances en utilisant des grandeurs techniques comme le module de Young, le coefficient de Poisson et le module de torsion.

En se référant au plan ligneux comme repère d'orthotropie, on définit ces grandeurs par rapport aux directions longitudinale L, radiale R et tangentielle T.

Les éléments de la matrice des complaisances dans le cas du bois de hêtre que nous avons utilisé ont été mesurés à l'aide d'une méthode ultra-sonore.

Pour ce faire, un cube de bois de 16 mm d'arête taillé selon le repère d'orthotropie est placé entre deux transducteurs. La vitesse de propagation d'une impulsion ultrasonore est mesurée à l'aide de la base de temps d'un oscilloscope.

Les rigidités $C_{ijk\ell}$ sont obtenues en utilisant les relations :

$$C_{ii} = V_{ii}^{2} \cdot \rho \qquad (22)$$

où V_{ii} est la célérité des ondes longitudinales ou transversales selon les cas. La matrice des complaisances est obtenue par l'inversion

$$[C]^{-1} = [S] \qquad (23)$$

Les résultats obtenus sont les suivants

$$[S_{ij}] = 10^{-10} \begin{bmatrix} 1,1 & -1,046 & -1,313 & 0 & 0 & 0 \\ & 10,46 & -1,367 & 0 & 0 & 0 \\ & & 5,405 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 23,72 & 0 & 0 \\ & & & & 6,414 & 0 \\ & & & & & 9,354 \end{bmatrix} M^2/N$$

Les modules techniques sont reportés dans le tableau n°1.

Ces valeurs sont comparables (compte tenu de la variabilité du bois) aux valeurs publiées par d'autres auteurs et notamment par KOLLMANN [7], BUCUR [8] et OHTA [9].

	Résultats expérimentaux	Résultats de la Bibliographie KOLLMANN [7]	BUCUR [8]	OTHA [9]
E_L	90,75	140,10	91,60	125,00
E_R	18,50	22,80	18,51	13,50
E_T	9,56	11,60	10,37	6,00
G_{LR}	15,59		14,42	
G_{LT}	10,69		10,10	
G_{TR}	4,21		3,67	
LT	0,85	0,52	0,90	0,50
TL	0,10	0,04	0,10	
LR	1,15	0,45	1,24	0,40
RL	0,24	0,07	0,25	
TR	0,14	0,36	0,14	
RT	0,25	0,71	0,26	0,65

TABLEAU 1
Modules Techniques du Hêtre

5 - METHODES EXPERIMENTALES UTILISEES

Afin de réaliser des expériences de fendage permettant une interprétation théorique, nous avons utilisé des éprouvettes DCB en hêtre dont le sens de prélèvement était TL ce qui signifie que la fissure est dans le plan RL, la sollicitation dans la direction T et que la fissure va se propager dans la direction L qui est celle du fil du bois. Les dimensions géométriques de ces éprouvettes sont reportées sur la figure 4.

L'opération de fendage est réalisée en enfonçant un coin dans l'éprouvette préalablement entaillée. Le coin est enfoncé à l'aide d'une machine de traction avec une vitesse de déplacement de la traverse très lente (1 mm/min). L'enfoncement du coin est immédiatement arrêté dès l'amorçage et ainsi la fissure se déplace dans une éprouvette DCB dont l'ouverture de l'entaille est maintenue constante.

Au cours de l'essai sont enregistrées les 3 grandeurs suivantes :

* l'ouverture de l'entaille w_o
* l'évolution de la charge au cours du temps P(t)
* la longueur de fissure en fonction du temps a(t)

L'ouverture de l'entaille est mesurée à l'aide d'un capteur de déplacement fixé de part et d'autre de l'entaille à l'aide de deux encoches.

La charge est mesurée à l'aide d'un anneau dynamométrique et corrigée pour tenir compte du frottement. Celui-ci est minimisé par insertion de deux feuilles de Téflon entre les lèvres de l'entaille et le coin.

La force d'ouverture F est reliée à la charge enregistrée par la relation (24)

$$F = \frac{P}{2\ tg(\alpha/2 + \beta)} \qquad (24)$$

Dans cette formule, α est l'angle du coin (30°) et β = arc tg μ avec μ le coefficient de frottement. Celui-ci a été déterminé expérimentalement et nous avons trouvé une valeur de 0,05 selon une procédure décrite dans [10].

L'enregistrement de la charge se fait à l'aide d'un oscilloscope numérique. Celui-ci est déclenché par la propagation de la fissure. Pour cela, un ruban peint à la laque d'argent est inséré sur le trajet de la fissure et, dans ce ruban, on fait passer un courant d'intensité 0,5 Ampères. La rupture du circuit provoque une brusque variation de tension utilisée pour déclencher l'oscilloscope. Un exemple d'enregistrement est reporté sur la figure 5.

On remarquera que la chute de charge à partir de la valeur critique P_c est pratiquement une fonction linéaire du temps jusqu'au point A. Il a pu être précisé grâce à la mesure de l'évolution de la longueur de fissure avec le temps que le point A correspondait à l'arrêt de la propagation. Ensuite, apparaissent des oscillations de la charge liées à la présence d'onde de décharge issues de la pointe de la fissure et se réfléchissant sur les bords libres de l'éprouvette. Le temps de propagation t_c est obtenu à partir de la construction géométrique représentée sur la figure 5.

La vitesse de fissuration est obtenue à l'aide de jauges de fissuration commerciales de grandes dimensions et collées sur une des faces de l'éprouvette.

Une encoche en forme de large V est positionnée juste au fond de l'entaille comme l'indique la figure 6. Ces jauges sont suffisamment longues (10 mm) pour contenir toute la longueur de propagation de la fissure.

Les jauges sont alimentées avec un courant d'intensité constante (I = 0,5 A) et on recueille aux bornes prévues à cet effet, les variations de tension consécutives à la variation de résistance qui apparaît lorsque la jauge est coupée par la fissure qui se propage.

Cette variation de tension est enregistrée simultanément à la charge sur le même oscilloscope numérique qui possède deux voies. Un exemple d'enregistrement de cette chute de tension est visible sur la figure 7.

Cette variation de tension est elle aussi pratiquement linéaire durant 70 à 80 % du temps de la propagation t_c. Celui-ci est défini à partir d'une simple construction géométrique. La variation de tension étant proportionnelle à la longueur coupée de la jauge, l'étalonnage de celle-ci s'effectue simplement en mesurant la longueur initiale de l'entaille a_o et la longueur finale de la fissure a_f. On peut ainsi calculer a en fonction du temps et la vitesse moyenne de propagation de la fissure $\dot{a}$ est définie par

$$\dot{a} = \frac{a}{t_c} \qquad (25)$$

6 - RESULTATS EXPERIMENTAUX

Les trois quantités, charge P, longueur de fissure a et vitesse de fissuration $\dot{a}$ permettent de calculer les grandeurs suivantes :

* le facteur d'intensité de contrainte statique à tout instant de la propagation K_1^{stat}
* le facteur d'intensité de contrainte dynamique $K_1(\dot{a})$
* le facteur d'intensité de contrainte à l'arrêt K_{1a}
* le facteur d'intensité de contrainte équivalent pour l'entaille de départ K_1^i.

Chaque résultat d'essai est présenté sous la forme d'un diagramme K_1^{stat}/K_{1c} et $K_1(\dot{a})/K_{1c}$ en fonction de la longueur de fissure a.

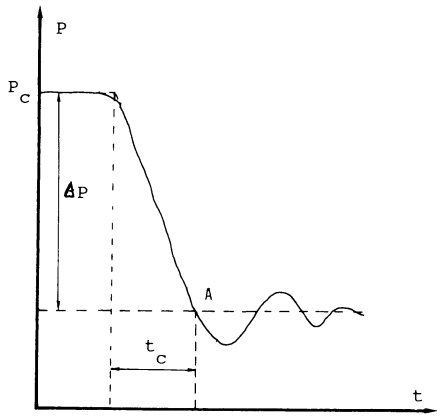


Figure 7. Variation de la charge mesurée en fonction du temps.

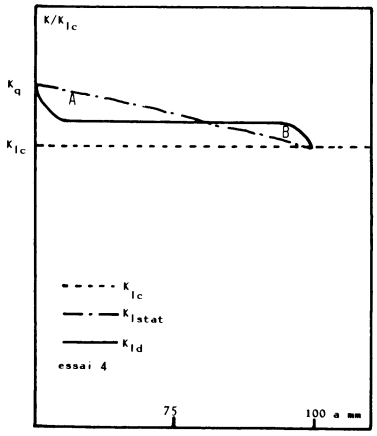


Figure 8. Diagramme donnant l'évolution de K_{Id} et de K_{Istat} en fonction de la longueur de fissure.

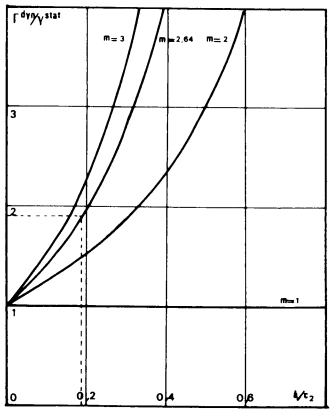


Figure 9. Diagramme montrant l'évolution de la ténacité en fonction de la vitesse de la fissure.

La normalisation par rapport à la ténacité K_{1c} statique est utile pour la représentation. Sur chaque diagramme le point d'arrêt est précisé.

Le calcul du facteur d'intensité de contrainte statique est réalisé en considérant l'éprouvette DCB comme constituée de deux poutres encastrées sur fondations élastiques. Il a été montré par DUCHANOIS [11] que cette hypothèse donnait des résultats pas trop éloignés des valeurs expérimentales de la complaisance.

En utilisant ces hypothèses, le taux d'énergie disponible critique est alors égal à :

$$G_{1c} = \frac{4P_C^2}{E_L b^2 h} \left\{ 3\left[\frac{a}{h} + \frac{1}{\lambda h}\right]^2 + 0{,}3\,\frac{E_L}{E_T} \right\} . \; 1{,}38 \qquad (26)$$

b est l'épaisseur de l'éprouvette DCB et

$$\frac{1}{\lambda h} = 0{,}64 \left(\frac{E_L}{E_T}\right)^{0{,}25} \qquad (27)$$

Le facteur d'intensité de contrainte statique critique est ensuite calculé à partir de la relation (28)

$$K_{1c}^{stat} = \sqrt{\frac{G_{1c}}{S^*}} \qquad (28)$$

S* est une "souplesse" complexe obéissant à la formule

$$S^* = \left[\frac{S_{11}\,S_{22}}{2}\right]^{1/2} \left[\left(\frac{S_{22}}{S_{11}}\right)^{1/2} + \left(\frac{2S_{12} + S_{66}}{2S_{11}}\right)\right]^{1/2} \qquad (29)$$

Dans notre cas S* vaut 6,05 . 10^{-10} m^2/N

Le facteur d'intensité de contrainte dynamique est calculé à l'aide de la relation (30)

$$K_1(\dot{a}) = K_1^{stat} \,.\, k_1(\dot{a})$$

avec $$k_1(\dot{a}) = \left(1 - \frac{\dot{a}^2}{c_2^2}\right)^{1/4} \qquad (30)$$

Le facteur d'intensité de contrainte à l'arrêt K_{1a} est calculé à partir de la longueur de fissure finale a_f, la charge à l'arrêt étant relevée sur les courbes charges déplacement au point A en utilisant la formule quasi-statique (28).

Les résultats d'une série de 8 expériences sont reportés dans le tableau n°2.

On pourra remarquer à l'examen de ce tableau que le pseudo-facteur d'intensité de contrainte à l'amorçage K_1^i est supérieur d'environ 20 % au facteur d'intensité de contrainte critique K_{1c} mesuré sur éprouvette déjà fissurée par la méthode de la complaisance. Des résultats obtenus au Laboratoire [11] donnaient une valeur moyenne pour le hêtre de K_{1c} = 0,91 MPa$\sqrt{m}$ pour le sens de prélèvement TL. Cette augmentation s'explique par le fait que l'acuité de l'entaille mécanique est plus faible que celle de la fissure, ce qui conduit à des charges de ruptures plus élevées, à longueur de fissure identique.

La vitesse moyenne de propagation en régime permanent $\dot{a}_{rp}$ est de 224 m/s soit environ 19 % de la célérité des ondes transversales (c_2 = 1163 m/s) dans le hêtre. Cette vitesse est relativement lente mais nous a permis fort heureusement de réaliser des enregistrements de qualité.

N°	P_c N	t_c µs	a_f mm	$2w_o$ mm	$\dot{a}$ m/s	K_1^i MPa$\sqrt{m}$	K_{1d} MPa$\sqrt{m}$	n(32)	n'(34)	$K_{1c}^{(33)}$	m
1	1189	230	107	0,37	248	1,07	1,19	1,54	4,58	0,86	2,50
3	1169	204	90	0,36	196	1,05	1,16	1,41	3,24	0,88	2,61
4	1234	214	99	0,39	229	1,11	1,26	1,50	3,92	0,91	2,61
5	984	173	86	0,35	208	0,88	1,13	1,44	2,96	0,73	3,40
6	1156	176	92	0,34	239	1,04	1,09	1,53	3,39	0,84	2,23
9	1320	206	98	0,40	233	1,19	1,29	1,50	3,84	0,97	2,41
10	1424	231	106	0,49	242	1,28	1,57	1,53	4,49	1,03	2,98
13	1255	207	91	0,39	198	1,13	1,26	1,41	3,31	0,95	2,64
Moyenne	1216	205	96	0,39	224	1,09	1,24	1,48	3,72	0,90	2,67
Ecart-type	129	22	8	0,05	21	0,12	0,15	0,05	0,59	0,09	0,36

TABLEAU 2

D'après les travaux de FREUND [5], le rapport K_1^i/k_{1c} mesure le taux d'émoussement et le paramètre d'émoussement n est donné par la relation (31)

$$\sqrt{n} = \frac{K_{1*}^i}{K_{1c}} \tag{31}$$

FREUND a en outre montré que

$$n = \frac{1 + \dot{a}_{rp}/c_2}{1 - \dot{a}_{rp}/c_2} \tag{32}$$

Nous avons vérifié cette relation en calculant le facteur d'intensité de contrainte critique ou ténacité K_{1c} du bois à partir de $\dot{a}_{rp}$ et de K_{1*}^i

$$K_{1c}^{(33)} = \frac{K_1^i}{\sqrt{\frac{1 + \dot{a}_{rp}/c_2}{1 - \dot{a}_{rp}/c_2}}} \tag{33}$$

La valeur de la ténacité $K_{1c}^{(33)}$ ainsi calculée (0,90 MPa$\sqrt{m}$) est très proche de la valeur mesurée K_{1c} = 0,91 MPa$\sqrt{m}$ [11].

L'évolution du facteur d'intensité de contrainte statique K_1^{stat} et du facteur d'intensité de contrainte dynamique au cours de la progression de la fissure a été reporté sur des diagrammes $K_1^{stat}/K_{1c} = f(a)$ et $K_{1d}/K_{1c} = f(a)$.

La normalisation de ces paramètres par rapport à la ténacité K_{1c} facilite l'interprétation.

Afin de rendre compte de la réalité physique, il n'a pas été pris en compte les différences qui peuvent apparaître du fait de la variabilité du bois et des erreurs sur la formulation de la complaisance entre K_1^{stat} et $K_{1d}(\dot{a} = 0)$ de sorte que les deux courbes partent du même point K_1^i. La décroissance de la courbe "statique" est plus régulière que la courbe représentative de l'évolution du facteur d'intensité de contrainte dynamique (figure 8). Celle-ci présente un long plateau pour lequel la valeur de K_{1d} est constante. Les deux aires comprises entre ces deux courbes n'ont pas souvent une superficie égale, bien que théoriquement l'énergie cinétique libérée par la fissure qui se propage doive être récupérée par la fissure au fur et à mesure de son avancement et que l'énergie libérée et l'énergie récupérée soient proportionnelles aux aires A et B . L'amortissement des ondes dans le bois, matériau propice à cet effet, en est vraisemblablement la cause.

Le facteur d'intensité de contrainte à l'arrêt est pratiquement identique à la ténacité K_{1c} ce qui tendrait à confirmer, du moins pour le bois, la théorie de CROSLEY et RIPLING [12] pour qui $K_{1a} \sim K_{1c}$.

La longueur totale de propagation $\Delta a = (a_f - a_o)$ est aussi un indice de la quantité d'énergie élastique excédentaire par rapport à l'énergie nécessaire pour amorcer simplement la fissure. Traduit en terme de facteur d'intensité de contrainte et en utilisant la théorie de FREUND :

$$\frac{a_f}{a_o} = \frac{K_1^i}{K_{1c}} = \sqrt{n'} \tag{34}$$

où n' est encore égal au paramètre d'émoussement.

Nous constatons que le rapport n' (valeur moyenne 3,72) est plus élevé que le rapport n (valeur moyenne 1,48), ce qui conduit à une longueur finale deux fois plus grande que celle prévue par la théorie de FREUND.

Cette théorie est basée sur le fait que les ondes de décharge créées par la fissure lors de l'amorçage de la fissure rencontrent la pointe de celle-ci après réflection sur la face arrière. Cette théorie suppose une vitesse de propagation constante de la fissure, ce qui est notre cas, les deux transitoires ayant des effets qui peuvent se compenser. Enfin, le trajet des ondes peut être plus complexe que celui proposé par FREUND.

Il est apparu intéressant de regarder l'évolution de l'énergie surfacique de rupture Γ en fonction de la vitesse de propagation $\dot{a}$ normalisée à la célérité des ondes de cisaillement $\dot{a}/c_2$.

Cette énergie surfacique est fonction du rapport $\dot{a}/c_2$ selon la relation

$$\Gamma = \Gamma(o) \quad (1 + \dot{a}/c_2) \; / \; (1 - \dot{a}/c_2)^{m} \tag{35}$$

où

$$m = 1 + \frac{\log K_{Id}^2 - \log K_{Ic}^2}{\log n} \tag{36}$$

La valeur moyenne de m ainsi obtenue est 2,67.

L'évolution de Γ en fonction de la vitesse de propagation de la fissure est une fonction fortement croissante comme l'indique la figure 9. Cette évolution est conforme aux théories habituellement avancées, aux valeurs de m habituellement proposées.

7 - CONCLUSIONS

Les théories habituelles de la propagation dynamique des fissures peuvent être transposées aux matériaux orthotropes très aisément. L'orthotropie conduit à une simplification des solutions.

Le facteur de correction de la ténacité dépendant de la vitesse prend alors la forme

$$k_1(\dot{a}) = \left[1 - \left(\frac{\dot{a}}{c_2} \right)^2 \right]^{1/4}$$

Expérimentalement, on constate en outre qu'un régime stable de propagation de la fissure s'établit très rapidement et ce pendant une fraction du temps de propagation très importante.

Ce fait justifie l'utilisation des théories de FREUND et de WILLIAMS.

En outre, la décroissance de la charge est une simple fonction linéaire du temps.

Le facteur d'intensité de contrainte à l'arrêt a été trouvé équivalent au facteur d'intensité de contrainte critique K_{Ic}.

BIBLIOGRAPHIE

1 FREUND, L.J.B.
J. of Mech. Physics of Solids 20, 129-152 (1972)

2 BROBERG, K.B.
Akiv für Fysik 18, 152-192 (1960)

3 NILSSON, F.
International Journal of Fracture 8, 403-411 (1972)

4 KALTHOFF, J.F., BEINERT, J. and WINKLER S.
ASTM STP 627, 161-176 (1977)

5 FREUND, L.B.
J. Mech. Phys. of Solids 25, 69-79 (1977)

6 KOUSIOUNELOS, P.N. and WILLIAMS J.H.
International Journal of Fracture 20, 47-63 (1982)

7 KOLLMANN, F.F.P. and COTE W.A.
Principles of Wood Science and Technology, Vol. 1, Springer Verlag (New-York) (1968)

8 BUCUR, V.
Communication personnelle

9 OHTA, M.
Proceedings of Annual Conference of Japan Wood Society (1969)

10 ALLAILI, A.
Rapport de D.E.A. METZ (1984)

11 DUCHANOIS, G.
Thèse Université de METZ (1984)

12 CROSLEY, P.B. and RIPLING E.J.
Journal of Basic Engineering, Transactions, ASME serie D, 91, 525-534 (1969)

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 543-560

Problèmes rhéologiques dans la modélisation du séchage d'un bois résineux

Rheological problems in models of softwood drying

J.-C. RAZAFINDRAKOTO, Maître-Assistant Associé
G. VALENTIN, Maître-Assistant

Laboratoire de Génie Civil, (U A 867 du CNRS)
IUT A de Bordeaux, 33405 Talence Cedex

RESUME

Une opération de séchage se traduit, au niveau du matériau, par les actions conjuguées de trois mécanismes fondamentaux qui évoluent avec le temps : le transfert de chaleur, l'évacuation (mouvement) d'humidité et la déformation. La modélisation du séchage doit tenir compte des effets de couplages, ce que la thermodynamique et les lois de conservations classiques des milieux continus ne peuvent pas rendre compte totalement, à l'heure actuelle. Cette difficulté est multipliée, dans le cas du bois, par sa complexité structurale (hétérogénéîté, anisotropie).

On se propose, dans cet exposé, de décrire les tendances actuelles sur la modélisation du séchage des résineux et de faire le point sur les problèmes rhéologiques soulevés dans les différentes approches.

ABSTRACT

At the scale of the material, a drying process involves simultaneous actions of three basic mechanics which are fonctions of time : heat transfert, movement of moisture and deformation. The modeling of the drying process must take into account the coupling effects, which the thermodynamics and the classical balance laws of continuous media cannot account at the present time. That difficulty is increased in the case of wood, by its structural complexity (heterogeneîty, anisotropy).

The aim of this paper is to describe the present trends of the softwood drying modeling and to have an overview of the rheological problems pointed out in the most of the studies.

1 - INTRODUCTION

La particularité structurale du bois d'être un matériau naturellement hygroscopique l'expose, lors d'un processus de séchage, à des modifications de ses caractéristiques physiques et par voie de conséquence de son comportement hygro-thermo-mécanique.

Une opération de séchage artificiel consomme de l'énergie et du temps. Elle est souvent délicate, particulièrement dans le cas des feuillus denses. Un optimum économique est atteint lorsque le processus utilisé résulte d'un compromis entre la productivité (profit) et la qualité du bois final (durée de séchage).

Les expériences menées jusqu'alors ont toujours montré que les défauts tels que les fissures, la rupture des fibres, le gondolement, ..., sont dûs à un processus mal conduit. Ainsi, pour répondre aux exigences économiques et physico-mécaniques, il apparaît essentiel de développer un modèle représentatif de l'évolution respective des divers paramètres fondamentaux du séchage.

D'une manière générale, le séchage implique l'action plus ou moins conjointe de trois mécanismes physiques fondamentaux : le transfert thermique, le mouvement d'humidité et la déformation.

Les premiers modèles théoriques qui ont été utilisés pour décrire le processus de séchage se fondaient uniquement sur les phénomènes de transfert de chaleur et de masse répondant aux lois de FOURIER et de FICK |17|. Modifiées principalement par PHILIP et DE VRIES (en 1957) |14|, LUIKOV (en 1975) |11| et WHITAKER (en 1977) |21|, ces modélisations étaient enfin établies dans une forme faisant intervenir le couplage entre ces deux phénomènes.

Une hypothèse limitative lie ces diverses modélisations : la composante solide (la matrice) est supposée non déformable. Cependant, les premiers travaux portant sur la déformabilité du matériau bois remontaient déjà vers les années 1920 avec JENKIN et CARRINGTON (cités dans |2|). L'importance relative du rôle de l'humidité et de la température sur le comportement mécanique du bois a été abordée expérimentalement dès cette époque. Les modèles théoriques qui s'en suivaient étaient principalement basés sur le caractère orthotrope du matériau bois dans le domaine élastique plastique et visco élastique |2| mais sans aucune référence particulière au séchage.

L'important travail expérimental effectué par Mc MILLEN en 1958 permettait une meilleure compréhension de l'évolution de l'état de contrainte dans le bois et mettait en relief pour la première fois le phénomène d'"inversion" de contrainte ("stress reversal") au cours du séchage.

Cet aspect des choses a suscité de nouvelles orientations quant aux modélisations du comportement du bois en prenant en compte la composante anélastique de la déformation. Les travaux fondamentaux orientés dans cette direction sont, à notre connaissance, ceux de LESSE et KINGSTON |10|, ASHWORTH |1|, KAWAI, NAKATO et SADOH |7|, RANTA-MAUNUS |15| et THOMAS et al |12, 19, 20|. Les deux premiers auteurs étudient le problème couplé diffusion (sinon linéaire) de masse et comportement élasto-plastique. Par contre, KAWAI et al et RANTA-MAUNUS se basent sur une loi de comportement visco-élastique orthotrope. THOMAS et al utilisent le modèle de LUIKOV|11| à pression totale constante pour les phénomènes de transfert de chaleur et d'humidité et adoptent une modélisation élasto-visco-plastique orthotrope. Le dénominateur commun de ces travaux réside dans le fait que la prise en compte de la déformation due à la rétractabilité est obtenue par analogie avec la déformation d'origine thermique. Qualitativement les résultats obtenus étaient en accord avec les observations expérimentales.

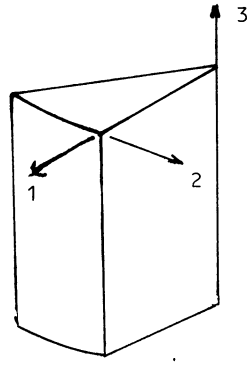
Après quelques rappels consacrés à la structure anatomique du bois nécessaires pour l'assimilation de ce matériau à un milieu continu, l'essentiel de notre exposé portera sur l'analyse du comportement des résineux au cours du séchage dans le contexte d'une théorie hygro-thermo-mécanique par l'intermédiaire des modèles phénoménologiques existant. Trois points seront successivement développés, concernant :

- les relations anatomie-hétérogénéité et anisotropie,
- l'analyse des mécanismes fondamentaux en présence,
- les lois d'évolutions ou les relations constitutives de chaque mécanisme.

2 - RELATIONS : STRUCTURE - HETEROGENEITE ET ANISOTROPIE

Le bois, constituant principal du corps d'un arbre, se présente sous la forme d'un tronc conique. Une coupe transversale permet de découvrir le bois de coeur composé de cellules mortes et l'aubier à l'intérieur desquels se distinguent nettement les accroissements annuels ou cernes composés chacun de bois de printemps (ou initial) interne et le bois d'été (ou final) externe.

Abstraction faite de la conexité du tronc d'arbre et de l'excentricité éventuelle des cernes, on associe, d'une manière classique, le repérage suivant :



1 : direction radiale

2 : direction tangentielle

3 : direction axiale (suivant l'axe du tronc).

Figure 1 : Définition du repère local

Microscopiquement, le bois est constitué d'une agglomération de cellules ligneuses groupées de la même manière pour une essence donnée. Cette structure définit un plan d'organisation appelé plan ligneux qui permet d'identifier chaque espèce.

Pour un bois résineux, ce plan ligneux est essentiellement constitué de cellules verticales appelées fibres ou "trachéïdes" et de rayons ligneux orientés radialement. Ces trachéïdes servent à la fois de tissus de soutien et de tissus de conduction. Elles sont munies de ponctuations caractéristiques (aréolées) qui les font communiquer les unes aux autres. En coupant les trachéïdes, on peut noter la présence des canaux résinifères orientés longitudinalement qui sont les éléments secréteurs de résines.

Cette description sommaire du bois suffit à révéler la complexité de ce matériau et nous conduit à poser des hypothèses simplificatrices sur l'hétérogénéïté et l'anisotropie de son caractère délimitant ainsi le domaine d'admissibilité des modèles envisagés par la suite.

L'hétérogénéïté est sans doute le plus contraignant. D'abord, macroscopiquement, ceci se conçoit avec la différence entre le coeur et l'aubier, le bois initial et le bois final, les cernes de croissance, ensuite microscopiquement, vu l'architecture de la paroi cellulaire des différentes couches et enfin des grandes variations qu'il y a entre échantillons même s'ils sont pris dans le même arbre. Ecore oublie-t-on les singularités telles que les noeuds et les irrégularités des fibres. Néanmoins il est illusoire de fonder un modèle unique basé sur de telles complexités du moins dans l'état actuel des connaissances sur la question. Un processus d'assimilation du bois à un matériau fictif homogène serait plus souhaitable quoique les travaux effectués dans cette direction restent fort rares |21| et le modèle obtenu présente des termes d'écart, par rapport au comportement moyen, qu'il est difficile de caractériser à priori. Aussi, utilise-t-on une hypothèse pragmatique qui consiste à supposer un échantillon de bois comme "globalement homogène" tant que la largeur des cernes annuelles reste petite devant les autres dimensions de l'échantillon.

Ensuite, comme le montre sa structure grossière, le bois présente un caractère anisotrope. Toutefois, les propriétés de symétrie naturelle de sa géométrie lui confère usuellement la particularité d'être un matériau orthotrope tel que les vecteurs de base sont considérés comme les directions principales d'orthotropie.

3 - LES MECANISMES EN PRESENCE

Le processus de séchage se traduit, au niveau du matériau, par un mouvement d'humidité qui lui est plus ou moins liée. Ce mouvement est la conséquence des gradients d'humidité et de température.

A l'état vert, le fluide est essentiellement constitué d'eau libre occupant les vides naturels et d'eau liée adsorbée par la matière cellulosique. Le point de saturation des fibres (P.S.F.) est atteint lorsqu'il ne reste plus d'eau libre. L'évacuation de l'eau liée se traduit par un phénomène de retrait.

De fait, trois phénomènes couplés entrent en jeu lors du séchage du bois :

i) - le transfert thermique,
ii) - le mouvement d'humidité
iii) - la déformation du matériau bois.

Le problème de modélisation de tels phénomènes est d'un abord mal aisé pour le bois par rapport à d'autres matériaux poreux hygroscopiques. Cette difficulté est surtout liée à la complexité du mécanisme de mouvement d'humidité et notamment à l'impossibilité d'identifier le point de saturation des fibres.

En effet, lorsqu'on sèche le bois, l'eau libre s'évapore le premier à la surface du matériau. Ensuite, l'eau liée commence à s'évacuer des pores. Elle s'évapore d'autant plus profondément dans le matériau que l'eau libre contenue dans les vides cellulaires s'évacue plus rapidement. Certains points sont alors encore imprégnés d'eau libre alors que d'autres au point de saturation des fibres et que quelques uns sont déjà au dessous de ce point. Ainsi, pour une essence donnée, la plage d'humidité autour du P.S.F. est plus ou moins importante.

Cette situation rend difficile une quelconque modélisation du bois étant entendu que ce dernier se comporte différemment au-dessus et en dessous de ce seuil (P.S.F.). Mécaniquement, l'évacuation de l'eau libre des vides intersticiels ne s'accompagne pas de variation dimensionnelle du bois, alors qu'une fois le seuil du P.S.F. dépassé, le phénomène de rétractabilité apparaît.

Un autre point non moins important mais le plus préoccupant lors de la modélisation rhéologique du processus de séchage est celui de l'interaction entre les phénomènes de transfert et la déformabilité du bois. Si la description mathématique du couplage thermomécanique est bien établie, on peut dire que le problème hygromécanique est fondamentalement méconnu ou très peu développé. Si développement il y a, les considérations utilisées sont souvent calquées sur le processus thermomécanique mais sans assise thermodynamique. Cependant, bien que le parallèle température-humidité soit séduisant, il faut noter que la température est effectivement un paramètre thermo-dynamique intervenant dans tout raisonnement énergétique alors qu'il n'en est pas de l'humidité. En outre, la prise en compte des actions mutuelles entre les paramètres de transfert et la déformation n'a presque pas été sujet à des investigations profondes. Les développements souvent adoptés dans la littérature |7, 9, 12, 19, 20| n'en font intervenir qu'au niveau de la formulation de la loi de comportement. L'influence réciproque des contraintes internes sur les évolutions respectives de la température et du taux d'humidité est généralement supposée négligeable.

A notre connaissance, les seuls travaux faisant état de l'interdépendance entre le phénomène de diffusion et la déformation sont ceux de KONOBEEVSKII (cité dans |5|) et ceux de BARKAS |2|.

En se basant sur la thermodynamique des processus avec changement de phases, KONOBEEVSKII a développé une théorie rendant compte de l'influence des contraintes internes sur le phénomène de diffusion.

Il aboutit à une équation unidimensionnelle de la forme :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D^c \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} - D^\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_1^2}$$

où c est la concentration de la substance diffusante, ε la déformation mesurée suivant la direction x_1 , D^c le coefficient de diffusion due au gradient de concentration et D^ε le coefficient de diffusion due à un gradient de déformation. Cette relation a été étendue ensuite aux cas des milieux anisotropes et prit la forme :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D^c_{ij} \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \, \partial x_j} - D^\varepsilon_{ijkl} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \, \partial x_j}$$

où D^ε_{ijkl} est un tenseur du 4e ordre des modules de diffusion due au gradient de déformation et D^c_{ij} un tenseur du second ordre des modules de diffusion due au gradient de concentration. En utilisant l'hypothèse de partition de déformation (en H.P.P.) il écrivit que :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{meca}_{ij} + \varepsilon^c_{ij}$$

où $\varepsilon^{meca}_{ij} = S_{ijkl} \ \sigma_{kl}$, S_{ijkl} = tenseur des souplesses élastiques

$\varepsilon^c_{ij} = \omega_{ij}(c - c_o)$ où c_o est la concentration initiale et ω_{ij} un tenseur du second ordre dépendant de la microstructure du matériau.

La modélisation de BARKAS repose sur l'assimilation du bois à un gel élastique hyproscopique et conduit à une description quantitative des effets mecano-sorptifs en se basant sur les équations de PORTER relatives au phénomène osmotique |2|. Cette théorie a permis de montrer principalement que le taux d'humidité et le volume spécifique dépendent non seulement de la pression de vapeur et de l'humidité mais aussi de la pression externe et des contraintes internes (cf. Figure 2).

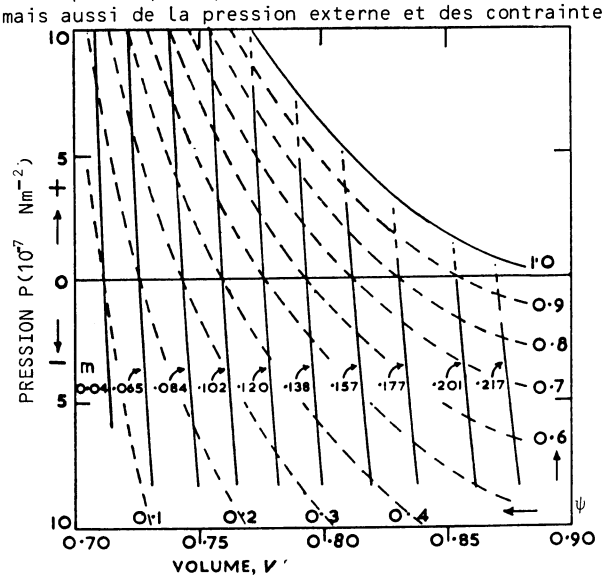


Figure 2 : Diagramme (P,V,m,ψ) pour le Sitka Spruce d'après BARKAS |2|

A pression de vapeur donnée, une contrainte de compression diminue le taux d'humidité d'équilibre, par contre une contrainte de traction l'augmente. Une campagne d'expériences menées par SIMPSON (cité dans |1|) sur du chêne rouge a confirmé qualitativement les résultats de BARKAS.

Cette théorie a été reprise, développée et mise en oeuvre par LESSE et KINGSTON |10|.

4 - MODELISATION DU PROCESSUS DE SECHAGE

La modélisation mathématique du processus de séchage telle qu'elle est envisagée actuellement repose sur le découplage instantané du transfert de chaleur et de masse d'humidité de la distribution du champ des contraintes internes du matériau. D'une manière générale, le champ des déformations induites par les potentiels thermiques et massiques est introduit dans une loi de comportement classique en tant que déformations initiales. L'influence réciproque de la distribution du champ des contraintes sur le flux thermique et le mouvement d'humidité est supposée négligeable ou est souvent ignorée dans la mise en équation.

4.1 - Découplage thermo-mécanique

Cette hypothèse a toujours été implicitement admise dans le cadre du séchage du bois. Cependant aucune étude fondamentale ni expérimentale sérieuse, à ce sujet, n'a été entreprise, à notre connaissance.

Les arguments avancés restent souvent empiriques.

En se basant sur l'équation de la thermoelasticité classique des milieux homogènes et isotropes :

$$\rho c \dot{T} - \lambda \Delta T = - 3 K \alpha T_o \dot{\varepsilon}_{kk}$$

ASHWORTH |1| a montré pour le pin (Pinus Radiata) dont les caractéristiques thermomécaniques sont :

$$\rho = 400 \text{ kg m}^{-3} \quad ; c = 1113 \text{ J. kg}^{-1} \text{ °K}^{-1}$$

$$\alpha = 4.10^{-5} \text{ °K}^{-1} \quad ; T_o = 293 \text{ °K}$$

$$K = 35.10^{8} \text{ Nm}^{-2}$$

que la vitesse des déformations demeure inférieure à celle de la température, en supposant le séchage comme un processus adiabatique ($\dot{T} \simeq 100\ \dot{\varepsilon}_{kk}$). Il en conclut que le champ de température n'est pas influencé par la déformation du milieu.

4.2 - Découplage hygro-mécanique

Le problème des effets hygro-mécaniques est moins bien connu que le précédent. Le peu de travaux relatifs à ce sujet semble témoigner de la complexité de ce domaine. Les études expérimentales sont rares et mal maîtrisées et les quelques informations recueillies ne sont pas toujours unanimes voire contradictoires. En définissant un coefficient de couplage hypothétique noté : $\delta_\sigma = (\frac{\partial m}{\partial \sigma})_\sigma$ mesurant l'interaction taux d'humidité m sur la contrainte σ et en s'appuyant sur la théorie du gel hygroscopique de BARKAS |2|, ASWORTH |1| a calculé δ_σ pour le pin et pour des taux d'humidité allant jusqu'à la limite du domaine hygroscopique. Nous reportons dans le tableau 1 ci-dessous les résultats obtenus.

m	ψ	δ_σ m^2N^{-1}	σ Nm^{-2}	$100\Delta m$
0.04	0.12	$0.45 . 10^{-8}$	$7.15 . 10^{6}$	0.033
0.08	0.35	$1.21 . 10^{-8}$	$6.06 . 10^{6}$	0.074
0.12	0.67	$3.22 . 10^{-8}$	$5.08 . 10^{6}$	0.164
0.16	0.84	$9.11 . 10^{-8}$	$4.21 . 10^{6}$	0.384
0.20	0.94	$2.30 . 10^{-7}$	$3.52 . 10^{6}$	0.813
0.24	0.98	$6.15 . 10^{-7}$	$1.96 . 10^{6}$	1.204

Tableau 1 - valeurs du coefficient de couplage δ_σ hygro-mécanique.

Les calculs ont été effectués pour des valeurs de la contrainte σ égales aux résistances limites du bois correspondantes aux différents taux d'humidité m. Les résultats obtenus conduisent à l'hypothèse de l'indépendance du mouvement d'humidité vis-à-vis des contraintes internes.

4.3 - Description mathématique des phénomènes de transfert lors du séchage

La description mathématique des transferts de chaleur et d'humidité s'inspire directement des méthodes classiques de la mécanique des milieux continus : expressions locales de l'équation de bilan pour la masse, l'énergie et la quantité de mouvement.

La fermeture du système d'équations obtenu s'effectue grâce à la connaissance des lois complémentaires de transfert, des équations d'équilibre et d'état des différentes phases fluides et de certaines relations phénoménologiques [3].

La modélisation est généralement établie dans le cadre des hypothèses suivantes :

- pas de réaction chimique entre le matériau et l'humidité ;
- équilibre thermodynamique local entre les phases au sein du continuum ;
- pression totale de la phase gazeuse uniforme et constante au sein du matériau ;
- température $t \in]\,0°C\ ,\ 100\ °C\,[$;
- dissipation et effets d'inertie négligeables dans les écoulements (vitesse des fluides faible) ;
- transfert par rayonnement négligeable.

En suivant les références [3], [11], le système d'équations qui est le plus fréquemment utilisé s'explicite comme suit :

$$C_q \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \left[K_q \nabla T + K_\varepsilon \nabla m \right]$$

$$C_m \cdot \frac{\partial m}{\partial t} = \nabla \cdot \left[K_\delta \nabla T + K_m \nabla m \right]$$

avec

$$C_q = \rho_o c_q \quad ; \quad C_m = \rho_o c_m$$

$$K_q = \lambda + \varepsilon a_m L \delta \rho_o \quad ; \quad K_\varepsilon = \varepsilon a_m L \rho_o$$

$$K_\delta = \rho_o \delta a_m \quad ; \quad K_m = \rho_o a_m$$

où ρ_o désigne la masse volumique du matériau anhydre, c la chaleur spécifique, λ la conductivité thermique, a_m la diffusivité massique, $L = L_v + L'$, L_v la chaleur latente de vaporisation, L' la chaleur différentielle de sorption ($L' = 0$ en dehors du domaine hygroscopique), ε le taux de changement de phase et δ le coefficient de thermomigration.

A ces équations sont associées des conditions initiales et des conditions aux limites qui traduisent des bilans surfaciques globaux [3].

4.4 - Lois de comportement du bois

Le comportement du bois est très complexe. La courbe conventionnelle (Figure 3) rendant compte de son comportement lors de sollicitations uniaxiales (à T et m données) révèle que ce matériau se comporte différemment en traction et en compression. Cette difficulté est, dans le cas du séchage, multipliée par les variations de ses propriétés mécaniques avec la température et le taux d'humidité.

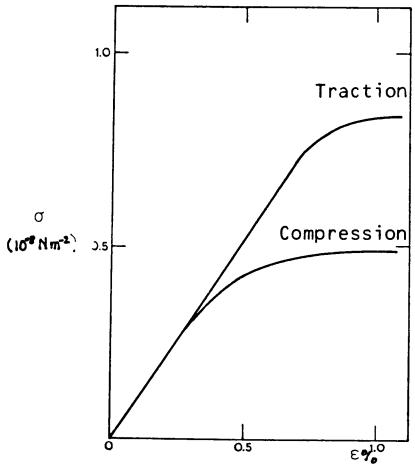


Figure 3 : Courbes (schematique) σ - ε en Traction/Compression

Le tableau 2 illustre les différences des modules trouvés en traction et en compression sur le pin maritime |4|, |9|, tandis que les figures 4 et 5 suivantes, montrent respectivement la variation du module d'YOUNG E_{22} en fonction de la température et de l'humidité |1| et les variations des modules élastiques du Sitka Spruce en fonction du taux d'humidité à température normale |2|.

Modules (en MPa) (Pin Maritime) -	D'ALMEIDA |4|	LAHNA |9|
E_{11}	530 (Traction)	2130 (compression)
E_{22}	950 (-)	1340 (-)
E_{33}	17440 (-)	16310 (-)
G_{23}	1400 (cisaillement)	720 (-)
G_{13}	1340 (-)	2360 (- -
%m	12 %	11,3 %

Tableau 2 : Variations des modules élastiques en Traction/Compression

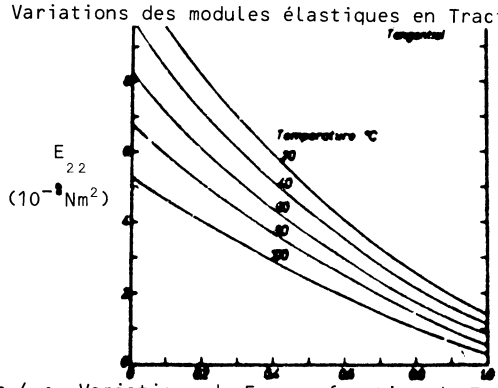


Figure 4 : Variations de E_{22} en fonction de T et de m

(d'après ASHWORTH |1|)

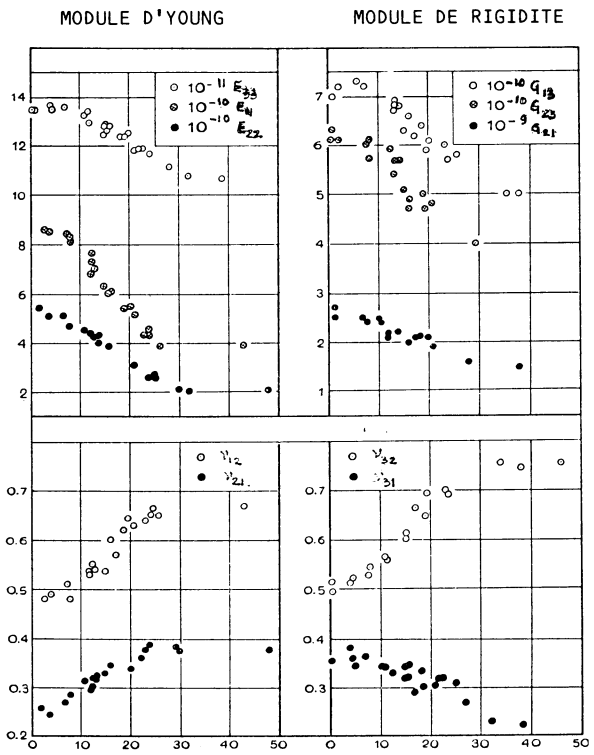


Figure 5 : Variations des modules élastiques en fonction de m (T donnée).
(Extrait de BARKAS |2|)

Eu égard à la diversité et au caractère évolutif des paramètres qui influent sur le comportement global du bois, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices sont, généralement, à la base des modèles élaborés :

i) - on suppose que, dans le domaine linéaire, le bois se comporte de la même manière en traction et en compression (cas de la figure 3) ;

ii) - on suppose que la déformation du matériau est indépendante des gradients de température et d'humidité ce qui permet d'assimiler le bois à un matériau hygro-thermo-rhéologiquement simple. Cette hypothèse est purement conventionnelle et est seulement calquée sur le processus thermo-mécanique, elle ne sied sur aucune base thermodynamique rigoureuse ;

iii) - le comportement est dépendant du temps tel que la déformation totale due aux effets mécaniques ε_{ij}^{mec} se décompose en une composante instantanée réversible ε_{ij}^{e} et une composante anélastique irréversible ε_{ij}^{an} ;

iv) - on admet la similitude des effets thermiques et hydriques et à la superposition de ces derniers :

$$\varepsilon_{ij}^{T} = \alpha\delta_{ij}(T - T_o) \quad ; \quad \varepsilon_{ij}^{m} = \beta_{ij}\,(m - m_o)$$

où T_o et m_o sont respectivement la température et le taux d'humidité dans une configuration de référence. La relation linéaire liant les composantes ε_{ij}^{m} et le taux d'humidité m présuppose la linéarité de la courbe de retrait de base, situation qui est valable pour $m < m_{PSF}$, autrement $\varepsilon_{ij}^{m} = \beta_{ij}\,(m)$.

Ainsi, en utilisant l'hypothèse de la partition des déformations (en H.P.P), il vient :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{mec}_{ij} + \delta^{T}_{ij} + \varepsilon^{m}_{ij}$$

avec $\varepsilon^{mec}_{ij} = \Phi_{ijkl}(\sigma_{kl}, \dot{\varepsilon}_{kl}, \dot{\sigma}_{kl}, \ldots)$

Le choix de Φ le plus fréquent correspond aux modèles de comportement suivants :
a) - elasto-plastique |1| , |10| ;
b) - visco-élastique |7| , |15| ;
c) - elasto-viscoplastique |12| , |19| , |20|.

4.4.1 - Modèle élastique

Ce type de comportement a été le plus envisagé et a donné lieu à diverses modélisations : celle de BARKAS avec le gel élastique et le modèle classique basé sur la symétrie d'orthotropie cylindrique du bois |2|, |6|, |16|. La technique d'assimilation du bois à un composite multicouche de TAUCHER et HSU |18| semble apporter un élément de réponse au problème de l'hétérogénéité du bois. Néanmoins les résultats obtenus avec ce type de modèle ne restituent qu'en partie les observations expérimentales du comportement du bois en cours de séchage |20|.

4.4.2 - Modèle élasto-plastique

Le modèle de comportement élasto-plastique a été mis en oeuvre dans le contexte du séchage des résineux par ASHWORTH |1| et LESSE et KINGSTON |10|. Les relations constitutives s'écrivent :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = S_{ijkl}\,\dot{\sigma}_{kl} + \lambda\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \dot{\varepsilon}^{T}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{m}_{ij} \quad , \quad \lambda \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \dot{F} = F(\sigma_{ij}, \sigma_{y}, T, m) \ .$$

La difficulté essentielle soulevée par ce modèle est la détermination de la fonction seuil F et du seuil plastique σ_y car ces derniers dépendent de la température et de l'humidité. Les informations à ce sujet, aussi bien expérimentales que théoriques sont pratiquement inexistantes. Les considérations évoquées dans la littérature restent généralement très philosophiques et confuses, et l'approche utilisée s'apparente finalement à celle de l'élasticité non linéaire en utilisant des lois unidimensionnelles.

4.4.3 - Modèle visco-élastique

Le caractère visco-élastique du bois a été reconnu depuis fort longtemps. Des études d'identification expérimentale des modules complexes ont été entreprises et suivies au Laboratoire de Génie Civil de l'Université de Bordeaux I |4|, |8|.

Dans le cadre d'une modélisation théorique, tenant compte de l'humidité, l'artifice utilisé s'apparente à celui mis en oeuvre en thermovisco-élasticité. Le résultat le plus significatif est celui de RANTA-MAUNUS |15|.

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_o^t S_{ijkl}(t-\tau)\, d\sigma_{kl} + \int_o^t K_{ijkl}(t-\tau)\,\sigma_{kl}(\tau) + L_{ijkl}(t-\tau)\,|\sigma_{kl}(t)-\sigma_{kl}(\tau)|$$

$$\times\,|\,m(t) - m(\tau)\,|\}\, dm(\tau)$$

Néanmoins, cette loi n'a été sujette, à notre connaissance, à aucune identification en vue de son application au séchage du bois.

4.4.4 - Modèle élasto-visco-plastique

Pour tenir compte du paramètre temps nécessaire à la description de l'évolution des composantes anélastiques du tenseur des déformations mécaniques, THOMAS et al |19| , |20| ont développé un modèle numérique basé sur une loi de comportement élasto-visco-plastique du bois. Utilisant le modèle de PERZYNA, la relation constitutive s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = S_{ijkl}\,\dot{\sigma}_{kl} + \langle \psi(F) \rangle \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} + \dot{\varepsilon}^{T}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{m}_{ij} \quad ,$$

où $F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{vp}, T, m)$ désigne la fonction seuil, Ω le potentiel visco-plastique

et $\langle \psi(F) = \begin{cases} 0 & \text{si } F \leqslant 0 \\ \psi(F) & \text{si } F > 0 \end{cases}$

Les hypothèses utilisées par les Auteurs excluent l'effet Baushinger et postulent, comme en plasticité classique, l'indépendance de l'écoulement vis-à-vis de la contrainte hydrostatique. Ils supposent, en outre, le matériau standard -ie- $\Omega \equiv F$.

La symétrie utilisée est celle de l'orthotropie cartésienne du bois, c'est-à-dire négligeant la courbure des cernes.

La difficulté d'une telle approche est liée à la définition du seuil et de la fonction F, tous deux fonctions au moins du taux d'humidité. A cet effet, THOMAS et al se sont inspirés des travaux de HILL sur la généralisation du critère de Von MISES en prenant en compte l'anisotropie. Supposant la fonction seuil quadratique et ce, en prenant en considération les hypothèses ci-dessus, THOMAS et al l'expriment sous la forme :

$$2F = A(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + B(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + C(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + D\sigma_{23}^{\ 2} + E\sigma_{31}^{\ 2} + G\sigma_{12}^{2}$$

où A,B,C,D,E,G, sont les paramètres caractéristiques de l'état d'anisotropie - fonctions de l'humidité et de la température.

La modélisation complète du séchage a été ensuite mise en oeuvre numériquement à l'aide de la méthode des éléments finis par les Auteurs |19|,|20|.

Pour illustrer les considérations précédentes, nous reproduisons ci-après un exemple d'analyse complète de séchage d'un échantillon dont les dimensions sont données à la figure 6 et la discrétisation en éléments finis d'une section transversale dans le plan (1,2) à la figure 7.

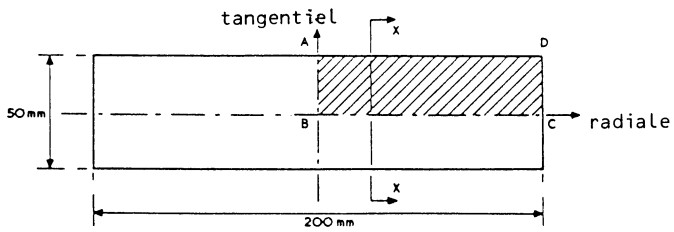


Figure 6 : Dimensions de l'éprouvette

(d'après THOMAS |20|)

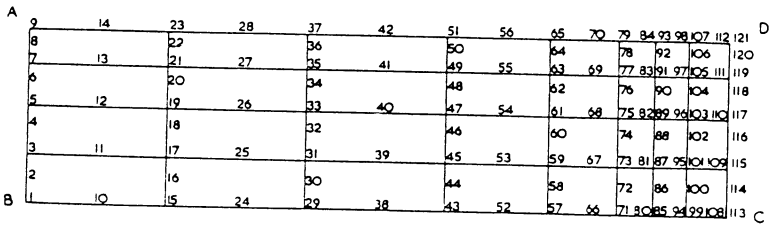


Figure 7 : Discrétisation par éléments finis (d'après THOMAS [20])

Pour les phénomènes de transfert de chaleur et de masse, les caractéristiques thermo-physiques ont été prises constantes tout au long du processus. Les valeurs utilisées sont :

$\rho = 500$ kg m^{-3} ; $L_v = 2.3 \times 10^6$ Jkg^{-1}

$C_q = 1700$ J kg^{-1} $°K^{-1}$; $c_m = 0.003$ $kg.kg^{-1}$ $°M^{-1}$

$K_q = 0.425$ Nm^{-1} $°K^{-1}$; $K_m = 2.9.10^{-9}$ kg m^{-1} s^{-1} $°M^{-1}$

$\delta = 6.7$ $°M$ $°K^{-1}$; $\varepsilon = 0.3$

$T_o = 10°C$; $m_x = 30\ \%\ m_o$

$T_f^o = 60°C$; $m_f = 12\ \%$

$h_q = 24$ W m^{-2} $°K^{-1}$; $h_m = 2.5.\ 10^{-6}$ kg $m^{-2}s^{-1}°M^{-1}$

Par contre les modules mécaniques sont supposés varier linéairement en fonction de l'humidité.

Modules	à 12 % d'humidité	à 30 % d'humidité
E_{11}	$1.27.10^6$ kNm^{-2}	$0.92.10^6$ kNm^{-2}
E_{22}	$0.75.10^6$ kNm^{-2}	$0.55.10^6$ kNm^{-2}
E_{33}	$15.0.10^6$ kNm^{-2}	$12.3.10^6$ kNm^{-2}
ν_{31}	0.41	0.34
ν_{21}	0.35	0.41
ν_{23}	0.025	0.021
σ_{12}	$1.68.10^5$ kNm^{-2}	$1.08.10^5$ kNm^{-2}
σ_{y1}	7260 kNm^{-2}	4200 kNm^{-2}
σ_{y2}	7260 kNm^{-2}	4200 kNm^{-2}
σ_{y3}	78000 kNm^{-2}	45000 kNm^{-2}

Tableau 3 : Modules et seuils en fonctions de l'humidité.

Les composantes du tenseur β_{ij} sont :

$\beta_{11} = 0.00152/\%m/c$
$\beta_{22} = 0.00268/\%m/c$
$\beta_{33} = 0.00012/\%m/c.$

On néglige les déformations d'origine thermique. La figure 8 illustre les variations du potentiel d'humidité en fonction du temps de séchage en différents noeuds du maillage.

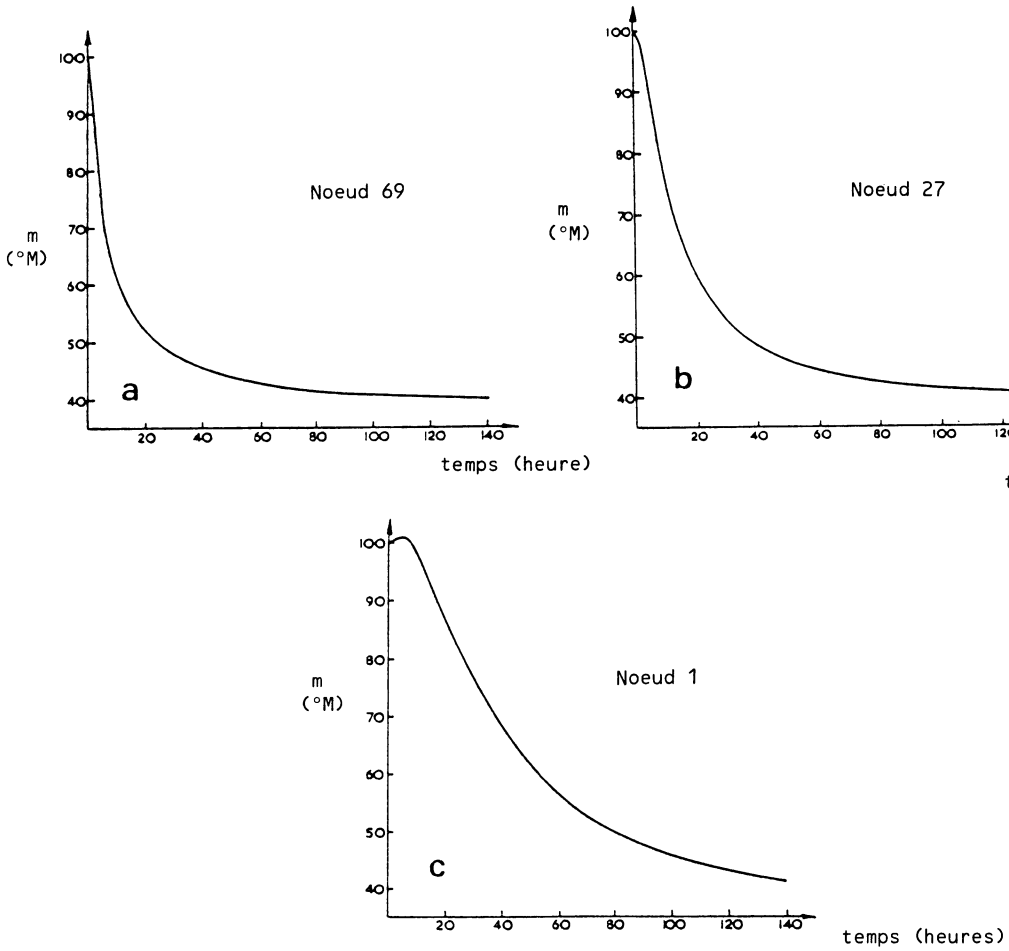


Figure 8 : Variations du potentiel d'humidité en fonction du temps
(d'après THOMAS |20|)

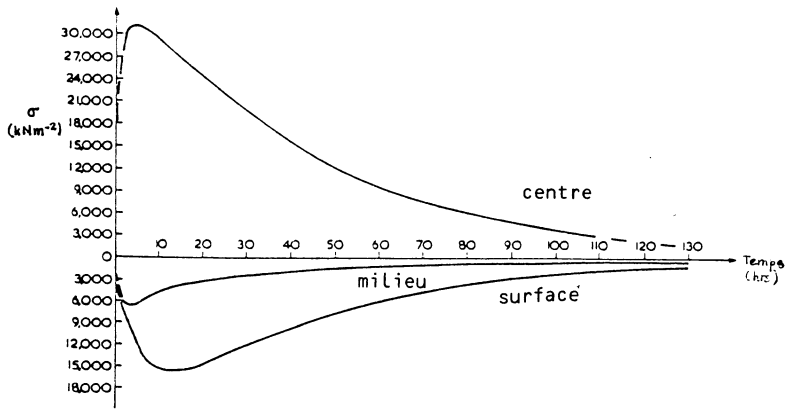


Figure 9 : Analyse élastique orthotrope (d'après THOMAS 20)

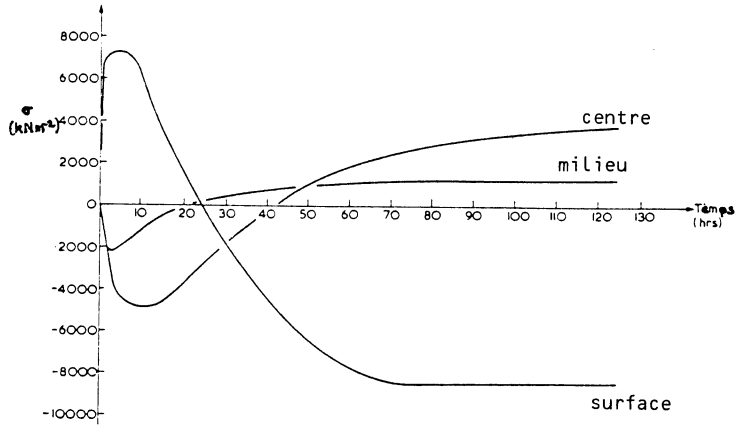


Figure 10 : Analyse élasto-visco-plastique (orthotrope)

Par contre, nous reproduisons à la figure 9 les variations de la contrainte principale maximale sur la section X-X de la figure 6. La figure 10 donne les variations de la contrainte principale maximale en fonction du temps sur la même section mais en utilisant la loi de comportement elasto-visco-plastique.

Les résultats obtenus montrent qualitativement le phénomène d'inversion de contrainte mis en relief expérimentalement par Mc MILLEN [13]. Ce fait est confirmé en examinant la distribution des contraintes dans la section droite à divers moments du séchage (Figure 11).

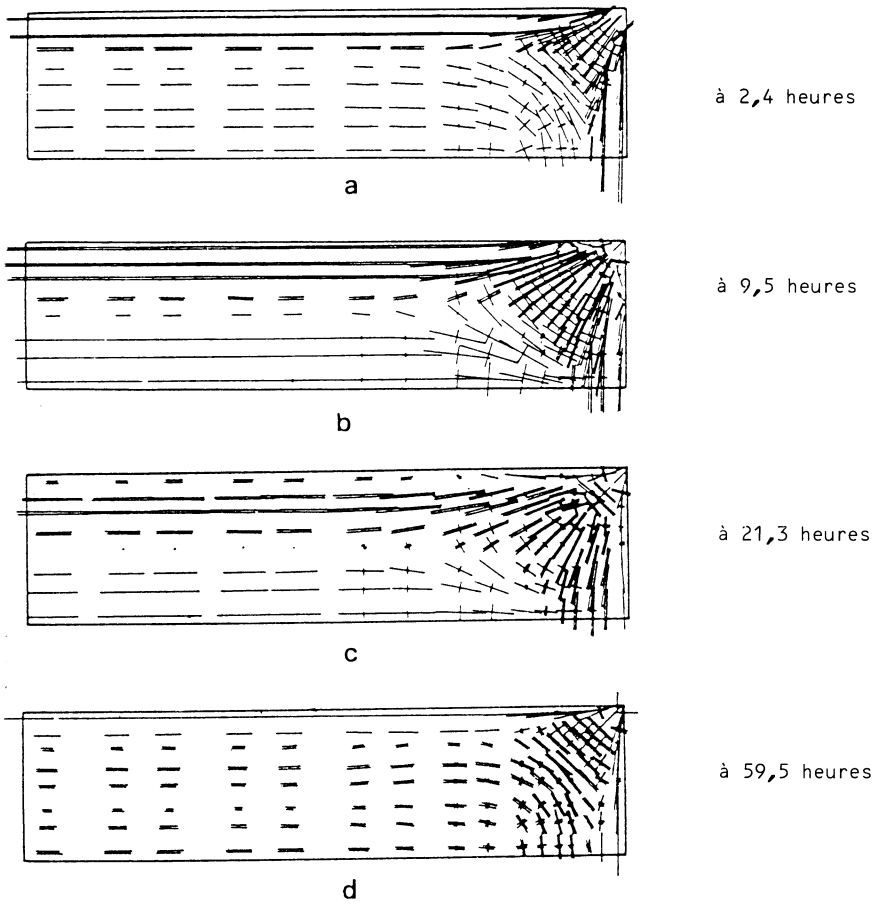


Figure 11 : Distribution des contraintes principales (≠ traction ; - compression)

(d'après THOMAS |20|)

5 - CONCLUSION

Cet exposé n'a pas du tout la prétention d'apporter de solutions nouvelles au problème de modélisation du séchage de bois. Notre objectif est plutôt modeste et vise surtout à mettre en relief tous les problèmes auxquels on doit faire face lors d'une telle entreprise. Soulignons en passant que le problème de l'hétérogénéité du bois constitue à lui seul une étape difficile à franchir. La modélisation des lois d'évolution des phénomènes couplés (chaleur, humidité, déformation) nécessite des études minutieuses des paramètres d'interaction qui doivent être supportées par des analyses fondamentales elles-mêmes assistées de mise en oeuvre expérimentale.

BIBLIOGRAPHIE

|1| . J.C. ASHWORTH - The mathematical simulation of batch-drying of softwood timber. Ph.D.Thesis. Department of Chemical Engineering. Conterbury University. May, 1977.

|2| . W.W. BARKAS and R.F.S. HEARMON - The mechanical properties of wood and their relation to moisture. Part. A. in Mechanical properties of wood and paper. Ed. R. MEREDITH. North. Holl. Publ. Co. Amsterdam, 1953.

|3| . S. BORIES - Analyse des mécanismes fondamentaux de transfert de l'humidité dans les murs. Soc. Française des Thermiciens. Reims, 21 au 23 mai 1979.

|4| . A.G. D'ALMEIDA. Durée de vie en fissuration d'un matériau viscoélastique linéaire orthotrope : le bois. Thèse de Docteur-Ingénieur, n°355, Université de Bordeaux I, 1984.

|5| . I.I. GOL'DENBLAT. Some problems of the mechanics of deformable media. P. Noordhoff.N.V. Grossingen - Holland, 1962.

|6| . N.N. HSU and R.C. TANG. 1 - Internal stresses in wood logs due to anisotropic shrinkage. Wood Science, Vol.7(1), 1974, pp.43-51.
2 - Distorsion and internal stresses in lumber due to anisotropic shrinkage. Wood Science, Vol.7(4), 1975, pp.299-307.

|7| . S. KAWAI, K. NAKATO and T. SADOH. Computation of drying stresses resulting from moisture gradients in wood during drying. II. Numerical calculation. Mokuzai Gakkaishi, Vol25(4), 1979, pp.272-279.

|8| . R. KEYLWERTH. The variation of the temperature of wood during the drying of veneers and sawn wood. Holz Roh. Weckst., vol.10(3), 1952, pp.87-91.

|9| . F. LAHNA. Mécanique de la rupture des matériaux orthotropes : application au bois. Thèse de 3ème cycle, n°1876, Université de Bordeaux I, 1983.

|10| . P.F. LESSE and R.S.T. KINGSTON. Osmotic stress in wood. Part II : On the computation of drying stress in wood. Wood sci. and Tech., vol.6(3), 1972, pp.272-283.

|11| . A.V. LUIKOV. Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary-porous bodies (Review). Int.J.Heat Mass. Transfer., Vol.18, 1975, pp.1-14.

|12| . K. MORGAN, H.R. THOMAS and R.W. LEWIS. Numerical modeling of stress reversal in timber drying. Wood Science, Vol.15(2), 1982, pp.139-149.

|13| . J.M. McMILLEN. Stresses in wood during drying. Forest. Prod. Lab. Rept. n°1652, USDA Forest service, Madison, Wisconsin, 1958.

|14| . J.R. PHILIP and D.A. de VRIES. Moisture movement in porous materials under temperature gradients. Trans. Am. Geoph. Union,Vol.38(2), 1957, pp.222-232.

|15| . A. RANTA-MAUNUS. The viscoelasticity of wood at varying moisture content. Wood Sci. and Techn. Vol.9, 1975, pp.189-205.

|16| . C. SALES - Contribution à l'analyse des contraintes de séchage dans le bois. Thèse de Docteur-Ingénieur. I.N.P.L., 1984.

|17| . T.K.SHERWOOD - The drying of solids I. Ind. and Engng. chem. Vol.21(1) 1q2q, pp.12-16.

|18| . T.R. TAUCHER and N.N.HSU. Shrinkage stresses in wood logs considered as layer, cylindrically orthotropic materials. Wood. Sci. and Tech. Vol.11(1) 1977.

|19| . H.R. THOMAS, R.W. LEWIS and K. MORGAN - An application of the finite element method to the drying of timber. Wood and Fiber. Vol.11(4), 1980, pp.237-243.

|20| . H.R. THOMAS. Numerical analysis of drying induced stresses in timber : an orthotropic model. Mech. of Mat., Vol.2, 1983, pp.249-263.

|21| . S. WHITAKER. Simultaneous heat, mass and momentum transfer in porous media : A theory of drying - Advances in Heat Transfer. Vol.13, 1977, pp : 119-203.

Cette étude a été effectuée dans le cadre de la collaboration menée au sein du Groupe de Travail "Thermomécanique, séchage et amélioration du bois": équipe Processus de séchage de l'UA 873 et équipe Génie Civil de l'UA 867 du CNRS.

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 561-576

Les contraintes résiduelles dues au séchage : leur calcul, leur mesure et les conséquences sur la conduite des séchoirs

Residual stresses induced by drying : mathematical model, measure and consequences on the drying process

C. SALES

Chef de Division

P. BORDONNE
Ingénieur-chercheur
Division Physique et Mécanique
Centre Technique Forestier Tropical
avenue de la Belle-Gabrielle
F 94130 Nogent-sur-Marne

RESUME

Pour comprendre et prédire les contraintes de séchage dans une pièce de bois, il est opportun de tenir compte, entre autres paramètres, de sa position initiale à l'intérieur de la grume, de sa géométrie et des particularités que cela entraîne pour un comportement global. Une approche analytique mène à une simulation numérique qui permet d'apprécier les contraintes qui apparaissent lors d'un séchage non uniforme d'une telle pièce.

La vérification expérimentale, réalisée par une méthode destructive de type découpe en fourche, s'accorde bien pour montrer l'importance du facteur cylindricité dans le matériau.

ABSTRACT

An analytical presentation has been developed to calculate drying stresses for sawn pieces. Care is given to initial position of pieces inside logs because of ring curvatures. In case of non-uniform drying, stresses appear, that can be numerically approached.

The method developed to measure the residual stress level is based on the principle of slice method. Results agree calculations that would allow to improve drying schedules.

- INTRODUCTION - OBJECTIFS

Le comportement du matériau bois est fortement dépendant de son taux d'humidité, fonction des conditions de température et d'humidité du milieu environnant, ainsi que de l'histoire de la pièce.

Les conséquences sur la tenue mécanique, la résistance aux attaques des champignons de pourriture et des insectes de bois vert, la stabilité dimensionnelle des pièces, sont assez bien connues et amènent les industriels à sécher leurs bois avant l'ultime transformation. Le responsable d'un séchoir se trouve confronté à la double nécessité de sécher un lot de pièces rapidement et au meilleur coût. A cette fin, il doit prendre en compte le rendement matière, ce qui implique de diminuer le nombre de pièces rejetées et d'améliorer la qualité en vue de l'utilisation finale.

La persistance d'un gradient d'humidité dans les pièces et/ou la présence d'un champ de contraintes internes, sont principalement à l'origine des difficultés rencontrées.

2 - FORMALISATION DU PROBLEME

Une pièce de bois est un cylindre de section quelconque dont la génératrice est parallèle au fil du bois. Dans la pratique, la section est souvent rectangulaire, mais son orientation est quelconque par rapport à la direction radiale de croissance de l'arbre.

On admet que le matériau est continu et que le taux d'humidité est une fonction continue. La pièce de bois est dans sa configuration de référence lorsque le taux d'humidité en tout point est supérieur à l'humidité de saturation des parois cellulaires H_{PSF}.

On repère alors chaque point par ses coordonnées cylindriques, par analogie à sa position dans une grume idéalisée (*Fig. 1*).

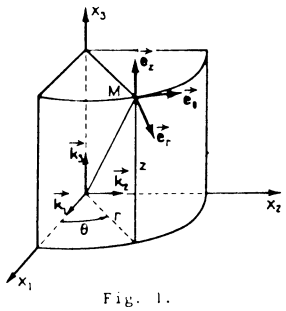


Fig. 1.

Fig. 1 - (k_1, k_2, k_3) *repère lié à la pièce de bois.*
(e_r, e_θ, e_z) *repère lié au matériau.*

2.1. Hypothèses et mise en équation

Physiquement, un processus de séchage conduit la pièce de volume V d'un état $H_0\ (r,\theta,z)$ à l'instant t_0, à un état $H_1\ (r,\theta,z)$ à un instant t_1, tel que,

$$\int_V H_1\ (r,\theta,z)\ dV < \int_V H_0\ (r,\theta,z)\ dV$$

Le matériau n'étant pas affecté lorsque $H\ (r,\theta,z) \geq H_{PSF}$ nous utiliserons la notation $\Delta H = H_1^* - H_0^*$ où H_i^* est définie à partir de la répartition d'humidité à l'instant t_i par

$$H_i^*(r,\theta,z) = H_i\ (r,\theta,z) \text{ si } H_i\ (r,\theta,z) < H_{PSF}$$

et $H_i^*\ (r,\theta,z) = H_{PSF}$ si $H_i\ (r,\theta,z) \geq H_{PSF}$.

On exprimera alors le retrait de la façon suivante :

Soit $\bar{\varepsilon}$ l'état de déformation au point $M\ (r,\theta,z)$, $\bar{\varepsilon}$ s'écrit dans le repère $\overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}$:

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \alpha L\ \Delta H & 0 & 0 \\ 0 & \alpha R\ \Delta H & 0 \\ 0 & 0 & \alpha T\ \Delta H \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Les coefficients de retrait αL, αR et αT, vérifient pour tous les bois la relation d'ordre $\alpha T > \alpha R >> \alpha L$.

Pratiquement, il est impossible de mener un séchage sans qu'il y ait apparition d'un champ de contraintes internes. Si l'on admet que la longueur de la pièce est grande vis à vis de sa section, on fait l'hypothèse que ΔH est indépendant de z. Il est toutefois improbable d'avoir en permanence une variation uniforme dans la section et on considèrera donc que $\Delta H = \Delta H\ (r,\theta)$

Dans ces conditions, il faut perdre l'espoir que le champ $\bar{\varepsilon}$ vérifie les équations de compatibilité. On dira donc que le champ de déformation de séchage est la somme du champ de retrait (1) et d'un champ de déformation complémentaire ε^c soit :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^c + \bar{\varepsilon}_{ij} \qquad (2)$$

La loi de comportement du matériau, qu'on suppose homogène, associe alors à ce champ complémentaire un champ de contraintes résiduelles dues au séchage σ.

Toute variation spatiale non uniforme d'humidité introduit un champ de contraintes internes dues au séchage.

Dans le domaine de déformation considéré, on suppose que le matériau a un comportement viscoélastique linéaire; en outre, on ne tient pas compte de l'influence du taux d'humidité sur ce comportement.

Alors, sous ces hypothèses, on peut prendre pour origine des temps un moment où $\Delta H = 0$, c'est à dire qu'en tout point de la pièce étudiée le taux d'humidité est supérieur à H_{PSF}.

Dans un premier temps, la description, sans effet différé, du phénomène nous amène à la loi de Hooke :

$$\sigma_{kl} = S_{klij}\ \varepsilon^{c}_{ij} \qquad (3)$$

La matrice S des complaisances élastiques prend une forme qu'on peut qualifier d'intrinsèque avec 12 termes non nuls, dont 9 sont indépendants, lorsqu'on décrit les états de contrainte et de déformation en un point dans le repère local (e_z, e_r, e_θ).

Le cas d'un séchage indépendant de la variable z nous conduit à étudier l'approximation d'un champ de déformation plane.

On pose donc :

$$(4)\quad \begin{cases} \varepsilon_r = S_{11}\sigma_r + S_{12}\sigma_\theta + S_{13}\sigma_z + \alpha_R \Delta H \\ \varepsilon_\theta = S_{12}\sigma_r + S_{22}\sigma_\theta + S_{23}\sigma_z + \alpha_T \Delta H \\ 0 = S_{13}\sigma_r + S_{23}\sigma_\theta + S_{33}\sigma_z + \alpha_L \Delta H \\ 2\varepsilon_{r\theta} = S_{66}\sigma_{r\theta} \end{cases}$$

En éliminant σ_z, le système (4) devient en représentation matérielle :

$$(5)\quad \begin{vmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ 2\varepsilon_{r\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{S}_{11} & \overline{S}_{12} & 0 \\ \overline{S}_{12} & \overline{S}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{\alpha}_R \Delta H \\ \overline{\alpha}_T \Delta H \\ 0 \end{vmatrix}$$

La résolution mathématique est menée à partir d'une fonction de contrainte ϕ (fonction d'Airy) vérifiant les conditions de l'équilibre local. On exprime (4) en fonction de ϕ, puis on porte les composantes ε_{ij} dans l'équation de compatibilité écrite en coordonnées polaires pour un état de déformation plane.

$$(6)\quad \begin{cases} \overline{S}_{22}\dfrac{\partial^4\phi}{\partial r^4} + \dfrac{\overline{S}_{11}}{r^4}\dfrac{\partial^4\phi}{\partial\theta^4} + \dfrac{1}{r^2}\left(2\overline{S}_{12} + S_{66}\right)\dfrac{\partial^4\phi}{\partial r^2\partial\theta^2} + 2\dfrac{\overline{S}_{22}}{r}\dfrac{\partial^3\phi}{\partial r^3} \\ -\dfrac{1}{r^3}\left(2\overline{S}_{12} + S_{66}\right)\dfrac{\partial^3\phi}{\partial r\partial\theta^2} - \dfrac{\overline{S}_{11}}{r^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^4}\left(2\overline{S}_{12} + S_{66} + 2\overline{S}_{11}\right)\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \\ +\dfrac{\overline{S}_{11}}{r^3}\dfrac{\partial\phi}{\partial r} = -\overline{\alpha}_T\dfrac{\partial^2\Delta H}{\partial r^2} - \dfrac{\overline{\alpha}_R}{r^2}\dfrac{\partial^2\Delta H}{\partial\theta^2} + \dfrac{1}{r}\left(\overline{\alpha}_R - 2\overline{\alpha}_T\right)\dfrac{\partial\Delta H}{\partial r} \end{cases}$$

Des simulations numériques, utilisant une méthode de résolution par différences finies, ont été réalisées avec les caractéristiques à 12% d'un bois tropical de densité moyenne, le JABOTY (Eperua uncinatum Warm) :

$$\left.\begin{array}{lll} S_{11} = 450 & S_{12} = 287 & S_{66} = 1639 \\ S_{22} = 757 & S_{13} = 39 & \\ S_{33} = 106 & S_{32} = 41 & \end{array}\right\} 10^{-6}Pa^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_T = 0{,}366 \\ \alpha_R = 0{,}165 \\ \alpha_L = 0{,}011 \ (estimé) \end{array}\right\} \%\ /\ \%\ d'humidité$$

Le maillage utilisé est représenté sur la *Fig. 2* ainsi que les deux distributions particulières de ΔH utilisées successivement : $\Delta H = \Delta H(r)$ et $\Delta H = \Delta H(\theta)$. Ces distributions prennent une signification physique lorsqu'on empêche les échanges d'eau sur une partie de la surface latérale de la pièce de bois.

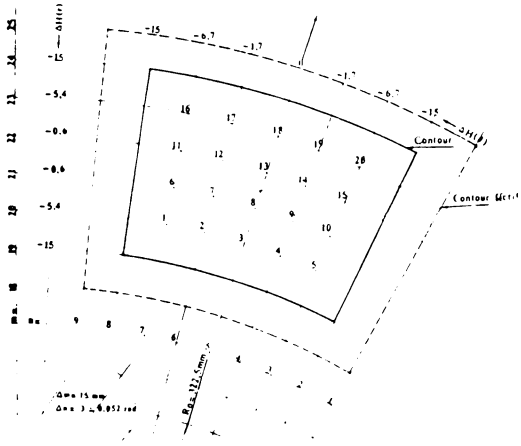


Fig. 2
Définition du maillage utilisé.

2.2. Conséquences pratiques sur le comportement au séchage.

La qualité des résultats obtenus par la méthode des différences finies dépend, pour une grande part, du maillage choisi.

Les composantes σ_r, σ_θ, σ_z, ε_r, ε_θ, sont symétriques par rapport à l'axe de symétrie radiale. Il s'ensuit que la déformation de la pièce au cours du séchage se produit de façon symétrique par rapport a cet axe.

La composante du champ de contraintes parallèle à la direction du gradient prend sur le contour des valeurs du même ordre de grandeur que la composante perpendiculaire. Compte tenu des niveaux de contraintes selon z (du même ordre de grandeur qu'en transversal) les fentes de surface se limitent à des fissures orientées longitudinalement. Ces fentes devraient apparaître préférentiellement :

- Dans la partie médiane des pièces plutôt qu'au voisinage des rives où le niveau de contraintes est plus faible.

- Sur la face la plus orientée tangentiellement (dosse) et ce, d'autant plus aisément qu'il s'agit de la direction d'anisotropie qui présente les caractéristiques mécaniques les plus faibles.

Il ressort également que :

. Les risques de fentes semblent plus importants dans le cas d'un sciage orienté sur dosse que dans celui d'un sciage sur quartier.

. Le mode d'apparition des fissures est à rapprocher d'une rupture en traction simple. Le mode par cisaillement ne devrait pas intervenir.

. Les faces perpendiculaires à la direction du gradient d'humidité conservent leur forme d'origine (*Fig. 5*). Les faces parallèles se déforment, par contre, de façon caractéristique. Les déplacements maxima sont observés au voisinage des angles de la pièce.

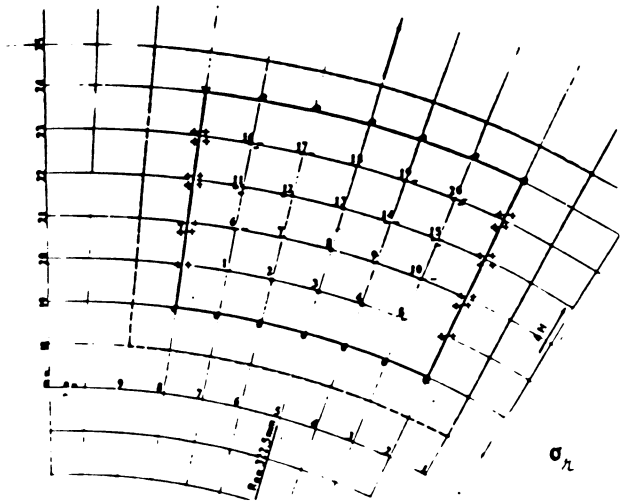
3 - METHODE DE MESURE DES DEFORMATIONS RESULTANT DU RELACHEMENT DES CONTRAINTES DE SECHAGE.

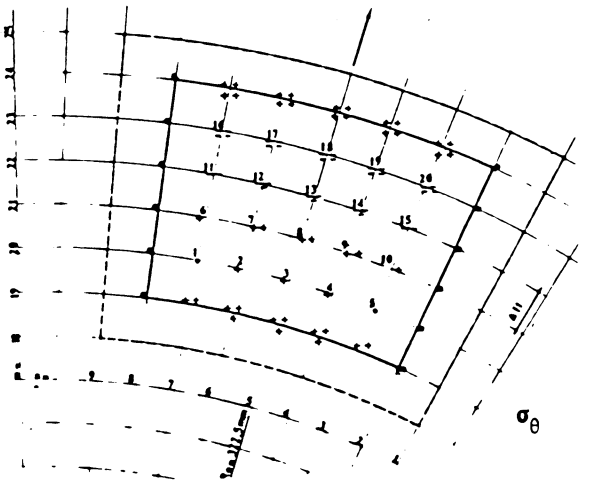
Méthode expérimentale

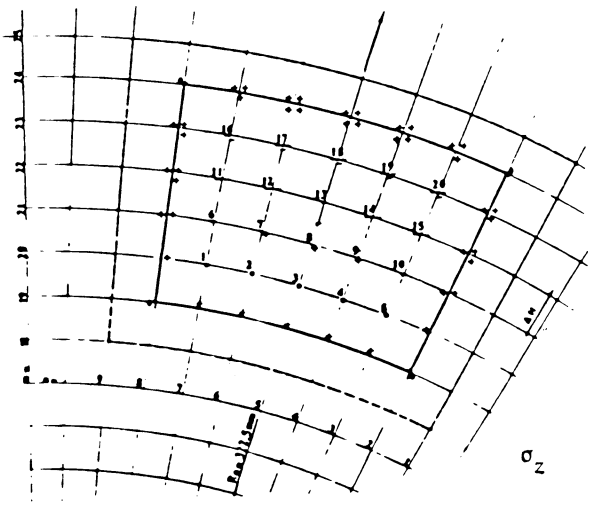
On utilise une méthode destructive basée sur le principe des découpes. D'une pièce avivée, soumise à un processus donné de séchage, on extrait des sections transversales (*Fig. 6*) qui sont transformées en éprouvette dite "en fourche" (*Fig. 7*).

Fig. 3

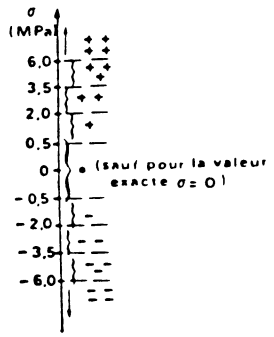
Distribution des composantes du champ de contraintes pour $\Delta T(r)$







Légende

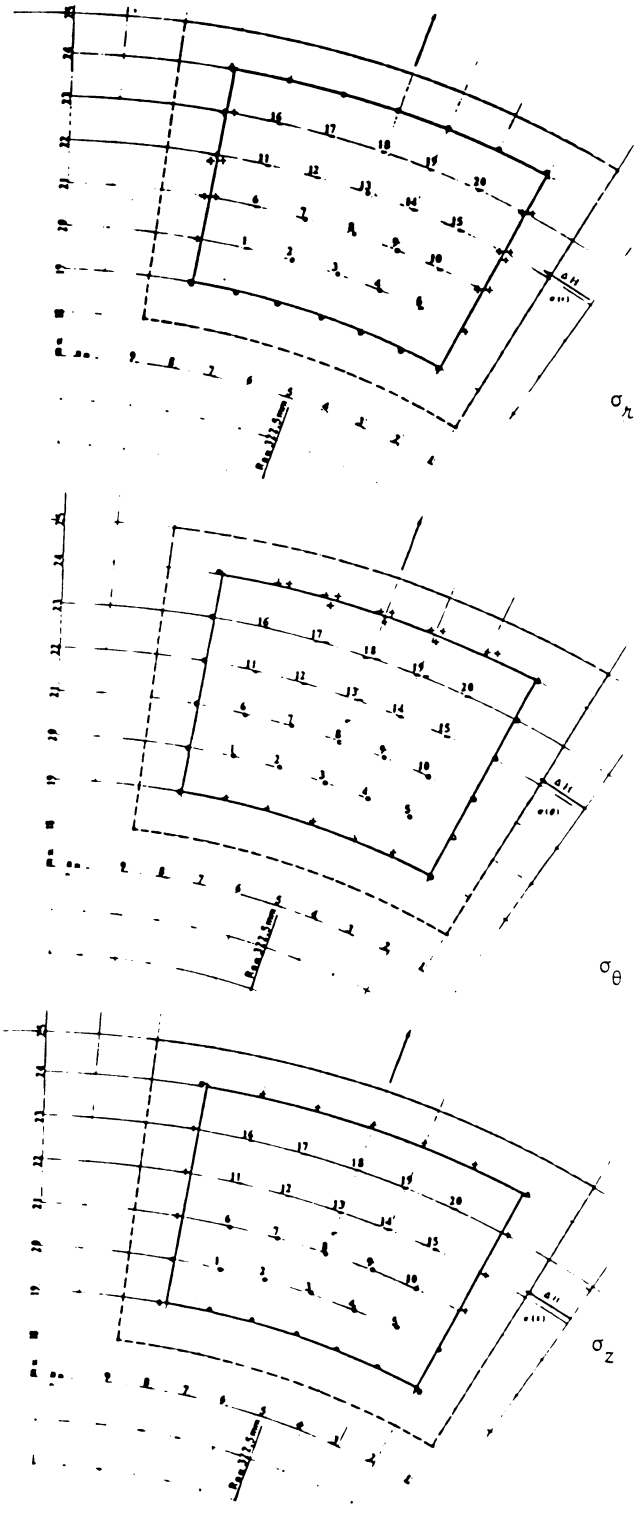


\+ tension

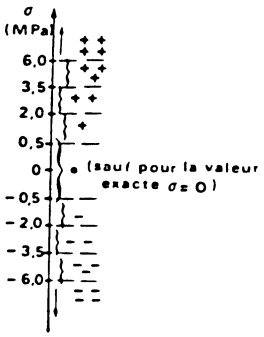
\- compression

Fig. 4

Distribution des comppsantes du champ de contraintes pour ΔH (θ).



Légende



\+ Tension

\- Compression

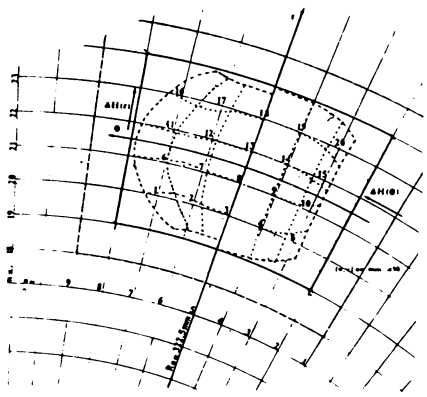


Fig. 5
Représentation des déplacements calculés pour ΔH(A) (n = 5 à 8) et ΔH(B) (n = 1 à 5)

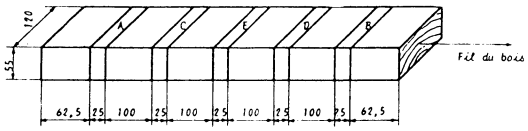


Fig. 6
Echantillonnage

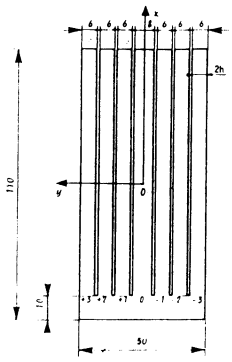


Fig. 7
Découpe en fourche

Selon que les lattes se trouvent soumises à une sollicitation interne ramenée à une situation simulée de tension ou de compression, elles subissent, après découpe, et respectivement, un allongement ou une compression illustré par la *Fig. 8*.

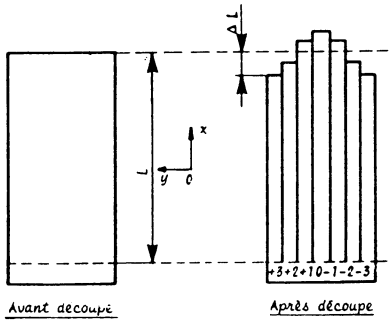


Fig. 8 - Déplacements après découpe et maintien latéral.

Une première information est obtenue par la mesure de l'allongement ou du rétrécissement de chaque latte après découpe. Une deuxième est quantifiée par la mesure de la courbure présentée par chaque latte après découpe (*Fig. 9*).

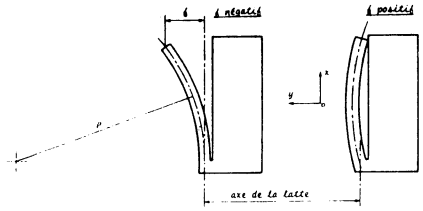


Fig. 9 - Courbure après découpe.

Le matériel d'essai est constitué par des pièces avivées de 3 espèces de bois de Guyane : GRIGNON FRANC (Nom pilote A.T.I.B.T. : Bouro vermelho - Nom scientifique : Ocotea rubra) - GRONFOLO (Nom scientifique : Qualea spp.) - JABOTY (Nom scientifique : Erisma uncinatum). Elles sont prélevées selon diverses orientations (Fig. 10) et protégées sur chant et sur les extrémités par de la feuille d'aluminium collée, afin de se ramener à des distributions d'humidité unidirectionnelle.

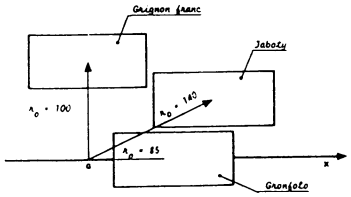


Fig. 10 - Positions des échantillons vues dans le plan transversal.

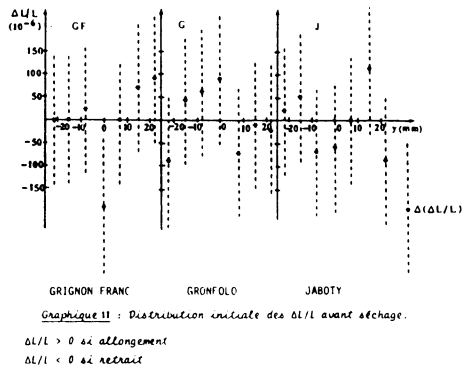
Deux modes de séchage sont retenus pour l'étude :

- Séchage naturel à l'air sous abri.

- Séchage artificiel en étuve dans des conditions constantes de température et d'hygrométrie (T° = 35° - E_H% = 65% - vitesse de circulation de l'air au voisinage de la surface du bois 1m/s).

4 - RESULTATS EXPERIMENTAUX ET DISCUSSION

Une première mesure est systématiquement effectuée avant séchage sur les pièces fraîchement débitées (graphique - Fig. 11). Il ne subsiste pas dans les échantillons étudiés un état de contraintes résiduelles (par exemple du type contraintes de croissance) susceptible de se superposer aux déformations induites ultérieurement par les contraintes de séchage.



Graphique 11 : Distribution initiale des ΔL/L avant séchage.

ΔL/L > 0 si allongement
ΔL/L < 0 si retrait

Fig. 11 - Distribution initiale des ΔL/L avant séchage.

Les déplacements relatifs $\Delta L/L$ mesurés sur une même pièce aux différents stades de séchage sont représentés sur un même graphique (Fig. 12, 13 et 14). Les tangentes à la courbe de distribution des $\Delta L/L(y)$ sont déduites des mesures de courbure. Un $\Delta L/L>0$ a pour origine un état de contraintes de type compression et de type traction dans le cas contraire ($\Delta L/L<0$).

On vérifie l'existence de deux périodes dans la genèse des contraintes, les parties externes sont tendues en début de séchage et les parties internes comprimées; puis il y a inversion de la distribution quand les parties internes atteignent le point de saturation de la fibre et subissent à leur tour le phénomène de retrait.

Toutefois, les distributions $\Delta L/L(y)$ présentent des formes complexes. Dans la plupart des cas, le niveau maximum de déformations dans la partie interne de l'éprouvette ne se rencontre pas au centre ($y = 0$) mais sous forme de deux extrema répartis de façon plus ou moins symétrique par rapport à l'axe Ox ($y = 0$).

Les niveaux de déformations mesurés sont très sensiblement plus élevés pour les pièces séchées artificiellement et plus particulièrement les zones en tension au début du séchage.

D'autres particularités des courbes $\Delta L/L(y)$ sont observables. Elles semblent liées :

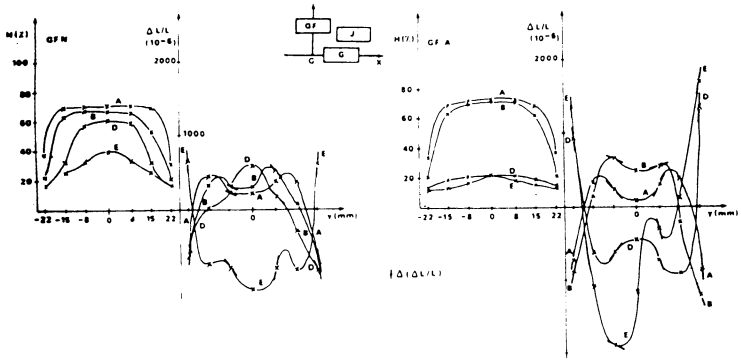
- à des distributions d'humidité non symétriques.
- à l'orientation des pièces (GF orienté sur dosse présente systématiquement sur la face la plus éloignée du coeur des niveaux de $\Delta L/L$ sensiblement plus élevés.

5 - CONCLUSION

Il est intéressant de comparer avec prudence les valeurs calculées et les résultats expérimentaux.

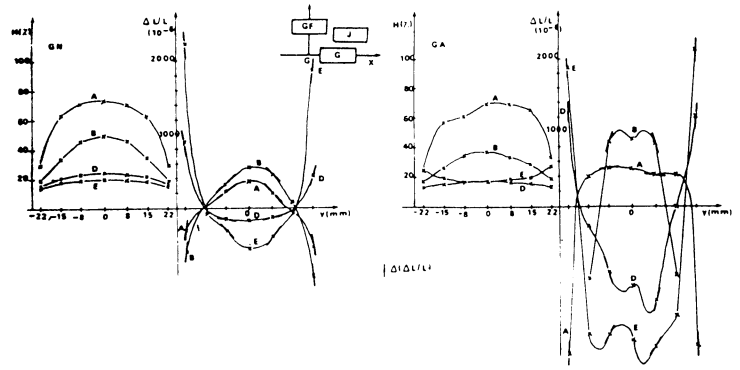
En effet :

- La simulation numérique a été conduite avec une géométrie de section droite (secteur de couronne circulaire) différente des sections rectangulaires.
- Les distributions théoriques de variation de taux d'humidité ne coïncident pas exactement avec les distributions observées expérimentalement.
- Les caractéristiques physiques et mécaniques (complaisances et retraits) utilisées dans la simulation sont celles du JABOTY.



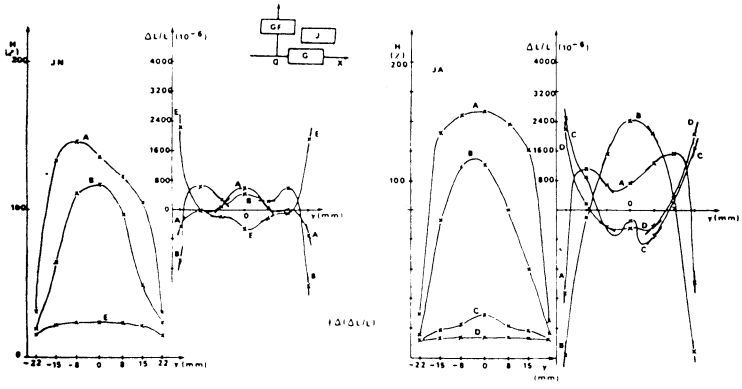
Graphique 12 - Evolution des H(y) et ΔL/L(y) (Séchage du Grianon franc)

ΔL/L > 0 si allongement
ΔL/L < 0 si retrait



Graphique 13 - Evolution des H(y) et ΔL/L(y) (Séchage du Gronfato)

ΔL/L > 0 si allongement
ΔL/L < 0 si retrait



Graphique 14 Evolution des H(y) et ΔL/L(y) (Séchage du Jaboty)

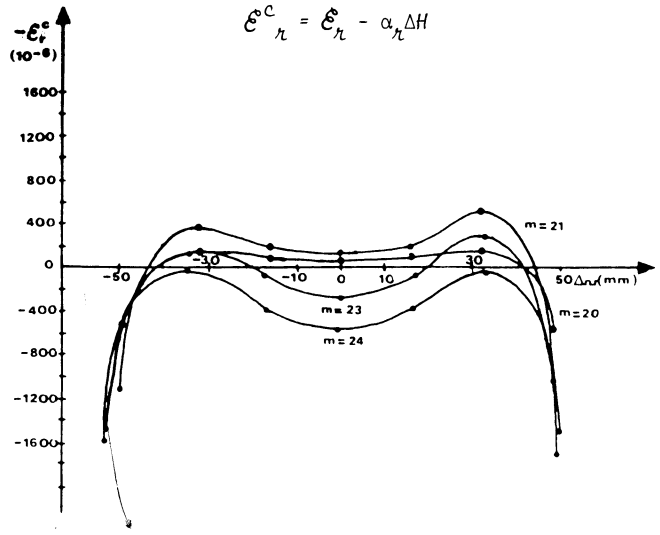
ΔL/L > 0 si allongement
ΔL/L < 0 si retrait

En outre, le modèle mathématique établit les conditions d'apparition du champ de contraintes internes élastiques entre un état initial et un état final. Le processus expérimental intègre toute l'histoire du séchage et la méthode des découpes ne reflète que partiellement la situation réelle dans l'échantillon soumis au séchage. Toutefois, il est possible d'apprécier l'ordre de grandeur $\mathcal{E}^c_r$ à partir des $\Delta L/L(y)$.

La méthode expérimentale donne la composante du champ de déformations perpendiculaire à la direction du gradient d'humidité ($\Delta L/L = \mathcal{E}_x$ pour $\Delta H(y)$ dû au relâchement des contraintes résiduelles subsistant dans l'éprouvette au moment de la découpe. La confrontation de la méthode de calcul avec les résultats expérimentaux est menée à partir des champs de déformations ($\mathcal{E}^c_{ij}$ pour le modèle mathématique et $\Delta L/L$ pour la partie expérimentale). Les déplacements relatifs $\Delta L/L$ s'identifient au signe contraire près à la composante $\mathcal{E}^c_{ij}$ qui se déduit des $\mathcal{E}_{ij}$ donnés par le calcul.

Le graphique 15 rend compte de la distribution des $\mathcal{E}^c_r$ fonction de θ pour la distribution de la forme $\Delta H(\theta)$, dans ce cas :

$$\mathcal{E}^c_r = \mathcal{E}_r - \alpha_r \Delta H$$



Graphique 15 - Distribution des $\mathcal{E}^c_r(\theta)$ pour $\Delta H(\theta)$ à r constant.

Expérimentalement, l'échantillon de GRONFOLO (orientation sur quartier) offre une distribution type d'humidité de la forme $\Delta H(\theta)$ (Graphique 13). En séchage naturel, la forme des distributions expérimentales des $\Delta L/L$ confirme les tendances obtenues par la simulation (double extremum vers le coeur). En séchage artificiel, on observe une analogie de forme plus nettement marquée avec les prévisions du modèle mécanique (Graphique 15). De par leur distribution d'humidité, les courbes expérimentales B sont celles qui s'approchent le plus de la

distribution théorique utilisée dans le calcul. Les niveaux de déformation mesurés à la surface sont, en séchage naturel, inférieurs à ceux du modèle théorique (environ 600µ-déformations contre 1200 en moyenne). En séchage artificiel, ils seraient sensiblement du même ordre de grandeur pour les lates d'ordre +2 et -2 mais étaient vraisemblablement très supérieurs pour les lattes les plus extérieures dans la mesure où celles-ci, fendues en cours de séchage, n'ont pas permis la mesure des $\Delta L/L$.

Si l'on se réfère à l'échantillon de JABOTY dont les constantes techniques moyennes ont été choisies pour servir de base à l'étude théorique, on observe pour les deux modes de séchage des niveaux expérimentaux de déformations légèrement supérieurs (séchage naturel) à très supérieurs (près de 4 fois plus en séchage artificiel) à ceux du graphique 15. Toutefois, la comparaison est dans ce cas rendue très difficile car les distributions d'humidité à très fort gradient obtenues expérimentalement et caractéristiques de l'espèce JABOTY, sont difficilement comparables à la distribution théorique d'humidité introduite dans le calcul.

En conclusion, certaines distributions expérimentales $\Delta L/L(y)$ et calculées ε_x^c sont,dans leur forme, comparables. Elles mettent en évidence une variation complexe du champ de déformations complémentaire associé au champ de contraintes. Ce résultat introduit expérimentalement par la mesure des courbures des lattes et confirmé par la forme des champs de contraintes et de déformations calculés, modifie l'approche traditionnelle de la distribution des contraintes de séchage.

BIBLIOGRAPHIE

GUISCAFRE J. et SALES C.
Le retrait longitudinal des bois tropicaux
Bois et Forets des Tropiques_N 186_Juillet/Aout/1979

GUITARD D.,TCHANGA A.,BREMOND C.
Contribution a l'analyse des contraintes internes dans le bois resultant d'un gradient d'humidite
Ecole Nationale Superieure Polytechnique_Yaounde_1982

HSU N.N. and TANG R.C.
Distortion and internal stresses in lumber due to anisotropic shrinkage
Wood Science 7(298-307)1975

KAUMAN W.G.
Les contraintes au cours du sechage,leurs mesures,comment les eviter?
Les entretiens du bois_Paris/CTB_1982

KOLLMAN F.P. and Cote W.A.Jr
Principles of wood science and technology_I and II
Springer-Verlag_1968

LESSE P.F.
Osmotic stress in wood.PartI:The analogy between thermal and swelling stress
Wood Science and Technology_Vol.6(204-214)1972

LESSE P.F. and KINGSTON R.S.
Osmotic stress in wood.PartII:On the computation of drying stresses in wood
Wood Science and Technology_Vol.6(272_283)1972

LEWIS R.W.,STRADA M. and COMINI G.
Drying induced stresses in porous bodies
International Journal for numerical methods in engineering
Vol.11(1175-1184)1977

MAC MILLEN J.M.
Drying stresses in Red Oak
Forest Product Journal_February 1955

MAC MILLEN J.M.
Stresses in wood during drying
Forest Products Laboratory_US Departement of Agriculture _
Madison_Report N 1652

NAKATO K. and SADOH T.
Computation of drying stresses resulting from moisture gradients in wood during drying_I and II_
Mokuzai Gakkaishi_Vol.25/4_1979

SALES C.
Contribution à l'analyse des contraintes de séchage dans le bois.
Thèse Docteur-Ingénieur - C.T.F.T./I.N.P.L. - Juin 1984.

SALES C.
Le sechage des Bois Tropicaux
Bois et Forets des Tropiques_N 184 et 185_1979

TAKEMURA T.
On the memory effect of wood during drying:Prediction of drying stresses of a board
Mokuzai Gakkaishi_Vol.18(3)1972

TAKEMURA T.
Computer simulation of drying stresses in wood
Journal of the Society of Materials Science Japan_Vol.22(241)1973

YLINEN A. and JUMPPANEN P.
Theory of the shrinkage of wood
Wood Science and Technology_I_(241-252)1967

YOUNG R.L. and NORRIS C.B.
A method of calculating internal stresses in drying wood
Forest Product Journal_N 2133_1958

C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND. Rhéologie des matériaux anisotropes. *Rheology of anisotropic materials* CR 19e Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 577-586

Contribution à l'étude de la fissuration du bois sous l'effet des contraintes de séchage

Contribution to the study of the effect of drying stress on fracture toughness of wood

D. BAJOLET

Université de Metz, Faculté des Sciences
57000 Metz, France

N. SOBUE

Faculté d'Agriculture, Université de Nagoya
464, Japon

G. PLUVINAGE

Université de Metz, Faculté des Sciences
57000 Metz, France

RESUME

A l'état stable pour le prélèvement RT, le bois vert présente un comportement non linéaire. L'utilisation du principe de l'énergie équivalente permet de définir un facteur d'intensité de contrainte critique équivalent grâce à la mécanique linéaire des ruptures.

A l'état instable, on observe une décroissance de la ténacité lorsque l'humidité diminue. Cette évolution est inverse de celle que l'on peut observer à l'état stable. L'étude des influences de la vitesse de sollicitation et des effets mécano-sorptifs ne réussit pas à justifier la différence de niveau de rupture entre les deux états. Par contre, le niveau de rupture sous l'effet du séchage est sensiblement identique à celui enregistré lors des essais de rupture par charge extérieure à l'état instable et à humidité égale. De ce fait, nous suggérons que le processus de rupture est identique pour les deux modes de chargement et que la condition de rupture dépend essentiellement du gradient d'humidité.

Nous proposons un modèle empirique à deux paramètres, qui permet de déterminer la ténacité à l'état instable.

ABSTRACT

At the equilibrium condition of moisture in the TR system, the green wood has a non linear behaviour. The use of the equivalent energy principle allows, with the help of linear fracture mechanics, to define an equivalent critical stress intensity factor.

At the non-equilibrium condition, we can see a decrease of the toughness when the humidity decreases. This change is the opposite to observed at the equilibrium conditions. The study of the strain rate and mechanics-sorptives effects don't explain the difference between the fracture levels. On the other hand, the fracture level of drying stress and fracture level by external stress at non-equilibrium condition are approximately the same for identical moisture content. Because of these observations, we suggest that the fracture process is the same for the two types of loading and fracture condition depends essentially of moisture content gradiation.

The two parameters empirical model that we propose permits the computation of the wood toughness at the non-equilibrium condition of moisture.

1 - INTRODUCTION

Le séchage du bois entraîne souvent l'apparition de déformations, de fentes, ou de gerces dans ce matériau. Ces phénomènes sont préjudiciables à sa commercialisation et à son utilisation. Ces défauts tirent leur origine de l'apparition de contraintes internes lors de l'opération de séchage. Ces contraintes internes de séchage ont fait l'objet de nombreuses études, soit de modélisation de leur champ de distribution [1] [2], soit de détermination expérimentale de leur amplitude [3] [4] [5]. Dans chaque cas, l'étude avait nécessité de se donner une loi de comportement dépendante ou non du facteur temps et de la forme de la distribution de l'humidité dans la pièce de bois au cours du séchage.

L'étude de la fissuration au cours du séchage liée à l'apparition de ces contraintes internes n'a pas encore beaucoup retenu l'attention des chercheurs. Le but de ce travail est d'examiner, à partir de résultats expérimentaux, les méthodes utilisables pour l'étude de ce problème. Pour cela, outre les hypothèses sur la loi de comportement du matériau et la distribution d'humidité, il est nécessaire de se donner un critère de rupture.

II - MATERIAUX ET METHODES

Nous avons choisi pour réaliser nos expériences d'utiliser du hêtre provenant d'un arbre de 40 ans. Le matériau était disponible sous forme de rondins de 30 centimètres de diamètre. La densité anhydre du bois était de 0,72 et l'épaisseur moyenne des cernes annuels de 3,2 mm.

Les éprouvettes d'essais étaient de type SENT (éprouvettes de traction à entaille latérale) et décrites dans la figure 1 ; elles étaient prélevées de façon que le plan R.T soit le plan de l'axe de chargement et de l'axe du défaut.

Le défaut a été introduit par sciage sur une longueur de 3 mm à l'aide d'une fine lame et prolongé à l'aide d'une lame de rasoir jusqu'à 6 mm. Un gabarit a permis une bonne reproductibilité des échantillons. Les extrémités des éprouvettes ont été renforcées par des épaulements collés. L'extrémité des éprouvettes a été percée, permettant un ancrage des échantillons qui autorise une rotation.

Ces échantillons ont été utilisés pour 3 types d'expériences :

* des essais de fissuration sous séchage, échantillon bridé
* des essais de rupture en traction avec un taux d'humidité stabilisé
* des essais de rupture en traction avec un taux d'humidité non stabilisé

Les deux dernières séries d'essais sont destinées à interpréter les essais de fissuration sous séchage et notamment de séparer l'influence du taux d'humidité et du gradient d'humidité sur le critère de fissuration.

II.1 - Essais de fissuration par séchage

Pour réaliser ce type d'expérience, on utilise le phénomène de retrait naturel du bois lorsqu'il sèche. En bridant les extrémités de la pièce, on empêche ce retrait, ce qui provoque l'apparition d'un chargement par contraintes internes.

Pour cela, nous avons utilisé un montage, figure 2, constitué essentiellement d'un bâti rigide 1 , d'une cellule de charge 2 et d'un capteur d'ouverture de fissure 3 . L'échantillon est placé sur le bâti à l'état vert. L'ensemble bâti, éprouvette, capteurs de charge et d'ouverture est placé à l'intérieur d'une enceinte climatisée dont on contrôle la température sèche et l'humidité relative de l'air.

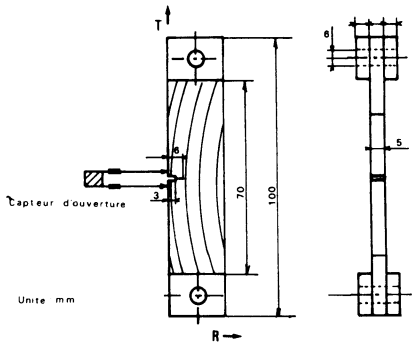


FIGURE 1
Schéma des éprouvettes
S.E.N.T. utilisées

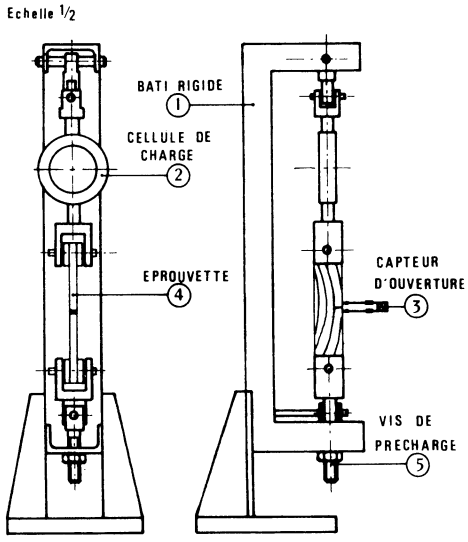


FIGURE 2
Schéma du montage de bridage des éprouvettes pour les essais de rupture par contraintes de séchage

Diverses conditions de séchage ont été étudiées et sont reportées dans le tableau 1.

	1	2	3	4
Température sèche (°C)	20°	20°	20°	20°
Humidité relative de l'air (%)	92	70	55	17
Humidité d'équilibre hygroscopique du bois (%)	23	13,5	10,5	4

TABLEAU I
Différentes conditions utilisées pour les essais de rupture sous contraintes de séchage

Les conditions sont régulées à l'aide d'une circulation d'air dont la vitesse est de 2 m/sec.

La teneur en eau moyenne de l'échantillon diminue jusqu'à atteindre environ 30 %.

On enregistre simultanément, en fonction du temps, l'effort de bridage par l'intermédiaire de la cellule de charge et l'ouverture de la fissure. On enregistre en outre l'évolution de la charge en fonction de cette ouverture de fissure.

II.2 - Essais de rupture par chargement extérieur

Les éprouvettes identiques à celles utilisées pour les expériences de fissuration par séchage sont sollicitées jusqu'à rupture sur une machine de traction à vitesse de déplacement de la traverse variable. Les essais se déroulent à la température ambiante, sauf indications particulières ; la vitesse de déplacement de la traverse est celle de référence, soit 0,5 mm/mn. Afin de conserver un taux d'humidité constant aux échantillons, ceux-ci sont couverts d'un film plastique transparent et étanche. Durant l'expérience, on enregistre les diagrammes charge-temps, ouverture de la fissure-temps et charge-ouverture de la fissure.

Les essais ont porté sur des échantillons à deux états différents :

* des échantillons à taux d'humidité stabilisé (gradient d'humidité nul)
* des échantillons à taux d'humidité non stabilisé (présence d'un gradient d'humidité au moment de la rupture).

Le taux d'humidité stabilisé est obtenu par un séchage très lent et contrôlé par pesées successives.

Lorsque le taux d'humidité souhaité est atteint, le gradient d'humidité engendré par le séchage est annihilé en recouvrant l'échantillon d'un film hermétique et en laissant la stabilisation s'effectuer pendant 24 heures.

Les échantillons présentant un taux d'humidité non stabilisé ont été obtenus de la façon suivante.

Deux séries d'échantillons de bois à l'état vert ont été placés successivement dans l'enceinte où la température et l'humidité étaient contrôlées.

Deux conditions de séchage ont été retenues :

* un séchage lent à partir des conditions de température et d'humidité relative de l'air de l'enceinte de 20°C et 55 % respectivement ;
* un séchage rapide à partir des conditions de 20°C et 17 %.

Les éprouvettes étaient sorties à intervalle de temps régulier et immédiatement soumises à la traction jusqu'à rupture afin de représenter les conditions obtenues lors des étapes successives de séchage.

Après essai, on effectue immédiatement une pesée suivie d'une dessication à 105°C et d'une seconde pesée afin d'en déterminer le taux moyen d'humidité au moment de la rupture.

III - RESULTATS ET DISCUSSION

L'ensemble des résultats expérimentaux a permis d'étudier :

* La possibilité et les limites d'application de la mécanique linéaire des ruptures aux problèmes de fissuration par séchage et de rupture à l'état stable.
* Les relations entre le taux d'humidité moyen dans un échantillon à l'état instable et la ténacité.
* L'influence de la vitesse de chargement à rupture sur la contrainte critique d'éprouvettes fissurées lors d'essais de séchage ou de rupture par charge extérieure.
* L'influence d'une précontrainte sur la vitesse de séchage et la contrainte à rupture.

Lorsqu'on examine la courbe charge-ouverture de fissure d'une éprouvette de mécanique de rupture constituée de bois sec, celle-ci présente un faible écart par rapport à la linéarité dans le domaine des charges les plus élevées. La mécanique linéaire des ruptures pour les matériaux orthotropes peut s'appliquer sans difficulté [6].

Lorsque le taux d'humidité augmente, l'écart à la linéarité croît et l'application de la mécanique linéaire des ruptures est plus problématique, notamment si cet écart dépasse 5 %.

Dans ce cas, on peut se ramener à la mécanique linéaire des ruptures en modifiant la contrainte critique σ_c qui sert à calculer le facteur d'intensité de contrainte K_{IC}.

$$K_{IC} = \sigma \sqrt{a} \quad f\left(\frac{a}{w}\right) \qquad (1)$$

Le facteur géométrique $f\left(\frac{a}{w}\right)$ est donné pour des éprouvettes SENT prélevées dans le système R.T par SCHNIEWIND et LYON [7] comme étant égal à

$$f\left(\frac{a}{w}\right) = 1{,}99 - 0{,}41\left(\frac{a}{w}\right) + 18{,}7\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 34{,}48\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 53{,}85\left(\frac{a}{w}\right)^4 \qquad (2)$$

"a" représente la longueur du défaut introduit et "w" la largeur de l'échantillon.

La contrainte critique réelle de rupture σ_c est définie comme la contrainte au moment de l'amorçage d'une petite microfissure en fond d'entaille. A l'aide de jauges pelliculaires en carbone, nous avons pu mettre en évidence que cet instant était confondu avec le moment où la charge atteint son maximum.

Pour se ramener au cas de la mécanique linéaire des ruptures, cette contrainte critique réelle est remplacée par une contrainte critique équivalente σ_c^{eq}, telle que l'énergie dispensée dans un diagramme charge-ouverture de fissure linéaire soit équivalente à l'énergie dispensée dans un diagramme charge-ouverture de fissure non linéaire.

La ténacité du bois peut donc être déterminée dans une large plage d'humidité en utilisant le même critère de rupture, celui de l'énergie équivalente ; on obtient ainsi le paramètre K_{IC}^{eq}.

$$K_{IC}^{eq} = \sigma_e^{eq} \sqrt{a}\, f\left(\frac{a}{w}\right) \qquad (3)$$

L'évolution de ce paramètre est reportée sur la figure 3, ainsi que celui du pseudo-facteur d'intensité de contrainte critique calculé avec la contrainte critique réelle.

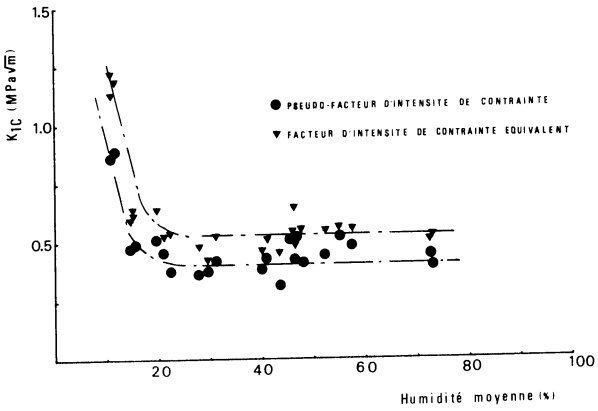


FIGURE 3

Comparaison des évolutions du facteur d'intensité de contrainte critique équivalent et du pseudo-facteur d'intensité de contrainte critique vis-à-vis du taux d'humidité à l'état stable

On remarque que les 2 courbes ont une allure similaire et sont très proches l'une de l'autre. La dispersion des résultats liée à la variabilité naturelle du bois justifie pleinement l'approximation proposée.

LA TENACITE D'UN BOIS DONT LE TAUX D'HUMIDITE EST STABLE DECROIT DONC AVEC LE TAUX D'HUMIDITE JUSQU'A DES VALEURS VOISINES DE 30 %. Cette valeur est celle du point de saturation des fibres. Pour des valeurs supérieures, la ténacité est constante.

Ce comportement est similaire à celui des autres propriétés mécaniques du bois.

Lorsque les essais de rupture sont effectués sur des échantillons à l'état instable, on constate que la contrainte critique diminue avec la décroissance du taux moyen d'humidité des échantillons à partir d'une valeur beaucoup plus élevée que le point de saturation de 30 % soit environ 60 %. figure 4.

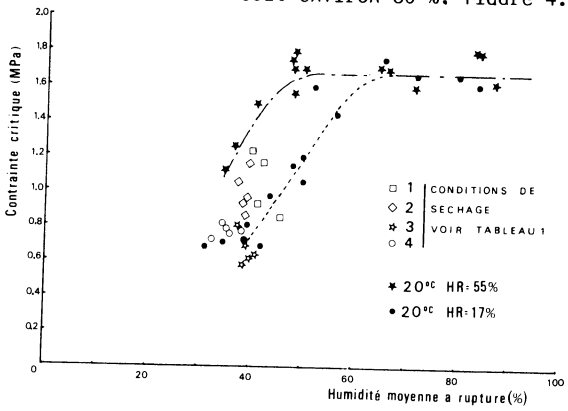


FIGURE 4

Mise en évidence de l'influence de l'état instable sur la contrainte critique en rupture par charge extérieure (• ✲), comparaison avec les valeurs des ruptures par charge de séchage (□ ◇ ✲ ○)

LE COMPORTEMENT A L'ETAT INSTABLE EST DONC INVERSE DE CELUI A L'ETAT STABLE.

L'utilisation du taux moyen d'humidité permet de faire la pondération entre la ténacité d'un bois sec qui constitue les parties externes de l'éprouvette dont la valeur de la contrainte critique est deux fois supérieure à celle d'un bois vert qui en constitue l'intérieur.

L'utilisation d'une simple règle des mélanges, faisant appel à la variation de la ténacité en fonction du taux d'humidité à l'état stable ne parvient pas à justifier le phénomène observé [8].

En outre, il ne peut être fait état que la rupture d'un échantillon de bois au taux d'humidité instable s'amorcerait dans la région centrale encore à l'état vert. On constate, en effet, expérimentalement, que les fissures apparaissent dans les régions les plus sèches.

La diminution notable de la contrainte critique à l'état instable ne peut s'expliquer que par la présence de contraintes internes engendrées par l'opération de séchage. De plus, il convient d'invoquer la forte sensibilité au fluage du bois à l'état instable.

Les expériences permettant de déterminer la contrainte critique de rupture **LORS DU SECHAGE** ont permis de montrer que, figure 4 :

* **LE TAUX D'HUMIDITE MOYEN AU MOMENT DE LA RUPTURE EST TOUJOURS SUPERIEUR AU POINT DE SATURATION DES FIBRES**
* **LES VALEURS DES CONTRAINTES CRITIQUES SONT SENSIBLEMENT IDENTIQUES A CELLES OBSERVEES LORS DES ESSAIS DE RUPTURE PAR CHARGE EXTERIEURE A L'ETAT INSTABLE A TAUX D'HUMIDITE MOYEN IDENTIQUE.**

La première remarque suggère qu'au moment de la rupture catastrophique, l'intérieur de l'échantillon est encore à l'état vert.

La seconde remarque porte sur le mode de sollicitation. En effet, la vitesse de chargement au cours du séchage est de l'ordre de 0,1 à 5 N/mn alors que par chargement extérieur, on obtient des vitesses de chargement de l'ordre de 200 à 300 N/mn, la vitesse de chargement étant définie par la pente de la courbe charge-temps au moment de la rupture. En raison du comportement viscoélastique du bois, il convient de vérifier l'influence de la vitesse de chargement de manière à s'assurer que l'égalité des contraintes critiques entre le chargement extérieur et le chargement par contrainte de séchage n'est pas affectée par le mode de sollicitation.

Pour ce faire, nous avons réalisé une série d'expériences sur des échantillons à l'état vert dans une plage de vitesse de chargement comprise entre 10 et 1000 N/mn. On constate une faible sensibilité de la contrainte critique à la vitesse de chargement.

Pour l'ensemble des essais de ruptures, les vitesses de chargement ont varié entre 0,1 et 300 N/mn et nous concluons que **LA VITESSE DE CHARGEMENT N'A PAS D'INFLUENCE SIGNIFICATIVE SUR LA VALEUR DE LA CONTRAINTE CRITIQUE ET CECI, QUEL QUE SOIT L'ETAT DES ECHANTILLONS.**

En outre, lors des essais de rupture par contrainte de séchage, l'éprouvette se trouve pratiquement dès le début de l'essai sous contrainte et reste ainsi pendant toute la durée de l'essai, à l'inverse des échantillons à tester à l'état instable par charge extérieure, qui ont séché librement.

L'étude de l'influence d'une précontrainte sur la contrainte de rupture a été menée expérimentalement sur des éprouvettes lisses et de faible épaisseur (2 mm). Une précontrainte variant entre 5 % et 80 % de la contrainte ultime du matériau a été appliquée aux échantillons à l'état vert. Il apparaît que la valeur de la précontrainte a peu d'influence sur la valeur de la contrainte critique, ainsi que sur la vitesse de séchage notée $\dot{H}$ et en particulier pour les faibles vitesses de séchage, figure 5 et figure 6.

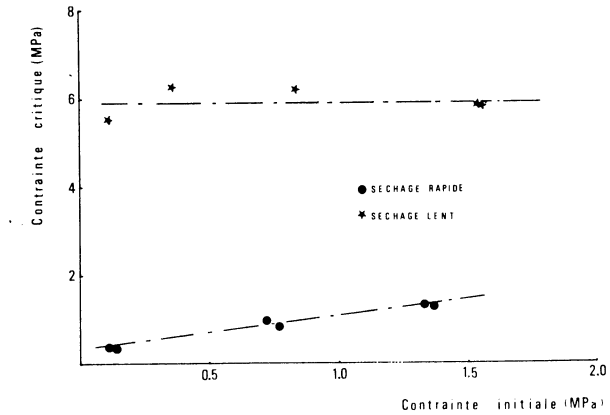


FIGURE 5
Mise en évidence de la faible influence
d'une précontrainte avant séchage sur la contrainte ultime

Il résulte de cette dernière étude expérimentale, que **LA VALEUR DE LA CONTRAINTE CRITIQUE D'ECHANTILLONS ROMPUS A L'ETAT INSTABLE N'EST PAS AFFECTEE PAR UN PHENOMENE MECANOSORPTIF.** De plus, l'effet mémoire invoqué par TAKAMURA[2] ne semble pas non plus à prendre en compte.

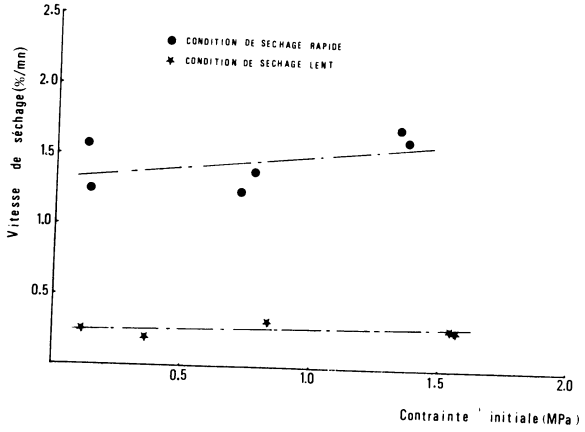


FIGURE 6
Mise en évidence de la faible influence d'une précontrainte avant séchage sur la vitesse de séchage

IV - MODELISATION EMPIRIQUE

Afin de prédire la variation de la contrainte critique avec le taux d'humidité moyen à l'état instable, nous proposons un modèle empirique basé sur la composante de fluage de l'ouverture critique de fissure.

En effet, l'écartement critique de fissure peut être divisé en deux parties: une composante élastique linéaire δ_{el} et une composante non linéaire δ_{nl}, de sorte que :

$$\delta_c = \delta_{el} + \delta_{nl} \qquad (4)$$

avec δ_c l'ouverture critique de la fissure.

Nous avons remarqué expérimentalement que le rapport $\frac{\delta_{nl}}{\delta_c}$ est une constante quel que soit l'état du bois, stable ou instable, figure 7.

$$\frac{\delta_{nl}}{\delta_c} = k \qquad (5)$$

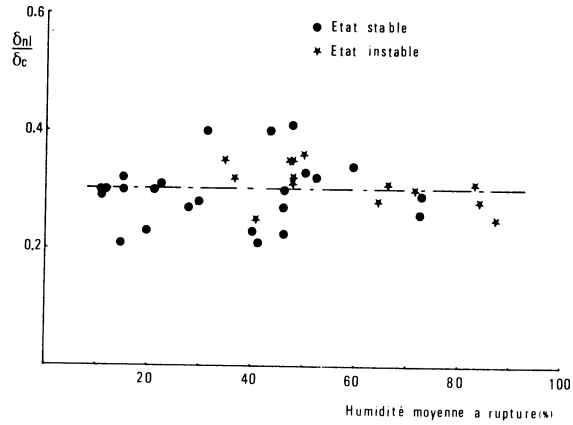


FIGURE 7
Evolution constante du rapport $\frac{\delta_{nl}}{\delta_c}$ en fonction du taux d'humidité
Etat stable et état instable

Dans notre cas, nous avons k = 0,3. Cette valeur peut être considérée comme une caractéristique intrinsèque du matériau.

La composante élastique de l'ouverture est aisément calculable à partir de la relation

$$\delta_{el} = \frac{4\, a\, \sigma\, e}{E^*}\; g\left(\frac{a}{w}\right) \qquad (6)$$

avec $$g\left(\frac{a}{w}\right) = \frac{1{,}46 + 3{,}42\left(1 - \cos\left(\frac{\pi a}{2w}\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi a}{2w}\right)}$$

E^* est la rigidité équivalente du bois, elle dépend du taux d'humidité et des valeurs des coefficients δ_{ij}, elle tient compte de l'orthotropie du matériau

σ_c est la contrainte critique

a est la longueur de défaut

La composante non linéaire peut être exprimée de manière simple par la relation

$$\delta_{nl} = \beta \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_c^{eq}}\right)^n \qquad (7)$$

avec σ_c^{eq} est la contrainte critique à l'état stable d'un échantillon au même taux d'humidité. Cette valeur est donnée par la méthode de l'énergie équivalente proposée au § III, figure 3

n est une constante déterminée et égale à 5

β est un coefficient qui dépend du gradient d'humidité et du taux d'humidité

Les deux relations empiriques (5) et (7) conduisent, en tenant compte des relations (4) et (6), à une formulation de la contrainte critique de rupture à l'état instable de la forme

$$\sigma_c = \sqrt[4]{\frac{4ka}{1-k}\, g\left(\frac{a}{w}\right) \frac{\left(\sigma_c^{eq}\right)^5}{\beta E^*}} \qquad (8)$$

ou encore en tenant compte de (3)

$$\sigma_c = \alpha \,.\, h\left(\frac{a}{w}\right) \times \sqrt[4]{\frac{K_{IC}^{5eq}}{\beta E^*}} \qquad (9)$$

avec $$\alpha = \sqrt[4]{\frac{4k}{1-k}} = 1{,}144 \qquad (k = 0{,}3)$$

$$h\left(\frac{a}{w}\right) = \left(a^{-3/2} \times \frac{g\left(\frac{a}{w}\right)}{f^5\left(\frac{a}{w}\right)}\right)^{1/4}$$

$$a = 6,\ \left(\frac{a}{w}\right) = 0{,}3 \qquad h\left(\frac{a}{w}\right) = 0{,}15588$$

La relation ainsi formulée permet, en tenant compte de la géométrie de l'éprouvette, de calculer la valeur de la contrainte critique à l'état instable et à un taux d'humidité donné.

Il reste néanmoins à relier la valeur du paramètre β à la complaisance de fluage du bois. Cette étude n'a pas été entreprise.

V - CONCLUSION

La mesure de la ténacité du bois à l'état vert présentant un comportement non linéaire peut être déterminée à l'aide de la mécanique linéaire des ruptures par l'intermédiaire de la méthode de l'énergie équivalente.

La fissuration du bois au cours du séchage est un phénomène qui tire son origine du gradient d'humidité à l'intérieur du matériau. La ténacité à l'état instable est nettement plus faible qu'à l'état stable.

Les phénomènes de mécanosorption et de mémoire ne paraissent pas de manière significative influencer le processus de rupture par séchage.

Un modèle empirique permet d'envisager la détermination de la contrainte critique à l'état instable en fonction de la valeur de la ténacité à l'état stable.

Nous remercions le Comité d'Etude sur la Formation des Ingénieurs (CEFI) et le Centre Technique Forestier Tropical (CTFT) pour l'aide à la réalisation qu'ils ont apportée à ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

1 GUITARD D., TCHANGA, BREMOND
Contribution à l'analyse des contraintes internes dans le bois résultant d'un gradient d'humidité
Ecole Nationale Supérieure Polytechnique - Yaoundi (1982)

2 TAKAMURA T.
On the memory effect of wood during drying Part I, II, III, IV
Mokuzai Gakkashi - Vol. 16 n° 3 (1970) - Vol. 18 n° 1 (1972)

3 SALES Ch.
Contribution à l'analyse des contraintes de séchage dans le bois.
Thèse de Docteur Ingénieur - INPL Nancy (1984)

4 Mac MILLEN
Stresses in wood during drying.
Forest products laboratory - US departement of Agriculture
Madison Reports (1952)

5 NISCHIO Shigen
Estimation of drying stresses in wood by cup method.
Mokuzai Gakkashi - Vol. 22 n° 11 p. 626 - 631 (1976)

6 TRIBOULOT P.
Application de la mécanique de la rupture aux bois massifs considérés comme matériaux de construction.
Thèse de Docteur Ingénieur - UTC de Compiègne (1981)

7 SCHNIEWIND et LYON
A fracture mechanics approach to the tensile strengh perpendicular to grain of dimension lumber.
Wood Sciences and Technology Vol. 7 - pp. 45-59 (1973)

8 SOBUE N., BAJOLET D., PLUVINAGE G.
Effect of drying stresses on fracture thoughness of wood.
Mokuzai Gakkashi - à paraître

9 OKAMURA H.
Introduction to fracture mechanics.
Baihukan, p. 217 (1981).

Liste des participants au 19e Colloque du G.F.R.

AGASSANT J.-F., Ecole des Mines, Valbonne.
ALLALI A., Université de Metz.
AVALE M., C.T.B.A., Paris.
BAJOLET D., Université de Metz.
BEGE P., C.T.B.A., Paris.
BERADAI Chedli, LPMM, Metz.
BERVEILLER Marcel, LPMM, Metz.
BILLAC Marianne, C.T.B.A., Paris.
BISMUTH William, C.N.R.S., Marseille.
BOEHLER Jean-Paul, I.M.G., Saint-Martin d'Hères.
BORDONNE Pierre, C.T.F.T., Nogent.
BOULANGER Ph., Université libre de Bruxelles.
BOURGOIN Daniel, C.N.R.S., Paris.
BOUTON Jacques, RHEO, Evry.
BROUWER R., Université libre de Bruxelles.
BRIANT Jean, Institut Français du Pétrole, Rueil.
BUCHWALTER Hervé, MATRA-ESPACE, Paris.
BUCUR Voichita, C.N.R.F. Qualité Bois, Nancy.
BUNSELL A.R., Ecole Nationale des Mines de Paris.
CANOVA G., Université de Metz.
CARDON Albert, Université Bruxelles (VVB).
CASTETS Christine, Centre de Recherche de Talence, Cellulose du Pin.
CHASSET René, I.R.A.P., Le Mans.
CHETOUI Saïd, CERMaC, ENPC, Paris.
CORDIE Paul, Saint-Gobain Recherche, Paris.
CRESSELY Robert, Faculté des Sciences de Metz.
d'ALMEIDA A.G., Université de Bordeaux 1.
DATTA S.K., University of Colorado, Boulder, U.S.A.
DECRUPPE Jean-Paul, Ecole Nationale de Metz.
DENIS Sabine, Laboratoire de Métallurgie.
DOGUI A., Laboratoire de Mécanique des Solides, E.C. Lyon.
DOUAU Dominique, Laboratoire d'Acoustique musicale, Paris.
DUDZINSKI D., Université de Metz.
DUPERRAY Bernard, METRAVIB, Lyon.
EL AOUFI, Institut de Mécanique de Grenoble.
EL AMRI FOUAC, ENSEM-LEMTA, Nancy.
FESQUET François, METRAVIB, Lyon.
FELIX Bernard, C.T.B.A., Paris.
FONTAINE Bernard, VIBRACHOC, Paris.
FOURE Bernard, C.E.B.T.P., Paris.
FRELAT J., Ecole Polytechnique, Palaiseau.
FRESSENGEAS G., Université de Metz.
FRIAS M., Université de Lisbonne.
GEIGER Michel, UPVM, Créteil.
GERALD J., Elf Aquitaine, Paris.
GILETTA F., E.S.E.M., Orléans.
GILIBERT Yvon, E.N.S.T.A., Paris.
GOLCHEH Joseph, E.N.T.P.E., Vaux-en-Velin.
GROLIER Jacques, Université d'Orléans.
GUITARD Daniel, ENSEM-LEMTA, Nancy.
HADJ HAMOU Abdellatif, C.T.B.A., Paris.
HAUDIN Jean-Marc, Ecole des Mines CEMEF, Valbonne.
HIEL C., Université libre de Bruxelles,
HOCKART R., Faculté des Sciences, Metz.
HOLLEBECQ Louis-Jean, CERILH, Paris.
HUET Christian, CERMaC, ENPC, Paris.

JAYAPUTRA A., Institut Technologique de Bandung.
JODIN P., Université de Metz.
JOLY Maurice, Paris.
KOKOCINSKI W., Agricultural University, Poznan, Pologne.
KRIZ R.D., National Bureau of Standards, Boulder, U.S.A.
LAQUECHE H., Lab. de Génie Civil, Université de Bordeaux 1.
LASSALLE Annick, INSA Toulouse.
LAUNAY J., E.S.E.M., Orléans.
LEDBETTER H.M., National Bureau of Standards, Boulder, Colorado, U.S.A.
LE GOVIC Claude, C.T.B.A., Paris.
LELIEVRE Jean-Claude, Biorhéologie CNRS UA343, Paris.
MATHIA Thomas, E.C.L., Ecully.
MAYNE Georges, Université de Bruxelles.
MOHKAM M., E.N.T.P.E., Vaulx-en-Velin.
MOISSAING S., Lab. de Génie Civil, Bordeaux.
MOLINARI A., Université de Metz.
MORANÇAIS Jean-Luc, L'OREAL, Paris.
MUDRY M., E.S.E.M., Orléans.
NAVARD P., Ecole des Mines, Valbonne.
NIETO J.-L., E.S.E.M., Orléans.
PAPO Andriano, Universita di Udine.
PERRENOT Gilles, Laboratoire de Sciences des Matériaux de Reims.
PIAU Jean-Michel, Institut de Mécanique, Grenoble.
PLENARD Elisabeth, Université Paris 10.
PLUVINAGE G., Université de Metz.
POLISZKO S., Agricultural University, Poznan, Pologne.
PONSOT B., Ecole Nationale des Mines de Paris.
RACLIN Jacques, I.M.G., Grenoble.
RACHEL P., Lab. de Génie Civil, Bordeaux«
RACZKOWSKI J., Agricultural University, Poznan, Pologne.
RADENKOVIC Dragos, L.M.S. (Ecole Polytechnique), Palaiseau.
RAMAHEFARISON Epiphane, Ecole des Mines, Paris.
RAZAFINDRAKITO Jean-Charles, Université de Bordeaux, L.G.C.
RENAULT Daniel, ENSAIS.
RICHEMOND Stéphane, CERMaC, ENPC, Paris.
ROBINET J.-C., Université de Lille et ENPC Paris.
ROTH Jean-Claude, LEMTA, Nancy.
SALES C., C.T.F.T., Nogent-sur-Marne.
SHAAN Raad, ENTPE, Vaux-en-Velin.
SHAHROUR I., Université de Lille et ENPC, Paris.
SIDOROFF F., Ecole Centrale de Lyon, Ecully.
SIGNORET Catherine, Lab. Méc. Physique, Université de Bordeaux 1.
SOBUE N., Université de Metz.
THIERCELIN M., Dowell Schlumberger, Saint-Etienne.
TORRENTI J.-M., E.N.T.P.E., Vaulx-en-Velin.
TRENARD Y., C.T.B.A., Paris.
TRENY Claire, METRAVIB, Lyon.
TRUCHASSON Christian, IMF Toulouse.
VALENTIN Gérard, IUT Génie Civil, Université Bordeaux 1.
VERGNE Alain, Laboratoire de Génie Civil, Université de Clermont-Ferrand.
VINCENT M., Ecole des Mines, Valbonne.
WEBER Jean-Daniel, Faculté des Sciences de Metz.
WYDRO T., Faculté des Sciences, Metz.

LES COLLOQUES ANNUELS DU GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE (1965-1986)

1	- Rhéologie des systèmes à deux phases	1965
2	- Aspects énergétiques en Rhéologie	1966
3	- Progrès récents des effets du 2ème ordre	1967
4	- Rhéologie en relation avec la structure	1968
5	- Comportements mécaniques des matériaux composites	1969
6	- Influence de la température et de la pression sur les comportements rhéologiques	1970
6bis	- Rhéologie et hydrotechnique	1970
7	- Viscoplasticité	1971
8	- Rhéologie des bétons	1973
9	- Phénomènes de surface	1974
10	- Influence de la température sur les comportements rhéologiques	1975
11	- Rhéologie des corps mous	1976
12	- Thermodynamique des comportements rhéologiques	1977
13	- Aspects rhéologiques de la mécanique de la rupture	1978
14	- Rhéologie des couches minces	1979
15	- Comportements rhéologiques et structure des matériaux	1980
16	- Applications de la Rhéologie aux problèmes de fabrication industrielle	1981
17	- Comportements rhéologiques sous sollicitations rapides ou dynamiques	1982
18	- Méthodes et appareils de mesures rhéologiques	1983
19	- Rhéologie des matériaux anisotropes	1984
20	- Vingt ans de Groupe Français de Rhéologie : Progrès récents	1985
21	- Rhéologie des fluides hétérogènes	1986

Renseignements sur conditions d'obtention des Comptes Rendus :

Prof. C. HUET
Cahiers du Groupe Français de Rhéologie

CERAM-ENPC
La Courtine B.P. 105
F-93194 NOISY-LE-GRAND Cedex France
Tél. : (1) 43.04.40.98

Le Groupe Français de Rhéologie

La Rhéologie est la science des DEFORMATIONS et ECOULEMENTS de la matière, des CONTRAINTES qui en résultent et des EFFORTS qu'il faut lui appliquer pour les obtenir.

UNIVERSELLE, on la rencontre dans tous les domaines de l'activité humaine et ses applications vont de la mise en forme des produits industriels quel qu'en soit le matériau, aux comportements de la matière vivante, en passant par la tenue des pneumatiques ou la durabilité des constructions.

INTERDISCIPLINAIRE, elle fait appel à la MECANIQUE, à la PHYSIQUE, à la CHIMIE, à la BIOLOGIE, qui lui fournissent ses instruments de base, et se montre utile à chacune de ces disciplines.

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF à vocation purement scientifique, fondée en 1964 et régie par la loi de 1901, le GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE a pour OBJECTIFS, de contribuer au DEVELOPPEMENT des études et recherches relatives à la Rhéologie, et de favoriser la DIFFUSION ou le TRANSFERT des progrès accomplis dans ses diverses branches.

Dans ce but, le Groupe Français de Rhéologie

- organise des REUNIONS TRIMESTRIELLES, où les chercheurs et les industriels peuvent présenter et discuter leurs résultats ou leurs préoccupations ;
- entretient des relations avec le COMITE INTERNATIONAL DE RHEOLOGIE et les SOCIETES de RHEOLOGIE d'autres pays ;
- organise un COLLOQUE NATIONAL ANNUEL dont il édite ou fait éditer les Comptes Rendus ;
- édite des CAHIERS consacrés aux exposés scientifiques (une cinquantaine de numéros édités à ce jour), et un BULLETIN consacré aux informations courantes ;
- contribue à la clarification du langage pour l'établissement d'un DICTIONNAIRE ;
- etc.,

Si cette activité vous intéresse et si vous souhaitez devenir membre ou obtenir de plus amples renseignements, écrivez à l'adresse ci-dessous :

GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE
Secrétariat Général
C.E.B.T.P.
12, rue Brancion
75737 PARIS CEDEX 15

Anciens Présidents du G.F.R. :

J. MANDEL (Président fondateur, 1964-1967)
M. JOLY (1967-1970)
B. PERSOZ (1970-1973)
P. HABIB (1973-1976)
R. COURTEL (1976-1979)
C. HUET (1979-1983)

Président actuel : J.-D. WEBER (1983-)

Association régie par la loi du 1.7.1901 J.O. du 30.7.1964
CCP PARIS 8045-90 K

24, rue Négreneys - 31200 TOULOUSE
Dépôt légal, n° 2440 - Août 1986